UNIVERSITAS INDONESIA

PENGGUNAAN PEMROGRAMAN MATEMATIKA DALAM PELABELAN GRACEFUL

SKRIPSI

FEBRIAN MARCOVAN LEWIS
0606067383

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2010

UNIVERSITAS INDONESIA

PENGGUNAAN PEMROGRAMAN MATEMATIKA DALAM PELABELAN GRACEFUL

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

FEBRIAN MARCOVAN LEWIS
0606067383

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
DESEMBER 2010

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya sendiri,

dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	:	Febrian Marcovan Lewis
NPM	:	0606067383
Tanda Tangan	:	
Tanggal	:	22 Desember 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh:

Nama	:	Febrian Marcovan Lewis
NPM	:	0606067383
Program Studi	:	Matematika
Judul Skripsi	:	Penggunaan Pemrograman Matematika dalam Pelabelan Graceful

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Pembimbing	:	Dra. Denny Riama Silaban M.Kom	( )
Penguji	:	Dra. Denny Riama Silaban M.Kom	( )
Penguji	:	Prof. Dr. Djati Kerami	( )
Penguji	:	Fevi Novkaniza S.Si., M.Si	( )

Ditetapkan di	:	Depok
Tanggal	:	22 Desember 2010

KATA PENGANTAR / UCAPAN TERIMA KASIH

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yesus Kristus, Allah semesta alam, atas penyertaan-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sience Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Saya menyadari bahwa, tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak, dari masa perkuliahan sampai pada penyusunan skripsi ini, sangatlah sulit bagi saya untuk menyelesaikan skripsi ini. 'Sebab Aku ini TUHAN, Allahmu, memegang tangan kananmu dan berkata kepadamu: "Janganlah takut, Akulah yang menolong engkau."' (Yesaya 41:13). Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

(1) Ibu Denny Riama Silaban. Terima kasih bimbingannya selama ini (mohon maaf karena sering mengecewakan ibu dalam proses pengerjaan skripsi ini. Terima kasih untuk kesabaran ibu, Tuhan Yesus memberkati).

(2) Ibu Suarsih. Terima kasih ya bu, buat kesabaran dan bimbingan ibu selama Rian kuliah (terima kasih banyak bu).

(3) Ibu Kiki, Ibu Aminah, Pak Suryadi M T, Ibu Rahmi, Ibu Dhian Widya, Pak Djati, Ibu Fevi dan semua dosen di departemen Matematika UI. Terima kasih untuk bimbingannya.

(4) Bapak, mama, abang, ade di rumah. Terima kasih untuk doanya dan dukungannya selama ini (Tuhan Yesus menyertai kita semua).

(5) Teman-teman KTB (Kelompok Tumbuh Bersama), KK (Kelompok Kecil), dan sahabatku. Tyas, Rista, Maya, Eci, Stefano, Cintya, Cia, Juni. (Terima kasih untuk segala kekuatan yang kalian berikan ya, *you mean much to me*, *really much*. *Thx alot*. *Gbus*).

(6) AKK (Anak Kelompok Kecil) ku . Alit, Dicky, Gerry, Habebe, Kevin, Yudi. (Terima kasih selalu mengingatkanku untuk berjuang menyelesaikan skripsi. *We are family forever guys*).

(7) Adik-adikku dalam pelayanan (Ii, Tiara, Grace, Itle, Wila, Suti, Clara, Andira, Nenik, Yosua, Uli, Agustin, Denis, Deril, Evin, Rini, Michelle, Ayu, Irma, Agnes, Echa, Monic, Calista, David, Marsya, dan banyak lagi -maaf yang belum sempat di sebutkan-). Terima kasih untuk doanya (kalian adalah bagian dari hidupku).

(8) Teman-teman sepelayananku (Blessy, Obet, Osin, Rinjadi, Dini, Jevon, Ricky, Eta, Ira, Santi, Christin, Ivan, Ocha, Citra). Terima kasih untuk dorongan dan doanya.

(9) Kakak-kakak pelayananku (K' Ino, K' Heri, K' Widya, K' Nesya, K' Imel, B' Erwin (alm), K' Alex, K' Rico, K' Ata, K' Chaki, K' Sabet, dan banyak kakak lainnya). Terima kasih untuk bimbingan dan doanya selama ini.

(10) Intan, Lani, Novi, Michael, Anggha. Terima kasih banyak untuk bantuan selama ini.

(11) Teman-teman seperjuangan (Tasya, Syafira, Dhita, Stefi, Widita, Widi, Wiwi, Aliman, Lani, Novi, Nadia, Rita, Shally, Jessie, Othe, Yanu, Oza, Bara, Doddy, Nita). Terima kasih untuk semangat, bantuan, dan berbagai informasi yang sangat membantu. Juga untuk seluruh teman-teman angkatan 2006, terima kasih banyak untuk pertemanan selama ini.

(12) Mba Santi, Pak Saliman, Pak Suratmin, Pak Turino, Bu Juriah, Pak Anshori, Pak Irwan. Terima kasih banyak untuk bantuan pendaftaran "ini dan itu" selama proses pengerjaan skripsi.

(13) Mba Rusmi, Mas Salman. Terima kasih untuk segala macam bantuan yang berhubungan dengan perpustakaan kita.

Terima kasih juga untuk berbagai macam pelajaran yang Tuhan Yesus berikan dalam proses pengerjaan skripsi ini. Akhirnya, penulis mohon maaf apabila terdapat kesalahan ataupun kekurangan dalam skripsi ini. 'Sebab segala sesuatu adalah dari Dia, dan oleh Dia, dan kepada Dia: Bagi Dialah kemuliaan sampai selama-lamanya!' (Roma 11:36).

Penulis

2010

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Febrian Marcovan Lewis
NPM	: 0606067383
Program Studi	: Matematika
Departemen	: Matematika
Fakultas	: MIPA
Jenis Karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia, Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:
Penggunaan Pemrograman Matematika dalam Pelabelan Graceful
beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini, Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmediakan, mengelola dalam bentuk *database*, merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 22 Desember 2010
Yang menyatakan

(Febrian Marcovan Lewis)

ABSTRAK

Nama : Febrian Marcovan Lewis
Program Studi : Matematika
Judul : Penggunaan Pemrograman Matematika Dalam Pelabelan Graceful

Misalkan $G = \big(V(G), E(G)\big)$ adalah graf dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan busur $E(G)$ dengan banyaknya simpul $n = |V(G)|$, dan banyaknya busur $m = |E(G)|$. Pelabelan graceful dari graf G adalah pemetaan injektif f dari $V(G)$ ke {0, 1, 2, ..., m}, sedemikian sehingga jika busur $v_i v_j$ dilabelkan $g\big(v_i v_j\big) = |f(v_i) - f(v_j)|$, dengan $i, j = \{0, 1, 2, \dots, n\}, i \neq j$, label busur-busurnya berbeda. Dalam skripsi ini akan dibangun suatu pemodelan pemrograman matematika dari suatu masalah pelabelan graceful berdasarkan model yang telah dibuat oleh Redl dan Eshghi-Azimi. Untuk membuat model pemrograman matematika dari suatu masalah pelabelan graceful, dibuat program dengan menggunakan MATLAB, sedangkan penyelesaiannya menggunakan LINGO. Simulasi dilakukan untuk graf lintasan dengan $n \leq 6$, dan graf lingkaran dengan $n \leq 5$.

Kata kunci : pelabelan graceful, pemrograman matematika, lintasan, lingkaran.
xii+43 halaman ; 10 gambar; 2 tabel
Daftar Pustaka : 11 (1976-2010)

ABSTRACT

Name : Febrian Marcovan Lewis
Study Program : Matematika
Title : Application of Mathematical Programming in Graceful Labeling

Let $G = \big(V(G), E(G)\big)$ be a graph with the set of vertices $V(G)$ and the set of edges $E(G)$ where the number of vertices $n = |V(G)|$, and the number of edges $m = |E(G)|$. A graceful labeling of a graph G is an injective mapping f from $V(G)$ to the set $\{0, 1, 2, \dots, m\}$, such that if edge $v_i v_j$ is labeled with $g(v_i v_j) = |f(v_i) - f(v_j)|$, $i, j = \{0, 1, 2, \dots, n\}, i \neq j$, the resulting edge labels are distinct. In this *skripsi*, will be shown how to model a graceful labeling problem as a mathematical programming model, as givrn by Redl and by Eshghi-Azimi. Computer programs using MATLAB are developed to generate mathematical programming model of a graceful labeling problem. The generating models are solve with LINGO. Simulations are given for path with $n \leq 6$ and cycle with $n \leq 5$.

Key words : graceful labeling, mathematical programming, path, cycle.
xii+43 pages ; 10 pictures; 2 tables
Bibliography : 11 (1976-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Banyak situasi nyata di dunia yang dapat digambarkan sebagai suatu diagram dari titik-titik yang dihubungkan dengan garis-garis. Salah satu contoh, terdapat suatu kota bernama Königsberg, yang merupakan ibukota Prussia Timur, namun tempat itu sekarang dikenal dengan nama Kaliningrad di Russia. Di kota tersebut terdapat 7 jembatan yang menghubungkan 4 daerah. Banyak orang yang memikirkan, bagaimana caranya bisa melewati ketujuh jembatan itu tanpa melewati jembatan yang sama, lebih dari 1 kali. Pada tahun 1735, Leonhard Euler menjelaskan bahwa melewati 7 jembatan tersebut, masing-masing tepat 1 kali, adalah hal yang tidak mungkin. Situasi nyata tersebutlah yang dibicarakan oleh Leonhard Euler dalam makalah ilmiah yang ditulisnya dengan judul *Solvtio Problematis ad Geometriam Sitvs Pertinentis* dan dipublikasikan pada tahun 1736. Makalah ilmiah tersebut dikenal sebagai makalah ilmiah pertama dalam sejarah teori graf.

