



UNIVERSITAS INDONESIA

**ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES DENGAN KOREKSI PADA
BATAS DAN ATURAN MODIFIKASINYA**

SKRIPSI

YOLA FOWELL

1106050582

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPOK

JULI 2015



UNIVERSITAS INDONESIA

**ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES DENGAN KOREKSI PADA
BATAS DAN ATURAN MODIFIKASINYA**

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana**

YOLA FOWELL

1106050582

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

DEPOK

JULI 2015

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Yola Fowell

NPM : 1106050582

Tanda Tangan :

Tanggal : 2 Juli 2015

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Yola Fowell
NPM : 1106050582
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Aturan Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi
pada Batas dan Aturan Modifikasinya

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing 1 : Dra. Bevina Desjwiandra H, M.Sc., Ph.D. ()
Pembimbing 2 : Drs. Gatot Fatwanto Hertono, M.Sc., Ph.D. ()
Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami ()
Penguji : Dr. rer. nat. Hendri Murfi, S.Si., M.Kom ()
Penguji : Dr. Sri Mardiyati, M.Kom ()

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 9 Juli 2015

KATA PENGANTAR

Pertama-tama saya ucapkan puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, yang telah memberikan anugerah dan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang turut berperan dan mendukung selama pembuatan tugas akhir ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Ibu Dra. Bevina Desjwiandra H, M.Sc., Ph.D. dan Bapak Drs. Gatot Fatwanto Hertono, M.Sc., Ph.D. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, tenaga, waktu dan perhatiannya kepada penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini.
2. Ibu Dra. Siti Nurrohmah, M.Si selaku pembimbing akademik yang telah membimbing penulis dalam perkuliahan di Departemen Matematika UI.
3. Seluruh staf pengajar Departemen Matematika UI yang telah memberikan ilmu, nasihat, dan inspirasi kepada penulis.
4. Seluruh staf dan karyawan Departemen Matematika UI atas semua bantuan yang telah diberikan.
5. Orang tua penulis beserta keluarga yang telah memberikan dukungan dalam mengikuti perkuliahan di Departemen Matematika UI.
6. Moch. Galih Primantara yang telah memberikan waktu, tenaga, dukungan, dan motivasi dalam menjalani perkuliahan dan kehidupan sehari-hari.
7. Teman-teman penulis yang telah memberikan dukungan dan motivasi, terutama Cristin, Dian, Fany, Meidi, Zulfany, Ajeng, Betzy, Jihan, Siwi, Vina, Adi, Bayu, Bona, Febrian, Jona, Maulana, Muji, Ridho, Sesha, Yoshua, kak Barry, dan kak Marcell.

Akhir kata, penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu penulis terbuka terhadap segala macam bentuk saran dan kritik mengenai topik tugas akhir ini.

Terima kasih.

Yola Fowell

2015

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yola Fowell
NPM : 1106050582
Program Studi : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Aturan Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas dan Aturan Modifikasinya

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini, Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*data base*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta. Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 2 Juli 2015

Yang menyatakan

(Yola Fowell)

ABSTRAK

Nama : Yola Fowell
Program Studi : Matematika
Judul : Aturan Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas dan Aturan Modifikasinya

Aturan komposit Newton-Cotes merupakan suatu metode numerik yang mengaproksimasi integral tentu dengan hasil aproksimasi yang sangat akurat ketika integrand merupakan fungsi yang mulus dan periodik. Pada skripsi ini, dibahas mengenai aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas. Aturan tersebut merupakan pengembangan dari aturan komposit Newton-Cotes. Kelebihan dari aturan ini adalah hasil aproksimasi yang sangat akurat ketika integrand merupakan fungsi yang mulus tetapi tidak perlu periodik. Selanjutnya, dengan modifikasi sederhana dari aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas, bisa didapatkan suatu aturan modifikasi kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas. Untuk kasus tertentu, implementasi pada beberapa fungsi tes yang berosilasi tinggi, menunjukkan bahwa aturan ini mengaproksimasi lebih baik daripada aturan sebelumnya.

Kata kunci : Aturan Komposit Newton-Cotes, metode *centered finite difference*, koefisien koreksi
xiv + 102 halaman : 87 tabel
Daftar referensi : 9 (1935-2015)

ABSTRACT

Name : Yola Fowell
Program : Mathematics
Title : Newton-Cotes Quadrature with End Corrections and its Modification

Composite Newton-Cotes is a class of numerical methods which approximate definite integral with highly accurate approximation result when the integrand is a smooth and periodic function. In this mini thesis, Newton-Cotes Quadrature with End Corrections and its Modification is being investigated. It is derived from Composite Newton-Cotes. The benefit of this rule is highly accurate approximation result when the integrand is a smooth function but doesn't need to be periodic function. Furthermore, with a simple modification from Newton-Cotes Quadrature with end corrections, modified Newton-Cotes Quadrature with end corrections is obtained. For some cases, implementation to some test functions that highly oscillated shows that this rule approximates better than the predecessor.

Keywords : Composite Newton-Cotes, centered finite difference, correction coefficients
xiv + 102 pages : 87 tables
bibliography : 9 (1935-2015)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI ILMIAH	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	x
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Pembatasan Masalah	2
1.4 Metodologi Penelitian	2
1.5 Tujuan Penelitian	2
2 LANDASAN TEORI	3
2.1 Nilai Bernoulli	3
2.2 Aturan Komposit Newton-Cotes	6
2.3 Metode Aproksimasi <i>Finite Difference</i>	9
2.4 Koefisien Aproksimasi <i>Finite Difference</i>	11
2.4.1 Metode <i>Undetermined Coefficients</i>	11
2.4.2 Metode lain	16
2.5 Metode <i>Centered Finite Difference</i>	17

3	ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES DENGAN KOREKSI PADA BATAS DAN ATURAN MODIFIKASINYA	22
3.1	Aturan Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas	22
3.2	Penentuan Koefisien Koreksi	25
3.3	Penentuan Batas Koefisien Koreksi	33
3.4	Aturan Modifikasi Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas	37
4	IMPLEMENTASI ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES DAN ATURAN MODIFIKASINYA	41
4.1	Nilai Koefisien Koreksi $\beta_k^{(m)}$ dan $\tilde{\beta}_k^{(m)}$	42
4.1.1	Nilai $\beta_k^{(m)}$	42
4.1.2	Nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$	53
4.2	Implementasi Aturan Komposit Newton-Cotes	58
4.3	Implementasi Aturan Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas . .	59
4.4	Implementasi Aturan Modifikasi Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas	68
5	PENUTUP	87
5.1	Kesimpulan	87
5.2	Saran	87
	DAFTAR PUSTAKA	89
	LAMPIRAN	90

DAFTAR TABEL

4.1	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(4)}$	43
4.2	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(9)}$	43
4.3	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(9)}$	43
4.4	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(14)}$	44
4.5	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(14)}$	45
4.6	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(14)}$	46
4.7	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(19)}$	47
4.8	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(19)}$	48
4.9	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(19)}$	49
4.10	Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(19)}$	50
4.11	Nilai-nilai $\beta_k^{(4)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	50
4.12	Nilai-nilai $\beta_k^{(9)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	51
4.13	Nilai-nilai $\beta_k^{(14)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	51
4.14	Nilai-nilai $\beta_k^{(19)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	52
4.15	(t=2) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(4)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	53
4.16	(t=2) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(9)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	54
4.17	(t=2) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(14)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	54
4.18	(t=2) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	55
4.19	(t=3) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(4)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	56
4.20	(t=3) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(9)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	56
4.21	(t=3) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(14)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	57
4.22	(t=3) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson . .	58
4.23	Relative error aproksimasi dari $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$	59
4.24	Relative error aproksimasi dari $\int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$	59
4.25	Relative error aproksimasi dari $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$ menggunakan aturan Trapezoidal	60
4.26	Relative error aproksimasi dari $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$ menggunakan aturan Midpoint	60
4.27	Relative error aproksimasi dari $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$ menggunakan aturan Simpson	60
4.28	Relative error aproksimasi dari $\int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$ menggunakan aturan Trapezoidal	61

4.29	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$ menggunakan aturan Midpoint	61
4.30	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$ menggunakan aturan Simpson	61
4.31	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 300$ menggunakan aturan Trapezoidal	62
4.32	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 300$ menggunakan aturan Midpoint	62
4.33	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 300$ menggunakan aturan Simpson	63
4.34	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 500$ menggunakan aturan Trapezoidal	64
4.35	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 500$ menggunakan aturan Midpoint	64
4.36	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 500$ menggunakan aturan Simpson	64
4.37	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 1000$ menggunakan aturan Trapezoidal	65
4.38	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 1000$ menggunakan aturan Midpoint	65
4.39	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 1000$ menggunakan aturan Simpson	65
4.40	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 3000$ menggunakan aturan Trapezoidal	66
4.41	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 3000$ menggunakan aturan Midpoint	66
4.42	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 3000$ menggunakan aturan Simpson	66
4.43	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 5000$ menggunakan aturan Trapezoidal	67
4.44	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 5000$ menggunakan aturan Midpoint	67
4.45	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 5000$ menggunakan aturan Simpson	67

4.46	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 10000$ menggunakan aturan Trapezoidal	68
4.47	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 10000$ menggunakan aturan Midpoint	68
4.48	<i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 10000$ menggunakan aturan Simpson	68
4.49	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 300$	69
4.50	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 300$	69
4.51	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 300$	69
4.52	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 500$	70
4.53	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 500$	70
4.54	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 500$	70
4.55	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 1000$	71
4.56	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 1000$	71
4.57	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 1000$	71
4.58	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 3000$	72
4.59	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 3000$	72
4.60	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 3000$	72
4.61	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 5000$	73
4.62	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 5000$	73

4.63	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 5000$	73
4.64	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 10000$	74
4.65	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 10000$	74
4.66	$(t = 2)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 10000$	74
4.67	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 300$	75
4.68	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 300$	75
4.69	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 300$	75
4.70	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 500$	76
4.71	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 500$	76
4.72	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 500$	76
4.73	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 1000$	77
4.74	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 1000$	77
4.75	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 1000$	77
4.76	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 3000$	78
4.77	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 3000$	78
4.78	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 3000$	78
4.79	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 5000$	79

4.80	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 5000$	79
4.81	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 5000$	79
4.82	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 10000$	80
4.83	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 10000$	80
4.84	$(t = 3)$ <i>Relative error</i> aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 10000$	80
4.85	Perbandingan hasil aproksimasi aturan modifikasi (t=2) dengan aturan koreksi batas	81
4.86	Perbandingan hasil aproksimasi aturan modifikasi (t=3) dengan aturan koreksi batas	84
4.87	Perbandingan hasil aproksimasi aturan modifikasi (t=3) dengan aturan koreksi batas (lanjutan)	85

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisa Numerik adalah suatu bidang ilmu dari matematika dan ilmu komputer, yang menciptakan, menganalisa, dan menerapkan algoritma dalam menyelesaikan masalah matematika secara numerik. Masalah tersebut biasanya berasal dari aplikasi aljabar, geometri, dan kalkulus. Dimulai dari tahun 1940-an, kemajuan dari teknologi komputer digital, menyebabkan terjadinya peningkatan dalam menggunakan model matematika yang akurat, realistis, dan kompleks. Analisa Numerik berperan penting dalam menyelesaikan masalah tersebut. Salah satu area dari Analisa Numerik adalah teori aproksimasi. (Atkinson, 2007)

Salah satu metode pada Analisa Numerik yang mengaproksimasi suatu integral tentu $\int_a^b f$ adalah aturan kuadratur Newton-Cotes. Beberapa bentuk khusus dari aturan kuadratur Newton-Cotes, adalah aturan Trapezoidal, aturan Simpson, dan aturan Midpoint. Aturan kuadratur Newton-Cotes menggunakan integral tentu dari polinomial interpolasi Lagrange $\int_a^b P_n$ sebagai nilai aproksimasi. Secara umum, aturan kuadratur Newton-Cotes kurang cocok diterapkan pada interval integrasi yang panjang. Selain itu, P_n menginterpolasi f pada titik-titik dengan interval yang berjarak sama. Hal tersebut mengakibatkan aturan kuadratur Newton-Cotes kurang cocok dalam menginterpolasi f yang berderajat tinggi, karena fungsi yang berderajat tinggi cenderung berosilasi. Jika aturan kuadratur Newton-Cotes diterapkan pada tiap subinterval yang sama panjang, maka metode tersebut dinamakan aturan komposit Newton-Cotes. Aturan komposit Newton-Cotes mengaproksimasi lebih baik dibandingkan aturan kuadratur Newton-Cotes. (Burden, 2011)

Aturan komposit Trapezoidal merupakan salah satu bentuk khusus dari aturan komposit Newton-Cotes. Dengan menggunakan formula penjumlahan Euler-Maclaurin dapat diperoleh suku *error* aproksimasi dari aturan komposit Trapezoidal. Dari suku *error* tersebut, dapat disimpulkan bahwa jika f mulus dan periodik, aturan komposit Trapezoidal konvergen secara *super-algebraic*. Kemudian, dari suku *error* tersebut juga dapat dikonstruksi suatu aturan yang mengaproksimasi $\int_a^b f$ dengan sangat akurat ketika f mulus tetapi tidak periodik. Aturan tersebut dinamakan dengan aturan Trapezoidal dengan koreksi pada batas. (Aguilar, 2015)

Karena kelebihan yang dimiliki oleh aturan Trapezoidal dengan koreksi pada batas, maka dalam skripsi ini akan dipelajari bentuk umum dari aturan tersebut, yaitu aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas. Konstruksi dari aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas menggunakan metode *centered finite difference*. Selain itu, dengan modifikasi sederhana pada metode *centered finite difference*, diperoleh aturan modifikasinya, yang dinamakan aturan modifikasi kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas.

1.2 Perumusan Masalah

1. Bagaimana mengkonstruksi aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas?
2. Bagaimana mengkonstruksi aturan modifikasi kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas?

1.3 Pembatasan Masalah

Kasus khusus dari aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas dan aturan modifikasinya yang akan dikaji pada skripsi ini hanya aturan Trapezoidal, aturan Midpoint, dan aturan Simpson.

1.4 Metodologi Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dan simulasi program.

1.5 Tujuan Penelitian

1. Membuat algoritma aproksimasi integral tentu dari aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas
2. Membuat algoritma aproksimasi integral tentu dari aturan modifikasi kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas
3. Mengimplementasikan kedua algoritma diatas dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB
4. Menganalisa hasil dari simulasi program.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini dibahas mengenai dasar-dasar teori yang akan digunakan pada Bab 3. Pada Subbab 2.1 diberikan definisi dari nilai Bernoulli. Kemudian, Subbab 2.2 membahas mengenai aturan komposit Newton-Cotes. Subbab 2.3 membahas mengenai metode aproksimasi *finite difference*. Selanjutnya, pada Subbab 2.4 dibahas mengenai dua metode untuk menentukan koefisien-koefisien dari aproksimasi *finite difference* tersebut. Terakhir, pada Subbab 2.5 dibahas mengenai metode *centered finite difference* yang merupakan kasus khusus dari metode aproksimasi *finite difference*.

2.1 Nilai Bernoulli

Materi pada subbab ini diambil dari (Stoer, 2007). Sebelum diberikan definisi dari nilai Bernoulli, diberikan terlebih dahulu definisi dari polinomial Bernoulli berikut ini.

Definisi 2.1.1. Polinomial Bernoulli $B_k(x)$ dengan $k = 1, 2, \dots$ adalah suatu polinomial, yang memenuhi 3 sifat berikut ini:

1. $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$,
2. $B'_{k+1}(x) = (k+1)B_k(x)$,
3. $B_{2l+1}(0) = B_{2l+1}(1) = 0$, untuk $l > 0$.

Kemudian, dari definisi polinomial Bernoulli diatas, bisa didapatkan akibat berikut ini.

Akibat 2.1.1. $B_k(x)$ berderajat k , dan koefisien dari suku pada derajatnya adalah 1.

Bukti. Untuk $k = 1$, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, sehingga $B_1(x)$ berderajat 1, dan koefisien dari suku pada derajatnya adalah 1.

Dimisalkan pernyataan

P_j : untuk $k = j$, $B_j(x)$ berderajat j , dan koefisien dari suku pada derajatnya adalah 1

adalah benar.

Karena pernyataan P_j benar, maka $B_j(x)$ memiliki bentuk

$$B_j(x) = x^j + c_{j-1}x^{j-1} + c_{j-2}x^{j-2} + \dots$$

Sehingga, dari definisi ke-2 polinomial Bernoulli, didapat

$$B'_{j+1}(x) = (j+1)B_j(x) = (j+1)x^j + (j+1)c_{j-1}x^{j-1} + (j+1)c_{j-2}x^{j-2} + \dots$$

Kemudian, dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan, didapat

$$B_{j+1}(x) = x^{j+1} + \frac{j+1}{j}c_{j-1}x^j + \frac{j+1}{j-1}c_{j-2}x^{j-1} + \dots$$

Maka, pernyataan

P_{j+1} : untuk $k = j + 1$, $B_{j+1}(x)$ berderajat $j+1$, dan koefisien dari suku pada derajatnya adalah 1

adalah benar. □

Berdasarkan definisi polinomial Bernoulli dan Akibat 2.1.1, bisa didapatkan bentuk eksplisit dari polinomial Bernoulli untuk nilai $k = 2, 3, \dots$, seperti yang akan ditunjukkan secara umum pada langkah-langkah berikut ini.

Langkah 1: Dari Akibat 2.1.1, $B_{2l-1}(x)$ bisa dinyatakan dalam bentuk

$$B_{2l-1}(x) = x^{2l-1} + c_{2l-2}x^{2l-2} + \dots + c_1x + c_0.$$

Dari persamaan diatas dan definisi ke-2 polinomial Bernoulli didapat

$$\begin{aligned} B'_{2l}(x) &= (2l)B_{2l-1}(x) = (2l)(x^{2l-1} + c_{2l-2}x^{2l-2} + \dots + c_1x + c_0) \\ &= 2lx^{2l-1} + 2lc_{2l-2}x^{2l-2} + \dots + 2lc_1x + 2lc_0. \end{aligned}$$

Sehingga didapat

$$B_{2l} = x^{2l} + \frac{2l}{2l-1}c_{2l-2}x^{2l-1} + \dots + lc_1x + 2lc_0x + c.$$

Langkah 2: Dari definisi ke-2 polinomial Bernoulli didapat

$$\begin{aligned} B'_{2l+1}(x) &= (2l+1)B_{2l}(x) = (2l+1)(x^{2l} + \frac{2l}{2l-1}c_{2l-2}x^{2l-1} + \dots + lc_1x + 2lc_0x + c) \\ &= (2l+1)x^{2l} + \frac{(2l+1)2l}{2l-1}c_{2l-2}x^{2l-1} + \dots + (2l+1)lc_1x + (2l+1)2lc_0x + (2l+1)c. \end{aligned}$$

Sehingga didapat

$$B_{2l+1}(x) = x^{2l+1} + \frac{2l+1}{2l-1}c_{2l-2}x^{2l} + \dots + (2l+1)cx + d.$$

Langkah 3: Sesuai dengan definisi ke-3 polinomial Bernoulli, dengan mensubstitusi $x = 0$ dan $x = 1$ pada persamaan diatas secara berturut-turut,

didapatkan

$$d = 0$$

dan

$$\frac{2l+1}{2l-1}c_{2l-2} + \cdots + (2l+1)c = 0.$$

Dengan menggunakan Langkah 1-3, secara berturut-turut bisa didapatkan polinomial Bernoulli untuk $k = 2, 3, \dots$ seperti yang diilustrasikan oleh contoh-contoh berikut ini.

Contoh 2.1.1. Dari definisi ke-2 polinomial Bernoulli diketahui $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Akan dicari $B_2(x)$ dan $B_3(x)$ dengan menggunakan langkah 1-3 diatas.

Langkah 1: Dari definisi ke-1 polinomial Bernoulli, $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Kemudian dari definisi ke-2 polinomial Bernoulli didapat $B'_2(x) = 2B_1(x) = 2(x - \frac{1}{2}) = 2x - 1$.

Sehingga didapat $B_2(x) = x^2 - x + c$.

Langkah 2: Dari definisi ke-2 polinomial Bernoulli didapat

$$B'_3(x) = 3B_2(x) = 3(x^2 - x + c) = 3x^2 - 3x + 3c. \text{ Sehingga didapat,}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3cx + d.$$

Langkah 3: Sesuai dengan definisi ke-3 polinomial Bernoulli, dengan mensubstitusi $x = 0$ dan $x = 1$ pada persamaan diatas secara berturut-turut,

didapatkan $d = 0$ dan $0 = 1 - \frac{3}{2} + 3c + 0$ atau $c = \frac{1}{6}$. Sehingga didapat

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \text{ dan } B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Contoh 2.1.2. Dari Contoh 2.1.1 diketahui $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Akan dicari

$B_4(x)$ dan $B_5(x)$ dengan menggunakan langkah 1-3 diatas.

Langkah 1: Dari Contoh 2.1.1 diketahui $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. Kemudian dari definisi ke-2 polinomial Bernoulli didapat

$$B'_4(x) = 4B_3(x) = 4(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x. \text{ Sehingga didapat}$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + c.$$

Langkah 2: Dari definisi ke-2 polinomial Bernoulli didapat

$$B'_5(x) = 5B_4(x) = 5(x^4 - 2x^3 + x^2 + c) = 5x^4 - 10x^3 + 5x^2 + 5c. \text{ Sehingga didapat,}$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 5cx + d.$$

Langkah 3: Sesuai dengan definisi ke-3 polinomial Bernoulli, dengan

mensubstitusi $x = 0$ dan $x = 1$ pada persamaan diatas secara berturut-turut,

didapatkan $d = 0$ dan $0 = 1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + 5c + 0$ atau $c = -\frac{1}{30}$. Sehingga didapat

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \text{ dan } B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

Terakhir, nilai Bernoulli B_k didefinisikan sebagai nilai $B_k(0)$.

2.2 Aturan Komposit Newton-Cotes

Pada subbab ini dibahas mengenai metode numerik dalam mengaproksimasi suatu integral tentu, yaitu aturan komposit kuadratur Newton-Cotes. Sebelumnya dibahas terlebih dahulu mengenai metode numerik yang mendasarinya, yaitu aturan kuadratur Newton-Cotes, seperti yang diberikan oleh Teorema 2.2.1 dibawah ini.

Teorema 2.2.1. Misal f adalah suatu fungsi dan $x_i = x_0 + ih$, untuk $i = 0, 1, \dots, n$, dengan $x_0 = a$, $x_n = b$ dan $h = \frac{b-a}{n}$. Aturan kuadratur Newton-Cotes adalah suatu kumpulan metode yang mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$, diantaranya adalah:

1. Aturan Trapezoidal

Jika $n = 1$ dan $f \in C^2[a, b]$, maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

2. Aturan Midpoint Jika $n = 1$ dan $f \in C^2[a, b]$, maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = hf\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + \frac{h^3}{24}f''(\xi)$$

3. Aturan Simpson Jika $n = 2$ dan $f \in C^4[a, b]$, maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

4. Aturan Simpson 3/8 Jika $n = 3$ dan $f \in C^4[a, b]$, maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$$

5. Aturan Boole Jika $n = 4$ dan $f \in C^6[a, b]$, maka terdapat $\xi \in (a, b)$

sedemikian sehingga

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$$

6. Aturan 7-titik Jika $n = 6$ dan $f \in C^8[a, b]$, maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx = \frac{h}{140}[41f(x_0) + 216f(x_1) + 27f(x_2) + 272f(x_3) + 27f(x_4) + 216f(x_5) + 41f(x_6)] -$$

Bukti bisa dilihat pada (Burden, 2011) dan (Hildebrand, 1974).

Menurut (Burden, 2011), aturan kuadratur Newton-Cotes kurang cocok diterapkan pada interval yang panjang. Oleh karena itu, interval yang panjang tersebut dibagi menjadi n subinterval yang sama panjang. Kemudian, pada tiap subinterval tersebut diterapkan aturan kuadratur Newton-Cotes. Metode seperti itu dinamakan aturan komposit Newton-Cotes. Aturan komposit Newton-Cotes yang paling sering digunakan adalah aturan komposit Trapezoidal, aturan komposit Midpoint, dan aturan komposit Simpson, yang secara berturut-turut diberikan oleh Teorema 2.2.2, Teorema 2.2.3, dan Teorema 2.2.4 dibawah ini dengan semua buktinya bisa dilihat pada (Burden, 2011).

Teorema 2.2.2. Misal $f \in C^2[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, dan $x_i = x_0 + ih$, untuk $i = 0, 1, \dots, n$, dengan $x_0 = a$, $x_n = b$. Maka terdapat $\mu \in (a, b)$ sedemikian sehingga aturan komposit Trapezoidal dengan n -subinterval dan suku *error*-nya bisa ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

Teorema 2.2.3. Misal $f \in C^2[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, dan $x_i = x_0 + ih$, untuk $i = 0, 1, \dots, n$, dengan $x_0 = a$, $x_n = b$. Maka terdapat $\mu \in (a, b)$ sedemikian sehingga aturan komposit Midpoint dengan n -subinterval dan suku *error*-nya bisa ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{b-a}{24}h^2 f''(\mu).$$

Teorema 2.2.4. Misal $f \in C^4[a, b]$, n genap, $h = \frac{b-a}{n}$, dan $x_i = x_0 + ih$, untuk $i = 0, 1, \dots, n$, dengan $x_0 = a$, $x_n = b$. Maka terdapat $\mu \in (a, b)$ sedemikian sehingga

aturan komposit Simpson dengan n -subinterval dan suku *error*-nya bisa ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{(\frac{n}{2})-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1})f(b)] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu).$$

Teorema 2.2.5 dibawah ini mengeneralisasi aturan komposit Newton-Cotes untuk aturan komposit Trapezoidal, Midpoint, Simpson, Simpson 3/8, Boole, dan 7-titik. Suku *error* yang diberikan oleh teorema tersebut juga mirip dengan suku *error* dari formula Euler Maclaurin.