Dinamakan graf karena situasi-situasi nyata tersebut dapat direpresentasikan secara grafik, dan melalui representasi inilah bisa dipelajari banyak hal mengenai situasi-situasi nyata tersebut. Secara umum, graf adalah himpunan simpul dan himpunan busur yang menghubungkan beberapa simpul. Sejak ditemukannya teori graf sampai saat ini, banyak peneliti yang melakukan penelitian mengenai teori graf. Beberapa graf yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah graf lintasan dan graf lingkaran. Suatu graf lintasan dengan banyaknya simpul n memiliki $n - 1$ busur. Sedangkan pada graf lingkaran, banyaknya simpul sama dengan banyaknya busur.

Salah satu bagian dari teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf adalah pemberian label berupa integer kepada himpunan simpul, busur, atau keduanya. Jika yang dilabel simpul, dinamakan pelabelan simpul, jika busur, dinamakan pelabelan busur, dan jika simpul dan busur, dinamakan pelabelan total.

Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan graceful. Pelabelan graceful termasuk dalam jenis pelabelan simpul yang menginduksi pelabelan busur.

Pelabelan graceful diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967. Namun pada saat itu, Rosa tidak menyebutnya dengan istilah pelabelan graceful, tapi dengan istilah *β-valuation*. Istilah pelabelan graceful tidak digunakan sampai seorang peneliti bernama Solomon W. Golomb memelajari pelabelan tersebut pada tahun 1972.

Pelabelan graceful dari graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dengan n simpul dan m busur adalah pemetaan injektif f dari $V(G)$ ke {0, 1, 2, ..., m}, sedemikian sehingga jika busur $v_i v_j$ dilabelkan $|f(v_i) - f(v_j)|$, dengan $i, j = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, label busur-busurnya berbeda. Graf yang memiliki pelabelan graceful, disebut graf graceful. Graf lintasan dengan n simpul, memiliki $n - 1$ busur, jadi pelabelan graceful pada lintasan menggunakan semua label yang tersedia. Dengan kata lain pelabelan graceful pada graf lintasan merupakan pemetaan bijektif. Sedangkan untuk graf lingkaran dengan n simpul, banyak busur sama dengan banyaknya simpul, jadi label yang tersedia tidak semuanya digunakan.

Dalam perkembangan pelabelan graceful, dilakukan penelitian-penelitian baik dari pendekatan aljabar, maupun pemrograman matematika. Hal ini dilakukan untuk menyelesaikan masalah pelabelan graceful. Masalah pelabelan graceful adalah masalah untuk menentukan apakah suatu graf memiliki pelabelan graceful atau tidak, dan jika memiliki, bagaimana cara membuat pelabelannya. Menurut survey yang dilakukan oleh Gallian (2009), graf lintasan adalah graf graceful, sedangkan graf lingkaran adalah graf graceful jika jumlah simpul pada lingkarannya kongruen dengan 0 atau 3 (mod 4). Hasil-hasil yang lengkap tentang graf graceful dapat dilihat pada survey tersebut.

Pada tahun 2003, Timothy A. Redl, memodelkan masalah pelabelan graceful dalam 2 model pemrograman matematika. Model pertamanya menggunakan pemrograman integer, sedangkan model keduanya menggunakan pemrograman berkendala. Menggunakan model yang diberikan, Redl menunjukan bahwa graf Petersen yang diperumum, graf *double cone*, dan beberapa graf yang lain untuk banyak simpul tertentu, adalah graceful.

Pada tahun yang sama, Eshghi dan Azimi, juga memodelkan masalah pelabelan graceful dalam model pemrograman matematika, namun lebih mudah diselesaikan, jika dibandingkan dengan model yang dibuat oleh Redl. Untuk menyelesaikan model tersebut, Eshghi dan Azimi menggunakan metode cabang dan batas (*branch and bound*). Model dan penyelesaian yang dibangun mereka menunjukan bahwa graf lingkaran, graf ular, graf kecebong, dan beberapa graf yang lain untuk banyak simpul tertentu, adalah graceful.

Dalam skripsi ini, akan diberikan rekonstruksi dan perkembangan pembuatan model pemrograman matematika dari suatu masalah pelabelan graceful. Kemudian akan dibuat program untuk membangun model pemrograman matematika untuk masalah pelabelan graceful dari graf lintasan dan lingkaran menurut Redl dengan menggunakan MATLAB kemudian diselesaikan menggunakan LINGO.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Bagaimana memodelkan masalah pelabelan graceful dari suatu graf menjadi model pemrograman matematika?

Graf yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah graf lintasan dan graf lingkaran.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Penelitian ini dilakukan dengan studi literatur dan simulasi.

1.4 Tujuan Penelitian

Memelajari pemodelan masalah pelabelan graceful dalam model pemrograman matematika menurut model Redl maupun Eshghi dan Azimi, menjelaskan penyelesaian model pemrograman matematika Eshghi dan Azimi menggunakan metode cabang dan batas, serta melakukan simulasi untuk graf lintasan dan graf lingkaran.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi 4 Bab. Dalam Bab 2 akan dipaparkan definisi-definisi dan dasar-dasar yang diperlukan dalam skripsi ini, yaitu mengenai teori graf, pelabelan graceful, pemrograman matematika, metode cabang dan batas, dan hasil yang sudah diketahui. Dalam Bab 3 akan dijelaskan bagaimana memodelkan masalah pelabelan graceful dari suatu graf, ke dalam model pemrograman matematika menurut model yang telah dibuat Redl dan perkembangan model tersebut menjadi model yang telah dibuat Eshghi-Azimi. Dalam Bab 4 diberikan simulasi pembuatan model pemrograman matematika menurut model Redl dan penyelesaiannya untuk masalah pelabelan graceful dari graf lintasan dan graf lingkaran. Dalam Bab 5 diberikan kesimpulan.

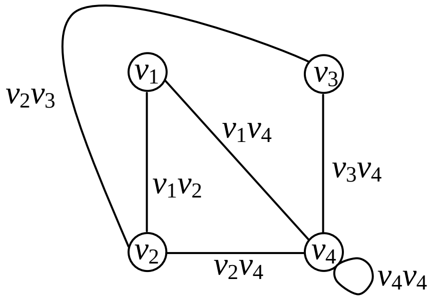
BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada Bab 1, dipaparkan secara umum, apa yang menjadi pembahasan pada skripsi ini. Untuk dapat memahami pembahasan tersebut secara utuh, maka beberapa definisi dan pengertian perlu diketahui. Dalam bab ini akan dibahas beberapa definisi dan pengertian dalam teori graf, pemrograman matematika, dan metode cabang dan batas.

2.1 Teori Graf

Graf $G = \big(V(G), E(G)\big)$ dengan n simpul dan m busur terdiri dari satu himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan satu himpunan busur $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ dimana setiap busurnya terdiri dari 2 simpul yang disebut **titik-titik ujung** (*endpoints*) dari busur tersebut. Busur $e = \{v_i, v_j\}$, yaitu busur yang menghubungkan simpul v_i dan v_j dinotasikan dengan $v_i v_j$. Jika $v_i v_j \in E(G)$, maka v_i dan v_j disebut **bertetanggaan** (*adjacent*). Banyaknya anggota pada himpunan $V(G)$ dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya anggota pada himpunan $E(G)$ dinotasikan dengan $|E(G)|$. Sebuah busur yang memiliki kedua titik-titik ujung yang sama disebut dengan **gelung** (*loop*). Simpul-simpul yang titik-titik ujungnya sama disebut **busur ganda** (*multiple edges*). Graf yang tidak memiliki gelung maupun busur ganda disebut **graf sederhana** (*simple graph*). Graf disebut **berhingga** (*finite*) jika himpunan simpul dan himpulan busurnya berhingga.

Graf dapat direpresentasikan dalam bentuk grafik. Simpul digambarkan dengan bulatan. Busur digambarkan dengan garis yang menghubungkan 2 simpul (untuk gelung, hanya 1 simpul). Pada umumnya, simpul dinotasikan dengan huruf kecil u, v, w atau $u_i, v_{i,}, w_i$, sedangkan busur dinotasikan dengan $v_i v_j$ yang menghubungkan simpul v_i dan v_j, dengan i adalah anggota dari himpunan bilangan asli. Pada Gambar 2.1 diberikan contoh graf.



Gambar 2. 1 Contoh graf dengan $|V| = 5$ dan $|E| = 6$

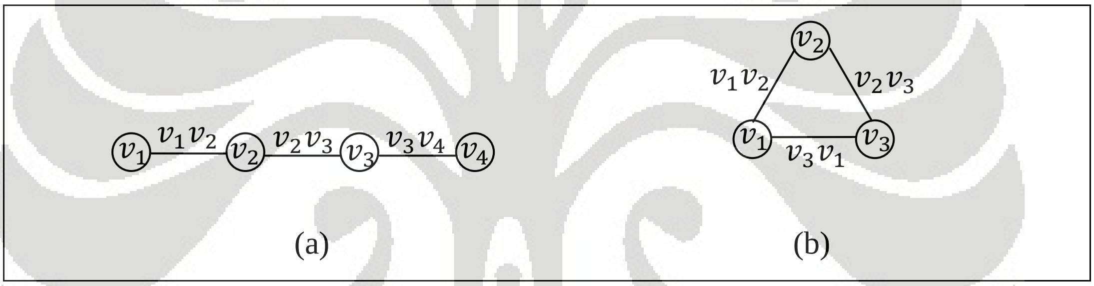
Derajat (*degree*) dari suatu simpul v adalah banyaknya busur di graf G yang memiliki titik ujung di v, dinotasikan dengan $deg(v)$. Untuk simpul yang memiliki gelung, simpul tersebut memiliki 2 derajat dari setiap gelung. Pada Gambar 2.1, $deg(v_1) = 2$, $deg(v_2) = 3$, $deg(v_3) = 2$, $deg(v_4) = 5$, $deg(v_5) = 0$. Simpul yang memiliki derajat 0 dinamakan **simpul terpencil** (*isolated vertex*). Simpul yang memiliki derajat 1 dinamakan **simpul terminal** (*terminal vertex*). Derajat terbesar simpul yang ada di graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$, sedangkan derajat terkecil simpul dinotasikan dengan $\delta(G)$. Graf G disebut graf teratur berderajat r, jika $\Delta(G) = \delta(G) = r$.

Jalan (*walk*) adalah sederet $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ dari simpul-simpul dan busur-busur dengan $1 \leq i \leq k$, busur e_i memiliki titik-titik ujung v_{i-1} dan v_i. Jalan yang berawal pada simpul v_0 dan berakhir pada simpul v_k dinotasikan dengan jalan-(v_0, v_k). Jalan-(v_0, v_0) disebut *cycle*. **Jalur** (*trail*) adalah jalan yang busur-busurnya tak berulang. Jalur yang berawal pada simpul v_0 dan berakhir pada simpul v_k dinotasikan dengan jalur-(v_0, v_k). Jika simpul awal pada jalur atau lintasan sama dengan simpul akhir, maka dinamakan **tertutup** (*closed*). Jalur tertutup dinamakan **sirkuit** (*circuit*). **Lintasan** (*path*) adalah jalur yang simpul-simpulnya tak berulang, dengan titik-titik ujungnya berderajat 1, simpul-simpul selain titik-titik ujungnya disebut **simpul dalam** (*internal vertex*). Lintasan yang berawal pada simpul v_0 dan berakhir pada simpul v_k dinotasikan dengan lintasan-(v_0, v_k). Graf disebut **terhubung** (*connected*) jika untuk setiap $u, v \in V(G)$, terdapat lintasan-(v_0, v_k). Jika tidak, disebut tak **terhubung** (*disconnected*).

2.2 Jenis-jenis Graf

Graf lintasan (*path graph*), P_n, adalah graf terhubung yang memiliki n simpul dan busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{(n-1)}v_n$, sehingga $|V| = n, |E| = n - 1$. Simpul v_1 disebut simpul awal dan v_n disebut simpul akhir. Semua simpul berderajat 2, kecuali simpul awal dan akhir berderajat 1. Pada Gambar 2.2 (a) diberikan graf lintasan dengan $n = 4$, P_4.

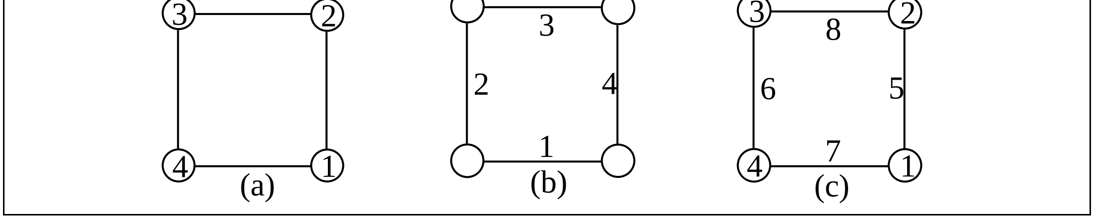
Graf lingkaran (*cycle graph*), C_n, adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_n dengan diberikan tambahan busur v_nv_1. Graf lingkaran adalah graf teratur karena semua simpulnya berderajat 2. Jadi $|V| = |E| = n$. Pada Gambar 2.2 (b) diberikan graf lingkaran dengan $n = 3$, C_3.



Gambar 2. 2 (a) Graf P_4 (b) Graf Lingkaran C_3

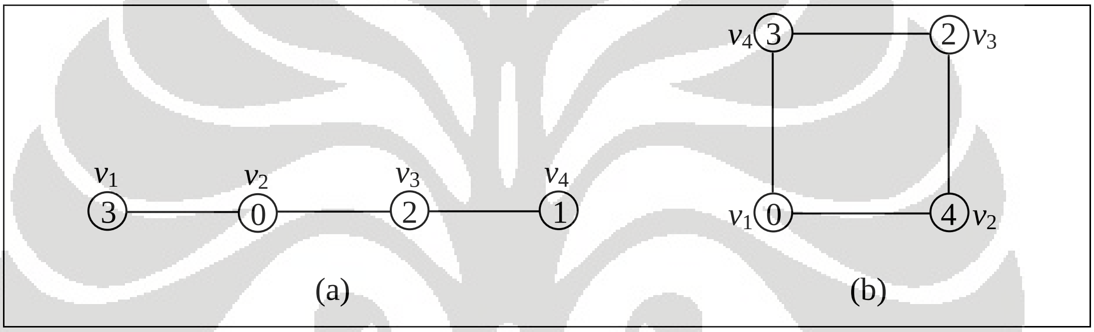
2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah salah satu bagian dari teori graf. Yang dimaksud dengan pelabelan graf adalah pemberian label berupa bilangan bulat kepada himpunan simpul yang disebut pelabelan simpul, kepada himpunan busur yang disebut pelabelan busur, atau keduanya yang disebut pelabelan total. Pada Gambar 2.3 diberikan contoh pelabelan simpul, pelabelan busur, dan pelabelan total.



Gambar 2. 3 (a) Pelabelan simpul (b) Pelabelan busur (c) Pelabelan total

Di dalam skripsi ini akan dibahas sebuah jenis pelabelan, yaitu pelabelan graceful. Jika diberikan suatu graf G dengan $n = |V(G)|$ dan $n = |E(G)|$, maka pelabelan graceful dari graf G adalah pemetaan injektif f dari $V(G)$ ke {0, 1, 2, ..., m}, sedemikian sehingga jika busur $v_i v_j$ dilabelkan $|f(v_i) - f(v_j)|$, dengan $i, j = \{0, 1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, label busur-busurnya berbeda. Dalam skripsi ini, $|f(v_i) - f(v_j)|$ akan dinotasikan dengan $g(v_i v_j)$. Pelabelan graceful termasuk ke dalam pelabelan simpul yang menginduksi pelabelan busur. Graf yang memiliki pelabelan graceful disebut graf graceful.



Gambar 2. 4 Pelabelan graceful untuk graf (a) P_4 (b) Graf lingkaran C_4

Pada Gambar 2.4 diberikan contoh pelabelan graceful untuk graf P_4 dan pada C_4. Label yang tersedia untuk pelabelan pada graf P_4, yaitu 0, 1, 2, 3 dipakai semua. Jadi fungsi f bukan hanya injektif tapi juga bijektif, dengan

$$f(v_1) = 3, f(v_2) = 0, f(v_3) = 2, f(v_4) = 1$$

menginduksi pelabelan busur

$$g(v_1 v_2) = |f(v_1) - f(v_2)| = 3$$
$$g(v_2 v_3) = |f(v_2) - f(v_3)| = 2$$
$$g(v_3 v_4) = |f(v_3) - f(v_4)| = 1$$

Label yang tersedia untuk pelabelan pada graf C_4 adalah 0, 1, 2, 3, 4. Tetapi label yang dipakai adalah

$$f(v_1) = 0, f(v_2) = 4, f(v_3) = 2, f(v_4) = 3$$

sedangkan label 1 tidak dipakai untuk melabelkan simpul, kemudian menginduksi pelabelan busur

$$g(v_1 v_2) = |f(v_1) - f(v_2)| = 4$$

$g(v_2v_3) = |f(v_2) - f(v_3)| = 2$

$g(v_3v_4) = |f(v_3) - f(v_4)| = 1$

$g(v_4v_1) = |f(v_4) - f(v_1)| = 3.$

Pada graf pohon dengan n simpul, $|E| = n - 1$, maka label yang tersedia untuk pelabelan graceful adalah $|E| + 1 = (n - 1) + 1 = n$. Jadi, label yang tersedia untuk pelabelan graceful pada graf pohon, dipakai semua. Pada graf terhubung selain graf pohon, memiliki $|E| \geq n$. jadi, label yang tersedia adalah $|E| + 1 \geq n + 1 \geq n$. Karena label yang tersedia lebih banyak dari label yang dibutuhkan, maka tidak semuanya terpakai.

Masalah pelabelan graceful adalah masalah menentukan apakah suatu graf memiliki pelabelan graceful atau tidak, kemudian jika memiliki, bagaimana cara melabelkannya. Masalah pelabelan graceful dapat diselesaikan dengan menggunakan pemrograman matematika.

2.4 Pemrograman Matematika

Pemrograman matematika adalah masalah optimisasi dimana tujuan dan kendala-kendalanya diberikan dalam bentuk fungsi-fungsi matematis dan hubungan fungsional. Pemrograman matematika dapat di bagi menjadi 2, yaitu pemrograman non-linear dan pemrograman linear. Pemrograman non-linear adalah pemrograman matematika yang bentuk fungsi tujuan atau kendalanya adalah non-linear. Pemrograman linear adalah pemrograman matematika yang bentuk fungsi tujuan dan kendalanya adalah linear. Bentuk standar dari masalah pemrograman linear adalah sebagai berikut:

$$\text{Maksimum} \quad \sum_{j=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{Kendala} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \dots n$$

atau dapat juga dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimum} & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{Kendala} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Jika banyaknya peubah yang terlibat dalam pemrograman matematika adalah p buah, maka **c**, **x**, dan **b** adalah vektor kolom dengan p buah baris, sedangkan **A** merupakan matriks $p \times m$, dengan p adalah banyaknya kendala, dan m adalah banyaknya peubah. Sebarang vektor **x** yang memenuhi kendala disebut solusi layak dari masalah. Masalah pemrograman linear dikatakan tidak layak jika tidak ada vektor **x** yang memenuhi kendala. Masalah pemrograman linear dikatakan terbatas jika kendala yang ada dapat membatasi nilai dari fungsi tujuan, sehingga untuk sebarang solusi layak **x**, pasti tidak bisa didapatkan solusi layak lain yang membuat fungsi tujuan lebih optimal. Masalah pemrograman linear yang layak dan terbatas, pasti memiliki solusi optimal.