Teorema 2.2.5. Misal $f \in C^{2m+2}[a, b]$ untuk bilangan bulat positif m ; $h = \frac{b-a}{n}$; $x_i = x_0 + ih$ adalah titik partisi dari interval $[a, b]$ untuk $i = 0, 1, \dots, n$, dengan $x_0 = a, x_n = b$; $NC(h)$ adalah aturan komposit kuadratur Newton-Cotes yang mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$ pada titik partisi. Maka terdapat konstanta $z_1, z_2, \dots$ yang bergantung pada tipe aturan komposit Newton-Cotes sedemikian sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = NC(h) + Err(h), \quad (2.2.1)$$

dengan suku *error* $Err(h)$ dinyatakan sebagai

$$Err(h) = - \sum_{p=1}^m h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p!)} z_p (f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)) + O(h^{2m+2}), \quad (2.2.2)$$

dimana

- B_{2p} adalah nilai Bernoulli (dapat dilihat pada Subbab 2.1)
- nilai z_p bergantung pada tipe aturan komposit Newton-Cotes sebagai berikut:
 1. $z_p = 1$ untuk aturan Trapezoidal,
 2. $z_p = \frac{2}{4^p} - 1$ untuk aturan Midpoint,
 3. $z_p = \frac{4-4^p}{3}$ untuk aturan Simpson,
 4. $z_p = \frac{9-9^p}{8}$ untuk aturan Simpson 3/8,
 5. $z_p = \frac{16^p - (20)4^p + 64}{45}$ untuk aturan Boole, dan
 6. $z_p = \frac{-36^p - (112)9^p - (567)4^p + 1296}{840}$ untuk aturan 7-point

untuk semua bilangan bulat positif p .

Bukti bisa dilihat pada (Uspensky, 1935).

Jika f adalah fungsi yang periodik dengan periode $b - a$, maka jelas bahwa $f^{(2p-1)}(a) = f^{(2p-1)}(b)$. Hal tersebut mengakibatkan suku pertama pada ruas kanan persamaan (2.2.2) menjadi nol, dan dapat disimpulkan untuk fungsi f yang periodik dengan periode $b - a$, order dari aturan komposit Newton-Cotes menjadi $2m + 2$.

Menurut (Gagelman, 2011), jika suatu metode aproksimasi memiliki *error* yang menuju 0 lebih cepat dari $h^m, \forall m > 0$, maka metode tersebut dikatakan konvergen secara *super-algebraic*. Sehingga, jika $f \in C^\infty[a, b]$ atau dengan kata lain $f \in C^m[a, b] \forall m > 0$ dan periodik dengan periode $b - a$, maka aturan tersebut mengaproksimasi integral tentu dengan order $m \forall m > 0$ atau dengan kata lain konvergen secara *super-algebraic*.

2.3 Metode Aproksimasi *Finite Difference*

Materi pada subbab ini diambil dari (LeVeque, 2007). Metode aproksimasi *finite difference* adalah metode untuk mengaproksimasi suatu turunan ke- k (dengan $k \in \mathbb{N}$) dari fungsi dengan menggunakan nilai-nilai fungsi tersebut pada titik-titik yang diinginkan. Pada skripsi ini, titik-titik yang digunakan adalah titik-titik yang berjarak sama. Dimisalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang mulus pada $[a, b]$ ($f \in C^m[a, b]$ untuk $m \in \mathbb{N}$ dan setiap turunan tersebut terbatas pada $[a, b]$) dan $\bar{x} \in [a, b]$.

Misal dipilih nilai fungsi pada titik-titik $\bar{x} + h$ dan $\bar{x}$ untuk mengaproksimasi $f'(\bar{x})$. Dengan menggunakan metode *undetermined coefficient* (dijelaskan pada subbab berikutnya), didapat bentuk aproksimasi dari $f'(\bar{x})$ yang dinotasikan dengan D_+f berikut ini

$$D_+f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}. \quad (2.3.1)$$

Bentuk aproksimasi tersebut sesuai dengan definisi turunan pertama, dan disebut dengan formula *forward euler*.

Selain formula *forward euler*, dengan menggunakan metode *undetermined*

coefficient, juga bisa didapatkan bentuk-bentuk aproksimasi dibawah ini.

$$D_-f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h)}{h}, \quad (2.3.2)$$

$$D_0f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h}, \quad (2.3.3)$$

$$D_3f(\bar{x}) = \frac{1}{6h}[2f(\bar{x} + h) + 3f(\bar{x}) - 6f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)]. \quad (2.3.4)$$

Bentuk aproksimasi yang diberikan oleh persamaan (2.3.2) disebut dengan formula *backward euler*. Kemudian, untuk mengetahui order aproksimasi tiap formula diatas, digunakan deret Taylor dari fungsi $f(x)$ disekitar titik $\bar{x}$ berikut ini:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!}f''(\bar{x}) + \dots + \frac{(x - \bar{x})^n}{n!}f^{(n)}(\bar{x}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - \bar{x})^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2.3.5)$$

dengan $\xi \in [\bar{x}, x]$.

Dengan mensubstitusi $x = \bar{x} + h$, $x = \bar{x} - h$, dan $x = \bar{x} - 2h$ ke persamaan (2.3.5), maka secara berturut-turut didapatkan:

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2f''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^3f'''(\bar{x}) + O(h^4) \quad (2.3.6)$$

$$f(\bar{x} - h) = f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3f'''(\bar{x}) + O(h^4) \quad (2.3.7)$$

$$f(\bar{x} - 2h) = f(\bar{x}) - 2hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(2h)^2f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}(2h)^3f'''(\bar{x}) + O(h^4) \quad (2.3.8)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.3.6) ke persamaan (2.3.1); persamaan (2.3.7) ke persamaan (2.3.2); persamaan (2.3.6) dan (2.3.7) ke persamaan (2.3.3); dan persamaan (2.3.6), (2.3.7), dan (2.3.8) ke persamaan (2.3.4) secara berturut-turut didapatkan

$$\begin{aligned} D_+f(\bar{x}) &= \frac{f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2f''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^3f'''(\bar{x}) + O(h^4) - f(\bar{x})}{h} \\ &= f'(\bar{x}) + \frac{1}{2}hf''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^2f'''(\bar{x}) + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} D_-f(\bar{x}) &= \frac{f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3f'''(\bar{x}) + O(h^4) - f(\bar{x})}{h} \\ &= -f'(\bar{x}) + \frac{1}{2}hf''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^2f'''(\bar{x}) + O(h^3) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$\begin{aligned}
D_0 f(\bar{x}) &= \frac{f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4)}{2h} \\
&\quad - \frac{(f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4))}{2h} \\
&= \frac{2hf'(\bar{x}) + \frac{1}{3}h^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4)}{2h} = f'(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^2 f'''(\bar{x}) + O(h^3)
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

$$\begin{aligned}
D_3 f(\bar{x}) &= \frac{1}{6h} [2(f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\bar{x}) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4)) \\
&\quad + 3f(\bar{x}) - 6(f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4)) \\
&\quad + f(\bar{x}) - 2hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(2h)^2 f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}(2h)^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4)] \\
&= \frac{1}{6h} [6hf'(\bar{x}) + O(h^4)] = f'(\bar{x}) + O(h^3)
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Dari persamaan (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11), dan (2.3.12) diatas, jelas bahwa $D_+ f(\bar{x})$ dan $D_- f(\bar{x})$ mengaproksimasi $f'(\bar{x})$ dengan order 1; $D_0 f(\bar{x})$ mengaproksimasi $f'(\bar{x})$ dengan order 2; dan $D_3 f(\bar{x})$ mengaproksimasi $f'(\bar{x})$ dengan order 3.

2.4 Koefisien Aproksimasi *Finite Difference*

Materi pada subbab ini diambil dari (LeVeque, 2007). Pada subbab ini dijelaskan metode dalam menentukan koefisien dari aproksimasi *finite difference*.

2.4.1 Metode *Undetermined Coefficients*

Sebelumnya diberikan terlebih dahulu contoh yang memberikan ilustrasi mengenai metode ini dalam menentukan koefisien-koefisien dari metode aproksimasi *finite difference*. Misal f adalah suatu fungsi seperti yang didefinisikan pada Subbab 2.3 dan $\bar{x} \in [a, b]$.

Contoh 2.4.1. Misal ingin dicari aproksimasi dari $f'(\bar{x})$ menggunakan nilai-nilai dari fungsi f pada titik-titik $\bar{x}$, $\bar{x} - h$ dan $\bar{x} - 2h$. Atau dengan kata lain, ingin dicari aproksimasi dari $f'(\bar{x})$ oleh $D_2 f(\bar{x})$ yang memiliki bentuk

$$D_2 f(\bar{x}) = c_1 f(\bar{x}) + c_2 f(\bar{x} - h) + c_3 f(\bar{x} - 2h). \tag{2.4.1}$$

Akan ditentukan koefisien-koefisien dari aproksimasi, yaitu c_1, c_2, c_3 yang memberikan aproksimasi terbaik.

Jawab.

Ekspansi $f(\bar{x} - h)$ dan $f(\bar{x} - 2h)$ dengan menggunakan deret Taylor adalah

sebagai berikut

$$f(\bar{x} - h) = f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4) \quad (2.4.2)$$

$$f(\bar{x} - 2h) = f(\bar{x}) - 2hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(2h)^2 f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}(2h)^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4). \quad (2.4.3)$$

Substitusi persamaan 2.4.2 dan 2.4.3 pada persamaan 2.4.1. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} D_2 f(\bar{x}) &= c_1 f(\bar{x}) + c_2 (f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}h^2 f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}h^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4)) \\ &\quad + c_3 (f(\bar{x}) - 2hf'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(2h)^2 f''(\bar{x}) - \frac{1}{6}(2h)^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4)) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3)f(\bar{x}) + (-c_2 - 2c_3)hf'(\bar{x}) + (\frac{1}{2}c_2 + 2c_3)h^2 f''(\bar{x}) \\ &\quad + (\frac{1}{6}c_2 + \frac{4}{3}c_3)h^3 f'''(\bar{x}) + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Untuk $D_2 f(\bar{x})$ mengaproksimasi $f'(\bar{x})$, haruslah

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_2 - 2c_3 &= \frac{1}{h}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Solusi dari SPL (2.4.5) diatas adalah $c_1 = t + \frac{1}{h}$, $c_2 = -2t - \frac{1}{h}$, $c_3 = t$ dengan $t \in \mathbb{R}$. Dengan mensubstitusi solusi tersebut ke persamaan (2.4.4) dapat dilihat bahwa $D_2 f(\bar{x})$ dengan koefisien c_1, c_2, c_3 yang memenuhi SPL (2.4.5) mengaproksimasi dari $D_2 f(\bar{x})$ sebesar 1.

Namun $D_2 f(\bar{x})$ bisa mengaproksimasi $f'(\bar{x})$ dengan order yang lebih tinggi lagi, yaitu jika SPL (2.4.5) ditambahkan satu persamaan lagi $\frac{1}{2}c_2 + 2c_3 = 0$ sehingga menjadi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_2 - 2c_3 &= \frac{1}{h} \\ \frac{1}{2}c_2 + 2c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

SPL (2.4.6) memiliki solusi $c_1 = \frac{3}{2h}$, $c_2 = \frac{-2}{h}$, $c_3 = \frac{1}{2h}$. Dengan mensubstitusi solusi tersebut ke persamaan (2.4.4) dapat dilihat bahwa order aproksimasi bertambah menjadi 2.

Dengan cara yang sama, tentunya diharapkan order aproksimasi bisa bertambah menjadi 3 dengan menambah satu persamaan lagi ke SPL (2.4.6). Namun, jika SPL (2.4.6) ditambah satu persamaan lagi yaitu $\frac{1}{6}c_2 + \frac{4}{3}c_3 = 0$, SPL

(2.4.6) berubah menjadi

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_2 - 2c_3 &= \frac{1}{h} \\ \frac{1}{2}c_2 + 2c_3 &= 0 \\ \frac{1}{6}c_2 + \frac{4}{3}c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

yang menyebabkan jumlah persamaan lebih besar daripada banyaknya peubah (koefisien). Jika salah satu persamaan pada SPL (2.4.7) merupakan kelipatan dari persamaan lainnya, SPL (2.4.7) memiliki solusi sehingga $D_2f(\bar{x})$ yang koefisien-koefisien nya memenuhi SPL (2.4.7) berhasil memberikan aproksimasi yang berorder 3. Namun karena hal tersebut tidak terjadi, SPL (2.4.7) menjadi tidak memiliki solusi sehingga $D_2f(\bar{x})$ dengan koefisien-koefisien nya memenuhi SPL (2.4.6) adalah aproksimasi terbaik dari $f'(\bar{x})$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} D_2f(\bar{x}) &= \frac{3}{2h}f(\bar{x}) + \frac{-2}{h}f(\bar{x}-h) + \frac{1}{2h}f(\bar{x}-2h) \\ &= \frac{1}{2h}[3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)] \end{aligned}$$

Metode yang diilustrasikan oleh Contoh 2.4.1 bisa digeneralisasi untuk menghitung koefisien-koefisien aproksimasi dari $f^{(k)}(\bar{x})$ menggunakan nilai-nilai fungsi f pada n -titik x_i untuk $i = 1, \dots, n$ dengan $n > k$.

Misal, $x_i \in [a, b]$, dan $f \in C^m[a, b]$ dengan $m \geq n + 1$ sedemikian sehingga ekspansi Taylor berikut ini dipenuhi untuk $i = 1, \dots, n$.

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + (x_i - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{2!}f''(\bar{x}) + \dots + \frac{(x_i - \bar{x})^k}{k!}f^{(k)}(\bar{x}) + \dots \quad (2.4.8)$$

Metode *Undetermined Coefficients* mencari koefisien c_j yang memenuhi persamaan berikut

$$c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + \dots + c_nf(x_n) = f^{(k)}(\bar{x}) + O(h^p) \quad (2.4.9)$$

dengan nilai p sebesar yang dimungkinkan. Ruas kiri dari persamaan (2.4.9) tersebut merupakan aproksimasi dari $f^{(k)}$ dengan order p , menggunakan nilai-nilai dari fungsi pada titik-titik x_i untuk $i = 1, \dots, n$.

Kemudian substitusi persamaan (2.4.8) untuk $i = 1, \dots, n$ ke persamaan

(2.4.9), sehingga ruas kiri dari persamaan (2.4.9) menjadi

$$\begin{aligned}
& c_1(f(\bar{x}) + (x_1 - \bar{x})f'(\bar{x}) + \dots + \frac{(x_1 - \bar{x})^k}{k!}f^{(k)}(\bar{x}) + \dots + \frac{(x_1 - \bar{x})^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\bar{x}) + \frac{(x_1 - \bar{x})^n}{n!}f^{(n)}(\bar{x}) + \dots) \\
& + c_2(f(\bar{x}) + (x_2 - \bar{x})f'(\bar{x}) + \dots + \frac{(x_2 - \bar{x})^k}{k!}f^{(k)}(\bar{x}) + \dots + \frac{(x_2 - \bar{x})^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\bar{x}) + \frac{(x_2 - \bar{x})^n}{n!}f^{(n)}(\bar{x}) + \dots) \\
& \vdots \\
& + c_n(f(\bar{x}) + (x_n - \bar{x})f'(\bar{x}) + \dots + \frac{(x_n - \bar{x})^k}{k!}f^{(k)}(\bar{x}) + \dots + \frac{(x_n - \bar{x})^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\bar{x}) + \frac{(x_n - \bar{x})^n}{n!}f^{(n)}(\bar{x}) + \dots) \\
& = (c_1 + c_2 + \dots + c_n)f(\bar{x}) + (c_1(x_1 - \bar{x}) + c_2(x_2 - \bar{x}) + \dots + c_n(x_n - \bar{x}))f'(\bar{x}) \\
& + \dots + (c_1\frac{(x_1 - \bar{x})^k}{k!} + c_2\frac{(x_2 - \bar{x})^k}{k!} + \dots + c_n\frac{(x_n - \bar{x})^k}{k!})f^{(k)}(\bar{x}) \\
& + \dots + (c_1\frac{(x_1 - \bar{x})^{n-1}}{(n-1)!} + c_2\frac{(x_2 - \bar{x})^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_n\frac{(x_n - \bar{x})^{n-1}}{(n-1)!})f^{(n-1)}(\bar{x}) \\
& + (c_1\frac{(x_1 - \bar{x})^n}{n!} + c_2\frac{(x_2 - \bar{x})^n}{n!} + \dots + c_n\frac{(x_n - \bar{x})^n}{n!})f^{(n)}(\bar{x}) + \dots
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Agar ekspresi pada ruas kanan maupun kiri persamaan (2.4.10) memenuhi persamaan (2.4.9), c_j haruslah memenuhi SPL yang dibentuk dengan mensubstitusi $i = 1, 2, \dots, n$ pada persamaan berikut ini

$$\frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=1}^n c_j (x_j - \bar{x})^{(i-1)} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i-1 = k, \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{2.4.11}$$

Atau dengan kata lain, ekspresi (2.4.10) haruslah berbentuk

$$\begin{aligned}
& 0f(\bar{x}) + 0f'(\bar{x}) + \dots + f^{(k)}(\bar{x}) + \dots + 0f^{(n-1)}(\bar{x}) \\
& + (c_1\frac{(x_1 - \bar{x})^n}{n!} + c_2\frac{(x_2 - \bar{x})^n}{n!} + \dots + c_n\frac{(x_n - \bar{x})^n}{n!})f^{(n)}(\bar{x}) + \dots
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Lema dibawah ini menunjukkan bahwa koefisien c_j merupakan suatu bilangan riil yang dibagi dengan h^k .

Lema 2.4.1. Misal $x_i \in [a, b]$, dan $f \in C^m[a, b]$ dengan $m \geq n + 1$. Jika $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah koefisien-koefisien aproksimasi dari $f^{(k)}$ yang berkorespondensi dengan titik-titik $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah suatu bilangan riil yang dibagi dengan h^k .

Bukti. Karena, titik-titik x_i merupakan titik-titik yang berjarak sama dengan jarak h , maka $(x_i - \bar{x}) = k_i h$ dengan k_i adalah bilangan riil.

Kemudian, SPL yang dibentuk oleh persamaan (2.4.11) memiliki n persamaan dan n peubah, yang solusinya merupakan koefisien dari metode aproksimasi *finite*

difference. SPL tersebut tidak lain berbentuk

$$\begin{aligned}
 c_1 + c_2 + \dots + c_n &= 0 \\
 k_1 h c_1 + k_2 h c_2 + \dots + k_n h c_n &= 0 \\
 &\vdots \\
 (k_1 h)^k c_1 + (k_2 h)^k c_2 + \dots + (k_n h)^k c_n &= k! \\
 &\vdots \\
 (k_1 h)^{n-1} c_1 + (k_2 h)^{n-1} c_2 + \dots + (k_n h)^{n-1} c_n &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

SPL (2.4.13) diatas bisa dinyatakan kedalam matriks dibawah ini

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^k & k_2^k & \dots & k_n^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{k!}{h^k} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.14}$$

Matriks pertama dan kedua pada ruas kiri persamaan (2.4.14) secara berturut-turut dinamakan K dan $\vec{c}$ dan matriks pada ruas kanan persamaan (2.4.14) dinamakan $\vec{b}_k$. Matriks K^T adalah matriks Vandermonde yang invertibel, sehingga $K \vec{c} = \vec{b}$

memiliki tepat satu solusi untuk setiap $\vec{b}$. Sehingga untuk $\vec{b} = \vec{b}_k^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k! \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$,

$K \vec{c} = \vec{b}_k^*$ memiliki tepat satu solusi yang jelas merupakan bilangan riil dan dinamakan $\vec{c}^*$. Sehingga jelas bahwa

$$\begin{aligned}
 K \vec{c}^* &= \vec{b}_k^* \\
 \frac{1}{h^k} K \vec{c}^* &= \frac{1}{h^k} \vec{b}_k^* \\
 K \frac{1}{h^k} \vec{c}^* &= \vec{b}_k^*
 \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Dari persamaan (2.4.15) dapat disimpulkan bahwa solusi dari $K\vec{c} = \vec{b}_k$ adalah bilangan riil yang dibagi dengan h^k . $\square$

Dari Lema 2.4.1 diatas, $c_1, c_2, \dots, c_n$ merupakan bilangan riil yang dibagi dengan h^k . Sehingga dengan mensubstitusi $c_1, c_2, \dots, c_n$ ke ekspresi (2.4.12), jelas bahwa order aproksimasi paling tidak sebesar $n - k$.

2.4.2 Metode lain

Selain metode *undetermined coefficients*, terdapat metode lain dalam menentukan koefisien-koefisien dari metode aproksimasi *finite difference* yang dibahas pada subbab ini. Metode ini menggunakan suatu polinomial p yang menginterpolasi fungsi f menggunakan nilai-nilai fungsi pada titik yang diinginkan, kemudian menggunakan $p^{(k)}(\bar{x})$ sebagai aproksimasi dari $f^{(k)}(\bar{x})$.

Misal f adalah suatu fungsi seperti yang didefinisikan pada Subbab 2.3 dan $\bar{x} \in [a, b]$. Contoh dibawah ini merupakan Contoh 2.4.1 yang dikerjakan kembali menggunakan metode ini.

Contoh 2.4.2. Misal ingin dicari aproksimasi dari $f'(\bar{x})$ menggunakan nilai-nilai dari fungsi f pada titik-titik $\bar{x}, \bar{x} - h$ dan $\bar{x} - 2h$.

Jawab: Interpolasi $f(x)$ menggunakan polinomial interpolasi Lagrange $p(x)$ pada $x_0 = \bar{x}, x_1 = \bar{x} - h$, dan $x_2 = \bar{x} - 2h$ berikut ini

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x).$$

$L_0(x), L_1(x)$, dan $L_2(x)$ secara berturut-turut diberikan oleh

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - (\bar{x} - h))(x - (\bar{x} - 2h))}{(\bar{x} - (\bar{x} - h))(\bar{x} - (\bar{x} - 2h))} \\ &= \frac{(x - (\bar{x} - h))(x - (\bar{x} - 2h))}{h \cdot 2h}, \\ L_1(x) &= \frac{(x - \bar{x})(x - (\bar{x} - 2h))}{(\bar{x} - h - \bar{x})(\bar{x} - h - (\bar{x} - 2h))} \\ &= \frac{(x - \bar{x})(x - (\bar{x} - 2h))}{-h \cdot h}, \\ L_2(x) &= \frac{(x - \bar{x})(x - (\bar{x} - h))}{(\bar{x} - 2h - \bar{x})(\bar{x} - 2h - (\bar{x} - h))} \\ &= \frac{(x - \bar{x})(x - (\bar{x} - h))}{-2h \cdot -h}. \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi ketiga persamaan diatas ke $p(x)$, didapatkan

$$p(x) = f(\bar{x}) \frac{(x - (\bar{x} - h))(x - (\bar{x} - 2h))}{h \cdot 2h} + f(\bar{x} - h) \frac{(x - \bar{x})(x - (\bar{x} - 2h))}{-h \cdot h} + f(\bar{x} - 2h) \frac{(x - \bar{x})(x - (\bar{x} - h))}{-2h \cdot -h}.$$

Kemudian, tentukan turunan pertama $p'(x)$ sebagai berikut

$$p'(x) = \frac{f(\bar{x})}{2h^2}[(x - (\bar{x} - 2h)) + (x - (\bar{x} - h))] - \frac{f(\bar{x}-h)}{h^2}[(x - (\bar{x} - 2h)) + (x - \bar{x})] + \frac{f(\bar{x}-2h)}{2h^2}[(x - (\bar{x} - h)) + (x - \bar{x})].$$

Substitusi $x = \bar{x}$ kepada $p'(x)$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} p'(\bar{x}) &= \frac{f(\bar{x})}{2h^2}[2h + 2] - \frac{f(\bar{x}-h)}{h^2}[2h] + \frac{f(\bar{x}-2h)}{2h^2}[h] \\ &= \frac{3}{2h}f(\bar{x}) - \frac{2}{h}f(\bar{x}-h) + \frac{1}{2h}f(\bar{x}-2h) \\ &= \frac{1}{2h}[3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)] \end{aligned}$$

yang ternyata memiliki bentuk aproksimasi yang sama dengan bentuk aproksimasi dari $f'(\bar{x})$ menggunakan metode *undetermined coefficients* seperti yang ditunjukkan oleh Contoh 2.4.1.

2.5 Metode *Centered Finite Difference*

Metode *centered finite difference* merupakan salah satu jenis dari metode aproksimasi *finite difference* yang mengaproksimasi turunan ke- k dari fungsi f pada titik $\bar{x}$, sedemikian sehingga titik $\bar{x}$ berada ditengah titik-titik yang nilainya dipilih untuk mengaproksimasi. Pada subbab ini, diberikan bentuk aproksimasi *centered finite difference* dari turunan ganjil fungsi f , yaitu $f^{(2p-1)} \forall p = 1, \dots, m$ untuk bilangan bulat positif m . Diasumsikan f adalah fungsi yang mulus atau paling tidak terturunkan sebanyak $2m + 2$ kali pada $[a, b]$.

Untuk $\bar{x} \in [a, b]$ dan $h > 0$, metode *centered finite difference* mengaproksimasi $f^{(2p-1)}(\bar{x})$ sebagai berikut

$$f^{(2p-1)}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)}(f(\bar{x} + kh) - f(\bar{x} - kh))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}). \quad (2.5.1)$$

Bukti. Misal $x_j = \bar{x} - jh$ untuk $j = 1 \dots m$, $x_j = \bar{x} + (j - m)h$ untuk $j = m + 1 \dots 2m$, dan $x_j \in [a, b]$ untuk $j = 1 \dots 2m$. Dengan menggunakan metode *undetermined coefficients*, aproksimasi *centered finite difference* mengaproksimasi turunan ke- $2p - 1$ menggunakan nilai fungsi dari titik-titik x_j untuk $j = 1 \dots 2m$

sebagai berikut

$$c_1 f(x_1) + \cdots + c_m f(x_m) + c_{m+1} f(x_{m+1}) + \cdots + c_{2m} f(x_{2m}) = f^{(2p-1)}(\bar{x}) + O(h^a) \quad (2.5.2)$$

dengan $a \geq 2m - (2p - 1) = 2m - 2p + 1$. Untuk $i = 1, \dots, 2m$, $c_1, \dots, c_{2m}$ memenuhi persamaan

$$\frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=1}^{2m} c_j (x_j - \bar{x})^{(i-1)} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i-1 = k, \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa

1. solusi dari SPL yang dibentuk dengan mensubstitusi $i = 1, \dots, 2m$ ke persamaan (2.5.3), yaitu c_j untuk $j = 1, \dots, 2m$ bersifat $c_j = -c_{m+j}$ untuk $j = 1, \dots, m$
2. c_j untuk $j = 1, \dots, 2m$ merupakan suatu bilangan riil yang dibagi dengan h^{2p-1}
3. $a = 2m + 2 - 2p$, atau dengan kata lain order dari aproksimasi sebesar $2m + 2 - 2p$.