Pemrograman matematika baik itu non-linear maupun linear, yang satu atau lebih peubahnya harus berupa bilangan bulat disebut pemrograman integer. Dalam skripsi ini model pemrograman matematika untuk menyelesaikan masalah pelabelan graceful adalah pemrograman integer.

2.5 Metode Cabang dan Batas

Metode cabang dan batas adalah suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman integer. Selanjutnya dalam skripsi ini, metode cabang dan batas akan disebut metode cabang-batas. Sebelum menggunakan metode cabang-batas masalah pemrograman integer diselesaikan sebagai suatu masalah pemrograman linear. Apabila solusi yang didapat sudah berupa integer, maka tidak perlu dilanjutkan. Namun apabila solusi yang didapat belum berupa integer, maka diambil salah satu peubah yang bernilai pecahan, misalnya x_p. Maka diketahui

$$\lfloor x_p \rfloor \leq x_p \leq \lfloor x_p \rfloor + 1$$

$$\lfloor x_p \rfloor \text{ adalah integer terbesar yang } \leq x_p$$

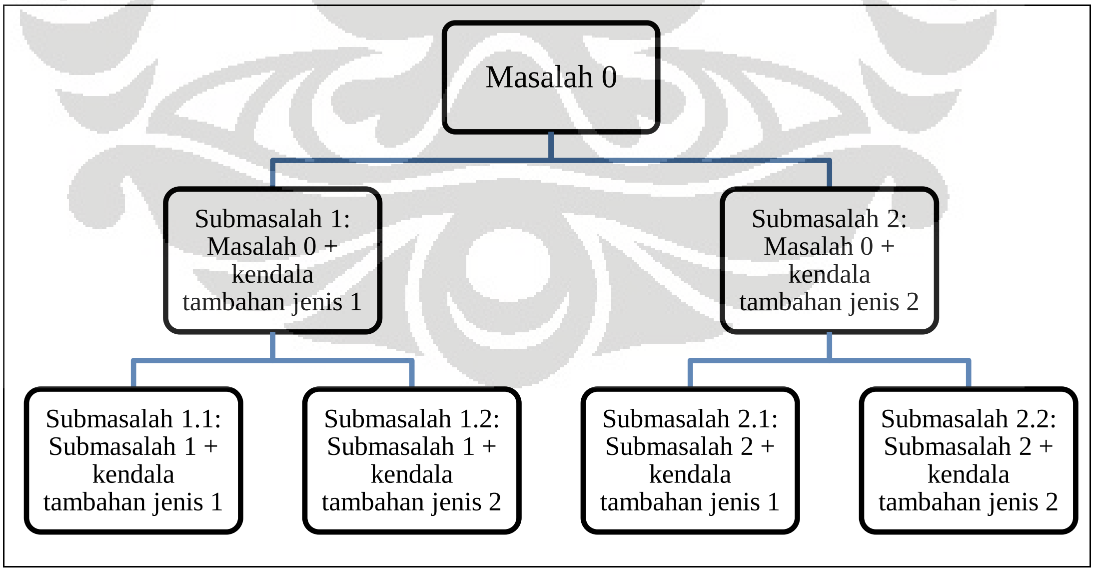
Kemudian masalah mula-mula, akan disebut masalah 0, dibagi menjadi 2 submasalah:

(1) Masalah 0 yang diberikan kendala tambahan $x_p \leq \lfloor x_p \rfloor$ (dalam skripsi ini dinamakan kendala tamabahan jenis 1).

(2) Masalah 0 yang diberikan kendala tambahan $x_p \geq \lfloor x_p \rfloor + 1$ (dalam skripsi ini dinamakan kendala tamabahan jenis 2).

Kemudian submasalah (1) dan (2) diselesaikan dengan pemrograman linear dan diperiksa apakah solusi yang didapat dari (1) dan (2) berupa integer. Apabila solusi dari submasalah (1) belum berupa integer, maka submasalah (1) dibagi menjadi 2 submasalah lagi, misalnya submasalah (1.1) dan (1.2). Begitu juga apabila solusi dari submasalah (2) belum berupa integer, maka dibagi menjadi 2 submasalah baru lagi, misalnya submasalah (2.1) dan (2.2). Masalah tidak dibagi lagi jika solusi dari masalah sudah berupa integer, tidak terdapat solusi layak dari masalah tersebut. Jika didapat lebih dari 1 solusi integer, maka solusi dengan nilai fungsi tujuan terbesarlah yang menjadi solusi masalah 0.

Submasalah-submasalah tersebut disebut *node*. Cabang-cabang yang terdapat pada metode cabang-batas membentuk suatu **pohon bercabang** (*branching tree*). *Node* yang belum dijalani atau belum dibagi lagi disebut ***active node***. *Active nodes* berada dalam suatu **daftar aktif** (*active list*). Alur dari motode cabang-batas dapat dilihat dari Gambar 2.5.



Gambar 2. 5 Alur metode cabang-batas

2.6 Hasil yang Diketahui

Hasil-hasil penelitian mengenai graf apa saja yang graceful telah dipublikasikan. Rosa (1967) membuktikan bahwa graf lintasan P_n adalah graf graceful. Rosa (1967) juga membuktikan bahwa graf lingkaran C_n graceful jika $n \equiv 0, 3\ (mod\ 4)$. Hasil-hasil lebih lengkap mengenai pelabelan graceful dapat dilihat di survey Gallian (2009).

BAB 3
KONSTRUKSI MODEL PEMROGRAMAN MATEMATIKA DARI MASALAH PELABELAN GRACEFUL

Menurut Redl (2003) dan Eshghi-Azimi (2003), mencari tahu apakah terdapat atau tidak terdapat suatu pelabelan graceful dari suatu graf, secara manual ataupun teori, bisa menjadi suatu proses yang sulit. Salah satu cara untuk mengerjakannya adalah menggunakan komputasi. Untuk menggunakan komputasi, seperti yang dilakukan oleh Redl dan Eshghi-Azimi, masalah pelabelan graceful dapat dimodelkan menjadi suatu model pemrograman matematika.

Model pemrograman matematika yang terbentuk dari masalah pelabelan graceful berbeda untuk satu graf dengan graf yang lainnya. Banyaknya peubah keputusan dan kendala berbeda, bergantung banyaknya simpul dan struktur graf. Dalam Bab ini akan ditunjukan bagaimana cara membangun model pemrograman matematika dari masalah pelabelan graceful. Pada Subbab 3.1 ditunjukan konstruksi model yang dibuat oleh Redl. Pada Subbab 3.3 ditunjukan konstruksi model yang dibuat oleh Eshgi dan Azimi. Contoh model menurut Redl dan Eshghi-Azimi untuk graf lintasan dan lingkaran, diberikan pada Subbab 3.2 dan Subbab 3.4. Pemilihan kedua jenis graf ini untuk mengilustrasikan penggunaan pemrograman matematika untuk mencari pelabelan graceful ketika semua label yang tersedia digunakan dan ketika terdapat label yang tidak digunakan.

3.1 Konstruksi Model Pemrograman Matematika Menurut Redl

Misal terdapat suatu graf $G = (V, E)$, akan dibuat model umum pemrograman matematika dari masalah pelabelan graceful untuk graf G. Model ini dibangun dari definisi pelabelan graceful. Seperti proses pemodelan masalah pemrograman matematika pada umumnya, pertama-tama akan didefinisikan peubah-peubah keputusan yang terlibat, kemudian dimodelkan kendala yang membatasi nilai-nilai yang mungkin untuk peubah-peubah keputusan, hingga akhirnya memodelkan fungsi tujuan dari masalah pemrograman matematika tersebut.

Pertama-tama akan didefinisikan peubah keputusan. Karena dalam masalah pelabelan graceful yang akan dicari adalah label dari setiap simpul, maka peubah-peubah keputusannya adalah $f(v_i)$ yang menyatakan label dari simpul v_i untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Karena pelabelan graceful menginduksi pelabelan busur, maka perlu didefinisikan peubah untuk busur yaitu $g(v_i v_j)$ yang menyatakan label dari busur yang menghubungkan simpul v_i dan v_j, dengan $v_i v_j \in E(G)$

Selanjutnya akan dimodelkan kendala-kendala dari model pemrograman matematika dari masalah pelabelan graceful. Pada Bab 2 telah diberikan definisi dari pelabelan graceful dari suatu graf G adalah dengan $|E(G)| = m$, adalah pemetaan injektif f dari $V(G)$ ke $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$, sedemikian sehingga jika busur $v_i v_j$ dilabelkan $|f(v_i) - f(v_j)|$, dengan $i, j = \{0, 1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, label busur-busurnya berbeda. $|f(v_i) - f(v_j)|$ dinotasikan dengan $g(v_i v_j)$.

Dari definisi ini, setiap simpul harus diberi label dari $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Maka perlu terdapat kendala

$$0 \leq f(v_i) \leq m \qquad \ldots (3.1)$$

$$f(v_i) \text{ integer} \qquad \ldots (3.2)$$

Pelabelan f adalah pemetaan injektif, maka untuk setiap v_p dan v_q yang tidak dihubungkan oleh suatu busur, perlu terdapat kendala

$$\left|f(v_p) - f(v_q)\right| \geq 1 \qquad \ldots (3.3)$$

Label dari setiap busur adalah selisih antara label kedua simpul yang menjadi titik-titik ujung dari busur tersebut. Jadi perlu terdapat kendala

$$\left|f(v_i) - f(v_j)\right| = g(v_i v_j) \qquad \ldots (3.4)$$

Karena $g(v_i v_j) = \left|f(v_i) - f(v_j)\right|$ dan f adalah pemetaan injektif, tidak mungkin terdapat busur berlabel 0, maka perlu terdapat kendala

$$g(v_i v_j) \geq 1 \qquad \ldots (3.5)$$

Untuk menjaga agar label setiap busur berbeda satu sama, maka perlu terdapat kendala

$$\left|g(v_i v_j) - g(v_k v_l)\right| \geq 1 \qquad \ldots (3.6)$$

Selanjutnya akan dimodelkan fungsi tujuan. Untuk mendapatkan pelabelan graceful pada graf G cukup dengan menemukan nilai $f(v_i)$ dan $g(v_i v_j)$ yang memenuhi (3.1) - (3.6), sehingga fungsi tujuan ditambahkan hanya untuk melengkapi model supaya menjadi model pemrograman matematika. Karena itu, fungsi tujuan dapat diambil sembarang. Di sini diambil fungsi tujuan adalah memaksimumkan atau meminimumkan $P\big(f(v_1), f(v_2), f(v_3), \dots, f(v_n)\big)$ yang menyatakan sembarang fungsi dari $f(v_1), f(v_2), f(v_3), \dots, f(v_n)$. Jadi peubah-peubah yang terlibat adalah sebagai berikut

$f(v_i)$: label dari simpul i, untuk $i = 1, 2, \dots, n$

$g(v_i v_j)$: label dari busur yang menghubungkan simpul i dengan simpul j, $i \neq j$, $v_i v_j \in E(G)$

Jadi, model umum dari masalah pelabelan graceful untuk sebarang graf G dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$ adalah seperti diberikan pada Model 1.

Model 1

MIN / MAX $\quad P\big(f(v_1), f(v_2), f(v_3), \dots, f(v_n)\big)$

Kendala:

(1) $\big|f(v_i) - f(v_j)\big| = g(v_i v_j)$; $\forall\, i \neq j$, dengan $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, sedemikian sehingga $v_i v_j \in E(G)$

(2) $\big|f(v_p) - f(v_q)\big| \geq 1$; $\forall\, p \neq q$, dengan $p, q \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, sedemikian sehingga $v_p v_q \notin E(G)$

(3) $\big|g(v_i v_j) - g(v_k v_l)\big| \geq 1$; $\forall\, i \neq j$, dengan $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, dan $\forall\, k \neq l$, dengan $k, l \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $v_i v_j \neq v_k v_l$

(4) $0 \leq f(v_i) \leq m$; $f(v_i)$ integer, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

(5) $g(v_i v_j) \geq 1$; $\forall\, i \neq j$, dengan $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Model 1 adalah model umum pemrograman matematika untuk masalah pelabelan graceful yang berlaku untuk setiap jenis graf. Akan tetapi jika ingin menggunakan model ini untuk mencari pelabelan graceful untuk suatu graf tertentu, setiap kendala yang ada perlu diuraikan untuk menjadi sekumpulan kendala yang bergantung pada banyaknya simpul pada graf dan struktur graf.

Jika diberikan suatu graf dengan n simpul dan m busur, dapat dihitung banyak kendala yang harus dibentuk. Banyak kendala (1) sama banyaknya dengan peubah $g(v_i v_j)$, atau dengan kata lain sama dengan banyaknya busur, yaitu m kendala. Banyak kendala (2) adalah $C_n^2 - m$ kendala. Kendala (3) ada sebanyak C_m^2 kendala. Banyak kendala (4) adalah n kendala. Akan tetapi setiap kendala (4) ini sebenarnya terdiri dari 2 jenis batasan yaitu $f(v_i) \geq 0$ dan $f(v_i) \leq m$. Sedangkan banya kendala (5) adalah m kendala. Banyak keseluruhan kendala untuk sembarang graf dengan n simpul dan m busur menurut Model 1 adalah:

$$m + (C_n^2 - m) + C_m^2 + n + m$$
$$= m + n + \frac{n^2 - n}{2} + \frac{m^2 - m}{2}$$
$$= \frac{m^2 + n^2 + m + n}{2}. \qquad \text{... (3.7)}$$

Banyaknya peubah keputusan adalah:

$$n + m. \qquad \text{... (3.8)}$$

Pada Subbab selanjutnya akan diberikan contoh pembentukan model pemrograman matematika untuk menyelesaikan masalah pelabelan graceful dari graf lintasan.

3.2 Pembentukan Model Pemrograman Matematika untuk Graf Lintasan Berdasarkan Model 1

Graf lintasan P_n adalah graf yang terdiri dari n simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan $m = n - 1$ busur yang menghubungkan simpul-simpul v_i dengan v_{i+1}, $1 \leq i \leq n - 1$. Walaupun untuk satu jenis graf, model yang terbentuk berbeda untuk setiap nilai n yang berbeda, maka sebagai contoh akan diberikan pembentukan model untuk P_6.

Untuk menyelesaikan masalah pelabelan graceful dari graf P_6, terlebih dahulu dibuat model pemrograman matematika untuk masalah tersebut.

Seperti telah dijelaskan pada Subbab 3.1, yang menjadi peubah keputusan adalah $f(v_i)$ yang menyatakan label dari simpul v_i untuk $i = 1, 2, \dots, 6$. Berikut adalah kendala-kendala dari model pemrograman matematika untuk P_6.

Kendala (1) pada Model 1 adalah $\left|f(v_i) - f(v_j)\right| = g(v_i v_j), \forall\, i \neq j$ dengan $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ dimana $v_i v_j \in E(G)$, maka kumpulan kendala (1) untuk graf P_6 adalah:

$$|f(v_1) - f(v_2)| = g(v_1 v_2)$$
$$|f(v_2) - f(v_3)| = g(v_2 v_3)$$
$$|f(v_3) - f(v_4)| = g(v_3 v_4)$$
$$|f(v_4) - f(v_5)| = g(v_4 v_5)$$
$$|f(v_5) - f(v_6)| = g(v_5 v_6).$$

Banyak kendala (1) adalah m kendala. Jadi terdapat $m = 5$ kendala (1).

Kendala (2) pada Model 1 adalah $\left|f(v_p) - f(v_q)\right| \geq 1,\ \forall\, p \neq q$ dengan $p, q \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ dimana $v_p v_q \notin E(G)$, maka kumpulan kendala (2) untuk graf P_6 adalah:

$$|f(v_1) - f(v_3)| \geq 1$$
$$|f(v_1) - f(v_4)| \geq 1$$
$$|f(v_1) - f(v_5)| \geq 1$$
$$|f(v_1) - f(v_6)| \geq 1$$
$$|f(v_2) - f(v_4)| \geq 1$$
$$|f(v_2) - f(v_5)| \geq 1$$
$$|f(v_2) - f(v_6)| \geq 1$$
$$|f(v_3) - f(v_5)| \geq 1$$
$$|f(v_3) - f(v_6)| \geq 1$$
$$|f(v_4) - f(v_6)| \geq 1.$$

Banyak kendala (2) adalah $C_n^2 - m$ kendala. Jadi terdapat $C_6^2 - 5 = 10$ kendala (2).

Kendala (3) pada Model 1 adalah $\left|g(v_i v_j) - g(v_k v_l)\right| \geq 1, \forall\, i \neq j$ dan $k \neq l$ dengan $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ dimana $v_i v_j \neq v_k v_l$, maka kumpulan kendala (3) untuk graf P_6 adalah:

$$|g(v_1 v_2) - g(v_2 v_3)| \geq 1$$
$$|g(v_1 v_2) - g(v_3 v_4)| \geq 1$$
$$|g(v_1 v_2) - g(v_4 v_5)| \geq 1$$
$$|g(v_1 v_2) - g(v_5 v_6)| \geq 1$$

$|g(v_2v_3) - g(v_3v_4)| \geq 1$

$|g(v_2v_3) - g(v_4v_5)| \geq 1$

$|g(v_2v_3) - g(v_5v_6)| \geq 1$

$|g(v_3v_4) - g(v_4v_5)| \geq 1$

$|g(v_3v_4) - g(v_5v_6)| \geq 1$

$|g(v_4v_5) - g(v_5v_6)| \geq 1.$

Banyak kendala (2) adalah C_m^2 kendala. Jadi terdapat $C_5^2 = 10$ kendala (3).

Kendala (4) pada Model 1 adalah $0 \leq f(v_i) \leq m$, $f(v_i)$ integer dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, 6$. Maka kumpulan kendala (4) untuk graf P_6 adalah:

$0 \leq f(v_1) \leq 5$, $f(v_1)$ integer

$0 \leq f(v_2) \leq 5$, $f(v_2)$ integer

$0 \leq f(v_3) \leq 5$, $f(v_3)$ integer

$0 \leq f(v_4) \leq 5$, $f(v_4)$ integer

$0 \leq f(v_5) \leq 5$, $f(v_5)$ integer

$0 \leq f(v_6) \leq 5$, $f(v_6)$ integer.

Banyak kendala (4) adalah n kendala. Jadi terdapat $n = 6$ kendala (4).

Kendala (5) pada Model 1 adalah $g(v_iv_j) \geq 1$, $\forall\, i \neq j$ dengan $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$, maka kumpulan kendala (5) untuk graf P_6 adalah:

$g(v_1v_2) \geq 1$

$g(v_2v_3) \geq 1$

$g(v_3v_4) \geq 1$

$g(v_4v_5) \geq 1$

$g(v_5v_6) \geq 1.$

Banyak kendala (5) adalah m kendala. Jadi terdapat $m = 5$ kendala (5).

Jadi kendala pada model pemrograman matematika menurut Model 1 untuk graf lintasan P_6 ada sebanyak:

$$\frac{m^2 + n^2 + m + n}{2}$$

$$= \frac{5^2 + 6^2 + 5 + 6}{2}$$

$$= 36.$$

Membuat model pemrograman matematika secara manual tidak efisien. Salah satu cara untuk membangun model ini adalah dengan membuat program yang menghasilkan seluruh kendala-kendala yang ada. Setelah model terbentuk, masalah berikutnya adalah menyelesaikan model tersebut. Eshghi dan Azimi (2006) mengatakan bahwa menyelesaikan Model 1 tidak mudah karena melibatkan harga mutlak dan peubah tak-nol. Mereka memodifikasi beberapa kendala dari Model 1 agar lebih mudah diselesaikan. Model modifikasi ini diberikan pada Subbab selanjutnya.