Bukti nomor 1: Jelas bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2m} c_j (x_j - \bar{x})^{(i-1)} &= \sum_{j=1}^m c_j (x_j - \bar{x})^{(i-1)} + \sum_{j=m+1}^{2m} c_j (x_j - \bar{x})^{(i-1)} \\ &= \sum_{j=1}^m c_j (-jh)^{(i-1)} + \sum_{j=m+1}^{2m} c_j ((j-m)h)^{(i-1)}. \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (2.5.3) menjadi

$$\frac{1}{(i-1)!} \left(\sum_{j=1}^m c_j (-jh)^{(i-1)} + \sum_{j=m+1}^{2m} c_j ((j-m)h)^{(i-1)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{jika } i-1 = k, \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.5.4)$$

dan dengan mensubstitusi $i = 1, \dots, 2m$ didapat Sistem Persamaan Linier (SPL)

$$\begin{aligned}
 (c_{m+1} + c_1) + (c_{m+2} + c_2) + \dots + (c_{2m} + c_m) &= 0 \\
 (c_{m+1} - c_1) + 2(c_{m+2} - c_2) + \dots + m(c_{2m} - c_m) &= 0 \\
 (c_{m+1} + c_1) + 2^2(c_{m+2} + c_2) + \dots + m^2(c_{2m} + c_m) &= 0 \\
 &\vdots \\
 (c_{m+1} - c_1) + 2^{2p-1}(c_{m+2} - c_2) + \dots + m^{2p-1}(c_{2m} - c_m) &= \frac{(2p-1)!}{h^{2p-1}} \\
 &\vdots \\
 (c_{m+1} + c_1) + 2^{2m-2}(c_{m+2} + c_2) + \dots + m^{2m-2}(c_{2m} + c_m) &= 0 \\
 (c_{m+1} - c_1) + 2^{2m-1}(c_{m+2} - c_2) + \dots + m^{2m-1}(c_{2m} - c_m) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

SPL (2.5.5) juga bisa dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
 1 & -1 & 2 & -2 & \dots & m & -m \\
 1 & 1 & 2^2 & 2^2 & \dots & m^2 & m^2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 1 & -1 & 2^{2p-1} & -2^{2p-1} & \dots & m^{2p-1} & -m^{2p-1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 1 & 1 & 2^{2m-2} & 2^{2m-2} & \dots & m^{2m-2} & m^{2m-2} \\
 1 & -1 & 2^{2m-1} & -2^{2m-1} & \dots & m^{2m-1} & -m^{2m-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_{m+1} \\
 c_1 \\
 c_{m+2} \\
 \vdots \\
 c_2 \\
 \vdots \\
 c_{2m} \\
 c_m
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 \frac{(2p-1)!}{h^{2p-1}} \\
 \vdots \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}. \tag{2.5.6}$$

Selanjutnya, matriks kiri, tengah, dan kanan pada persamaan (2.5.6) secara berturut-turut dinamakan matriks A, B, dan C. Matriks A, B, dan C secara berturut-turut berukuran $2m \times 2m$, $2m \times 1$, dan $2m \times 1$. Matriks A^T merupakan matriks Vandermonde yang invertibel, sehingga $AB=C$ punya tepat satu solusi.

Dengan mensubstitusi $i = 1, 3, \dots, 2m - 1$ pada persamaan (2.5.4) secara berturut-turut, atau dengan kata lain mengambil baris-baris ganjil dari SPL (2.5.5) bisa didapatkan SPL dibawah ini

$$\begin{aligned}
 (c_{m+1} + c_1) + (c_{m+2} + c_2) + \dots + (c_{2m} + c_m) &= 0 \\
 (c_{m+1} + c_1) + 2^2(c_{m+2} + c_2) + \dots + m^2(c_{2m} + c_m) &= 0 \\
 &\vdots \\
 (c_{m+1} + c_1) + 2^{2m-2}(c_{m+2} + c_2) + \dots + m^{2m-2}(c_{2m} + c_m) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

yang bisa dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & \dots & (m-1)^2 & m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{2m-2} & \dots & (m-1)^{2m-2} & m^{2m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{m+1} + c_1 \\ c_{m+2} + c_2 \\ \vdots \\ c_{2m-1} + c_{m-1} \\ c_{2m} + c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5.8)$$

Matriks kiri dan tengah pada persamaan (2.5.8) secara berturut-turut dinamakan A_{ganjil} dan B_{ganjil} dan berukuran $m \times m$ dan $m \times 1$. Matriks A_{ganjil}^T adalah matriks Vandermonde yang invertibel, sehingga $A_{\text{ganjil}} B_{\text{ganjil}} = \vec{0}$ hanya punya solusi trivial, yang mengakibatkan $c_j = -c_{m+j}$ untuk $j = 1, \dots, m$.

Bukti nomor 2: Dari Lema 2.4.1, jelas bahwa c_j untuk $j = 1, \dots, 2m$ merupakan suatu bilangan riil yang dibagi dengan h^{2p-1}

Bukti nomor 3: Pandang kembali persamaan (2.5.2) berikut ini

$$c_1 f(x_1) + \dots + c_m f(x_m) + c_{m+1} f(x_{m+1}) + \dots + c_{2m} f(x_{2m}) = f^{(2p-1)}(\bar{x}) + O(h^a).$$

Dengan mensubstitusi $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(x_{m+1}), f(x_{m+2}), \dots, f(x_{2m})$ dengan representasi polinomial Taylor masing-masing, $(x_j - \bar{x}) = -jh$ untuk $j = 1, \dots, m$, $(x_j - \bar{x}) = jh$ untuk $j = m+1, \dots, 2m$, dan dari persamaan (2.5.3), ruas kiri dari persamaan (2.5.2) menjadi

$$\begin{aligned} & 0f(\bar{x}) + 0f'(\bar{x}) + \dots + f^{(2p-1)}(\bar{x}) + \dots + 0f^{(2m-1)}(\bar{x}) \\ & + \left(c_1 \frac{(-h)^{2m}}{(2m)!} + c_2 \frac{(-2h)^{2m}}{(2m)!} + \dots + c_m \frac{(-mh)^{2m}}{(2m)!} \right. \\ & + c_{m+1} \frac{(h)^{2m}}{(2m)!} + c_{m+2} \frac{(2h)^{2m}}{(2m)!} + \dots + c_{2m} \frac{(mh)^{2m}}{(2m)!} \left. \right) f^{(2m)}(\bar{x}) \\ & + \left(c_1 \frac{(-h)^{2m+1}}{(2m+1)!} + c_2 \frac{(-2h)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots + c_m \frac{(-mh)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right. \\ & + c_{m+1} \frac{(h)^{2m+1}}{(2m+1)!} + c_{m+2} \frac{(2h)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots + c_{2m} \frac{(mh)^{2m+1}}{(2m+1)!} \left. \right) f^{(2m+1)}(\bar{x}) \\ & + O(h^{2m+2}) \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Karena $c_j = c_{m+j}$ untuk $j = 1, \dots, n$, maka koefisien dari $f^{(2m)}$ pada ekspresi

(2.5.9) menjadi nol, sehingga ekspresi (2.5.9) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 & 0f(\bar{x}) + 0f'(\bar{x}) + \dots + f^{(2p-1)}(\bar{x}) + \dots + 0f^{(2m-1)}(\bar{x}) \\
 & + \left(c_1 \frac{(-h)^{2m+1}}{(2m+1)!} + c_2 \frac{(-2h)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots + c_m \frac{(-mh)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right. \\
 & \left. + c_{m+1} \frac{(h)^{2m+1}}{(2m+1)!} + c_{m+2} \frac{(2h)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots + c_{2m} \frac{(mh)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) f^{(2m+1)}(\bar{x}) \\
 & + O(h^{2m+2})
 \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Sudah dibuktikan pada bukti nomor dua, bahwa c_j untuk $j = 1, \dots, 2m$ adalah suatu bilangan riil yang dibagi dengan h^{2p-1} , sehingga dengan jelas bahwa ekspresi (2.5.10) bisa ditulis menjadi

$$0f(\bar{x}) + 0f'(\bar{x}) + \dots + f^{(2p-1)}(\bar{x}) + \dots + 0f^{(2m-1)}(\bar{x}) + O(h^{2m+1-(2p-1)}) \tag{2.5.11}$$

Karena ekspresi (2.5.11) merupakan ruas kiri dari persamaan (2.5.2), dapat disimpulkan bahwa $a = 2m + 1 - (2p - 1) = 2m + 2 - 2p$. $\square$

BAB 3

ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES DENGAN KOREKSI PADA BATAS DAN ATURAN MODIFIKASINYA

Pada bab ini dibahas suatu aturan aproksimasi integral tentu yaitu aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas. Aturan ini mengaproksimasi integral tentu lebih baik dibandingkan dengan aturan komposit Newton-Cotes, untuk integran yang tidak periodik (Aguilar, 2015). Pada Subbab 3.2 dibahas mengenai koefisien koreksi, dimana koefisien ini merupakan bagian dari aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas. Selanjutnya pada Subbab 3.3 dibahas batas dari koefisien koreksi tersebut. Terakhir, pada Subbab 3.4 dibahas suatu aturan yang merupakan hasil modifikasi sederhana dari aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas, yang dinamakan aturan modifikasi Kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas. Sumber utama yang digunakan pada penulisan skripsi ini adalah (Aguilar, 2015).

3.1 Aturan Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas

Pada Subbab 2.2, telah dibahas bahwa aturan komposit Newton-Cotes mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$ dengan konvergensi *super-algebraic* ketika f periodik dengan periode $b - a$. Kemudian dengan mengaproksimasi $f^{(2p-1)}$ pada $x = a$ dan $x = b$ menggunakan metode *centered finite difference* kepada suku *error* dari aturan komposit Newton-Cotes, bisa dikonstruksi suatu aturan baru dalam mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$. Aturan tersebut dinamakan dengan aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas, dan dinyatakan pada teorema dibawah ini.

Teorema 3.1.1 (Aturan Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas).

Misal $f \in C^{2m+2}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ merupakan suatu partisi dari interval $[a, b]$ dengan panjang tiap subinterval sebesar $h = \frac{b-a}{N}$, $NC(h)$ adalah aturan komposit Kuadratur Newton-Cotes yang mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$. Jika diberikan suatu bilangan bulat positif m , maka terdapat suatu barisan koefisien koreksi $\{\beta_k^{(m)}\}_{k=1}^m$ yang tidak bergantung pada h , tetapi bergantung pada m dan pada barisan $\{z_p\}_{p=1}^\infty$, sedemikian sehingga Aturan Kuadratur Newton-Cotes

dengan koreksi pada batas dengan suku error nya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = NC(2m+2, h) + O(h^{2m+2}), \quad (3.1.1)$$

dimana

$$NC(2m+2, h) = NC(h) - h \sum_{k=1}^m \beta_k^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh) - f(a+kh) + f(a-kh)).$$

Bukti. Langkah 1: Pandang kembali persamaan (2.2.1) dan (2.5.1) dibawah ini

$$\int_a^b f(x)dx = NC(h) - \sum_{p=1}^m h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p!)} z_p(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)) + O(h^{2m+2})$$

$$f^{(2p-1)}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(x+kh) - f(x-kh))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}).$$

Langkah 2: Substitusi $x = a$ dan $x = b$ pada persamaan (2.5.1), sehingga diperoleh dua persamaan dibawah ini.

$$f^{(2p-1)}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(a+kh) - f(a-kh))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}), \quad (3.1.2)$$

$$f^{(2p-1)}(b) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}). \quad (3.1.3)$$

Langkah 3: Substitusi fungsi $f^{(2p-1)}$ pada $x = a$ dan $x = b$ pada persamaan (2.2.1) secara berturut-turut dengan persamaan (3.1.2) dan persamaan (3.1.3).

Sehingga persamaan (2.2.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= NC(h) - \sum_{p=1}^m h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \left(\sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh))}{h^{2p-1}} \right. \\
&\quad \left. + O(h^{2m+2-2p}) - \left(\sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(a+kh) - f(a-kh))}{h^{2p-1}} \right) \right. \\
&\quad \left. + O(h^{2m+2-2p}) \right) + O(h^{2m+2}) \\
&= NC(h) - \sum_{p=1}^m h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \left(\sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh))}{h^{2p-1}} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(a+kh) - f(a-kh))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}) \right) + O(h^{2m+2}) \\
&= NC(h) - \sum_{p=1}^m h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \left(\sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh))}{h^{2p-1}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(a+kh) - f(a-kh))}{h^{2p-1}} \right) + h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p O(h^{2m+2-2p}) + O(h^{2m+2}) \\
&= NC(h) - \sum_{p=1}^m h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \left(\sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh))}{h^{2p-1}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_{k,p}^{(m)} (f(a+kh) - f(a-kh))}{h^{2p-1}} \right) + O(h^{2m+2}) \\
&= NC(h) - \sum_{p=1}^m h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \left(\sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)}}{h^{2p-1}} (f(b+kh) - f(b-kh)) \right. \\
&\quad \left. - (f(a+kh) - f(a-kh)) \right) + O(h^{2m+2}) \\
&= NC(h) - h \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^m h^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \frac{\alpha_{k,p}^{(m)}}{h^{2p-1}} (f(b+kh) - f(b-kh)) \\
&\quad - f(a+kh) + f(a-kh)) + O(h^{2m+2}) \\
&= NC(h) - h \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh)) \\
&\quad - f(a+kh) + f(a-kh)) + O(h^{2m+2}).
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Langkah 4: Selanjutnya, tetapkan koefisien koreksi

$$\beta_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)} \tag{3.1.5}$$

dengan nilai $\alpha_{k,p}^{(m)}$ akan dibahas pada Subbab 3.2.

Sehingga persamaan (3.1.4) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= NC(h) - h \sum_{k=1}^m \beta_k^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh) - f(a+kh) \\
&\quad + f(a-kh)) + O(h^{2m+2})
\end{aligned}$$

atau dapat juga ditulis sebagai,

$$\int_a^b f(x)dx = NC(2m+2, h) + O(h^{2m+2}),$$

dimana

$$NC(2m+2, h) = NC(h) - h \sum_{k=1}^m \beta_k^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh) - f(a+kh) + f(a-kh))$$

□

Untuk memudahkan, aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas untuk selanjutnya bisa disebut dengan aturan koreksi batas. Kemudian jelas bahwa, aturan koreksi batas memiliki order $2m+2$. Terlebih lagi, jika $f \in C^\infty$ atau dengan kata lain $f \in C^m \forall m > 0$, maka aturan tersebut meengaproksimasi integral tentu dengan order m , untuk setiap $m > 0$ (konvergen secara *super-algebraic*). Dengan membandingkan aturan komposit Newton-Cotes dengan aturan koreksi batas, dapat disimpulkan dua hal dibawah ini:

1. Jika $f \in C^{2m+2}$ dan periodik dengan periode $b-a$, maka aturan komposit Newton-Cotes mengaproksimasi dengan order $2m+2$. Terlebih lagi, jika $f \in C^\infty$ dan periodik dengan periode $b-a$, maka aturan tersebut konvergen secara *super-algebraic*.
2. Jika $f \in C^{2m+2}$ dengan f tidak perlu periodik, maka aturan koreksi batas mengaproksimasi dengan order $2m+2$. Terlebih lagi, jika $f \in C^\infty$, maka aturan tersebut konvergen secara *super-algebraic*.

Menurut(Aguilar, 2015), nilai koefisien koreksi $\beta_k^{(m)}$ yang besar menghasilkan aproksimasi yang kurang stabil. Oleh karena itu, penting untuk memerhatikan laju pertumbuhan dari koefisien koreksi $\beta_k^{(m)}$. Nilai dari $\beta_k^{(m)}$ akan dibahas pada Subbab 3.2, sedangkan batasnya dibahas pada Subbab 3.3.

3.2 Penentuan Koefisien Koreksi

Pada subbab ini, ditentukan koefisien koreksi $\{\beta_k^{(m)}\}_{k=1}^m$. Berdasarkan persamaan (3.1.5), diketahui bahwa $\beta_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}$. Jelas bahwa, untuk menghitung nilai $\{\beta_k^{(m)}\}_{k=1}^m$, dibutuhkan nilai dari $\{\alpha_{k,p}^{(m)}\}_{p=1}^m$ untuk $\forall k = 1, 2, \dots, m$ dengan m merupakan bilangan bulat positif.

$\alpha_{k,p}^{(m)}$ dapat diperoleh dengan berbagai cara, salah satunya adalah dengan menggunakan metode *undertermined coefficients* (dapat dilihat pada Subbab 2.4.1), dimana untuk bilangan bulat positif m yang diberikan dan $\forall p = 1, 2, \dots, m$,

dibentuk sebuah sistem persamaan linier (SPL) dengan m variabel $\alpha_{k,p}^{(m)}, k = 1, \dots, m$. Untuk membentuk SPL tersebut, fungsi f diganti dengan polinomial yang sesuai, dan agar didapat rumus $\alpha_{k,p}^{(m)}$ yang sesederhana mungkin, digunakan m polinomial yang memiliki derajat $2m - 1$ sebagai berikut:

$$f_j(x) = x \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x^2 - k^2 h^2) \quad (3.2.1)$$

untuk $j = 1, \dots, m$. (Aguilar, 2015)

Terdapat dua sifat yang dipenuhi oleh f_j , yaitu Lema 3.2.1 dan Teorema 3.2.2 berikut ini.

Lema 3.2.1. Misal f_j adalah polinomial yang didefinisikan oleh (3.2.1) untuk $j = 1, \dots, m$, maka

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x = ph, p \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{j\} \\ \frac{(-1)^{m+j} h^{2m-1} (m+j)! (m-j)!}{2j} & \text{untuk } x = jh \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Bukti. Untuk $x = ph, p \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{j\}$,

$$\begin{aligned} f_j(ph) &= ph \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m ((ph)^2 - k^2 h^2) \\ &= ph((ph)^2 - h^2)((ph)^2 - 2^2 h^2) \dots ((ph)^2 - p^2 h^2) \dots ((ph)^2 - m^2 h^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Untuk $x = jh$,

$$\begin{aligned} f_j(jh) &= jh \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m ((jh)^2 - k^2 h^2) \\ &= jh \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (j^2 h^2 - k^2 h^2) \\ &= jh \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m h^2 (j^2 - k^2) \\ &= jhh^{2(m-1)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (j^2 - k^2) \\ &= jh^{2m-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (j+k)(j-k) \\ &= jh^{2m-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (j+k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (j-k) \\ &= j(-1)^{m-1} h^{2m-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (k+j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (k-j). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Suku-suku pada ruas kanan persamaan (3.2.3) dapat dijabarkan sebagai

berikut.

$$\begin{aligned}
 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (k+j) &= (1+j)(2+j) \dots ((j-1)+j)((j+1)+j) \dots (m+j) \\
 &= \frac{(j!(1+j)(2+j) \dots ((j-1)+j)(j+j)((j+1)+j) \dots (m+j))}{(j!(j+j))} \\
 &= \frac{(m+j)!}{j!(2j)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (k-j) &= \prod_{k=1}^m (k-j) \prod_{k=j+1}^m (k-j) \\
 &= (1-j)(2-j) \dots ((j-1)-j)((j+1)-j)((j+2)-j) \dots (m-j) \\
 &= (1-j)(2-j) \dots (-1)(1)(2) \dots (m-j) = (-1)^{j-1}(j-1)(j-2) \dots (1)(1)(2) \dots (m-j) \\
 &= (-1)^{j-1}(j-1)!(m-j)!
 \end{aligned}$$

Sehingga, persamaan (3.2.3) menjadi

$$\begin{aligned}
 f_j(jh) &= j(-1)^{m-1} h^{2m-1} \frac{(m+j)!}{(2j)j!} (-1)^{j-1}(j-1)!(m-j)! \\
 &= \frac{(-1)^{m+j} h^{2m-1} (m+j)!(m-j)!}{2j}
 \end{aligned}$$

□

Sebelum membahas Teorema 3.2.2, didefinisikan notasi $\sigma_p(1, 2, \dots, m|j) =$ jumlah dari hasil kali p suku yang berbentuk $r_1^2 r_2^2 \dots r_p^2$, dimana $\{r_1, r_2, \dots, r_p\} \subset \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{j\}$, dengan $\sigma_0(1, 2, \dots, m|j) = 1$.

Teorema 3.2.2.

$$\alpha_{j,p}^{(m)} = (2p-1)! \sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{p+j} \quad (3.2.4)$$

Bukti. Pandang kembali polinomial f_j dalam persamaan (3.2.1) berikut ini.

$$f_j(x) = x \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x^2 - k^2 h^2)$$

Ketika polinomial

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x^2 - k^2 h^2) \quad (3.2.5)$$

dijabarkan menjadi bentuk dibawah ini,

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x^2 - k^2 h^2) = (x^2 - 1^2 h^2)(x^2 - 2^2 h^2) \dots (x^2 - (j-1)^2 h^2)(x^2 - (j+1)^2 h^2) \dots (x^2 - m^2 h^2) \quad (3.2.6)$$

jelas terlihat bahwa

1. polinomial (3.2.5) memiliki derajat $2m - 2$
2. semua suku pada polinomial (3.2.5) merupakan perkalian antara suatu konstanta dengan x yang berpangkat genap.

Atau dengan kata lain polinomial (3.2.5) bisa dinyatakan dalam bentuk

$$c_{m-1}x^{2m-2} + c_{m-2}x^{2m-4} + \dots + c_2x^4 + c_1x^2 + c_0.$$

Selanjutnya, dicari koefisien dari tiap suku dari polinomial (3.2.5) tersebut. Jelas dari persamaan (3.2.6) bahwa

$$\begin{aligned} c_0 &= (-1^2 h^2)(-2^2 h^2) \dots (-(j-1)^2 h^2)(-(j+1)^2 h^2) \dots (-m^2 h^2) \\ &= (-1)^{m-1} \left(\frac{m!}{j}\right)^2 h^{2(m-1)} \end{aligned}$$

Untuk mencari koefisien-koefisien $c_1, c_2, \dots, c_{m-1}$, pandang kembali ruas kanan dari persamaan (3.2.6) yang merupakan perkalian dari $m - 1$ suku. Kemudian, himpun suku kedua dari masing-masing $m - 1$ suku perkalian tersebut ke dalam himpunan

$$A = \{-1^2 h^2, -2^2 h^2, \dots, -(j-1)^2 h^2, -(j+1)^2 h^2, \dots, -m^2 h^2, \}.$$

c_1 adalah jumlah dari semua $m - 2$ perkalian yang berbentuk $a_1, a_2, \dots, a_{m-2}$ dimana $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-2}\} \in A$. Atau dengan kata lain, c_1 bisa dinyatakan kedalam

bentuk dibawah ini.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -2^2h^2 \cdot -3^2h^2 \cdots - (j-1)^2h^2 \cdot - (j+1)^2h^2 \cdots - m^2h^2 \\
 &\quad - 1^2h^2 \cdot -3^2h^2 \cdots - (j-1)^2h^2 \cdot - (j+1)^2h^2 \cdots - m^2h^2 \\
 &\quad - 1^2h^2 \cdot -2^2h^2 \cdot -4^2h^2 \cdots - (j-1)^2h^2 \cdot - (j+1)^2h^2 \cdots - m^2h^2 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad - 1^2h^2 \cdot -2^2h^2 \cdots - (j-2)^2h^2 \cdot - (j+1)^2h^2 \cdots - m^2h^2 \\
 &\quad - 1^2h^2 \cdot -2^2h^2 \cdots - (j-1)^2h^2 \cdot - (j+2)^2h^2 \cdots - m^2h^2 \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad - 1^2h^2 \cdot -2^2h^2 \cdots - (j-1)^2h^2 \cdot - (j+1)^2h^2 \cdots - (m-1)^2h^2 \\
 &= (-1)^{m-2} h^{2(m-2)} (2^2 \cdot 3^2 \cdots (j-1)^2 (j+1)^2 \cdots m^2 \\
 &\quad + 1^2 \cdot 3^2 \cdots (j-1)^2 (j+1)^2 \cdots m^2 + 1^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdots (j-1)^2 (j+1)^2 \cdots m^2 \\
 &\quad + \cdots + 1^2 \cdot 2^2 \cdots (j-2)^2 (j+1)^2 \cdots m^2 + 1^2 \cdot 2^2 \cdots (j-1)^2 (j+2)^2 \cdots m^2 \\
 &\quad + \cdots + 1^2 \cdot 2^2 \cdots (j-1)^2 (j+1)^2 \cdots (m-1)^2)
 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$c_1 = (-1)^{m-2} h^{2(m-2)} \sigma_{m-2}(1, 2, \dots, m|j).$$

Kemudian dengan cara yang sama, c_2 adalah jumlah dari semua $m-3$ perkalian yang berbentuk $a_1, a_2, \dots, a_{m-3}$ dimana $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-3}\} \in A$.