3.3 Konstruksi Model Eshghi-Azimi

Model ini dimotivasi oleh penelitian Hajian (1996) yang memberikan metode yang efisien untuk mengubah kendala-kendala pertidaksamaan menjadi kendala persamaan dengan menambahkan peubah-peubah baru. Kendala pertidaksamaan yang dimaksud adalah kendala yang dihubungkan dengan tanda $\neq$.

Hajian (1996) memberikan metode untuk merubah kendala pertidaksamaan menjadi kendala persamaan. Dia menggunakan peubah yang dinamakan peubah tak-nol (*nonzero peubah*) untuk melakukan hal tersebut.

Berikut adalah contoh penggunaan peubah tak-nol:

Misalkan terdapat kendala pertidaksamaan

$$x_1 \neq x_2 \quad \equiv \quad |x_1 - x_2| > 0$$

dimana $x_1, x_2 \geq 0$.

Dengan menambahkan peubah baru w sebagai peubah tak-nol, maka didapat

$$x_1 - x_2 - w = 0, \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad w \neq 0. \qquad \dots (3.9)$$

Terdapat kendala-kendala pada Model 1 yang dapat diubah menjadi kendala pertidaksamaan, yang akan diubah menjadi kendala persamaan. Pengubahan kendala ini juga akan mengeliminasi penggunaan harga mutlak.

Pada Model 1 terdapat kendala (1), yaitu

$$\left|f(v_i) - f(v_j)\right| = g(v_i v_j), \forall\ i \neq j \text{ dengan } i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$\text{dimana } v_i v_j \in E(G).$$

yang berarti nilai $g(v_i v_j)$ tidak negatif, dan terdapat juga kendala (5), yaitu

$$g(v_i v_j) \geq 1, \forall\ i \neq j \text{ dengan } i, j \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Oleh karena itu

$$|f(v_i) - f(v_j)| \neq 0.$$

Eshghi dan Azimi menggunakan metode penambahan peubah tak-nol seperti yang dilakukan Hajian dalam model pemrograman yang mereka buat, untuk menyelesaikan masalah pelabelan graceful.

Untuk mengeliminasi penggunaan harga mutlak seperti yang diberikan pada (3.8), peubah $g(v_i v_j)$ dijadikan peubah tak-nol. Jadi Kendala (1) dan (5) pada Model 1 dimodifikasi oleh Eshghi-Azimi menjadi

$$f(v_i) - f(v_j) = g(v_i v_j), \quad \forall\ i \neq j \text{ dengan } i, j \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$$
$$\text{dimana } v_i v_j \in E(G)$$

dan

$$g(v_i v_j) \neq 0, \qquad \forall\ i \neq j \text{ dengan } i, j \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$$

dimana $g(v_i v_j)$ adalah peubah tak-nol.

Kendala jenis (2) pada Model 1, yaitu

$$|f(v_p) - f(v_q)| \geq 1, \quad \forall\ p \neq q \text{ dengan } p, q \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$$
$$\text{dimana } v_p v_q \notin E(G).$$

Untuk mengeliminasi penggunaan harga mutlak seperti yang diberikan pada (3.9), didefinisikan peubah tak-nol y_{ab} yang merupakan hasil dari $f(v_p) - f(v_q)$. Jadi Kendala (2) pada Model 1 dimodifikasi oleh Eshghi-Azimi menjadi

$$f(x_p) - f(x_q) = y_{pq}, \forall\ p \neq q, \quad \text{dengan } p, q \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\},$$
$$v_p v_q \notin E(G)$$

dan

$$y_{pq} \neq 0$$

dimana y_{pq} adalah peubah tak-nol.

Kendala jenis (3) pada Model 1, yaitu

$$|g(v_i v_j) - g(v_k v_l)| \geq 1, \forall\ i \neq j \text{ dan } k \neq l \text{ dengan } i, j, k, l \in$$
$$\{\ 1, 2, 3, \dots, n\} \text{ dimana } v_i v_j \neq v_k v_l.$$

Untuk mengeliminasi penggunaan harga mutlak seperti yang diberikan pada (3.8), didefinisikan peubah tak-nol s_{ij-kl} yang merupakan hasil dari $g(v_i v_j) - g(v_k v_l)$

dan peubah w_{ij-kl} yang merupakan hasil dari $g(v_i v_j) + g(v_k v_l)$. Jika $s_{ij-kl} = 0$ dan $w_{ij-kl} \neq 0$, berarti $g(v_i v_j) = g(v_k v_l)$, namun jika $s_{ij-kl} \neq 0$ dan $w_{ij-kl} = 0$, berarti $g(v_i v_j) = -g(v_k v_l)$. Jadi Kendala (3) pada Model 1 dimodifikasi oleh Eshghi-Azimi menjadi

$$g(v_i v_j) - g(v_k v_l) = s_{ij-kl} \quad \text{dan} \quad g(v_i v_j) + g(v_k v_l) = w_{ij-kl}$$

$$\forall\ i \neq j \text{ dan } k \neq l \text{ dengan } i, j, k, l \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ dimana } v_i v_j \neq v_k v_l$$

serta

$$s_{ij-kl} \neq 0 \quad \text{dan} \quad w_{ij-kl} \neq 0$$

dimana s_{ij-kl}, w_{ij-kl} adalah peubah tak-nol.

Sementara jenis kendala (4) pada Model 1 tidak diubah.

Dalam proses modifikasi kendala di atas, telah didefinisikan beberapa peubah baru yaitu $y_{pq}, s_{ij-kl}, w_{ij-kl}$, sehingga peubah-peubah yang terlibat adalah sebagai berikut

$f(v_i)$: label dari simpul i, untuk $i = 1, 2, \dots, n$

$g(v_i v_j)$: label dari busur yang menghubungkan simpul i dengan simpul j, $v_i v_j \in E(G)$

s_{ij-kl} : peubah tak-nol, jika $s_{ij-kl} \neq 0$ berarti $g(v_i v_j) \neq g(v_k v_l)$

w_{ij-kl} : peubah tak-nol, jika $w_{ij-kl} \neq 0$ berarti $g(v_i v_j) \neq -g(v_k v_l)$

y_{ij} : peubah tak-nol, dimana $y_{ij} \neq 0$ berarti label-label dari busur yang tidak bertetanggaan, tidak sama.

Dan model umum yang telah dimodifikasi oleh Eshghi-Azimi dari masalah pelabelan graceful untuk sebarang graf G dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$ adalah seperti diberikan pada Model 2.1.

Model 2.1

MIN / MAX $\quad P\big(f(v_1), f(v_2), f(v_3), \dots, f(v_n)\big)$

Kendala:

(1) $f(v_i) - f\big(v_j\big) = g\big(v_i v_j\big)$; $\forall\ i \neq j$, dengan $i, j \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$, sedemikian sehingga $v_i v_j \in E(G)$

(2) $f\big(v_p\big) - f\big(v_q\big) = y_{pq}$; $\forall\ p \neq q$, dengan $p, q \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$, $v_p v_q \notin E(G)$

(3) $g\big(v_i v_j\big) - g(v_k v_l) = s_{ij-kl}$; $\forall\ i \neq j$, dengan $i, j \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$, dan $\forall\ k \neq l$, dengan $k, l \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$, $v_i v_j \neq v_k v_l$

(4) $g\big(v_i v_j\big) + g(v_k v_l) = w_{ij-kl}$; $\forall\ i \neq j$, dengan $i, j \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$, dan $\forall\ k \neq l$, dengan $k, l \in \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$, $v_i v_j \neq v_k v_l$

(5) $0 \leq f(v_i) \leq m$; $f(v_i)$ integer, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

(6) $g\big(v_i v_j\big), y_{ij}, s_{ij-kl}, w_{ij-kl} \neq 0$

Pada model umum di atas, kendala (1) berkaitan dengan definisi bahwa label dari busur merupakan selisih dari 2 simpul yang merupakan titik-titik ujung dari busur tersebut, dan karena pada kendala (6) $g\big(v_i v_j\big) \neq 0$, maka label setiap busur dan simpul berbeda. Pada model ini, perlu diperhatikan bahwa label dari busur adalah tak-nol tapi dapat bernilai negatif maupun positif. Kendala (2), dan $y_{ij} \neq 0$ pada kendala (6) mengakibatkan label dari simpul-simpul yang tidak bertetanggaan berbeda. Kendala (3), (4), dan $s_{ij-kl}, w_{ij-kl} \neq 0$ pada kendala (6) memastikan nilai mutlak dari label setiap label busur berbeda. Kendala (5) menjaga agar label dari setiap simpul merupakan bilangan bulat dan dibatasi oleh 0 dan m.

Jika diberikan suatu graf dengan n simpul dan m busur, dapat dihitung banyak kendala yang harus dibentuk. Banyak kendala persamaan jenis (1) - (4) berturut-turut adalah $m, C_n^2 - m, C_m^2, C_m^2$. Jadi banyak kendala persaman adalah

$$m + C_n^2 - m + C_m^2 + C_m^2$$

$$=m + \frac{n^2-n}{2} - m + \frac{m^2-m}{2} + \frac{m^2-m}{2}$$

$$= m^2 - m + \frac{n^2-n}{2}. \qquad \text{... (3.10)}$$

Banyak peubah $g(v_i v_j)$ sama banyaknya dengan kendala jenis (1), yaitu m. Banyak peubah y_{ab} sama banyaknya dengan kendala jenis (2), yaitu $\frac{n^2-n}{2} - m$. Banyak peubah s_{ij-kl} dan w_{ij-kl} sama banyaknya dengan kendala jenis (3) dan (4), yaitu C_m^2. Jadi banyak peubah keputusan adalah:

$$m^2 - m + \frac{n^2-n}{2} + (\#\text{ simpul})$$

$$= m^2 - m + \frac{n^2+n}{2}. \qquad \text{... (3.11)}$$

Banyak kendala (5) adalah n kendala (namun dalam suatu program yang dibuat untuk menyelesaikan masalah pelabelan graceful, kendala (5) ini sebenarnya ada $2n$ kendala, karena kendala (5) tersebut harus dipecah menjadi $f(v_i) \geq 0$ dan $f(v_i) \leq m$). Banyak kendala (6) adalah $m^2 - m + \frac{n^2-n}{2}$ kendala. Jadi banyak seluruh kendala pada model Eshghi-Azimi adalah:

$$m^2 - m + \frac{n^2 - n}{2} + n + m^2 - m + \frac{n^2 - n}{2}$$

$$= 2m^2 + n^2 - 2m. \qquad \text{... (3.12)}$$

Baik pada Model 1 maupun Model 2.1, label dan simpul haruslah integer, maka model pemrograman matematika yang terbentuk adalah model pemrograman integer. Untuk menyelesaikan suatu pemrograman integer, Eshghi-Azimi menggunakan metode cabang-batas.

Untuk menggunakan metode cabang-batas, Eshghi-Azimi melakukan pelonggaran (*relaxation*) kendala jenis (5) yaitu integralitas, dan (6) yaitu peubah tak-nol, pada Model 2.1. Pelonggarannya adalah $f(v_i)$ tidak harus integer dan $g(v_i v_j), y_{ij}, s_{ij-kl}, w_{ij-kl}$ merupakan peubah bebas.

Jadi model baru dari yang telah mengalami pelonggaran kendala integralitas dan tak-nol diberikan pada Model 2.2.

Model 2.2

MIN / MAX $\quad P\big(f(v_1), f(v_2), f(v_3), \ldots, f(v_n)\big)$

Kendala:

(1) $f(v_i) - f(v_j) = g(v_i v_j)$; $\forall\, i \neq j$, dengan $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, sedemikian sehingga $v_i v_j \in E(G)$

(2) $f(v_p) - f(v_q) = y_{pq}$; $\forall\, p \neq q$, dengan $p, q \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $v_q v_p \notin E(G)$

(3) $g(v_i v_j) - g(v_k v_l) = s_{ij-kl}$; $\forall\, i \neq j$, dengan $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dan $\forall\, k \neq l$, dengan $k, l \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $v_i v_j \neq v_k v_l$

(4) $g(v_i v_j) + g(v_k v_l) = w_{ij-kl}$; $\forall\, i \neq j$, dengan $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dan $\forall\, k \neq l$, dengan $k, l \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $v_i v_j \neq v_k v_l$

(5) $0 \leq f(v_i) \leq m$; $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

(6) $g(v_i v_j), y_{ij}, s_{ij-kl}, w_{ij-kl}$; peubah bebas

Model 2.2 adalah model linear, jadi jauh lebih mudah untuk diselesaikan. Jika solusi yang didapat dalam penyelesaian Model 2.2 dengan metode cabang-batas pada setiap *node*-nya, merupakan solusi yang memenuhi kendala integralitas dan tak-nol, maka algoritma berhenti. Jika pada suatu *node* tidak didapat solusi yang layak untuk Model 2.2, maka *node* tersebut disebut terjalani (*fathomed*). Jika Model 2.2 memiliki solusi layak, namun solusi tersebut bukanlah solusi layak menurut Model 2.1, berarti terdapat peubah bernilai bukan integer pada peubah yang seharusnya bernilai integer, atau terdapat peubah bernilai nol pada peubah yang seharusnya bernilai tak-nol. Salah satu atau kedua hal tersebut merupakan penyebab suatu *node* berada dalam daftar aktif.

Dimisalkan X^* adalah solusi layak dari *node* yang sedang diselesaikan. Didefinisikan suatu himpunan:

$$N_1 = \{\forall\, g(v_i v_j), y_{ij} \in X^* | g(v_i v_j), y_{ij} = 0\}$$

$$N_2 = \{\forall\, s_{ij-kl}, w_{ij-kl} \in X^* | s_{ij-kl}, w_{ij-kl} = 0\}$$

$$N_3 = \{\forall\, x_i \in X^* | x_i \text{ bukan bilangan bulat}\}$$

Dimisalkan N adalah banyaknya peubah pada solusi dari suatu *node* berdasarkan Model 2.2, tetapi tidak memenuhi kendala integralitas dan kendala tak-nol pada Model 2.1. Jadi $N = |N_1| + |N_2| + |N_3|$. Jika N kecil, maka solusi yang didapat pada *node* tersebut, dekat dengan solusi layak untuk Model 2.1.

Ada 2 hal penting dalam algoritma untuk menjalankan metode cabang-batas ini. Yang pertama adalah strategi pencabangan (*branching strategy*) yaitu penentuan *node* mana yang akan dibagi lagi untuk mendapatkan masalah baru. Yang kedua adalah aturan pemisahan (*separation rule*) yaitu penentuan peubah mana yang akan dicabangkan pada cabang yang terpilih.

Eshghi-Azimi menggunakan *jumptracking strategy* untuk melakukan strategi pencabangan. Strategi ini memilih *node* dengan N terkecil untuk dibagi lagi. Jika N sama, maka *node* dengan $|N_1| + |N_2|$ terkecil yang dipilih. Jika sama lagi, maka *node* dengan $|N_1|$ terkecil yang dipilih. Jika sama lagi, maka pemilihan *node* mana yang akan dibagi dilakukan secara acak.

Bila suatu *node* telah dipilih, berarti *node* tersebut bisa memiliki salah satu atau 2 penyebab yang mengakibatkan solusi dari *node* tersebut tidak layak menurut Model 2.1. Pada aturan pemisahan ini, $x \in N_1, N_2, N_3$ dipilih untuk dibagi lagi. Jika yang terpilih adalah peubah $x \in N_1$ atau $x \in N_2$ maka terbentuk 2 masalah baru dengan kendala tambahan $x \geq 1$ untuk masalah yang pertama, dan $x \leq -1$ untuk masalah yang kedua. Kendala tersebut menjamin peubah tersebut bernilai tak-nol. Strategi tersebut dinamakan strategi I. Jika yang terpilih adalah peubah $x \in N_3$ maka terbentuk 2 masalah baru dengan kendala tambahan $x \geq \lceil x \rceil$ untuk masalah yang pertama, dan $x \leq \lfloor x \rfloor$ untuk masalah yang kedua. Strategi tersebut dinamakan strategi II. Eshghi-Azimi (2003) membandingkan 2 strategi tersebut pada lebih dari 100 graf, dan mereka mendapati bahwa strategi I lebih efisien dari strategi II. Lebih jauh lagi memilih peubah $x \in N_1$ lebih efisien dari $x \in N_2$. Jadi prioritas pemilihan peubah mana yang akan dibagi lagi (aturan pemisahan), berturut-turut adalah $x \in N_1$, $x \in N_2$, kemudian $x \in N_3$.

Langkah-langkah metode cabang-batas untuk masalah pelabelan graceful menggunakan pemrograman matematika adalah sebagai berikut:

1. Misal terdapat model masalah pemrograman matematika dari suatu graf G dengan n simpul dan m busur. Dimisalkan himpunan A adalah himpunan yang beranggotakan *active node*.
2. Jika himpunan A kosong, algoritma berhenti, G tidak graceful. Jika tidak kosong, dilakukan pemilihan *node* untuk dibagi menggunakan *jumptracking strategi*. Jika solusi layak menurut Model 2.2 merupakan solusi yang layak menurut Model 2.1, algoritma berhenti, G graceful. Jika solusi layak yang didapat tidak layak menurut Model 2.1 maka lanjut ke langkah 3.
3. Cabangkan peubah yang terpilih menurut aturan pemisahan. Pada setiap *node* baru, selesaikan masing-masing masalah menurut Model 2.2, dan jika memiliki solusi yang layak menurut Model 2.2, tambahkan *node* tersebut ke himpunan A. Lanjut ke langkah 2.

Untuk mengilustrasikan perubahan dari Model 1 ke Model 2.1, diberikan contoh pembentukan model pemrograman matematika dari masalah pelabelan graceful untuk graf lintasan. Contoh tersebut diberikan pada Subbab selanjutnya.

3.4 Pembentukan Model Pemrograman Matematika untuk Graf Lintasan Berdasarkan Model 2.1

Seperti telah diketahui bahwa untuk satu jenis graf, model yang terbentuk berbeda untuk setiap nilai n yang berbeda, maka sebagai contoh akan diberikan pembentukan model untuk P_6.

Peubah keputusan adalah $f(v_i)$ yang menyatakan label dari simpul v_i untuk $i = 1, 2, \dots, 6$. Berikut adalah kendala-kendala dari model pemrograman matematika untuk P_6 berdasarkan Model 2.1

Kendala (1) pada Model 2.1 adalah $f(v_i) - f(v_j) = g(v_i v_j), \forall\, i \neq j$ dengan $i, j \in \{ 1, 2, 3, \dots, 6\}$ sedemikian sehingga $v_i v_j \in E(G)$, maka kumpulan kendala (1) untuk graf P_6 adalah:

$$f(v_1) - f(v_2) = g(v_1 v_2)$$
$$f(v_2) - f(v_3) = g(v_2 v_3)$$
$$f(v_3) - f(v_4) = g(v_3 v_4)$$

$f(v_4) - f(v_5) = g(v_4v_5)$

$f(v_5) - f(v_6) = g(v_5v_6)$.

Banyak kendala (1) adalah m kendala. Jadi terdapat $m = 5$ kendala (1).