Sehingga,

$$c_2 = (-1)^{m-3} h^{2(m-3)} \sigma_{m-3}(1, 2, \dots, m|j).$$

Sehingga, secara umum dapat disimpulkan bahwa c_n adalah jumlah dari semua $m-n-1$ perkalian yang berbentuk $a_1, a_2, \dots, a_{m-n-1}$ dimana $\{a_1, a_2, \dots, a_{m-n-1}\} \in A$. Sehingga,

$$c_n = (-1)^{m-n-1} h^{2(m-n-1)} \sigma_{m-n-1}(1, 2, \dots, m|j). \quad (3.2.7)$$

Selanjutnya pandang kembali polinomial (3.2.5) yang dinyatakan pada persamaan (3.2.8) berikut ini.

$$\begin{aligned}
 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x^2 - k^2 h^2) &= c_{m-1} x^{2m-2} + c_{m-2} x^{2m-4} + \cdots + c_2 x^4 + c_1 x^2 + c_0 \\
 &= \sum_{n=0}^{m-1} c_n x^{2n}
 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.2.7) ke persamaan (3.2.8) didapat

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (x^2 - k^2 h^2) = \sum_{n=0}^{m-1} ((-1)^{m-n-1} h^{2(m-n-1)} \sigma_{m-n-1}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n}.$$

Sehingga polinomial f_j dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} f_j(x) &= x \sum_{n=0}^{m-1} (h^{2(m-n-1)} (-1)^{m-n-1} \sigma_{m-n-1}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n} \\ &= x \sum_{n=1}^m (h^{2(m-(n-1)-1)} (-1)^{m-(n-1)-1} \sigma_{m-(n-1)-1}(1, 2, \dots, m|j)) \\ &\quad x^{2(n-1)} \\ &= x \sum_{n=1}^m (h^{2(m-n)} (-1)^{m-n} \sigma_{m-n}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n-2} \\ &= \sum_{n=1}^m (h^{2(m-n)} (-1)^{m-n} \sigma_{m-n}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n-1} \end{aligned}$$

Kemudian, turunan pertama, kedua, ketiga dari f_j secara berturut-turut diberikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f'_j(x) &= \sum_{n=1}^m (2n-1) (h^{2(m-n)} (-1)^{m-n} \sigma_{m-n}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n-2} \\ f''_j(x) &= \sum_{n=1}^m (2n-1)(2n-2) (h^{2(m-n)} (-1)^{m-n} \sigma_{m-n}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n-3} \\ f'''_j(x) &= \sum_{n=1}^m (2n-1)(2n-2)(2n-3) (h^{2(m-n)} (-1)^{m-n} \sigma_{m-n}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n-4} \end{aligned}$$

Sehingga, turunan ke $2p-1$ dari f_j dengan $p \in \{1, 2, \dots, m\}$ adalah

$$\begin{aligned} f_j^{(2p-1)}(x) &= \sum_{n=1}^m (2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots (2n-(2p-1)) \\ &\quad (h^{2(m-n)} (-1)^{m-n} \sigma_{m-n}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n-(2p-1)+1} \\ &= \sum_{n=p}^m (2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots (2n-(2p-1)) \\ &\quad (h^{2(m-n)} (-1)^{m-n} \sigma_{m-n}(1, 2, \dots, m|j)) x^{2n-(2p-1)+1} \end{aligned}$$

Untuk $n = p$, $(2n-1)(2n-2)(2n-3) \dots (2n-(2p-1)) = (2p-1)!$ dan $x^{2n-(2p-1)+1} = x^0 = 1$

Sehingga,

$$f_j^{(2p-1)}(0) = (2p-1)! h^{2(m-p)} (-1)^{m-p} \sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|j) \quad (3.2.9)$$

Berdasarkan metode *centered finite difference* (dapat dilihat pada Subbab 2.5), terdapat koefisien $\left\{ \alpha_{k,p}^{(m)} \right\}_{p=1}^m$ sedemikian sehingga turunan ke $2p-1$ dari fungsi

f_j dapat diaproksimasi dengan order $2m + 2 - 2p$ sebagai berikut:

$$f_j^{(2p-1)}(x) \approx \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)}(f_j(x+kh) - f_j(x-kh))}{h^{2p-1}}$$

Namun, dalam implementasi nya,

$$f_j^{(2p-1)}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)}(f_j(x+kh) - f_j(x-kh))}{h^{2p-1}}$$

Sehingga, untuk nilai $x = 0$ terpenuhi

$$f_j^{(2p-1)}(0) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)}(f_j(kh) - f_j(-kh))}{h^{2p-1}} = \frac{\alpha_{j,p}^{(m)}(f_j(jh) - f_j(-jh))}{h^{2p-1}} \quad (3.2.10)$$

Dari definisi f_j yang diberikan oleh persamaan (3.2.1), didapat

$$f_j(-jh) = -jh \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m ((-jh)^2 - k^2 h^2) = -jh \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m ((jh)^2 - k^2 h^2) = -f_j(jh)$$

Sehingga, ruas kanan dari persamaan (3.2.10) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} f_j^{(2p-1)}(0) &= \frac{\alpha_{j,p}^{(m)}(f_j(jh) - (-f_j(jh)))}{h^{2p-1}} \\ &= \frac{\alpha_{j,p}^{(m)}(2f_j(jh))}{h^{2p-1}} \\ &= \frac{\alpha_{j,p}^{(m)}(2 \frac{(-1)^{m+j} h^{2m-1} (m+j)! (m-j)!}{2j})}{h^{2p-1}} \\ &= \alpha_{j,p}^{(m)} \left(\frac{h^{2m-1}}{h^{2p-1}} \right) \frac{(m+j)! (m-j)!}{j} (-1)^{m+j} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

untuk $j, p = 1, \dots, m$.

Dari persamaan (3.2.9) dan persamaan (3.2.11) didapat,

$$(2p-1)! h^{2(m-p)} (-1)^{m-p} \sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|j) = \alpha_{j,p}^{(m)} \left(\frac{h^{2m-1}}{h^{2p-1}} \right) \frac{(m+j)! (m-j)!}{j} (-1)^{m+j}$$

Sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j,p}^{(m)} &= \frac{(2p-1)!h^{2(m-p)}(-1)^{m-p}\sigma_{m-p}(1,2,\dots,m|j)}{\binom{h^{2m-1}}{h^{2p-1}} \frac{(m+j)!(m-j)!}{j} (-1)^{m+j}} \\
 &= \frac{(2p-1)!h^{2(m-p)}(-1)^{m-p}\sigma_{m-p}(1,2,\dots,m|j)jh^{2p-1}}{h^{2m-1}(m+j)!(m-j)!(-1)^{m+j}} \\
 &= (2p-1)!\sigma_{m-p}(1,2,\dots,m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{m-p-m-j} \\
 &= (2p-1)!\sigma_{m-p}(1,2,\dots,m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{p+j}
 \end{aligned}$$

□

Walaupun teorema diatas berlaku untuk $p = 1, 2, \dots, m$, untuk $p = 1, 2, m$ bisa didapatkan bentuk yang lebih sederhana seperti berikut ini.

Untuk $p = 1$,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j,1}^{(m)} &= (1)!\sigma_{m-1}(1,2,\dots,m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{1+j} \\
 &= \frac{(m!)^2}{j^2} \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{1+j} \\
 &= \frac{1}{j} \left(\frac{\binom{m}{j}}{\binom{m+j}{j}} \right) (-1)^{1+j}.
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Untuk $p = 2$,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j,1}^{(m)} &= (3)!\sigma_{m-2}(1,2,\dots,m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{2+j} \\
 &= 6\sigma_{m-2}(1,2,\dots,m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^j \\
 &= 6\left(\sum_{k=1, k \neq j}^m \left(\frac{m!}{jk}\right)^2\right) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^j \\
 &= 6\left(\left(\frac{m!}{j}\right)^2 \sum_{k=1, k \neq j}^m \left(\frac{1}{k}\right)^2\right) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^j \\
 &= 6\left(\left(\frac{m!}{j}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{j}\right)^2\right) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^j \\
 &= 6\left(\frac{1}{j} \left(\sum_{k=1, k \neq j}^m \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{j^2}\right) \frac{(m!)^2}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^j \\
 &= 6\left(\frac{1}{j} \left(\sum_{k=1, k \neq j}^m \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{j^2}\right) \frac{\binom{m}{j}}{\binom{m+j}{j}} (-1)^j \\
 &= \frac{6}{j} \frac{\binom{m}{j}}{\binom{m+j}{j}} \left(\sum_{k=1, k \neq j}^m \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{j^2} (-1)^j.
 \end{aligned}$$

Untuk $p = m$,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j,m}^{(m)} &= (2m-1)! \sigma_{m-m}(1, 2, \dots, m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{m+j} \\
 &= j \frac{(2m-1)!}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{m+j} \\
 &= j \frac{(2m-1)!}{(m!)^2} \frac{\binom{m}{j}}{\binom{m+j}{j}} (-1)^{m+j} \\
 &= \frac{j}{2m} \binom{2m}{m} \frac{\binom{m}{j}}{\binom{m+j}{j}} (-1)^{m+j}.
 \end{aligned}$$

Pandang kembali persamaan (3.1.5) berikut

$$\beta_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}$$

Karena sudah didapatkan rumus dari $\alpha_{k,p}^{(m)}$, maka bisa didapatkan nilai dari $\beta_k^{(m)}$.

3.3 Penentuan Batas Koefisien Koreksi

Seperti yang sudah disinggung pada Subbab 3.1, nilai koefisien koreksi $\beta_k^{(m)}$ yang besar mengakibatkan aturan koreksi batas menjadi kurang stabil, maka pada subbab ini akan dianalisa batas dari $\{\beta_k^{(m)}\}_{k=1}^m$. Untuk menentukan batas dari $\{\beta_k^{(m)}\}_{k=1}^m$, pertama-tama ditentukan terlebih dahulu batas dari $\{\alpha_{k,p}^{(m)}\}_{k=1}^m$ seperti yang ditunjukkan oleh teorema berikut ini.

Teorema 3.3.1. Untuk setiap bilangan bulat positif m , jika $\alpha_{k,p}^{(m)}$ adalah fungsi yang diberikan pada persamaan (3.2.4), maka $|\alpha_{j,p}^{(m)}| \leq j |\alpha_{1,p}^{(m)}|$ untuk setiap $j, p = 1, 2, \dots, m$.

Bukti. Untuk $j = 1$, jelas bahwa $|\alpha_{1,p}^{(m)}| \leq 1 |\alpha_{1,p}^{(m)}|$. Untuk $j \neq 1$, buktinya adalah sebagai berikut. Dari persamaan (3.2.4) dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{|\alpha_{j,p}^{(m)}|}{|\alpha_{1,p}^{(m)}|} &= \frac{|(2p-1)! \sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{p+j}|}{|(2p-1)! \sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|1) \frac{1}{(m+1)!(m-1)!} (-1)^{p+1}|} \\
 &= j \frac{\sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|j) (m+1)!(m-1)!}{\sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|1) (m+j)!(m-j)!}
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Kemudian, suku pada ruas kanan persamaan (3.3.1) dapat dijabarkan sebagai

berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{(m+1)!(m-1)!}{(m+j)!(m-j)!} &= \frac{((m+1)!(m-1)(m-2)\dots(m-j)!)}{((m+j)\dots(m+2)(m+1)!(m-j)!)} \\
 &= \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-j+1)}{(m+j)\dots(m+2)} \\
 &= \prod_{n=1}^{j-1} \frac{m-n}{m+n+1}.
 \end{aligned}$$

Karena m dan n merupakan bilangan bulat positif dengan $n < m$, maka $\frac{m-n}{m+n+1} < 1$. Sehingga

$$\frac{(m+1)!(m-1)!}{(m+j)!} = \prod_{n=1}^{j-1} \frac{m-n}{m+n+1} < 1.$$

Kemudian, jelas bahwa

$$\sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|j) \leq \sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|1)$$

untuk setiap $j, p = 1, \dots, m$. Sehingga, persamaan (3.3.1) dapat ditulis menjadi

$$\frac{|\alpha_{j,p}^{(m)}|}{|\alpha_{1,p}^{(m)}|} = j \frac{\sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|j)(m+1)!(m-1)!}{\sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|1)(m+j)!(m-j)!} < j.$$

□

Karena $|\alpha_{j,p}^{(m)}| \leq j|\alpha_{1,p}^{(m)}|$ untuk setiap $j, p = 1, \dots, m$, selanjutnya dibahas mengenai laju pertumbuhan dari $\left\{|\alpha_{1,p}^{(m)}|\right\}_{p=1}^m$. Untuk bilangan bulat positif m yang diberikan, laju pertumbuhan dari $\left\{\alpha_{1,p}^{(m)}\right\}_{p=1}^m$ adalah $W_m = \max_{1 \leq p \leq m-1} \frac{\alpha_{1,p+1}^{(m)}}{\alpha_{1,p}^{(m)}}$.

Laju pertumbuhan tersebut akan digunakan untuk menentukan batas dari $\left\{\beta_k^{(m)}\right\}_{k=1}^m$ seperti yang akan dijelaskan kemudian pada Teorema 3.3.3. Nilai W_m untuk nilai $m = 10, 20, 50, 100, 200, 1000$ adalah $W_{10} \approx 4,2$; $W_{20} \approx 5,4$; $W_{50} \approx 6,8$; $W_{100} \approx 7,6$; $W_{200} \approx 8,2$; $W_{1000} \approx 9,1$. (Aguilar, 2015)

$\left\{|\alpha_{1,p}^{(m)}|\right\}_{p=1}^m$ adalah barisan yang tidak monoton, kecuali untuk nilai m yang kecil (nilai $\alpha_{k,p}^{(m)}$ dapat dilihat pada Subbab 4.2). Hal tersebut menyulitkan dalam menaksir W_m untuk sembarang m . Tes numerik menunjukkan bahwa barisan W_m terbatas. Apakah W_m terbatas atau tidak masih menjadi pertanyaan terbuka sampai saat ini. (Aguilar, 2015)

Dengan menggunakan Teorema 3.3.1, teorema berikut ini menyatakan batas dari $\left\{\beta_k^{(m)}\right\}_{k=1}^m$ oleh suku pertamanya, yaitu $\beta_1^{(m)}$.

Teorema 3.3.2. Untuk sembarang bilangan bulat positif m yang diberikan, dan untuk sembarang jenis aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas

yang didefinisikan pada persamaan (3.1.1), koefisien koreksi $\{\beta_k^{(m)}\}_{k=1}^m$ memenuhi $|\beta_k^{(m)}| \leq k|\beta_1^{(m)}|$ untuk setiap $k = 2, \dots, m$.

Bukti. Langkah 1: Pandang persamaan (3.1.5) berikut ini

$$\beta_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}$$

Jelas bahwa, $|\beta_k^{(m)}| = |\sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}|$.

Langkah 2: Dari persamaan (3.2.4), jelas bahwa $\{\alpha_{k,p}^{(m)}\}_{p=1}^m$ adalah barisan yang berganti tanda untuk sembarang $k = 1, \dots, m$. Berdasarkan definisi B_{2p} yang terdapat pada Subbab 2.1, $\{B_{2p}\}_{p=1}^m$ adalah barisan berganti tanda. Kemudian dari definisi z_p yang diberikan oleh Teorema 2.2.5, $\{z_p\}_{p=1}^m$ adalah barisan yang memiliki tanda tetap. Sehingga, $\{\frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}\}$ adalah barisan yang memiliki tanda yang tetap untuk sembarang $k = 1, \dots, m$. Hal tersebut mengakibatkan

$$|\sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}| = \sum_{p=1}^m \frac{|B_{2p}|}{(2p)!} |z_p| |\alpha_{k,p}^{(m)}|.$$

Langkah 3: Berdasarkan Langkah 1, Langkah 2, dan Teorema 3.3.1, didapat pertidaksamaan berikut

$$\begin{aligned} |\beta_k^{(m)}| &= |\sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}| \\ &= \sum_{p=1}^m \frac{|B_{2p}|}{(2p)!} |z_p| |\alpha_{k,p}^{(m)}| \\ &\leq \sum_{p=1}^m \frac{|B_{2p}|}{(2p)!} |z_p| k |\alpha_{1,p}^{(m)}| \\ &= k \sum_{p=1}^m \frac{|B_{2p}|}{(2p)!} |z_p| |\alpha_{1,p}^{(m)}| \\ &= k |\beta_1^{(m)}|, \end{aligned}$$

untuk sembarang $k = 1, \dots, m$. □

Teorema 3.3.2 menunjukkan bahwa koefisien koreksi $\{\beta_k^{(m)}\}_{k=1}^m$ terbatas oleh suku pertamanya yaitu $\beta_1^{(m)}$. Selanjutnya, teorema dibawah ini menunjukkan batas dari $\beta_1^{(m)}$.

Teorema 3.3.3. Misal m adalah suatu bilangan bulat positif,

$W_m = \max_{1 \leq p \leq m-1} \frac{|\alpha_{1,p+1}^{(m)}|}{|\alpha_{1,p}^{(m)}|}, N(2m+2, h)$ adalah aturan Kuadratur Newton-Cotes

dengan koreksi pada batas, dengan koefisien koreksi $\{\beta_k^{(m)}\}_{k=1}^m$. Misal untuk

semua bilangan bulat positif p , z_p adalah suatu konstanta yang didefinisikan oleh Teorema 2.2.5.

Jika $|z_p| \leq C\lambda^p$ untuk semua p , maka $|\beta_k^{(m)}| \leq (\frac{4C}{W_m})(\frac{m}{m+1}) \sum_{p=1}^m (\frac{\lambda W_m}{4\pi^2})^p$.

Bukti. Langkah 1: Dengan mensubstitusi $k = 1$ ke definisi $\beta_k^{(m)}$ yang terdapat pada persamaan (3.1.5), didapat $|\beta_1^{(m)}| = |\sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{1,p}^{(m)}|$. Selanjutnya, pada Langkah 2 pada bukti Teorema 3.3.2, sudah dibahas bahwa $\{\frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}\}_{p=1}^m$ adalah barisan yang memiliki tanda yang tetap, untuk sembarang $k = 1, \dots, m$. Sehingga,

$$|\beta_1^{(m)}| = |\sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{1,p}^{(m)}| = \sum_{p=1}^m |\frac{B_{2p}}{(2p)!}| |z_p| |\alpha_{1,p}^{(m)}|.$$

Langkah 2: Dari (Abramowitz, 1965), didapat pertidaksamaan

$$\frac{2}{(2\pi)^{2n}} < (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} < \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \left(\frac{1}{1 - (2)4^{-n}} \right).$$

Jelas bahwa $(\frac{1}{1 - (2)4^{-n}}) \leq 2$, sehingga $\frac{2}{(2\pi)^{2n}} (\frac{1}{1 - (2)4^{-n}}) \leq \frac{4}{(2\pi)^{2n}}$. Karena $\frac{2}{(2\pi)^{2n}}$ merupakan suatu bilangan positif, maka $\frac{-4}{(2\pi)^{2n}} \leq \frac{2}{(2\pi)^{2n}}$. Sehingga didapat pertidaksamaan berikut

$$\frac{-4}{(2\pi)^{2n}} \leq \frac{2}{(2\pi)^{2n}} < (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} < \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \left(\frac{1}{1 - (2)4^{-n}} \right) \leq \frac{4}{(2\pi)^{2n}}$$

$$\frac{-4}{(2\pi)^{2n}} < (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{(2n)!} < \frac{4}{(2\pi)^{2n}}$$

$$|(-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{(2n)!}| < \frac{4}{(2\pi)^{2n}}$$

$$|\frac{B_{2n}}{(2n)!}| < \frac{4}{(2\pi)^{2n}}$$

Langkah 3: Pandang laju pertumbuhan dari $\{\alpha_{1,p}^{(m)}\}_{p=1}^m$ berikut ini

$W_m = \max_{1 \leq p \leq m-1} \frac{|\alpha_{1,p+1}^{(m)}|}{|\alpha_{1,p}^{(m)}|}$. Dari definisi laju pertumbuhan tersebut, jelas bahwa

$$W_m \leq \frac{|\alpha_{1,2}^{(m)}|}{|\alpha_{1,1}^{(m)}|}, W_m \leq \frac{|\alpha_{1,3}^{(m)}|}{|\alpha_{1,2}^{(m)}|}, \dots, W_m \leq \frac{|\alpha_{1,p}^{(m)}|}{|\alpha_{1,p-1}^{(m)}|}.$$

Dengan mengalikan semua pertidaksamaan diatas, didapat $W_m^{p-1} \leq \frac{|\alpha_{1,p}^{(m)}|}{|\alpha_{1,1}^{(m)}|}$, yang

mengakibatkan $|\alpha_{1,p}^{(m)}| \leq |\alpha_{1,1}^{(m)}| (W_m)^{p-1}$.

Langkah 4: Dari persamaan (3.2.12), didapat

$$\alpha_{1,1}^{(m)} = \binom{m}{m+1} = \frac{\frac{m!}{(m-1)!}}{\frac{(m+1)!}{m!}} = \frac{m!}{(m-1)!} \frac{m!}{(m+1)!} = \frac{m}{m+1}, \text{ sehingga } |\alpha_{1,1}^{(m)}| = \left| \frac{m}{m+1} \right| = \frac{m}{m+1}.$$

Langkah 5: Dari premis teorema dan Langkah 1 sampai Langkah 4, didapat pertidaksamaan berikut

$$\begin{aligned} |\beta_1^{(m)}| &= \sum_{p=1}^m \left| \frac{B_{2p}}{(2p)!} \right| |z_p| |\alpha_{1,p}^{(m)}| \\ &< \sum_{p=1}^m \frac{4}{(2\pi)^{2p}} C \lambda^p |\alpha_{1,1}^{(m)}| (W_m)^{p-1} \\ &= \sum_{p=1}^m \frac{4C}{(2\pi)^{2p}} \lambda^p \left(\frac{m}{m+1} \right) (W_m)^{p-1} \\ &= \sum_{p=1}^m \left(\frac{4C}{W_m} \right) \left(\frac{m}{m+1} \right) \frac{\lambda^p}{(4\pi^2)^p} (W_m)^p \\ &= \left(\frac{4C}{W_m} \right) \left(\frac{m}{m+1} \right) \sum_{p=1}^m \left(\frac{\lambda W_m}{4\pi^2} \right)^p. \end{aligned}$$

□

Selanjutnya, dari Teorema 3.3.3 diatas, bisa didapatkan akibat dibawah ini.

Akibat 3.3.4. Jika $|\lambda| < \frac{4\pi^2}{W_m}$, maka $|\beta_1^{(m)}| < \frac{4\lambda C}{4\pi^2 - \lambda W_m}$.

Bukti. Dari premis $|\lambda| < \frac{4\pi^2}{W_m}$, jelas bahwa $|\lambda \frac{W_m}{4\pi^2}| < 1$.

Kemudian dari kenyataan bahwa $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ ketika $|x| < 1$, didapat $\sum_{p=0}^{\infty} (\lambda \frac{W_m}{4\pi^2})^p = \frac{1}{1 - \frac{\lambda W_m}{4\pi^2}}$. Selain itu, $\sum_{p=0}^{\infty} (\lambda \frac{W_m}{4\pi^2})^p = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (\lambda \frac{W_m}{4\pi^2})^p$. Sehingga didapat $\frac{1}{1 - \frac{\lambda W_m}{4\pi^2}} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} (\lambda \frac{W_m}{4\pi^2})^p$. yang mengakibatkan

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\lambda \frac{W_m}{4\pi^2} \right)^p = \frac{1}{1 - \frac{\lambda W_m}{4\pi^2}} - 1 = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 - \lambda W_m} - 1 = \frac{\lambda W_m}{4\pi^2 - \lambda W_m}. \quad (3.3.2)$$

Terakhir, dari Teorema 3.3.3 dan persamaan (3.3.2) didapat,

$$\begin{aligned} |\beta_1^{(m)}| &\leq \left(\frac{4C}{W_m} \right) \left(\frac{m}{m+1} \right) \sum_{p=1}^m \left(\frac{\lambda W_m}{4\pi^2} \right)^p \\ &\leq \left(\frac{4C}{W_m} \right) \left(\frac{m}{m+1} \right) \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda W_m}{4\pi^2} \right)^p \\ &= \left(\frac{4C}{W_m} \right) \left(\frac{m}{m+1} \right) \frac{\lambda W_m}{4\pi^2 - \lambda W_m} \\ &\leq \frac{4\lambda C}{4\pi^2 - \lambda W_m}. \end{aligned}$$

□

3.4 Aturan Modifikasi Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas

Pada subbab ini dibahas mengenai suatu aturan yang merupakan modifikasi sederhana dari aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas yang telah dibahas pada Subbab 3.1.

Modifikasi sederhana yang dimaksud adalah modifikasi dari titik-titik yang digunakan untuk aproksimasi turunan ke $2p - 1$ dari fungsi f untuk semua bilangan bulat positif p , seperti yang sebelumnya telah diberikan oleh persamaan (2.5.1) pada Subbab 2.5 berikut ini

$$f^{(2p-1)}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)}(f(x+kh) - f(x-kh))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}).$$

Pandang titik-titik yang digunakan untuk aproksimasi dari metode diatas, yaitu $x + kh$ dan $x - kh$ untuk $k = 1, 2, \dots, m$. Selanjutnya untuk semua $k = 1, 2, \dots, m$, ganti h dengan $\frac{h}{t}$ pada titik-titik tersebut, sehingga titik-titik yang digunakan untuk aproksimasi secara berturut-turut menjadi $x + k\frac{h}{t}$ dan $x - k\frac{h}{t}$. Penggantian h dengan $\frac{h}{t}$ tersebut, mengakibatkan persamaan (2.5.1) berubah menjadi

$$\begin{aligned} f^{(2p-1)}(x) &= \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{k,p}^{(m)}(f(x+k\frac{h}{t}) - f(x-k\frac{h}{t}))}{(\frac{h}{t})^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{t^{2p-1} \alpha_{k,p}^{(m)}(f(x+k\frac{h}{t}) - f(x-k\frac{h}{t}))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Kemudian, tetapkan $\tilde{\alpha}_{k,p}^{(m)} = t^{2p-1} \alpha_{k,p}^{(m)}$. Sehingga persamaan (3.4.1) diatas menjadi

$$f^{(2p-1)}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_{k,p}^{(m)}(f(x+k\frac{h}{t}) - f(x-k\frac{h}{t}))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}). \quad (3.4.2)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusi $x = a$ dan $x = b$ secara berturut-turut pada persamaan (3.4.2), didapat

$$f^{(2p-1)}(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_{k,p}^{(m)}(f(a+k\frac{h}{t}) - f(a-k\frac{h}{t}))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}), \quad (3.4.3)$$

dan

$$f^{(2p-1)}(b) = \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_{k,p}^{(m)}(f(b+k\frac{h}{t}) - f(b-k\frac{h}{t}))}{h^{2p-1}} + O(h^{2m+2-2p}). \quad (3.4.4)$$

Kemudian, dengan mensubstitusi persamaan (3.4.3) dan persamaan (3.4.4) persamaan diatas pada suku *error* persamaan (2.2.1) dan dengan manipulasi aljabar seperti pada bukti aturan koreksi batas, didapatkan suatu aturan baru yaitu, aturan modifikasi kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas berikut ini.

Teorema 3.4.1 (Aturan Modifikasi Kuadratur Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas). Misal $f \in C^{2m+2}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ merupakan suatu partisi dari interval $[a, b]$ dengan panjang tiap subinterval sebesar $h = \frac{b-a}{N}$, $NC(h)$ adalah aturan komposit Newton-Cotes yang mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$. Jika diberikan suatu bilangan bulat positif m dan t , maka terdapat suatu barisan koefisien koreksi $\{\tilde{\beta}_k^{(m)}\}_{k=1}^m$ yang tidak bergantung pada h , tetapi bergantung pada m dan pada barisan $\{z_p\}_{p=1}^\infty$, sedemikian sehingga aturan modifikasi kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas dengan suku *error* nya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = NC_{\frac{1}{t}}(2m+2, h) + O(h^{2m+2}), \quad (3.4.5)$$

dimana

$$NC_{\frac{1}{t}}(2m+2, h) = NC(h) - h \sum_{k=1}^m \tilde{\beta}_k^{(m)} \left(f(b + k\frac{h}{t}) - f(b - k\frac{h}{t}) - f(a + k\frac{h}{t}) + f(a - k\frac{h}{t}) \right).$$

Untuk memudahkan, aturan modifikasi kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas selanjutnya boleh disebut aturan modifikasi. Kemudian, koefisien koreksi $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ yang terdapat pada aturan modifikasi, memiliki bentuk yang mirip dengan koefisien koreksi $\beta_k^{(m)}$ yang terdapat pada aturan koreksi batas, yaitu

$$\tilde{\beta}_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \tilde{\alpha}_{k,p}^{(m)}. \quad (3.4.6)$$

Karena $\tilde{\alpha}_{k,p}^{(m)} = t^{2p-1} \alpha_{k,p}^{(m)}$, maka persamaan (3.4.6) diatas bisa ditulis menjadi

$$\tilde{\beta}_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p t^{2p-1} \alpha_{k,p}^{(m)}. \quad (3.4.7)$$

Selanjutnya, ditetapkan $\tilde{z}_p = z_p t^{2p-1}$, sehingga selain memiliki bentuk yang diberikan oleh persamaan (3.4.6), $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ juga memiliki bentuk

$$\tilde{\beta}_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} \tilde{z}_p \alpha_{k,p}^{(m)}.$$

Sama seperti aturan sebelumnya, aturan modifikasi ini memiliki order $2m+2$ dan membesarnya nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ membuat aturan menjadi tidak stabil (Aguilar, 2015). Kemudian pada bab selanjutnya, kedua aturan akan dibandingkan menggunakan

integral tentu dari fungsi yang berosilasi.

BAB 4

IMPLEMENTASI ATURAN KUADRATUR NEWTON-COTES DAN ATURAN MODIFIKASINYA

Pada bab ini diimplementasikan aturan koreksi batas dan aturan modifikasinya yang telah dibahas pada Bab 3 dengan menggunakan perangkat lunak Matlab dengan 25 desimal *floating point*. Nilai aproksimasi kedua metode dan *relative error* akan dihitung. Integral yang digunakan pada implementasi adalah:

1. $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x) dx$, dengan nilai eksak 2π
2. $\int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx$, dengan nilai eksak $\frac{32}{3}$
3. $\int_0^1 f(x) e^{iwx} dx$, untuk beberapa $w \in \Re$, dengan $f(x) = e^x$. Nilai w yang digunakan adalah 300, 500, 1000, 3000, 5000 dan 10000, dengan nilai eksak $\frac{i(1-e^{1+wi})}{w-i}$.

Integran pertama adalah fungsi yang mulus dan periodik dengan periode 2π . Integran kedua adalah fungsi yang mulus dan berorder 2, sedangkan integran ketiga merupakan fungsi yang berosilasi. Integral pertama dan kedua akan diaproksimasi menggunakan aturan komposit Newton-Cotes dan aturan koreksi pada batas, sedangkan integral ketiga akan diaproksimasi menggunakan aturan koreksi batas dan aturan modifikasi.

Pandang kembali aturan koreksi batas dan aturan modifikasinya, seperti yang sebelumnya dinyatakan pada persamaan (3.1.1) dan persamaan (3.4.5), berikut ini.

$$\int_a^b f(x) dx = NC(h) - h \sum_{k=1}^m \beta_k^{(m)} (f(b+kh) - f(b-kh) - f(a+kh) + f(a-kh)) + O(h^{2m+2})$$

$$\int_a^b f(x) dx = NC(h) - h \sum_{k=1}^m \tilde{\beta}_k^{(m)} (f(b+k\frac{h}{t}) - f(b-k\frac{h}{t}) - f(a+k\frac{h}{t}) + f(a-k\frac{h}{t})) + O(h^{2m+2}).$$

Dapat dilihat bahwa untuk mengimplementasikan kedua aturan tersebut, dibutuhkan nilai aproksimasi dari aturan komposit Newton-Cotes ($NC(h)$), nilai-nilai $\beta_k^{(m)}$, dan $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ untuk $k = 1, \dots, m$. Nilai-nilai koefisien koreksi $\beta_k^{(m)}$ dan $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ akan dihitung pada Subbab 4.1, sedangkan aturan komposit Newton-Cotes diimplementasikan di Subbab 4.2. Terakhir, implementasi aturan koreksi batas dan aturan modifikasinya secara berurutan berada pada Subbab 4.3 dan 4.4.

Hasil implementasi akan dianalisa dengan membandingkan nilai digit signifikan dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 4.0.1. p^* mengaproksimasi p dengan digit signifikan t , jika t adalah bilangan bulat non-negatif terbesar yang memenuhi [1]

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 5 \times 10^{-t}.$$

Pada implementasi ini, nilai m , h , dan t yang digunakan adalah $m = 4, 9, 14, 19$; $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$; dan $t = 2, 3$.

4.1 Nilai Koefisien Koreksi $\beta_k^{(m)}$ dan $\tilde{\beta}_k^{(m)}$

4.1.1 Nilai $\beta_k^{(m)}$

Pandang kembali rumus dari $\beta_k^{(m)}$ yang terdapat pada persamaan (3.1.5) berikut ini

$$\beta_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \alpha_{k,p}^{(m)}.$$

Dari persamaan diatas, jelas bahwa untuk menghitung nilai $\beta_k^{(m)}$, dibutuhkan nilai dari B_{2p} , z_p , dan $\alpha_{k,p}^{(m)}$ untuk $k = 1, \dots, m$ dan $p = 1, \dots, m$. Nilai B_{2p} dan z_p secara berurutan-urutan didefinisikan pada Subbab 2.1 dan 2.2. Nilai B_{2p} dapat mudah dihitung menggunakan fungsi Matlab `bernoulli(n)` untuk n bilangan bulat nonnegatif. Nilai z_p juga mudah dihitung menggunakan rumusnya. Lain dengan nilai $\alpha_{k,p}^{(m)}$ yang terdapat pada Subbab 3.2. Nilai $\alpha_{k,p}^{(m)}$ memiliki rumus yang lebih rumit dan terdapat pada Teorema 3.2.2, yaitu

$$\alpha_{j,p}^{(m)} = (2p-1)! \sigma_{m-p}(1, 2, \dots, m|j) \frac{j}{(m+j)!(m-j)!} (-1)^{p+j}.$$

Dengan menggunakan algoritma yang terdapat pada lampiran 2, didapatkan nilai-nilai dari $\alpha_{k,p}^{(m)}$ saat $k = 1, \dots, m$ dan $p = 1, \dots, m$ untuk $m = 4, 9, 14$, dan 19 , yang disajikan oleh tabel-tabel dibawah ini.

Tabel 4.1: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(4)}$

k \ p	1	2	3	4
1	8.0000e-01	-2.0333e+00	4.8333e+00	-7.0000e+00
2	-2.0000e-01	1.4083e+00	-4.3333e+00	7.0000e+00
3	3.8095e-02	-3.0000e-01	1.5000e+00	-3.0000e+00
4	-3.5714e-03	2.9167e-02	-1.6667e-01	5.0000e-01

Tabel 4.2: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(9)}$

k \ p	1	2	3	4	5
1	9.0000e-01	-2.9147e+00	1.1308e+01	-4.4802e+01	1.6611e+02
2	-3.2727e-01	2.5326e+00	-1.2647e+01	5.6206e+01	-2.2170e+02
3	1.2727e-01	-1.0910e+00	7.4185e+00	-3.8880e+01	1.6861e+02
4	-4.4056e-02	3.9049e-01	-2.9190e+00	1.7780e+01	-8.6025e+01
5	1.2587e-02	-1.1327e-01	8.8286e-01	-5.7860e+00	3.0775e+01
6	-2.7972e-03	2.5376e-02	-2.0223e-01	1.3794e+00	-7.7830e+00
7	4.4955e-04	-4.0982e-03	3.3094e-02	-2.3125e-01	1.3544e+00
8	-4.6277e-05	4.2320e-04	-3.4467e-03	2.4463e-02	-1.4688e-01
9	2.2853e-06	-2.0944e-05	1.7157e-04	-1.2308e-03	7.5186e-03

Tabel 4.3: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(9)}$

k \ p	6	7	8	9
1	-5.3655e+02	1.3901e+03	-2.5383e+03	2.4310e+03
2	7.4289e+02	-1.9699e+03	3.6530e+03	-3.5360e+03
3	-5.9903e+02	1.6500e+03	-3.1395e+03	3.0940e+03
4	3.2929e+02	-9.5473e+02	1.8830e+03	-1.9040e+03
5	-1.2765e+02	3.9354e+02	-8.1250e+02	8.5000e+02
6	3.4677e+01	-1.1420e+02	2.4900e+02	-2.7200e+02
7	-6.3545e+00	2.2273e+01	-5.1625e+01	5.9500e+01
8	7.1468e-01	-2.6333e+00	6.5000e+00	-8.0000e+00
9	-3.7550e-02	1.4375e-01	-3.7500e-01	5.0000e-01

Tabel 4.4: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(14)}$

k \ p	1	2	3	4	5
1	9.3333e-01	-3.2256e+00	1.3975e+01	-6.5636e+01	3.1248e+02
2	-3.7917e-01	3.0166e+00	-1.6802e+01	8.8695e+01	-4.5028e+02
3	1.7843e-01	-1.5683e+00	1.1520e+01	-7.1002e+01	3.9518e+02
4	-8.1781e-02	7.4265e-01	-5.9489e+00	4.1566e+01	-2.5442e+02
5	3.4434e-02	-3.1734e-01	2.6418e+00	-1.9638e+01	1.2932e+02
6	-1.2913e-02	1.1995e-01	-1.0192e+00	7.8396e+00	-5.4026e+01
7	4.2164e-03	-3.9354e-02	3.3851e-01	-2.6580e+00	1.8855e+01
8	-1.1739e-03	1.0990e-02	-9.5281e-02	7.5827e-01	-5.4838e+00
9	2.7221e-04	-2.5538e-03	2.2260e-02	-1.7879e-01	1.3105e+00
10	-5.1039e-05	4.7956e-04	-4.1961e-03	3.3924e-02	-2.5109e-01
11	7.4238e-06	-6.9831e-05	6.1275e-04	-4.9781e-03	3.7113e-02
12	-7.8521e-07	7.3922e-06	-6.5004e-05	5.3007e-04	-3.9736e-03
13	5.3690e-08	-5.0578e-07	4.4551e-06	-3.6433e-05	2.7430e-04
14	-1.7805e-09	1.6782e-08	-1.4802e-07	1.2132e-06	-9.1658e-06

Tabel 4.5: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(14)}$

k \ p	6	7	8	9
1	-1.4478e+03	6.3328e+03	-2.5448e+04	9.1324e+04
2	2.1691e+03	-9.7300e+03	3.9775e+04	-1.4446e+05
3	-2.0180e+03	9.4108e+03	-3.9521e+04	1.4634e+05
4	1.3895e+03	-6.7970e+03	2.9547e+04	-1.1223e+05
5	-7.5252e+02	3.8705e+03	-1.7491e+04	6.8448e+04
6	3.3050e+02	-1.7802e+03	8.3667e+03	-3.3815e+04
7	-1.1949e+02	6.6851e+02	-3.2578e+03	1.3599e+04
8	3.5627e+01	-2.0519e+02	1.0314e+03	-4.4375e+03
9	-8.6673e+00	5.1025e+01	-2.6299e+02	1.1623e+03
10	1.6826e+00	-1.0072e+01	5.2964e+01	-2.3945e+02
11	-2.5118e-01	1.5230e+00	-8.1371e+00	3.7492e+01
12	2.7100e-02	-1.6598e-01	8.9818e-01	-4.2037e+00
13	-1.8820e-03	1.1619e-02	-6.3527e-02	3.0119e-01
14	6.3190e-05	-3.9265e-04	2.1649e-03	-1.0375e-02

Tabel 4.6: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(14)}$

k \ p	10	11	12	13	14
1	-2.8299e+05	7.2400e+05	-1.4295e+06	1.9315e+06	-1.3372e+06
2	4.5158e+05	-1.1629e+06	2.3072e+06	-3.1295e+06	2.1730e+06
3	-4.6399e+05	1.2076e+06	-2.4156e+06	3.2972e+06	-2.3008e+06
4	3.6267e+05	-9.5772e+05	1.9374e+06	-2.6679e+06	1.8747e+06
5	-2.2637e+05	6.0868e+05	-1.2490e+06	1.7394e+06	-1.2334e+06
6	1.1479e+05	-3.1521e+05	6.5784e+05	-9.2883e+05	6.6602e+05
7	-4.7461e+04	1.3340e+05	-2.8388e+05	4.0733e+05	-2.9601e+05
8	1.5926e+04	-4.5887e+04	9.9770e+04	-1.4582e+05	1.0764e+05
9	-4.2842e+03	1.2661e+04	-2.8171e+04	4.2030e+04	-3.1590e+04
10	9.0449e+02	-2.7402e+03	6.2460e+03	-9.5313e+03	7.3125e+03
11	-1.4471e+02	4.4884e+02	-1.0483e+03	1.6390e+03	-1.2870e+03
12	1.6530e+01	-5.2387e+01	1.2533e+02	-2.0100e+02	1.6200e+02
13	-1.2034e+00	3.8880e+00	-9.5153e+00	1.5667e+01	-1.3000e+01
14	4.2020e-02	-1.3808e-01	3.4514e-01	-5.8333e-01	5.0000e-01

Tabel 4.7: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(19)}$

k \ p	1	2	3	4	5
1	9.5000e-01	-3.3839e+00	1.5399e+01	-7.7707e+01	4.0846e+02
2	-4.0714e-01	3.2824e+00	-1.9192e+01	1.0897e+02	-6.1151e+02
3	2.0974e-01	-1.8657e+00	1.4196e+01	-9.3701e+01	5.7581e+02
4	-1.0943e-01	1.0053e+00	-8.3129e+00	6.1629e+01	-4.1419e+02
5	5.4715e-02	-5.1005e-01	4.3767e+00	-3.4372e+01	2.4677e+02
6	-2.5534e-02	2.3990e-01	-2.0996e+00	1.7022e+01	-1.2731e+02
7	1.0943e-02	-1.0330e-01	9.1479e-01	-7.5609e+00	5.8042e+01
8	-4.2556e-03	4.0293e-02	-3.5956e-01	3.0093e+00	-2.3507e+01
9	1.4861e-03	-1.4100e-02	1.2648e-01	-1.0677e+00	8.4420e+00
10	-4.6120e-04	4.3823e-03	-3.9455e-02	3.3514e-01	-2.6732e+00
11	1.2578e-04	-1.1965e-03	1.0802e-02	-9.2171e-02	7.4001e-01
12	-2.9755e-05	2.8327e-04	-2.5627e-03	2.1943e-02	-1.7706e-01
13	6.0082e-06	-5.7237e-05	5.1863e-04	-4.4529e-03	3.6071e-02
14	-1.0144e-06	9.6683e-06	-8.7719e-05	7.5475e-04	-6.1329e-03
15	1.3923e-07	-1.3276e-06	1.2057e-05	-1.0392e-04	8.4657e-04
16	-1.4917e-08	1.4229e-07	-1.2934e-06	1.1164e-05	-9.1127e-05
17	1.1700e-09	-1.1163e-08	1.0154e-07	-8.7746e-07	7.1748e-06
18	-5.9728e-11	5.7001e-10	-5.1880e-09	4.4876e-08	-3.6747e-07
19	1.4891e-12	-1.4214e-11	1.2943e-10	-1.1205e-09	9.1865e-09

Tabel 4.8: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(19)}$

k \ p	6	7	8	9
1	-2.1594e+03	1.1220e+04	-5.6311e+04	2.6898e+05
2	3.3650e+03	-1.7948e+04	9.1704e+04	-4.4367e+05
3	-3.3587e+03	1.8633e+04	-9.7872e+04	4.8308e+05
4	2.5767e+03	-1.4974e+04	8.1372e+04	-4.1197e+05
5	-1.6263e+03	9.8998e+03	-5.5792e+04	2.9062e+05
6	8.7665e+02	-5.5570e+03	3.2428e+04	-1.7389e+05
7	-4.1212e+02	2.6975e+03	-1.6229e+04	8.9441e+04
8	1.7054e+02	-1.1436e+03	7.0548e+03	-3.9834e+04
9	-6.2198e+01	4.2473e+02	-2.6728e+03	1.5405e+04
10	1.9920e+01	-1.3791e+02	8.8161e+02	-5.1684e+03
11	-5.5620e+00	3.8917e+01	-2.5188e+02	1.4973e+03
12	1.3396e+00	-9.4512e+00	6.1780e+01	-3.7146e+02
13	-2.7434e-01	1.9482e+00	-1.2837e+01	7.7908e+01
14	4.6838e-02	-3.3439e-01	2.2177e+00	-1.3564e+01
15	-6.4873e-03	4.6516e-02	-3.1016e-01	1.9092e+00
16	7.0026e-04	-5.0391e-03	3.3749e-02	-2.0887e-01
17	-5.5263e-05	3.9886e-04	-2.6814e-03	1.6671e-02
18	2.8359e-06	-2.0520e-05	1.3838e-04	-8.6372e-04
19	-7.1011e-08	5.1492e-07	-3.4820e-06	2.1806e-05

Tabel 4.9: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(19)}$

k \ p	10	11	12	13	14
1	-1.2062e+06	5.0073e+06	-1.8947e+07	6.4179e+07	-1.9029e+08
2	2.0083e+06	-8.3956e+06	3.1939e+07	-1.0864e+08	3.2321e+08
3	-2.2194e+06	9.3834e+06	-3.6010e+07	1.2333e+08	-3.6892e+08
4	1.9296e+06	-8.2808e+06	3.2153e+07	-1.1115e+08	3.3496e+08
5	-1.3920e+06	6.0806e+06	-2.3946e+07	8.3730e+07	-2.5468e+08
6	8.5300e+05	-3.7995e+06	1.5204e+07	-5.3867e+07	1.6564e+08
7	-4.4929e+05	2.0423e+06	-8.3139e+06	2.9885e+07	-9.3020e+07
8	2.0463e+05	-9.4897e+05	3.9318e+06	-1.4351e+07	4.5263e+07
9	-8.0747e+04	3.8164e+05	-1.6090e+06	5.9652e+06	-1.9077e+07
10	2.7570e+04	-1.3259e+05	5.6834e+05	-2.1400e+06	6.9418e+06
11	-8.1076e+03	3.9598e+04	-1.7238e+05	6.5887e+05	-2.1678e+06
12	2.0369e+03	-1.0084e+04	4.4517e+04	-1.7258e+05	5.7576e+05
13	-4.3177e+02	2.1627e+03	-9.6685e+03	3.7976e+04	-1.2839e+05
14	7.5846e+01	-3.8376e+02	1.7348e+03	-6.8961e+03	2.3610e+04
15	-1.0757e+01	5.4901e+01	-2.5063e+02	1.0071e+03	-3.4886e+03
16	1.1844e+00	-6.0905e+00	2.8044e+01	-1.1379e+02	3.9841e+02
17	-9.5051e-02	4.9195e-01	-2.2823e+00	9.3410e+00	-3.3030e+01
18	4.9479e-03	-2.5753e-02	1.2027e-01	-4.9605e-01	1.7698e+00
19	-1.2543e-04	6.5602e-04	-3.0816e-03	1.2798e-02	-4.6031e-02

Tabel 4.10: Nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(19)}$

k \ p	15	16	17	18	19
1	4.7947e+08	-9.8438e+08	1.5423e+09	-1.6379e+09	8.8363e+08
2	-8.1654e+08	1.6800e+09	-2.6369e+09	2.8044e+09	-1.5148e+09
3	9.3612e+08	-1.9330e+09	3.0428e+09	-3.2440e+09	1.7558e+09
4	-8.5510e+08	1.7744e+09	-2.8047e+09	3.0004e+09	-1.6286e+09
5	6.5513e+08	-1.3680e+09	2.1736e+09	-2.3354e+09	1.2723e+09
6	-4.2994e+08	9.0458e+08	-1.4464e+09	1.5624e+09	-8.5499e+08
7	2.4395e+08	-5.1774e+08	8.3398e+08	-9.0650e+08	4.9875e+08
8	-1.2006e+08	2.5730e+08	-4.1796e+08	4.5759e+08	-2.5333e+08
9	5.1223e+07	-1.1096e+08	1.8193e+08	-2.0081e+08	1.1196e+08
10	-1.8880e+07	4.1371e+07	-6.8528e+07	7.6327e+07	-4.2898e+07
11	5.9743e+06	-1.3251e+07	2.2192e+07	-2.4965e+07	1.4156e+07
12	-1.6080e+06	3.6118e+06	-6.1202e+06	6.9594e+06	-3.9853e+06
13	3.6337e+05	-8.2672e+05	1.4182e+06	-1.6315e+06	9.4444e+05
14	-6.7687e+04	1.5601e+05	-2.7106e+05	3.1571e+05	-1.8493e+05
15	1.0126e+04	-2.3641e+04	4.1618e+04	-4.9109e+04	2.9137e+04
16	-1.1701e+03	2.7665e+03	-4.9352e+03	5.9040e+03	-3.5520e+03
17	9.8083e+01	-2.3474e+02	4.2437e+02	-5.1496e+02	3.1450e+02
18	-5.3096e+00	1.2857e+01	-2.3550e+01	2.9000e+01	-1.8000e+01
19	1.3941e-01	-3.4133e-01	6.3333e-01	-7.9167e-01	5.0000e-01

Selanjutnya, dengan menggunakan nilai-nilai $\alpha_{k,p}^{(m)}$ yang bersesuaian, bisa didapatkan nilai-nilai $\beta_k^{(m)}$ saat $k = 1, \dots, m$. Dari rumus $\beta_k^{(m)}$, jelas bahwa nilai $\beta_k^{(m)}$ bergantung dari nilai m dan jenis aturan yang diinginkan (nilai z_p).

Tabel 4.11: Nilai-nilai $\beta_k^{(4)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\beta_k^{(4)}$	
k	T	M	S
1	6.9656e-02	-3.5965e-02	-1.4979e-02
2	-1.8772e-02	1.0189e-02	1.1176e-02
3	3.6434e-03	-2.0024e-03	-2.8671e-03
4	-3.4405e-04	1.9000e-04	3.0699e-04

Tabel 4.12: Nilai-nilai $\beta_k^{(9)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\beta_k^{(9)}$	
k	T	M	S
1	7.9463e-02	-4.1445e-02	-2.8471e-02
2	-3.1260e-02	1.7171e-02	2.8621e-02
3	1.2403e-02	-6.9023e-03	-1.5442e-02
4	-4.3269e-03	2.4203e-03	6.2678e-03
5	1.2410e-03	-6.9587e-04	-1.9608e-03
6	-2.7636e-04	1.5518e-04	4.6115e-04
7	4.4472e-05	-2.4993e-05	-7.6963e-05
8	-4.5819e-06	2.5765e-06	8.1338e-06
9	2.2640e-07	-1.2736e-07	-4.0938e-07

Tabel 4.13: Nilai-nilai $\beta_k^{(14)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\beta_k^{(14)}$	
k	T	M	S
1	8.2782e-02	-4.3318e-02	-3.5730e-02
2	-3.6427e-02	2.0086e-02	3.9950e-02
3	1.7497e-02	-9.7773e-03	-2.6659e-02
4	-8.0838e-03	4.5409e-03	1.4591e-02
5	3.4170e-03	-1.9243e-03	-6.8210e-03
6	-1.2842e-03	7.2422e-04	2.7357e-03
7	4.1989e-04	-2.3700e-04	-9.3512e-04
8	-1.1700e-04	6.6079e-05	2.6895e-04
9	2.7147e-05	-1.5338e-05	-6.3871e-05
10	-5.0924e-06	2.8779e-06	1.2194e-05
11	7.4095e-07	-4.1883e-07	-1.7985e-06
12	-7.8389e-08	4.4318e-08	1.9232e-07
13	5.3610e-09	-3.0312e-09	-1.3265e-08
14	-1.7781e-10	1.0055e-10	4.4307e-10

Tabel 4.14: Nilai-nilai $\beta_k^{(19)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

k	T	$\beta_k^{(19)}$	
		M	S
1	8.4450e-02	-4.4263e-02	-4.0427e-02
2	-3.9227e-02	2.1672e-02	4.7839e-02
3	2.0631e-02	-1.1552e-02	-3.5500e-02
4	-1.0852e-02	6.1084e-03	2.2414e-02
5	5.4473e-03	-3.0742e-03	-1.2574e-02
6	-2.5477e-03	1.4399e-03	6.3276e-03
7	1.0934e-03	-6.1847e-04	-2.8571e-03
8	-4.2557e-04	2.4087e-04	1.1536e-03
9	1.4870e-04	-8.4198e-05	-4.1427e-04
10	-4.6170e-05	2.6150e-05	1.3133e-04
11	1.2596e-05	-7.1356e-06	-3.6417e-05
12	-2.9804e-06	1.6887e-06	8.7287e-06
13	6.0194e-07	-3.4109e-07	-1.7813e-06
14	-1.0164e-07	5.7602e-08	3.0334e-07
15	1.3953e-08	-7.9078e-09	-4.1933e-08
16	-1.4951e-09	8.4741e-10	4.5197e-09
17	1.1727e-10	-6.6473e-11	-3.5627e-10
18	-5.9872e-12	3.3939e-12	1.8266e-11
19	1.4927e-13	-8.4621e-14	-4.5706e-13

Nilai-nilai $\beta_k^{(m)}$ diatas, selanjutnya akan digunakan pada implementasi aturan koreksi batas pada Subbab 4.3.

4.1.2 Nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$

Pandang kembali rumus dari $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ yang terdapat pada persamaan (3.4.6) berikut ini

$$\tilde{\beta}_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p \tilde{\alpha}_{k,p}^{(m)}.$$

Selain rumus yang terdapat pada persamaan (3.4.6), $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ juga bisa dinyatakan dengan rumus dibawah ini, yang terdapat pada persamaan (3.4.7).

$$\tilde{\beta}_k^{(m)} = \sum_{p=1}^m \frac{B_{2p}}{(2p)!} z_p t^{2p-1} \alpha_{k,p}^{(m)}.$$

Dari persamaan tersebut, jelas bahwa untuk menghitung nilai dari $\tilde{\beta}_k^{(m)}$, dibutuhkan nilai dari B_{2p} , z_p , t^{2p-1} , dan $\alpha_{k,p}^{(m)}$. Nilai B_{2p} dan z_p secara berturut-turut dapat dilihat pada Subbab 2.1 dan 2.2. Sama seperti pada 4.1.1, nilai B_{2p} dapat mudah dihitung menggunakan fungsi Matlab, yaitu bernoulli(n) untuk n bilangan bulat nonnegatif. Nilai z_p juga mudah dihitung menggunakan rumusnya. Kemudian nilai dari t^{2p-1} bergantung dari pemilihan nilai t , dan juga dapat dihitung dengan mudah. Sedangkan nilai dari $\alpha_{k,p}^{(m)}$ sudah dihitung di 4.1.1. Sehingga, bisa didapatkan nilai-nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ saat $k = 1, \dots, m$. Kemudian, dari rumus $\tilde{\beta}_k^{(m)}$, jelas bahwa nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ bergantung dari nilai m , jenis aturan yang diinginkan (nilai z_p), dan pemilihan nilai t .

Tabel 4.15: (t=2) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(4)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\tilde{\beta}_k^{(4)}$	
k	T	M	S
1	1.6178e-01	-9.2125e-02	-2.5489e-01
2	-5.4308e-02	3.5536e-02	2.1653e-01
3	1.1587e-02	-7.9439e-03	-7.1746e-02
4	-1.1486e-03	8.0454e-04	9.2681e-03

Tabel 4.16: ($t=2$) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(9)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\tilde{\beta}_k^{(9)}$	
k	T	M	S
1	2.0163e-01	-1.2217e-01	-3.8498e+00
2	-1.0545e-01	7.4191e-02	5.1953e+00
3	4.7968e-02	-3.5566e-02	-4.1018e+00
4	-1.8055e-02	1.3729e-02	2.2515e+00
5	5.4232e-03	-4.1822e-03	-8.9171e-01
6	-1.2444e-03	9.6808e-04	2.5266e-01
7	2.0439e-04	-1.5992e-04	-4.8949e-02
8	-2.1364e-05	1.6783e-05	5.8380e-03
9	1.0669e-06	-8.4047e-07	-3.2445e-04

Tabel 4.17: ($t=2$) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(14)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\tilde{\beta}_k^{(14)}$	
k	T	M	S
1	2.1916e-01	-1.3638e-01	-6.2134e+01
2	-1.3278e-01	9.6351e-02	9.8322e+01
3	7.4981e-02	-5.7484e-02	-1.0001e+02
4	-3.8053e-02	2.9970e-02	7.7478e+01
5	1.7066e-02	-1.3649e-02	-4.8088e+01
6	-6.6720e-03	5.3878e-03	2.4355e+01
7	2.2425e-03	-1.8226e-03	-1.0109e+01
8	-6.3743e-04	5.2042e-04	3.4229e+00
9	1.5010e-04	-1.2295e-04	-9.3353e-01
10	-2.8475e-05	2.3383e-05	2.0058e-01
11	4.1796e-06	-3.4386e-06	-3.2751e-02
12	-4.4525e-07	3.6686e-07	3.8244e-03
13	3.0620e-08	-2.5259e-08	-2.8480e-04
14	-1.0202e-09	8.4242e-10	1.0172e-05

Tabel 4.18: (t=2) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\tilde{\beta}_k^{(19)}$	
k	T	M	S
1	2.2954e-01	-1.4509e-01	-1.2317e+03
2	-1.5021e-01	1.1099e-01	2.0864e+03
3	9.4511e-02	-7.3881e-02	-2.3723e+03
4	-5.5323e-02	4.4472e-02	2.1445e+03
5	2.9756e-02	-2.4309e-02	-1.6236e+03
6	-1.4587e-02	1.2039e-02	1.0522e+03
7	6.4724e-03	-5.3790e-03	-5.8950e+02
8	-2.5816e-03	2.1560e-03	2.8659e+02
9	9.1881e-04	-7.7011e-04	-1.2089e+02
10	-2.8934e-04	2.4317e-04	4.4110e+01
11	7.9817e-05	-6.7221e-05	-1.3837e+01
12	-1.9054e-05	1.6073e-05	3.6981e+00
13	3.8758e-06	-3.2738e-06	-8.3111e-01
14	-6.5830e-07	5.5666e-07	1.5422e-01
15	9.0805e-08	-7.6853e-08	-2.3019e-02
16	-9.7697e-09	8.2747e-09	2.6576e-03
17	7.6895e-10	-6.5168e-10	-2.2284e-04
18	-3.9373e-11	3.3386e-11	1.2080e-05
19	9.8413e-13	-8.3486e-13	-3.1789e-07

Dapat dilihat pada Tabel 4.17 dan 4.18, bahwa nilai $\tilde{\beta}_k^{(14)}$ pada aturan Simpson cukup besar ketika $k = 1, \dots, 7$ jika dibandingkan ketika $k = 8, \dots, 14$; nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$ pada aturan Simpson cukup besar ketika $k = 1, \dots, 11$ jika dibandingkan ketika $k = 12, \dots, 19$.

Tabel 4.19: (t=3) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(4)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\tilde{\beta}_k^{(4)}$	
k	T	M	S
1	3.2775e-01	-2.1690e-01	-2.1449e+00
2	-1.5029e-01	1.1750e-01	1.9708e+00
3	3.8251e-02	-3.1664e-02	-7.4170e-01
4	-4.2299e-03	3.5978e-03	1.0710e-01

Tabel 4.20: (t=3) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(9)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\tilde{\beta}_k^{(9)}$	
k	T	M	S
1	6.6936e-01	-5.3956e-01	-7.6792e+02
2	-6.0440e-01	5.4743e-01	1.0970e+03
3	3.8191e-01	-3.5830e-01	-9.3285e+02
4	-1.7907e-01	1.7067e-01	5.5305e+02
5	6.2836e-02	-6.0397e-02	-2.3616e+02
6	-1.6164e-02	1.5616e-02	7.1873e+01
7	2.8938e-03	-2.8054e-03	-1.4886e+01
8	-3.2329e-04	3.1416e-04	1.8886e+00
9	1.7011e-05	-1.6558e-05	-1.1109e-01

Tabel 4.21: (t=3) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(14)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\tilde{\beta}_k^{(14)}$	
k	T	M	S
1	1.3481e+00	-1.2115e+00	-4.1198e+05
2	-1.6749e+00	1.6074e+00	6.6522e+05
3	1.4610e+00	-1.4270e+00	-6.9701e+05
4	-1.0006e+00	9.8455e-01	5.5983e+05
5	5.5913e-01	-5.5225e-01	-3.6174e+05
6	-2.5846e-01	2.5585e-01	1.9121e+05
7	9.9012e-02	-9.8155e-02	-8.2930e+04
8	-3.1236e-02	3.0996e-02	2.9348e+04
9	8.0024e-03	-7.9467e-03	-8.3618e+03
10	-1.6266e-03	1.6162e-03	1.8751e+03
11	2.5281e-04	-2.5128e-04	-3.1911e+02
12	-2.8251e-05	2.8090e-05	3.8778e+01
13	2.0228e-06	-2.0118e-06	-3.0000e+00
14	-6.9751e-08	6.9384e-08	1.1111e-01

Tabel 4.22: (t=3) Nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$ untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

		$\tilde{\beta}_k^{(19)}$	
k	T	M	S
1	3.1001e+00	-2.9600e+00	-2.6926e+08
2	-4.6342e+00	4.5609e+00	4.6009e+08
3	4.8078e+00	-4.7673e+00	-5.3043e+08
4	-4.0006e+00	3.9788e+00	4.8835e+08
5	2.8030e+00	-2.7919e+00	-3.7793e+08
6	-1.6892e+00	1.6839e+00	2.5109e+08
7	8.8418e-01	-8.8192e-01	-1.4454e+08
8	-4.0351e-01	4.0262e-01	7.2325e+07
9	1.6051e-01	-1.6020e-01	-3.1437e+07
10	-5.5471e-02	5.5375e-02	1.1828e+07
11	1.6551e-02	-1.6525e-02	-3.8273e+06
12	-4.2237e-03	4.2175e-03	1.0551e+06
13	9.0971e-04	-9.0845e-04	-2.4456e+05
14	-1.6233e-04	1.6211e-04	4.6784e+04
15	2.3370e-05	-2.3341e-05	-7.1946e+03
16	-2.6101e-06	2.6069e-06	8.5522e+02
17	2.1227e-07	-2.1202e-07	-7.3778e+01
18	-1.1187e-08	1.1175e-08	4.1111e+00
19	2.8685e-10	-2.8653e-10	-1.1111e-01

Dapat dilihat pada Tabel 4.20, 4.21 dan 4.22, bahwa nilai $\tilde{\beta}_k^{(9)}$ pada aturan Simpson cukup besar ketika $k = 1, \dots, 7$ jika dibandingkan ketika $k = 8, 9$; nilai $\tilde{\beta}_k^{(14)}$ pada aturan Simpson cukup besar ketika $k = 1, \dots, 12$ jika dibandingkan ketika $k = 13, 14$; nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$ pada aturan Simpson cukup besar ketika $k = 1, \dots, 17$ jika dibandingkan ketika $k = 18, 19$.

Nilai-nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ diatas, selanjutnya akan digunakan pada implementasi aturan modifikasi pada Subbab 4.4.

4.2 Implementasi Aturan Komposit Newton-Cotes

Pandang kembali aturan komposit Newton-Cotes untuk aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson (dapat dilihat pada Subbab 2.2) berikut ini:

1. aturan komposit Trapezoidal

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu).$$

2. aturan komposit Midpoint

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{b-a}{24} h^2 f''(\mu).$$

3. aturan komposit Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) f(b) \right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu).$$

Dengan menggunakan algoritma yang terdapat di lampiran 7, bisa didapatkan *relative error* dari masing-masing aproksimasi seperti yang disajikan oleh tabel-tabel dibawah ini, dengan T, M, dan S secara berturut-turut menyatakan aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson

Tabel 4.23: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$

h	T	M	S
10^{-1}	1.2028e-02	1.2689e-02	1.2248e-02
10^{-2}	5.0362e-04	5.0615e-04	5.0446e-04
10^{-3}	2.9475e-05	2.9490e-05	1.8847e-04
10^{-4}	1.3576e-05	1.3576e-05	2.9489e-05

Tabel 4.24: *Relative error* aproksimasi dari $\int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$

h	T	M	S
10^{-1}	6.2500e-04	3.1250e-04	2.3111e-33
10^{-2}	6.2500e-06	3.1250e-06	2.3111e-33
10^{-3}	6.2500e-08	3.1250e-08	3.0045e-32
10^{-4}	6.2500e-10	3.1250e-10	6.9333e-33

Pada Tabel 4.23 dan 4.24 dapat dilihat bahwa untuk setiap pemilihan h , aturan komposit Newton-Cotes mengaproksimasi dengan nilai digit signifikan aproksimasi berbanding terbalik dengan h , kecuali pada aturan Simpson dalam mengaproksimasi integral kedua, ketika $h = 10^{-2}$ ke $h = 10^{-3}$.

4.3 Implementasi Aturan Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas

Dengan menggunakan nilai-nilai $\beta_k^{(m)}$ pada Subbab 4.1, pada subbab ini akan dihitung dan dianalisa hasil aproksimasi dari aturan koreksi batas yang telah

dibahas di Bab 3. Dengan menggunakan algoritma yang terdapat di lampiran 5, didapatkan *relative error* aproksimasi seperti yang disajikan oleh tabel-tabel dibawah ini.

Tabel 4.25: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$ menggunakan aturan Trapezoidal

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.2028e-02	1.2028e-02	1.2028e-02	1.2028e-02
10^{-2}	5.0362e-04	5.0362e-04	5.0362e-04	5.0362e-04
10^{-3}	2.9475e-05	2.9475e-05	2.9475e-05	2.9475e-05
10^{-4}	1.3576e-05	1.3576e-05	1.3576e-05	1.3576e-05

Tabel 4.26: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$ menggunakan aturan Midpoint

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.2689e-02	1.2689e-02	1.2689e-02	1.2689e-02
10^{-2}	5.0615e-04	5.0615e-04	5.0615e-04	5.0615e-04
10^{-3}	2.9490e-05	2.9490e-05	2.9490e-05	2.9490e-05
10^{-4}	1.3576e-05	1.3576e-05	1.3576e-05	1.3576e-05

Tabel 4.27: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$ menggunakan aturan Simpson

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.2248e-02	1.2248e-02	1.2248e-02	1.2248e-02
10^{-2}	5.0446e-04	5.0446e-04	5.0446e-04	5.0446e-04
10^{-3}	1.8847e-04	1.8847e-04	1.8847e-04	1.8847e-04
10^{-4}	2.9489e-05	2.9489e-05	2.9489e-05	2.9489e-05

Pada Tabel 4.25, 4.26, dan 4.27, h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi, sedangkan m tidak memiliki pengaruh kepada digit signifikan aproksimasi.

Jika dibandingkan dengan aturan komposit Newton-Cotes pada Tabel 4.23, dapat dilihat bahwa untuk setiap h , signifikan digit aproksimasi dari kedua aturan adalah sama. Sehingga dapat disimpulkan bahwa aturan ini sama baiknya dalam mengaproksimasi $\int_0^{2\pi} 1 + \sin(x)dx$. Hal tersebut sesuai dengan kenyataan bahwa $1 + \sin(x)$ merupakan fungsi yang periodik dengan periode $b - a = 2\pi - 0 = 2\pi$, yang mana kedua metode yang mengaproksimasi integral dengan sifat tersebut konvergen secara *super-algebraic*

Tabel 4.28: *Relative error* aproksimasi dari $\int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$ menggunakan aturan Trapezoidal

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.8648e-19	1.0691e-19	4.0346e-19	1.8217e-19
10^{-2}	1.8648e-21	1.0691e-21	4.0346e-21	1.8217e-21
10^{-3}	1.8648e-23	1.0691e-23	4.0346e-23	1.8217e-23
10^{-4}	1.8648e-25	1.0691e-25	4.0346e-25	1.8217e-25

Tabel 4.29: *Relative error* aproksimasi dari $\int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$ menggunakan aturan Midpoint

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.2414e-19	2.3423e-19	4.0348e-19	1.3179e-20
10^{-2}	1.2414e-21	2.3423e-21	4.0348e-21	1.3179e-22
10^{-3}	1.2414e-23	2.3423e-23	4.0348e-23	1.3179e-24
10^{-4}	1.2414e-25	2.3423e-25	4.0348e-25	1.3179e-26

Tabel 4.30: *Relative error* aproksimasi dari $\int_{-2}^2 -x^2 + 4dx$ menggunakan aturan Simpson

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	2.3111e-33	2.9620e-22	5.1879e-19	2.9493e-19
10^{-2}	2.3111e-33	2.9620e-24	5.1879e-21	2.9493e-21
10^{-3}	2.7733e-32	2.9620e-26	5.1879e-23	2.9493e-23
10^{-4}	4.6222e-33	2.9620e-28	5.1879e-25	2.9493e-25

Pada Tabel 4.28, 4.29, dan 4.30, h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Pada Tabel 4.28, m tidak memiliki pengaruh kepada digit signifikan aproksimasi. Pada Tabel 4.29, m tidak memiliki pengaruh kepada digit signifikan aproksimasi, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19 terjadi kenaikan signifikan digit aproksimasi. Pada Tabel 4.30, m berbanding terbalik dengan signifikan digit aproksimasi, kecuali pada $h = 10^{-3}$, 10^{-3} saat kenaikan m dari 14 ke 19.

Jika dibandingkan dengan aturan komposit Newton-Cotes pada Tabel 4.24, dapat dilihat bahwa untuk setiap h , aproksimasi dari aturan koreksi batas memiliki nilai signifikan digit yang lebih besar dibandingkan aturan komposit, untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint. Hal tersebut sesuai dengan kenyataan bahwa aturan koreksi batas mengaproksimasi dengan konvergensi *superalgebraic* untuk fungsi yang mulus. Kemudian, aproksimasi dari aturan koreksi batas jenis aturan Simpson memiliki nilai signifikan digit yang sama dengan aturan komposit untuk nilai $m = 4$ dan nilai yang lebih kecil untuk nilai m yang lainnya. Hal tersebut sesuai dengan kenyataan bahwa aturan komposit Simpson memberikan nilai sebenarnya untuk fungsi yang berderajat kurang dari sama dengan 3. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dalam mengaproksimasi integral ini, yaitu fungsi yang mulus dan berderajat 2, aturan koreksi pada batas mengaproksimasi dengan lebih baik untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, tetapi tidak untuk aturan Simpson.

Tabel 4.31: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 300$ menggunakan aturan Trapezoidal

m	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	2.2081e+01	2.2132e+01	2.2132e+01	2.2132e+01
$10^{(-2)}$	7.9312e-01	7.2312e-01	6.7130e-01	6.2887e-01
$10^{(-3)}$	8.9011e-10	3.7193e-17	3.8505e-17	3.3366e-17
$10^{(-4)}$	3.3477e-17	3.3381e-17	3.3428e-17	3.3376e-17

Tabel 4.32: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 300$ menggunakan aturan Midpoint

m	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	2.3838e+01	2.3867e+01	2.3867e+01	2.3867e+01
$10^{(-2)}$	4.5070e-01	4.1154e-01	3.8229e-01	3.5826e-01
$10^{(-3)}$	4.9489e-10	3.1961e-17	3.5718e-17	3.0552e-17
$10^{(-4)}$	3.3328e-17	3.3384e-17	3.3402e-17	3.3354e-17

Tabel 4.33: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 300$ menggunakan aturan Simpson

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	2.2194e+01	2.2133e+01	2.2132e+01	2.2132e+01
10^{-2}	6.1027e+00	6.0025e+00	5.8883e+00	5.7690e+00
10^{-3}	9.8943e-10	2.6519e-17	3.8435e-17	3.4390e-17
10^{-4}	3.3276e-17	3.3379e-17	3.3449e-17	3.3396e-17

Pada Tabel 4.31, 4.32 dan 4.33, dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan dan pemilihan $h = 10^{-3}, 10^{-4}$ mengaproksimasi dengan 17 digit signifikan, kecuali saat pemilihan $m = 4$. Saat $m = 4$, aturan koreksi batas jenis Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson secara berturut-turut mengaproksimasi dengan 9, 10, 9 digit signifikan.

Tabel 4.34: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 500$ menggunakan aturan Trapezoidal

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02
10^{-2}	4.8918e+00	4.8964e+00	4.8964e+00	4.8964e+00
10^{-3}	1.4095e-07	8.6625e-14	1.4803e-16	1.3591e-16
10^{-4}	1.4836e-16	1.3486e-16	1.3498e-16	1.3485e-16

Tabel 4.35: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 500$ menggunakan aturan Midpoint

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02
10^{-2}	3.4553e+00	3.4579e+00	3.4579e+00	3.4579e+00
10^{-3}	7.8379e-08	4.8619e-14	1.4017e-16	1.2677e-16
10^{-4}	1.2751e-16	1.3487e-16	1.3491e-16	1.3479e-16

Tabel 4.36: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 500$ menggunakan aturan Simpson

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02
10^{-2}	4.9020e+00	4.8964e+00	4.8964e+00	4.8964e+00
10^{-3}	1.5773e-07	1.6999e-13	1.4095e-16	1.3513e-16
10^{-4}	1.2036e-16	1.3485e-16	1.3503e-16	1.3490e-16

Pada Tabel 4.34, 4.35, dan 4.36, dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Untuk pemilihan $h = 10^{-3}$, m berbanding lurus dengan digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan m dari 14 ke 19 yang tidak mengakibatkan perubahan pada digit signifikan. Untuk pemilihan $h = 10^{-4}$, aturan koreksi batas mengaproksimasi dengan 16 digit signifikan.

Tabel 4.37: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 1000$ menggunakan aturan Trapezoidal

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02
10^{-2}	3.6572e+00	4.2285e+00	4.5123e+00	4.6686e+00
10^{-3}	1.1771e-04	5.4395e-08	2.8683e-11	1.6205e-14
10^{-4}	1.5584e-14	2.1478e-16	2.1522e-16	2.1473e-16

Tabel 4.38: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 1000$ menggunakan aturan Midpoint

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02
10^{-2}	5.5943e+00	5.2747e+00	5.1145e+00	5.0260e+00
10^{-3}	6.5514e-05	3.0654e-08	1.6232e-11	8.9149e-15
10^{-4}	8.3856e-15	2.1480e-16	2.1497e-16	2.1452e-16

Tabel 4.39: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 1000$ menggunakan aturan Simpson

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02
10^{-2}	7.6835e+00	6.8746e+00	6.2509e+00	5.8106e+00
10^{-3}	1.3642e-04	1.0864e-07	7.5905e-11	5.0942e-14
10^{-4}	1.6888e-14	2.1476e-16	2.1539e-16	2.1491e-16

Pada Tabel 4.37, 4.38, dan 4.39 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Untuk pemilihan $h = 10^{-3}$, m berbanding lurus dengan digit signifikan, sedangkan untuk pemilihan $h = 10^{-4}$ aturan koreksi batas mengaproksimasi dengan 16 digit signifikan, kecuali saat pemilihan $m = 4$ yang nilai digit signifikan nya adalah 14.

Tabel 4.40: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 3000$ menggunakan aturan Trapezoidal

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.8762e+02	1.8894e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
10^{-2}	2.2126e+01	2.2186e+01	2.2187e+01	2.2187e+01
10^{-3}	7.9306e-01	7.2300e-01	6.7113e-01	6.2865e-01
10^{-4}	8.9006e-10	1.9762e-16	1.9893e-16	1.9379e-16

Tabel 4.41: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 3000$ menggunakan aturan Midpoint

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.8971e+02	1.8898e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
10^{-2}	2.3911e+01	2.3945e+01	2.3945e+01	2.3945e+01
10^{-3}	4.5067e-01	4.1148e-01	3.8219e-01	3.5814e-01
10^{-4}	4.9487e-10	1.9239e-16	1.9614e-16	1.9098e-16

Tabel 4.42: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 3000$ menggunakan aturan Simpson

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.9065e+02	1.8901e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
10^{-2}	2.2262e+01	2.2188e+01	2.2187e+01	2.2187e+01
10^{-3}	6.1174e+00	6.0163e+00	5.9013e+00	5.7810e+00
10^{-4}	9.8938e-10	1.8694e-16	1.9886e-16	1.9482e-16

Pada Tabel 4.40, 4.41, dan 4.42 dapat dilihat bahwa bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi dan pemilihan $h = 10^{-4}$ mengaproksimasi dengan 16 digit signifikan, kecuali untuk $m = 4$ yang memberikan aproksimasi 9 digit signifikan untuk aturan Trapezoidal dan Simpson dan 10 untuk aturan Midpoint.

Tabel 4.43: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 5000$ menggunakan aturan Trapezoidal

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.1763e+02	1.4663e+02	1.6284e+02	1.7275e+02
10^{-2}	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02
10^{-3}	4.8919e+00	4.8965e+00	4.8966e+00	4.8966e+00
10^{-4}	1.4094e-07	8.6507e-14	2.8657e-17	2.2679e-17

Tabel 4.44: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 5000$ menggunakan aturan Midpoint

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	2.3046e+02	2.1413e+02	2.0477e+02	1.9896e+02
10^{-2}	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02
10^{-3}	3.4555e+00	3.4580e+00	3.4581e+00	3.4581e+00
10^{-4}	7.8378e-08	4.8731e-14	2.4115e-17	2.2895e-17

Tabel 4.45: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 5000$ menggunakan aturan Simpson

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	3.6953e+02	3.2876e+02	2.9231e+02	2.6276e+02
10^{-2}	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02
10^{-3}	4.9021e+00	4.8966e+00	4.8966e+00	4.8966e+00
10^{-4}	1.5773e-07	1.7010e-13	2.4461e-17	2.2514e-17

Pada Tabel 4.43, 4.44, dan 4.45 dapat dilihat bahwa bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Saat nilai m berbanding lurus nilai digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan m dari 14 ke 19 yang tidak mengakibatkan perubahan pada digit signifikan.

Tabel 4.46: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 10000$ menggunakan aturan Trapezoidal

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.0208e+03	1.0208e+03	1.0208e+03	1.0208e+03
10^{-2}	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02
10^{-3}	3.6568e+00	4.2280e+00	4.5118e+00	4.6682e+00
10^{-4}	1.1771e-04	5.4394e-08	2.8683e-11	1.6080e-14

Tabel 4.47: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 10000$ menggunakan aturan Midpoint

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.1049e+03	1.1049e+03	1.1049e+03	1.1049e+03
10^{-2}	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02
10^{-3}	5.5944e+00	5.2750e+00	5.1148e+00	5.0263e+00
10^{-4}	6.5513e-05	3.0653e-08	1.6232e-11	9.0383e-15

Tabel 4.48: *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ untuk $w = 10000$ menggunakan aturan Simpson

$h \backslash m$	4	9	14	19
10^{-1}	1.0209e+03	1.0208e+03	1.0208e+03	1.0208e+03
10^{-2}	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02
10^{-3}	7.6850e+00	6.8762e+00	6.2528e+00	5.8127e+00
10^{-4}	1.3642e-04	1.0863e-07	7.5903e-11	5.1065e-14

Pada Tabel 4.46, 4.47, dan 4.48 dapat dilihat bahwa bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Pada pemilihan $h = 10^{-4}$, nilai m berbanding lurus nilai digit signifikan.

4.4 Implementasi Aturan Modifikasi Newton-Cotes dengan Koreksi pada Batas

Dengan menggunakan nilai-nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ pada Subbab 4.2, pada subbab ini akan dihitung dan dianalisa hasil aproksimasi dari aturan modifikasi yang telah dibahas di Bab 3. Dengan menggunakan algoritma yang terdapat di lampiran 6, didapatkan *relative error* seperti yang disajikan oleh tabel-tabel dibawah ini.

Tabel 4.49: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 300$

hsetminusm	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	8.5117e+00	2.4494e+00	2.1489e+00	3.5271e+00
$10^{(-2)}$	3.7393e-02	7.8183e-04	1.6645e-05	3.5666e-07
$10^{(-3)}$	6.4854e-12	2.1367e-17	2.1489e-17	4.4724e-17
$10^{(-4)}$	3.3378e-17	3.3255e-17	3.3252e-17	3.3496e-17

Tabel 4.50: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 300$

h\m	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.5893e+01	1.0917e+01	8.1758e+00	6.7102e+00
$10^{(-2)}$	2.7737e-02	6.2860e-04	1.3899e-05	3.0478e-07
$10^{(-3)}$	4.7147e-12	3.2979e-17	3.5731e-17	2.8138e-17
$10^{(-4)}$	3.3378e-17	3.3373e-17	3.3404e-17	3.3326e-17

Tabel 4.51: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 300$

h\m	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	4.9427e+01	6.9918e+02	1.1807e+04	1.9995e+05
$10^{(-2)}$	5.2076e+00	3.6338e+00	2.5187e+00	1.7454e+00
$10^{(-3)}$	1.1366e-10	8.7244e-17	1.0379e-15	1.6508e-13
$10^{(-4)}$	3.3366e-17	3.3908e-17	2.1897e-17	1.3866e-15

Pada Tabel 4.49, 4.50, dan 4.51 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Untuk $h = 10^{-2}$, pada aturan Trapezoidal dan Midpoint nilai m berbanding lurus nilai digit signifikan. Untuk $h = 10^{-3}$ pada aturan Simpson, nilai m berbanding lurus nilai digit signifikan kecuali pada saat kenaikan m dari 14 ke 19. Penurunan digit signifikan tersebut diduga karena besarnya nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$. Sedangkan untuk aturan Trapezoidal dan Simpson dan pemilihan $h = 10^{-3}, 10^{-4}$, nilai digit signifikan adalah 17, kecuali untuk $m = 4$. Untuk aturan Simpson dan pemilihan $h = 10^{-3}, 10^{-4}$ terjadi penurunan digit signifikan saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19.

Tabel 4.52: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 500$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02
$10^{(-2)}$	2.7427e+00	1.5945e+00	9.3457e-01	5.4965e-01
$10^{(-3)}$	1.0617e-09	1.0769e-16	1.0887e-16	1.6122e-16
$10^{(-4)}$	1.3495e-16	1.3455e-16	1.3454e-16	1.3515e-16

Tabel 4.53: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 500$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02
$10^{(-2)}$	2.2063e+00	1.3373e+00	8.0216e-01	4.7917e-01
$10^{(-3)}$	7.7208e-10	1.3319e-16	1.3939e-16	1.2173e-16
$10^{(-4)}$	1.3479e-16	1.3484e-16	1.3492e-16	1.3472e-16

Tabel 4.54: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 500$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02	1.7718e+02
$10^{(-2)}$	9.2942e+00	1.2579e+02	2.3553e+03	4.4631e+04
$10^{(-3)}$	1.8813e-08	3.1339e-16	2.5649e-15	5.4712e-13
$10^{(-4)}$	1.3319e-16	1.3617e-16	1.0746e-16	3.8373e-15

Pada tabel 4.52, 4.53, dan 4.54 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint saat $h = 10^{-3}, 10^{-4}$, nilai digit signifikan adalah 16, kecuali saat $m = 4$. Sedangkan untuk aturan Simpson, m berbanding lurus digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19. Penurunan digit signifikan tersebut diduga karena besarnya nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$.

Tabel 4.55: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 1000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02
$10^{(-2)}$	4.8611e+00	4.8963e+00	4.8965e+00	4.8965e+00
$10^{(-3)}$	1.0370e-06	8.5639e-13	1.5654e-16	2.7792e-16
$10^{(-4)}$	3.1277e-16	2.1363e-16	2.1360e-16	2.1584e-16

Tabel 4.56: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 1000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02
$10^{(-2)}$	4.9226e+00	4.8967e+00	4.8965e+00	4.8965e+00
$10^{(-3)}$	7.5507e-07	6.8314e-13	2.1383e-16	1.6920e-16
$10^{(-4)}$	1.5436e-16	2.1471e-16	2.1499e-16	2.1427e-16

Tabel 4.57: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 1000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02	1.8607e+02
$10^{(-2)}$	6.3433e+00	5.1753e+00	4.9490e+00	4.9064e+00
$10^{(-3)}$	1.9411e-05	5.6132e-10	2.4855e-14	2.5957e-12
$10^{(-4)}$	1.7491e-15	2.1967e-16	1.3057e-16	1.5883e-14

Pada Tabel 4.55, 4.56, dan 4.57 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint dan pemilihan $h = 10^{-3}$, m berbanding lurus digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19; sedangkan untuk $h = 10^{-4}$ nilai digit signifikan adalah 17. Untuk aturan Simpson dengan pemilihan $h = 10^{-3}, 10^{-4}$, nilai m berbanding lurus dengan digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19, penurunan digit signifikan tersebut diduga karena besarnya nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$.

Tabel 4.58: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 3000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8895e+02	1.8896e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
$10^{(-2)}$	8.3805e+00	1.8386e+00	1.5250e+00	3.2586e+00
$10^{(-3)}$	3.7391e-02	7.8173e-04	1.6642e-05	3.5657e-07
$10^{(-4)}$	6.4852e-12	1.8180e-16	1.8192e-16	2.0514e-16

Tabel 4.59: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 3000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8898e+02	1.8896e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
$10^{(-2)}$	1.5945e+01	1.0993e+01	8.2787e+00	6.8203e+00
$10^{(-3)}$	2.7735e-02	6.2852e-04	1.3896e-05	3.0471e-07
$10^{(-4)}$	4.7143e-12	1.9341e-16	1.9615e-16	1.8857e-16

Tabel 4.60: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 3000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8929e+02	1.8896e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
$10^{(-2)}$	4.9417e+01	6.9429e+02	1.1682e+04	1.9714e+05
$10^{(-3)}$	5.2201e+00	3.6423e+00	2.5244e+00	1.7493e+00
$10^{(-4)}$	1.1365e-10	2.4763e-16	8.7765e-16	1.6492e-13

Pada Tabel 4.58, 4.59, dan 4.60 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Saat $h = 10^{-3}, 10^{-4}$, untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan. Sedangkan saat $h = 10^{-4}$ untuk aturan Simpson, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan kecuali saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19. Penurunan digit signifikan tersebut diduga karena besarnya nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$.

Tabel 4.61: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 5000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8699e+02	1.8919e+02	1.8920e+02	1.8920e+02
$10^{(-2)}$	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02
$10^{(-3)}$	2.7427e+00	1.5944e+00	9.3450e-01	5.4959e-01
$10^{(-4)}$	1.0617e-09	3.5752e-17	3.4656e-17	3.9348e-17

Tabel 4.62: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 5000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.9083e+02	1.8921e+02	1.8920e+02	1.8920e+02
$10^{(-2)}$	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02
$10^{(-3)}$	2.2063e+00	1.3372e+00	8.0211e-01	4.7912e-01
$10^{(-4)}$	7.7207e-10	2.2249e-17	2.3789e-17	2.4960e-17

Tabel 4.63: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 5000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	2.8803e+02	2.0917e+02	1.9225e+02	1.8941e+02
$10^{(-2)}$	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02	1.8920e+02
$10^{(-3)}$	9.2943e+00	1.2578e+02	2.3551e+03	4.4625e+04
$10^{(-4)}$	1.8812e-08	4.2014e-16	2.6809e-15	5.4724e-13

Pada Tabel 4.61, 4.62, dan 4.63 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Saat $h = 10^{-4}$, untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, nilai digit signifikan bernilai 17 kecuali untuk $m = 4$. Sedangkan untuk aturan Simpson, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan, kecuali saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19. Penurunan digit signifikan tersebut diduga karena besarnya nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$.

Tabel 4.64: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 10000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	6.7910e+02	4.5237e+02	2.9224e+02	1.8151e+02
$10^{(-2)}$	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02
$10^{(-3)}$	4.8612e+00	4.8964e+00	4.8966e+00	4.8966e+00
$10^{(-4)}$	1.0370e-06	8.5625e-13	5.1498e-17	1.3929e-16

Tabel 4.65: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 10000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	9.0327e+02	7.2720e+02	5.9054e+02	4.8650e+02
$10^{(-2)}$	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02
$10^{(-3)}$	4.9226e+00	4.8967e+00	4.8966e+00	4.8966e+00
$10^{(-4)}$	7.5507e-07	6.8325e-13	7.4451e-17	4.7689e-17

Tabel 4.66: ($t = 2$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 10000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.7823e+03	2.7055e+04	6.3408e+05	1.5088e+07
$10^{(-2)}$	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02	1.8930e+02
$10^{(-3)}$	6.3447e+00	5.1762e+00	4.9493e+00	4.9065e+00
$10^{(-4)}$	1.9411e-05	5.6132e-10	2.4978e-14	2.5958e-12

Pada Tabel 4.64, 4.65 dan 4.66 dapat dilihat bahwa saat $h = 10^{-4}$ untuk aturan Trapezoidal, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19. Untuk aturan Midpoint, nilai m berbanding lurus dengan nilai signifikan digit. Untuk aturan Simpson, nilai m berbanding lurus dengan nilai signifikan digit, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19. Penurunan digit signifikan tersebut diduga karena besarnya nilai $\tilde{\beta}_k^{(19)}$.

Tabel 4.67: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 300$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	3.9923e+01	1.0485e+02	2.8368e+02	7.7921e+02
$10^{(-2)}$	7.2533e-03	1.9346e-05	5.2183e-08	1.4101e-10
$10^{(-3)}$	8.3716e-13	1.4415e-17	2.0254e-16	5.6694e-16
$10^{(-4)}$	3.3380e-17	3.3186e-17	3.0952e-17	3.8779e-17

Tabel 4.68: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 300$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	3.7589e+01	9.9205e+01	2.7632e+02	7.7092e+02
$10^{(-2)}$	6.5838e-03	1.9016e-05	5.2004e-08	1.4090e-10
$10^{(-3)}$	7.4993e-13	4.2324e-17	2.5774e-16	8.1070e-16
$10^{(-4)}$	3.3355e-17	3.3467e-17	3.5687e-17	2.4708e-17

Tabel 4.69: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 300$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	2.0463e+02	1.6745e+05	1.1297e+08	7.6164e+10
$10^{(-2)}$	4.9537e+00	3.2590e+00	2.1410e+00	1.4066e+00
$10^{(-3)}$	6.6203e-11	1.9933e-14	3.0853e-12	8.0220e-09
$10^{(-4)}$	3.3138e-17	1.7152e-16	2.9091e-14	9.4293e-11

Pada Tabel 4.67, 4.68, dan 4.69 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi dan untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint. Untuk $h = 10^{-2}$, pada aturan Trapezoidal dan Midpoint, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan. Untuk $h = 10^{-3}$, pada aturan Trapezoidal dan Midpoint, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan kecuali pada kenaikan nilai m dari 14 ke 19, sedangkan pada aturan Simpson nilai m berbanding terbalik dengan nilai digit signifikan, kecuali pada kenaikan nilai m dari 4 ke 9. Untuk $h = 10^{-4}$, aturan Trapezoidal dan Midpoint mengaproksimasi dengan digit signifikan 17. Sedangkan untuk aturan Simpson nilai m berbanding terbalik dengan nilai digit signifikan.

Tabel 4.70: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 500$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	2.1579e+02	2.7418e+02	3.4803e+02	4.4210e+02
$10^{(-2)}$	1.1804e+00	2.4347e-01	5.0569e-02	1.0515e-02
$10^{(-3)}$	1.3803e-10	9.1650e-17	5.0666e-16	1.5698e-15
$10^{(-4)}$	1.3487e-16	1.3438e-16	1.2889e-16	1.4837e-16

Tabel 4.71: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 500$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.5046e+02	1.0355e+02	7.9984e+01	1.4067e+02
$10^{(-2)}$	1.1114e+00	2.4081e-01	5.0457e-02	1.0510e-02
$10^{(-3)}$	1.2368e-10	1.5747e-16	7.1406e-16	2.1135e-15
$10^{(-4)}$	1.3479e-16	1.3507e-16	1.4059e-16	1.1393e-16

Tabel 4.72: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 500$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	2.1983e+02	1.2907e+05	4.0128e+07	1.2451e+10
$10^{(-2)}$	2.2563e+01	1.0824e+03	5.4695e+04	2.7645e+06
$10^{(-3)}$	1.1051e-08	5.2977e-14	9.2812e-12	1.5828e-08
$10^{(-4)}$	1.3332e-16	4.5292e-16	8.0872e-14	2.6120e-10

Pada Tabel 4.70, 4.71 dan 4.72 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, pada $h = 10^{-4}$, nilai digit signifikan adalah 19. Sedangkan untuk aturan Simpson, nilai m berbanding terbalik dengan nilai digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 4 ke 9.

Tabel 4.73: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 1000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.0764e+02	5.5232e+01	2.6897e+01	1.3707e+01
$10^{(-2)}$	5.3283e+00	1.7583e+01	6.6564e+01	2.6345e+02
$10^{(-3)}$	1.3940e-07	9.1208e-15	1.7854e-15	5.3145e-15
$10^{(-4)}$	2.2675e-16	2.1299e-16	1.9304e-16	2.6658e-16

Tabel 4.74: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 1000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	2.3963e+02	2.9064e+02	3.2087e+02	3.3796e+02
$10^{(-2)}$	4.1137e+00	7.5445e+00	5.6070e+01	2.5258e+02
$10^{(-3)}$	1.2503e-07	8.6819e-15	2.0138e-15	6.8651e-15
$10^{(-4)}$	2.0407e-16	2.1557e-16	2.3640e-16	1.4535e-16

Tabel 4.75: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 1000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	7.4493e+02	8.8944e+04	1.2302e+07	1.7025e+09
$10^{(-2)}$	2.4376e+01	3.4467e+04	3.3729e+07	3.2986e+10
$10^{(-3)}$	1.1866e-05	1.9418e-10	4.1960e-11	2.5191e-08
$10^{(-4)}$	9.4699e-16	2.0959e-15	3.2550e-13	1.0313e-09

Pada Tabel 4.73, 4.74, dan 4.75 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Untuk $h = 10^{-3}$ pada aturan Trapezoidal, Midpoint, dan Simpson, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19. Sedangkan untuk $h = 10^{-3}$, nilai digit signifikan adalah 16 untuk aturan Trapezoidal dan Mipoint; pada aturan Simpson, nilai m berbanding terbalik dengan nilai digit signifikan kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 4 ke 9.

Tabel 4.76: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 3000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8896e+02	1.8896e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
$10^{(-2)}$	3.9911e+01	1.0467e+02	2.8277e+02	7.7555e+02
$10^{(-3)}$	7.2529e-03	1.9343e-05	5.2174e-08	1.4097e-10
$10^{(-4)}$	8.3727e-13	1.7485e-16	4.3196e-17	7.2722e-16

Tabel 4.77: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 3000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8897e+02	1.8896e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
$10^{(-2)}$	3.7621e+01	9.9053e+01	2.7542e+02	7.6722e+02
$10^{(-3)}$	6.5834e-03	1.9014e-05	5.1995e-08	1.4087e-10
$10^{(-4)}$	7.4972e-13	2.0274e-16	4.1806e-16	6.5051e-16

Tabel 4.78: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 3000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8918e+02	1.8896e+02	1.8896e+02	1.8896e+02
$10^{(-2)}$	2.0393e+02	1.6676e+05	1.1233e+08	7.5625e+10
$10^{(-3)}$	4.9656e+00	3.2666e+00	2.1459e+00	1.4097e+00
$10^{(-4)}$	6.6199e-11	1.9773e-14	3.0851e-12	8.0219e-09

Pada Tabel 4.76, 4.77, dan 4.78 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, pada pemilihan $h = 10^{-3}$, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan; pada pemilihan $h = 10^{-4}$ nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan kecuali ada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19. Untuk aturan Simpson dan saat $h = 10^{-4}$, nilai m berbanding terbalik dengan nilai digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 4 ke 9.

Tabel 4.79: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 5000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.8822e+02	7.2861e+02	2.9200e+03	1.1857e+04
$10^{(-2)}$	2.2977e+02	2.9132e+02	3.6913e+02	4.6818e+02
$10^{(-3)}$	1.1804e+00	2.4347e-01	5.0566e-02	1.0515e-02
$10^{(-4)}$	1.3803e-10	5.3304e-17	6.1996e-16	1.4522e-15

Tabel 4.80: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 5000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.6917e+02	3.5387e+02	2.5220e+03	1.1441e+04
$10^{(-2)}$	1.6038e+02	1.0242e+02	2.6645e+01	7.4605e+01
$10^{(-3)}$	1.1114e+00	2.4080e-01	5.0454e-02	1.0510e-02
$10^{(-4)}$	1.2368e-10	3.6070e-17	5.9521e-16	2.2293e-15

Tabel 4.81: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 5000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.0579e+03	1.5249e+06	1.5140e+09	1.5022e+12
$10^{(-2)}$	1.8463e+02	1.2861e+05	3.9924e+07	1.2366e+10
$10^{(-3)}$	2.2562e+01	1.0823e+03	5.4691e+04	2.7642e+06
$10^{(-4)}$	1.1051e-08	5.3093e-14	9.2813e-12	1.5828e-08

Pada Tabel 4.79, 4.80, dan 4.81 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Saat $h = 10^{-4}$ untuk aturan Simpson, nilai m berbanding terbalik dengan nilai digit signifikan, kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 4 ke 9.

Tabel 4.82: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Trapezoidal, untuk $w = 10000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.0208e+03	1.0208e+03	1.0208e+03	1.0208e+03
$10^{(-2)}$	1.0873e+02	5.4426e+01	2.3858e+01	6.5813e+00
$10^{(-3)}$	5.3278e+00	1.7581e+01	6.6553e+01	2.6340e+02
$10^{(-4)}$	1.3940e-07	8.9980e-15	1.9018e-15	5.1936e-15

Tabel 4.83: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Midpoint, untuk $w = 10000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.1049e+03	1.1049e+03	1.1049e+03	1.1049e+03
$10^{(-2)}$	2.4343e+02	2.9432e+02	3.2455e+02	3.4187e+02
$10^{(-3)}$	4.1138e+00	7.5410e+00	5.6058e+01	2.5253e+02
$10^{(-4)}$	1.2503e-07	8.8032e-15	1.8910e-15	6.9839e-15

Tabel 4.84: ($t = 3$) *Relative error* aproksimasi dari $\int_0^1 e^{(1+iw)x} dx$ menggunakan aturan Simpson, untuk $w = 10000$

$h \backslash m$	4	9	14	19
$10^{(-1)}$	1.0208e+03	1.0208e+03	1.0208e+03	1.0208e+03
$10^{(-2)}$	7.4856e+02	8.8645e+04	1.2235e+07	1.6897e+09
$10^{(-3)}$	2.4366e+01	3.4461e+04	3.3723e+07	3.2979e+10
$10^{(-4)}$	1.1866e-05	1.9417e-10	4.1960e-11	2.5191e-08

Pada Tabel 4.82, 4.83, dan 4.84 dapat dilihat bahwa h berbanding terbalik dengan digit signifikan aproksimasi. Saat $h = 10^{-4}$, untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, nilai m berbanding lurus dengan nilai digit signifikan kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 14 ke 19. Sedangkan pada aturan Simpson, nilai m berbanding terbalik dengan nilai digit signifikan kecuali pada saat kenaikan nilai m dari 4 ke 9.

Tabel 4.85: Perbandingan hasil aproksimasi aturan modifikasi ($t=2$) dengan aturan koreksi batas

w	Jenis Aturan	h	lebih baik	sama	kurang baik	untuk nilai m
300	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-2}	x			4,9,14,19
		10^{-3}	x			4
				x		9,14,19
	Simpson	10^{-4}		x		4,9,14,19
		10^{-3}	x			4
					x	9,14,19
		10^{-4}		x		4,9,14
					x	19
500	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-3}	x			4,9
				x		14,19
		10^{-4}		x		4,9,14,19
	Simpson	10^{-3}	x			4,9
					x	14,19
		10^{-4}		x		4,9,14
					x	19
1000	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-3}	x			4,9,14,19
		10^{-4}	x			4
				x		9,14,19
	Simpson	10^{-3}	x			4,9,14
					x	19
		10^{-4}	x			4
				x		9,14
					x	19
3000	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-3}	x			4,9,14,19
		10^{-4}	x			4
				x		9,14,19
	Simpson	10^{-4}	x			4
				x		9
					x	14,19
	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-4}	x			4,9
				x		14,19
		10^{-4}	x			4,9
5000	Trapezoidal dan Midpoint				x	14,19
	Simpson	10^{-4}	x			4,9
					x	14,19
10000	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-4}	x			4,9,14,19
		10^{-4}	x			4,9,14
					x	19

Pada Tabel 4.85 dapat dilihat:

1. ketika $h = 10^{-2}$, untuk $w = 300$, aturan modifikasi ($t=2$) lebih baik mengaproksimasi saat $m = 4, 9, 14, 9$ dibandingkan dengan aturan koreksi batas menggunakan aturan Trapezoidal dan Midpoint.
2. ketika $h = 10^{-3}$
 - (a) aturan modifikasi ($t=2$) lebih baik mengaproksimasi hanya pada saat $m = 4$ untuk $w = 300$ dan saat $m = 4, 9$ untuk $w = 500$. Sehingga untuk $w = 300, 500$, aturan modifikasi ($t=2$) tidak memberikan peningkatan hasil aproksimasi integral tersebut dibandingkan aturan koreksi batas.
 - (b) Untuk $w = 1000$ aturan modifikasi ($t=2$) lebih baik mengaproksimasi pada saat $m = 4, 9, 14, 19$ menggunakan aturan Trapezoidal dan Midpoint; dan pada saat $m = 4, 9, 14$ menggunakan aturan Simpson. Untuk $w = 3000$ aturan modifikasi ($t=2$) lebih baik mengaproksimasi pada saat $m = 4, 9, 14, 19$. Sehingga untuk $w = 1000, 3000$, aturan modifikasi ($t=2$) memberikan peningkatan hasil aproksimasi integral tersebut dibandingkan aturan koreksi batas untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint.
3. Ketika $h = 10^{-4}$
 - (a) aturan modifikasi ($t=2$) lebih baik mengaproksimasi hanya pada saat $m = 4$ untuk $w = 1000, 3000$ dan saat $m = 4, 9$ untuk $w = 5000$, sehingga aturan tersebut tidak memberikan peningkatan hasil aproksimasi dibandingkan dengan aturan koreksi batas untuk nilai-nilai $w = 1000, 3000, 5000$.
 - (b) Untuk $w = 10000$ aturan modifikasi ($t=2$) lebih baik mengaproksimasi saat $m = 4, 9, 14, 19$ untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, dan saat $m = 4, 9, 14$ untuk aturan Simpson. Sehingga aturan modifikasi ($t=2$) tersebut memberikan peningkatan hasil aproksimasi dibandingkan dengan aturan koreksi batas ketika $w = 10000$ untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa, aturan modifikasi ($t=2$) mengaproksimasi lebih baik daripada aturan koreksi batas untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint ketika: $h = 10^{-2}$ dan $w = 300$; $h = 10^{-3}$ dan $w = 1000, 3000$; $h = 10^{-4}$ dan

$w = 10000$. Tidak adanya peningkatan hasil aproksimasi dari aturan Simpson, diduga karena nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ yang besar seperti yang ditunjukkan pada Subbab 4.2.2.

Tabel 4.86: Perbandingan hasil aproksimasi aturan modifikasi ($t=3$) dengan aturan koreksi batas

w	Jenis Aturan	h	lebih baik	sama	kurang baik	untuk nilai m
300	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-2}	x			4,9,14,19
		10^{-3}	x			4
				x		9
					x	14,19
		10^{-4}		x		4,9,14,19
	Simpson	10^{-3}	x			4
					x	9,14,19
		10^{-4}		x		4
					x	9,14,19
						14,19
500	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-2}	x			9,14,19
		10^{-3}	x			4,9
						14,19
		10^{-4}		x		4,9,14,19
		10^{-3}	x			4
	Simpson			x		9
					x	14,19
		10^{-4}		x		4,9
					x	14,19
						19
1000	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-3}	x			4,9,14
				x		19
		10^{-4}	x			4
				x		9,14,19
		10^{-3}	x			4,9,14
	Simpson				x	19
		10^{-4}	x			4
				x		9,14,19
						19
						4
3000	Trapezoidal	10^{-3}	x			4,9,14,19
		10^{-4}	x			4,14
				x		9
					x	19
		10^{-3}	x			4,9,14,19
	Midpoint	10^{-3}	x			4
				x		9,14
					x	19
		10^{-4}	x			4
					x	9,14,19

Tabel 4.87: Perbandingan hasil aproksimasi aturan modifikasi ($t=3$) dengan aturan koreksi batas (lanjutan)

w	Jenis Aturan	h	lebih baik	sama	kurang baik	untuk nilai m
5000	Trapezoidal dan Midpoint	10^{-3}	x			9,14,19
		10^{-4}	x			4,9
	Simpson				x	14,19
		10^{-4}	x			4
				x		9
10000	Trapezoidal dan Midpoint				x	14,19
		10^{-4}	x			4,9,14
	Simpson			x		19
		10^{-4}	x			4,9,14
					x	19

Pada Tabel 4.86 dan 4.87 dapat dilihat bahwa:

- ketika $h = 10^{-2}$, aturan modifikasi ($t=3$) lebih baik mengaproksimasi saat $m = 4, 9, 14, 9$ untuk $w = 300$ dibandingkan dengan aturan koreksi batas dengan menggunakan aturan Trapezoidal dan Midpoint. Kemudian untuk $w = 500$ aturan tersebut juga lebih baik mengaproksimasi saat $m = 9, 14, 19$ menggunakan aturan Trapezoidal dan Midpoint. Sehingga untuk $w = 300$, aturan modifikasi ($t=3$) memberikan peningkatan hasil aproksimasi integral tersebut untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint dibandingkan dengan aturan koreksi batas.
- Ketika $h = 10^{-3}$
 - aturan modifikasi ($t=3$) lebih baik mengaproksimasi hanya pada saat $m = 4$ untuk $w = 300$. Selain itu, untuk $w = 500$ aturan modifikasi mengaproksimasi lebih baik hanya pada saat $m = 4, 9$ menggunakan aturan Trapezoidal dan Midpoint dan $m = 4$ menggunakan aturan Simpson. Untuk $w = 1000$ aturan modifikasi ($t=3$) lebih baik mengaproksimasi pada saat $m = 4, 9, 14$. Kemudian, untuk $w = 5000$ aturan modifikasi lebih baik mengaproksimasi saat $m = 9, 14, 19$ tetapi hanya saat $m = 4$ untuk aturan Simpson. Sehingga untuk $w = 300, 500, 1000, 5000$ aturan modifikasi tidak memberikan peningkatan hasil aproksimasi integral tersebut dibandingkan aturan koreksi batas.

- (b) Untuk $w = 3000$ aturan modifikasi ($t=3$) mengaproksimasi lebih baik saat $m = 4, 9, 14, 19$ untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, tetapi hanya saat $m = 4$ untuk aturan Simpson. Sehingga untuk $w = 3000$ aturan modifikasi ($t=3$) cenderung memberikan peningkatan hasil aproksimasi integral tersebut untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint dibandingkan aturan koreksi batas.
3. Ketika $h = 10^{-4}$, pada $w = 1000$, aturan modifikasi ($t=3$) memberikan peningkatan hasil aproksimasi hanya pada saat $m = 4$. Begitu pula pada $w = 3000$, peningkatan hanya terjadi saat $m = 4, 14$ untuk aturan Trapezoidal, dan $m = 4$ untuk aturan Midpoint dan Simpson. Kemudian pada $w = 5000$, peningkatan hanya terjadi saat $m = 4, 9$ untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, dan $m = 4$ untuk aturan Simpson. Pada $w = 10000$, aturan modifikasi ($t=3$) memberikan peningkatan hasil aproksimasi saat $m = 4, 9, 14$. Sehingga untuk $w = 1000, 3000, 5000, 10000$ aturan modifikasi ($t=3$) tidak memberikan peningkatan hasil aproksimasi integral tersebut dibandingkan aturan koreksi batas.

Dapat disimpulkan bahwa, aturan modifikasi ($t=3$) mengaproksimasi lebih baik menggunakan aturan Trapezoidal dan Midpoint ketika $h = 10^{-2}$ dan $w = 300$; $h = 10^{-3}$ dan $w = 3000$. Tidak adanya peningkatan hasil aproksimasi dari aturan Simpson, diduga karena nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ yang besar seperti yang ditunjukkan pada Subbab 4.2.2.

BAB 5 PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Secara teoritis aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas merupakan pengembangan dari aturan komposit Newton-Cotes. Aturan koreksi batas tersebut lebih baik dibandingkan dengan aturan komposit Newton-Cotes dalam mengaproksimasi integral tentu dari fungsi yang mulus dan tidak periodik. Kemudian dengan modifikasi sederhana bisa didapatkan aturan baru yang dinamakan dengan aturan modifikasi Kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas. Kedua aturan tersebut memiliki order yang sama.

Hasil implementasi numerik pada fungsi tes yang digunakan menunjukkan bahwa h hampir selalu berbanding lurus dengan *relative error* dan m tidak selalu berbanding terbalik dengan *relative error*. Kemudian, hasil implementasi numerik pada integral dari fungsi tes yang mulus dan periodik, menunjukkan bahwa aturan komposit Newton-Cotes mengaproksimasi sama baiknya dengan aturan koreksi batas. Sedangkan, untuk integral dari fungsi tes yang mulus dan berderajat 2, aturan koreksi batas mengaproksimasi lebih baik dibandingkan dengan aturan komposit untuk aturan Trapezoidal dan Midpoint, tetapi aturan komposit Simpson mengaproksimasi lebih baik dibandingkan aturan Simpson koreksi batas. Terakhir, hasil implementasi numerik pada integral dari fungsi tes yang berosilasi, menunjukkan bahwa aturan modifikasi dengan dua parameter t memberikan peningkatan hasil aproksimasi dibandingkan koreksi batas, untuk jenis aturan Trapezoidal dan Midpoint dan untuk pemilihan w dan h tertentu. Tidak adanya peningkatan hasil aproksimasi dari aturan Simpson, diduga karena nilai $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ yang besar.

5.2 Saran

Saran penulis untuk pengembangan analisa aturan kuadratur Newton-Cotes dengan koreksi pada batas dan aturan modifikasinya adalah

1. mengkaji mengenai perbandingan order aproksimasi pada aturan koreksi batas dan aturan modifikasinya
2. mengkaji parameter t yang optimal pada aturan modifikasi

3. mengkaji batas nilai $\beta_k^{(m)}$ dan $\tilde{\beta}_k^{(m)}$ yang optimal pada aturan koreksi batas dan modifikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

- Abramowitz, M. dan I. Stegun. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover.
- Aguilar, Juan C. (2015). Higher-order Newton-Cotes rules with end corrections. *Applied Numerical Mathematics*, 88, 66-77.
- Atkinson, Kendall E. (2007).
http://www.scholarpedia.org/article/Numerical_analysis (diakses pada 6 Februari 2015).
- Burden, R.L. dan J.D. Faires. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole.
- Gagelman, Jerry dan Harry Yserentant. (2011). A spectral method for Schrodinger equations with smooth confinement potentials. *Numerische Mathematik*.
- Hildebrand, F.J. (1974). *Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.). Dover.
- LeVeque, Randall J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM.
- Stoer, J & R. Bulirsch. (1993). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag.
- Uspensky, J.V. (1935). On the expansion of the remainder in the Newton-Cotes formula. *Trans. Am. Math*, 37, 381-396.

Lampiran 1.

```
function sigma_mkp=sigma_mkp(m,k,p)
if p==0
    sigma_mkp=1;
end
if p>0
    A=[1:m];
    for i=k:m-1
        A(i) = A(i+1);
    end
    A=A(1:m-1);
    B=combnk(A,p);
    C=size(B);
    D=ones(C(1),1);
    for i=1:C(1)
        for j=1:C(2)
            D(i)=D(i)*B(i,j);
        end
    end
    D=D.^2;
    sigma_mkp=0;
    for i=1:C(1)
        sigma_mkp=sigma_mkp+D(i);
    end
end
end
```

Lampiran 2.

```
clear;
sd=input('significant digits=');
old=digits(sd);
m=input('berikan nilai m yang diinginkan:');
format short e;
alpha=ones(m);
A=ones(1,m);
S=ones(m);
B=ones(m,1);
B1=[1:m];
B2=ones(m,1);
B3=ones(m,1);
C=ones(m);
for p=2:m
    A(1,p)=vpa(A(1,p-1)*vpa(2*p-2)*vpa(2*p-1));
end
for k=1:m
    for p=1:m
        S(k,p)=sigma_mkp(m,k,p);
    end
end
S=vpa(S);
for k=m-1:-1:1
    B2(k,1)=vpa(B2(k+1,1)*vpa(m-k));
```

```

end
B3(1,1)=vpa(B2(1,1)*vpa(m*(m+1)));
for k=2:m
    B3(k,1)=vpa(B3(k-1,1)*(m+k));
end
B=vpa(B1'./vpa(B2.*B3));
for p=1:m
    for k=1:m
        C(k,p)=(-1)^(p+k);
    end
end
for p=1:m
    for k=1:m
        alpha(k,p)=vpa(A(1,p)*vpa(S(k,p)*vpa(B(k,1)*C(k,p))));
    end
end
alpha

```

Lampiran 3.

```

function [betha_T, betha_M, betha_S]=beta(m)
format shortE;
E=zeros(1,m);
F=zeros(m);
G=ones(m);
M_Z=zeros(1,m);
S_Z=zeros(1,m);
T=zeros(m);
M=zeros(m);
S=zeros(m);
H1=[1:m];
H2=ones(m,1);
H3=ones(m,1);
H=zeros(m,1);
betha_T=zeros(m,1);
betha_M=zeros(m,1);
betha_S=zeros(m,1);
for p=1:m
    E(p)=vpa(bernoulli(2*p))/(2*p);
end
E=vpa(E);
for k=1:m
    for p=1:m
        F(k,p)=s_mkp(m,k,m-p);
    end
end
for k=1:m
    for p=1:m
        G(k,p)=(-1)^(p+k);
    end
end
for p=1:m
    M_Z(p)=(2/(4^p))-1;

```

```

end
for p=1:m
    S_Z(p)=(4-(4^p))/3;
end
M_Z=vpa(M_Z);
S_Z=vpa(S_Z);
for k=1:m
    for p=1:m
        T(k,p)=E(p)*F(k,p)*G(k,p);
    end
end
T=vpa(T);
for k=1:m
    for p=1:m
        M(k,p)=M_Z(p)*T(k,p);
    end
end
M=vpa(M);
for k=1:m
    for p=1:m
        S(k,p)=S_Z(p)*T(k,p);
    end
end
S=vpa(S);
for k=1:m
    for p=1:m
        betha_T(k)=vpa(betha_T(k)+T(k,p));
        betha_M(k)=vpa(betha_M(k)+M(k,p));
        betha_S(k)=vpa(betha_S(k)+S(k,p));
    end
end
betha_T=vpa(betha_T);
betha_M=vpa(betha_M);
betha_S=vpa(betha_S);
for k=m-1:-1:1
    H3(k)=(m-k)*H3(k+1);
end
H2(1)=m*(m+1)*H3(1);
for k=2:m
    H2(k)=(m+k)*H2(k-1);
end
H=H1'./(H2.*H3);
H=vpa(H);
betha_T=betha_T.*H;
betha_M=betha_M.*H;
betha_S=betha_S.*H;
betha_T=vpa(betha_T);
betha_M=vpa(betha_M);
betha_S=vpa(betha_S);
format short e;
betha_T=double(betha_T);
betha_M=double(betha_M);
betha_S=double(betha_S);
end

```

Lampiran 4.

```

function [betha_trap betha_mid betha_simp]=mod_betha_TMS(m,t)
A=ones(1,m);
S=ones(m);
B=ones(m,1);
B1=[1:m];
B2=ones(m,1);
B3=ones(m,1);
C=ones(m);
D=ones(m);
D_mid=ones(m);
D_simp=ones(m);
betha_trap=zeros(m,1);
betha_mid=zeros(m,1);
betha_simp=zeros(m,1);
for p=1:m
    A(1,p)=vpa((t^(2*p-1))*vpa(bernoulli(2*p)))/(2*p);
end
A=vpa(A);
for k=1:m
    for p=1:m
        S(k,p)=sigma_mkp(m,k,p);
    end
end
for k=m-1:-1:1
    B2(k,1)=B2(k+1,1)*(m-k);
end
B3(1,1)=B2(1,1)*m*(m+1);
for k=2:m
    B3(k,1)=B3(k-1,1)*(m+k);
end
B=B1'./(B2.*B3);
B=vpa(B);
for p=1:m
    for k=1:m
        C(k,p)=(-1)^(p+k);
    end
end
for k=1:m
    for p=1:m
        D(k,p)=A(1,p)*S(k,p)*C(k,p);
    end
end
D=vpa(D);
for k=1:m
    for p=1:m
        D_mid(k,p)=D(k,p)*vpa((2/(4^p))-1);
    end
end
D_mid=vpa(D_mid);
for k=1:m

```

```

        for p=1:m
            D_simp(k,p)=D(k,p)*vpa((4-(4^p))/3);
        end
    end
    D_simp=vpa(D_simp);
    for k=1:m
        for p=1:m
            betha_trap(k,1)=vpa(betha_trap(k,1)+D(k,p));
        end
    end
    betha_trap=vpa(betha_trap);
    for k=1:m
        for p=1:m
            betha_mid(k,1)=vpa(betha_mid(k,1)+D_mid(k,p));
        end
    end
    betha_mid=vpa(betha_mid);
    for k=1:m
        for p=1:m
            betha_simp(k,1)=vpa(betha_simp(k,1)+D_simp(k,p));
        end
    end
    format short e;
    betha_simp=vpa(betha_simp);
    betha_trap=betha_trap.*B;
    betha_mid=betha_mid.*B;
    betha_simp=betha_simp.*B;
    betha_trap=vpa(betha_trap);
    betha_mid=vpa(betha_mid);
    betha_simp=vpa(betha_simp);
    betha_trap=double(betha_trap);
    betha_mid=double(betha_mid);
    betha_simp=double(betha_simp);
end

```

Lampiran 5.

```

clear;
format shortG;
sd=input('significant digits=');
old=digits(sd);
f=input('f(x)= ','s');
f=inline(f);
a=input('batas bawah integrasi=');
a=vpa(a);
b=input('batas atas integrasi=');
b=vpa(b);
nilai=input('nilai integral sebenarnya=');
nilai=vpa(nilai);
tic
Err_T=zeros(4);
Err_T=vpa(Err_T);
Err_M=zeros(4);
Err_M=vpa(Err_M);

```

```

Err_S=zeros(4);
Err_S=vpa(Err_S);
format short e;
tic
for i=1:4
    for j=1:4
        Err_T(i,j)=nilai;
        Err_M(i,j)=nilai;
        Err_S(i,j)=nilai;
    end
end
L=zeros(4,19);
L=vpa(L);
bethaT=zeros(19,4);
bethaT=vpa(bethaT);
bethaM=zeros(19,4);
bethaM=vpa(bethaM);
bethaS=zeros(19,4);
bethaS=vpa(bethaS);
kor_T=zeros(4);
kor_T=vpa(kor_T);
kor_M=zeros(4);
kor_M=vpa(kor_M);
kor_S=zeros(4);
kor_S=vpa(kor_S);
for h=1:4
    for k=1:19
        L(h,k)=vpa(vpa(f(vpa(b+vpa(k*(10^(-h))))))-vpa(f(vpa(b-
vpa(k*(10^(-h))))))-vpa(f(vpa(a+vpa(k*(10^(-h))))))+vpa(f(vpa(a-
vpa(k*(10^(-h)))))));
    end
end
j=0;
for m=[4 9 14 19]
    [betha_T, betha_M, betha_S]=beta(m);
    for k=1:m
        bethaT(k,(m-j)/4)=betha_T(k);
        bethaM(k,(m-j)/4)=betha_M(k);
        bethaS(k,(m-j)/4)=betha_S(k);
    end
    j=j+1;
end
bethaT=vpa(bethaT);
bethaM=vpa(bethaM);
bethaS=vpa(bethaS);
for h=1:4
    j=0;
    for m=[4 9 14 19]
        for k=1:m
            kor_T(h,(m-j)/4)=vpa(kor_T(h,(m-j)/4)+vpa(bethaT(k,(m-
j)/4)*L(h,k)));
            kor_M(h,(m-j)/4)=vpa(kor_M(h,(m-j)/4)+vpa(bethaM(k,(m-
j)/4)*L(h,k)));

```

```

        kor_S(h, (m-j)/4)=vpa(kor_S(h, (m-j)/4)+vpa(bethaS(k, (m-
j)/4)*L(h,k)));
        end
        j=j+1;
    end
end
kor_T=vpa(kor_T);
kor_M=vpa(kor_M);
kor_S=vpa(kor_S);
for h=1:4
    for m=1:4
        kor_T(h,m)=vpa(kor_T(h,m)*(10^(-h)));
        kor_M(h,m)=vpa(kor_M(h,m)*(10^(-h)));
        kor_S(h,m)=vpa(kor_S(h,m)*(10^(-h)));
    end
end
kor_T=vpa(kor_T);
kor_M=vpa(kor_M);
kor_S=vpa(kor_S);
sum1=0;
sum2=0;
sum3=0;
sum4=0;
K=zeros(4,3);
K=vpa(K);
for h=[1 2 3 4]
    N=(b-a)/(10^(-h));
    for i=1:(N-1)
        sum1=vpa(sum1+vpa(f(vpa(a+vpa(i*(10^(-h)))))));
    end
    for i=0:(N-1)
        sum2=vpa(sum2+vpa(f(vpa((vpa(2*a)+vpa((10^(-
h))*(2*i+1))/2)))));
    end
    for i=1:(N/2)-1
        sum3=vpa(sum3+vpa(f(vpa(a+vpa(2*i*(10^(-h)))))));
    end
    for i=1:(N/2)
        sum4=vpa(sum4+vpa(f(vpa(a+vpa((2*i-1)*(10^(-h)))))));
    end
    K(h,1)=vpa(vpa((10^(-
h))/2)*vpa(vpa(f(a))+vpa(2*sum1)+vpa(f(b)))));
    K(h,2)=vpa((10^(-h))*sum2);
    K(h,3)=vpa(vpa((10^(-
h))/3)*vpa(vpa(f(a))+vpa(2*sum3)+vpa(4*sum4)+vpa(f(b)))));
    sum1=0;
    sum2=0;
    sum3=0;
    sum4=0;
end
K_T=zeros(4);
K_T=vpa(K_T);
K_M=zeros(4);
K_M=vpa(K_M);

```

```

K_S=zeros(4);
K_S=vpa(K_S);
for h=1:4
    for m=1:4
        K_T(h,m)=K(h,1);
        K_M(h,m)=K(h,2);
        K_S(h,m)=K(h,3);
    end
end
kor_T=vpa(K_T-kor_T);
kor_M=vpa(K_M-kor_M);
kor_S=vpa(K_S-kor_S);
Err_T=vpa(vpa(abs(kor_T-Err_T))./vpa(abs(Err_T))));
Err_M=vpa(vpa(abs(kor_M-Err_M))./vpa(abs(Err_M))));
Err_S=vpa(vpa(abs(kor_S-Err_S))./vpa(abs(Err_S))));
Err_T=double(Err_T)
Err_M=double(Err_M)
Err_S=double(Err_S)
toc

```

Lampiran 6.

```

clear;
format shortG;
sd=input('significant digits=');
old=digits(sd);
t=input('t=');
f=input('f(x)= ','s');
f=inline(f);
a=input('batas bawah integrasi=');
a=vpa(a);
b=input('batas atas integrasi=');
b=vpa(b);
nilai=input('nilai integral sebenarnya=');
nilai=vpa(nilai);
tic
Err_T=zeros(4);
Err_T=vpa(Err_T);
Err_M=zeros(4);
Err_M=vpa(Err_M);
Err_S=zeros(4);
Err_S=vpa(Err_S);
format short e;
tic
for i=1:4
    for j=1:4
        Err_T(i,j)=nilai;
        Err_M(i,j)=nilai;
        Err_S(i,j)=nilai;
    end
end
L=zeros(4,19);
L=vpa(L);
bethaT=zeros(19,4);

```

```

bethaT=vpa(bethaT);
bethaM=zeros(19,4);
bethaM=vpa(bethaM);
bethaS=zeros(19,4);
bethaS=vpa(bethaS);
kor_T=zeros(4);
kor_T=vpa(kor_T);
kor_M=zeros(4);
kor_M=vpa(kor_M);
kor_S=zeros(4);
kor_S=vpa(kor_S);
for h=1:4
    for k=1:19
        L(h,k)=vpa(vpa(f(vpa(b+vpa(k*vpa((10^(-h))/t)))))-
vpa(f(vpa(b-vpa(k*vpa((10^(-h))/t)))))-vpa(f(vpa(a+vpa(k*vpa((10^(-h))/t)))))+vpa(f(vpa(a-vpa(k*vpa((10^(-h))/t))))));
    end
end
j=0;
for m=[4 9 14 19]
    [betha_T, betha_M, betha_S]=mod_betha_TMS(m,t);
    for k=1:m
        bethaT(k,(m-j)/4)=betha_T(k);
        bethaM(k,(m-j)/4)=betha_M(k);
        bethaS(k,(m-j)/4)=betha_S(k);
    end
    j=j+1;
end
bethaT=vpa(bethaT);
bethaM=vpa(bethaM);
bethaS=vpa(bethaS);
for h=1:4
    j=0;
    for m=[4 9 14 19]
        for k=1:m
            kor_T(h,(m-j)/4)=vpa(kor_T(h,(m-j)/4)+vpa(bethaT(k,(m-j)/4)*L(h,k)));
            kor_M(h,(m-j)/4)=vpa(kor_M(h,(m-j)/4)+vpa(bethaM(k,(m-j)/4)*L(h,k)));
            kor_S(h,(m-j)/4)=vpa(kor_S(h,(m-j)/4)+vpa(bethaS(k,(m-j)/4)*L(h,k)));
        end
        j=j+1;
    end
end
kor_T=vpa(kor_T);
kor_M=vpa(kor_M);
kor_S=vpa(kor_S);
for h=1:4
    for m=1:4
        kor_T(h,m)=vpa(kor_T(h,m)*(10^(-h)));
        kor_M(h,m)=vpa(kor_M(h,m)*(10^(-h)));
        kor_S(h,m)=vpa(kor_S(h,m)*(10^(-h)));
    end
end

```

```

end
kor_T=vpa(kor_T);
kor_M=vpa(kor_M);
kor_S=vpa(kor_S);
sum1=0;
sum2=0;
sum3=0;
sum4=0;
K=zeros(4,3);
K=vpa(K);
for h=[1 2 3 4]
    N=(b-a)/(10^(-h));
    for i=1:(N-1)
        sum1=vpa(sum1+vpa(f(vpa(a+vpa(i*(10^(-h)))))));
    end
    for i=0:(N-1)
        sum2=vpa(sum2+vpa(f(vpa((vpa(2*a)+vpa((10^(-h))*(2*i+1)))/2)))));
    end
    for i=1:(N/2)-1
        sum3=vpa(sum3+vpa(f(vpa(a+vpa(2*i*(10^(-h)))))));
    end
    for i=1:(N/2)
        sum4=vpa(sum4+vpa(f(vpa(a+vpa((2*i-1)*(10^(-h)))))));
    end
    K(h,1)=vpa(vpa((10^(-h))/2)*vpa(vpa(f(a))+vpa(2*sum1)+vpa(f(b)))));
    K(h,2)=vpa((10^(-h))*sum2);
    K(h,3)=vpa(vpa((10^(-h))/3)*vpa(vpa(f(a))+vpa(2*sum3)+vpa(4*sum4)+vpa(f(b)))));
    sum1=0;
    sum2=0;
    sum3=0;
    sum4=0;
end
K_T=zeros(4);
K_T=vpa(K_T);
K_M=zeros(4);
K_M=vpa(K_M);
K_S=zeros(4);
K_S=vpa(K_S);
for h=1:4
    for m=1:4
        K_T(h,m)=K(h,1);
        K_M(h,m)=K(h,2);
        K_S(h,m)=K(h,3);
    end
end
kor_T=vpa(K_T-kor_T);
kor_M=vpa(K_M-kor_M);
kor_S=vpa(K_S-kor_S);
Err_T=vpa(vpa(abs(kor_T-Err_T))./vpa(abs(Err_T))));
Err_M=vpa(vpa(abs(kor_M-Err_M))./vpa(abs(Err_M))));
Err_S=vpa(vpa(abs(kor_S-Err_S))./vpa(abs(Err_S))));

```

```

Err_T=double(Err_T)
Err_M=double(Err_M)
Err_S=double(Err_S)
toc

```

Lampiran 7.

```

clear;
format short e;
sd=input('significant digits=');
old=digits(sd);
f=input('f(x)= ', 's');
f=inline(f);
a=input('batas bawah integrasi:');
a=vpa(a);
b=input('batas atas integrasi:');
b=vpa(b);
nilai=input('nilai integral sebenarnya:');
nilai=vpa(nilai);
H=zeros(4,3);%T-baris 1, M-baris 2, S-baris 3
H=vpa(H);
Nil=zeros(4,3);
Nil=vpa(Nil);
E=zeros(4,3);
E=vpa(E);
for i=1:4
    for j=1:3
        Nil(i,j)=nilai;
    end
end
tic
for h = [1 2 3 4]%program komposit NC
    N=(b-a)/(10^(-h));
    sum1=0;
    for i=1:N-1
        sum1=vpa(sum1+vpa(f(vpa(a+i*(10^(-h))))));
    end
    sum2=0;
    for i=0:N-1
        sum2=vpa(sum2+vpa(f(vpa(vpa(2*a+(2*i+1)*(10^(-h)))/2))));
    end
    sum3=0;
    for i=1:(N/2)-1
        sum3=vpa(sum3+vpa(f(vpa(a+2*i*(10^(-h))))));
    end
    sum4=0;
    for i=1:N/2
        sum4=vpa(sum4+vpa(f(vpa(a+(2*i-1)*(10^(-h))))));
    end
    H(h,1)=vpa(((10^(-h))/2)*vpa(vpa(f(a))+vpa(2*sum1)+vpa(f(b))));
    H(h,2)=vpa((10^(-h))*sum2);
    H(h,3)=vpa(((10^(-h))/3)*vpa(vpa(f(a))+vpa(2*sum3)+vpa(4*sum4)+vpa(f(b))));
end

```

```
H;  
Nil;  
abs(Nil);  
vpa(abs(Nil-H));  
E=vpa(abs(Nil-H))./vpa(abs(Nil));  
E=double(E)  
toc
```