Kendala (2) pada Model 2.1 adalah $f(v_p) - f(v_q) = y_{pq}$, $\forall\, p \neq q$ dengan $p, q \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ dimana $v_qv_p \notin E(G)$, maka kumpulan kendala (2) untuk graf P_6 adalah:

$f(v_1) - f(v_3) \geq y_{13}$

$f(v_1) - f(v_4) \geq y_{14}$

$f(v_1) - f(v_5) \geq y_{15}$

$f(v_1) - f(v_6) \geq y_{16}$

$f(v_2) - f(v_4) \geq y_{24}$

$f(v_2) - f(v_5) \geq y_{25}$

$f(v_2) - f(v_6) \geq y_{26}$

$f(v_3) - f(v_5) \geq y_{35}$

$f(v_3) - f(v_6) \geq y_{36}$

$f(v_4) - f(v_6) \geq y_{46}$.

Banyak kendala (2) adalah $C_n^2 - m$ kendala. Jadi terdapat $C_6^2 - 5 = 10$ kendala (2).

Kendala (3) pada Model 2.1 adalah $g(v_iv_j) - g(v_kv_l) = s_{ij-kl}$, $\forall\, i \neq j$ dan $k \neq l$ dengan $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ dimana $v_iv_j \neq v_kv_l$, maka kumpulan kendala (3) untuk graf P_6 adalah:

$g(v_1v_2) - g(v_2v_3) = s_{12-23}$

$g(v_1v_2) - g(v_3v_4) = s_{12-34}$

$g(v_1v_2) - g(v_4v_5) = s_{12-45}$

$g(v_1v_2) - g(v_5v_6) = s_{12-56}$

$g(v_2v_3) - g(v_3v_4) = s_{23-34}$

$g(v_2v_3) - g(v_4v_5) = s_{23-45}$

$g(v_2v_3) - g(v_5v_6) = s_{23-56}$

$g(v_3v_4) - g(v_4v_5) = s_{34-45}$

$g(v_3v_4) - g(v_5v_6) = s_{34-56}$

$g(v_4v_5) - g(v_5v_6) = s_{45-56}$.

Banyak kendala (3) adalah C_m^2 kendala. Jadi terdapat $C_5^2 = 10$ kendala (3).

Kendala (4) pada Model 2.1 adalah $g(v_i v_j) + g(v_k v_l) = w_{ij-kl}, \forall\ i \neq j$ dan $k \neq l$ dengan $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ dimana $v_i v_j \neq v_k v_l$, maka kumpulan kendala (4) untuk graf P_6 adalah:

$$g(v_1v_2) + g(v_2v_3) = w_{12-23}$$
$$g(v_1v_2) + g(v_3v_4) = w_{12-34}$$
$$g(v_1v_2) + g(v_4v_5) = w_{12-45}$$
$$g(v_1v_2) + g(v_5v_6) = w_{12-56}$$
$$g(v_2v_3) + g(v_3v_4) = w_{23-34}$$
$$g(v_2v_3) + g(v_4v_5) = w_{23-45}$$
$$g(v_2v_3) + g(v_5v_6) = w_{23-56}$$
$$g(v_3v_4) + g(v_4v_5) = w_{34-45}$$
$$g(v_3v_4) + g(v_5v_6) = w_{34-56}$$
$$g(v_4v_5) + g(v_5v_6) = w_{45-56}.$$

Banyak kendala (4) adalah C_m^2 kendala. Jadi terdapat $C_5^2 = 10$ kendala (4).

Kendala (5) pada Model 2.1 adalah $0 \leq f(v_i) \leq m$, $f(v_i)$ integer dengan $i = 1, 2, 3, \dots, 6$, maka kumpulan kendala (5) untuk graf P_6 adalah:

$0 \leq f(v_1) \leq 5$, $f(v_1)$ integer

$0 \leq f(v_2) \leq 5$, $f(v_2)$ integer

$0 \leq f(v_3) \leq 5$, $f(v_3)$ integer

$0 \leq f(v_4) \leq 5$, $f(v_4)$ integer

$0 \leq f(v_5) \leq 5$, $f(v_5)$ integer

$0 \leq f(v_6) \leq 5$, $f(v_6)$ integer.

Banyak kendala (5) adalah n kendala. Jadi terdapat $n = 6$ kendala (5).

Kendala (6) pada Model 2.1 adalah $g(v_i v_j), y_{ij}, s_{ij-kl}, w_{ij-kl} \neq 0$, maka kumpulan kendala (6) untuk graf P_6 adalah:

$$g(v_1v_2) \neq 0$$
$$g(v_2v_3) \neq 0$$
$$g(v_3v_4) \neq 0$$
$$g(v_4v_5) \neq 0$$
$$g(v_5v_6) \neq 0$$

$y_{13} \neq 0$

$y_{14} \neq 0$

$y_{15} \neq 0$

$y_{16} \neq 0$

$y_{24} \neq 0$

$y_{25} \neq 0$

$y_{26} \neq 0$

$y_{35} \neq 0$

$y_{36} \neq 0$

$y_{46} \neq 0$

$s_{12-23} \neq 0$

$s_{12-34} \neq 0$

$s_{12-45} \neq 0$

$s_{12-56} \neq 0$

$s_{23-34} \neq 0$

$s_{23-45} \neq 0$

$s_{23-56} \neq 0$

$s_{34-45} \neq 0$

$s_{34-56} \neq 0$

$s_{45-56} \neq 0$

$w_{12-23} \neq 0$

$w_{12-34} \neq 0$

$w_{12-45} \neq 0$

$w_{12-56} \neq 0$

$w_{23-34} \neq 0$

$w_{23-45} \neq 0$

$w_{23-56} \neq 0$

$w_{34-45} \neq 0$

$w_{34-56} \neq 0$

$w_{45-56} \neq 0.$

Banyak kendala jenis keenam adalah $m^2 - m + \frac{n^2-n}{2}$ kendala. Jadi terdapat $m^2 - m + \frac{n^2-n}{2} = 5^2 - 5 + \frac{6^2-6}{2} = 35$ kendala jenis keenam.

Jadi kendala pada model pemrograman matematika menurut model Eshghi-Azimi pada graf lintasan P_6 ada sebanyak:

$$2m^2 + n^2 - 2m$$
$$= 2(5^2) + 6^2 - 2(5)$$
$$= 76.$$

Kendala yang dihasilkan untuk P_6 menurut model pemrograman matematika Redl ada sebanyak 36 kendala, sedangkan kendala untuk graf yang sama menurut model pemrograman matematika Eshghi-Azimi ada sebanyak 76 kendala. Banyaknya peubah keputusan untuk P_6 menurut model pemrograman matematika Redl ada sebanyak 11 peubah keputusan, sedangkan peubah keputusan untuk graf yang sama menurut model pemrograman matematika Eshghi-Azimi ada sebanyak 41 peubah keputusan. Jadi jumlah kendala dan peubah keputusan yang dihasilkan oleh model pemrograman matematika Redl lebih sedikit dibandingkan dengan kendala yang dihasilkan model pemrograman matematika Eshghi-Azimi.

BAB 4
IMPLEMENTASI DAN SIMULASI

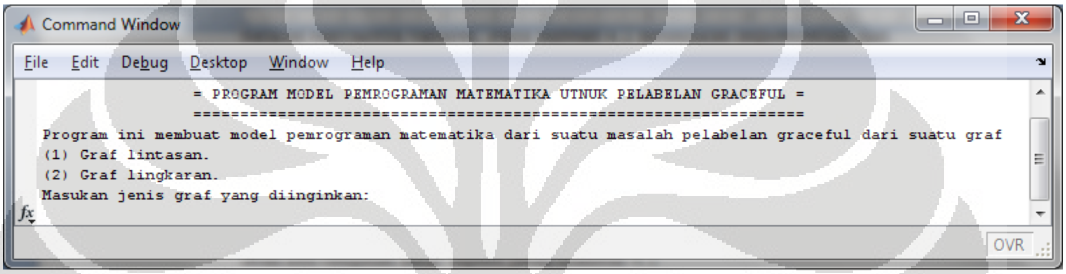
Dalam menggunakan pemrograman matematika untuk menyelesaikan masalah pelabelan graceful dari suatu graf tertentu, ada dua hal yang menjadi masalah utama. Yang pertama adalah membentuk model pemrograman matematikanya. Kemudian yang kedua adalah menyelesaikan model yang terbentuk tersebut.

Dalam membentuk model pemrograman matematika, dilakukan pembentukan semua kendala untuk masalah yang bersangkutan. Pembentukan semua kendala secara manual, tidak efisien. Karena itu, pembentukan kendala dilakukan dengan program yang dibuat. Setelah semua kendala terbentuk, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan modelnya. Menyelesaikan model yang terbentuk dapat dilakukan dengan membuat program baru atau menggunakan perangkat lunak yang tersedia.

Dalam Bab ini akan diberikan simulasi penyelesaian masalah pelabelan graceful untuk graf lintasan dan lingkaran, dengan membangun program untuk membentuk model pemrograman matematika untuk graf tersebut. model yang dihasilkan akan diselesaikan dengan LINGO. Karena LINGO yang bisa diperoleh adalah LINGO versi terbatas yang hanya mampu menyelesaikan masalah dengan jumlah peubah dan kendala yang terbatas, maka simulasi akan menggunakan Model 1 yang memiliki banya peubah dan kendala yang lebih sedikit. Program untuk membentuk model pemrograman matematika dari masalah pelabelan graceful dibuat dalam MATLAB. Program ini dapat menghasilkan model untuk graf lintasan dan lingkaran dengan n sembarang. Akan tetapi masalah yang akan diselesaikan hanya untuk n kecil.

Contoh yang akan diberikan adalah untuk graf lintasan dan lingkaran. Pelabelan graceful pada graf lintasan menggunakan semua label yang tersedia, sedangkan pelabelan graceful pada lingkaran tidak menggunakan label yang tersedia. Pada Subbab 4.1 ditunjukan implementasi dan simulasi dalam konstruksi model pemrograman matematika dari masalah pelabelan graceful untuk graf lintasan. Pada Subbab 4.2 ditunjukan implementasi dan simulasi untuk graf lingkaran. Pada Subbab 4.3 ditunjukan hasil yang diperoleh untuk graf lintasan (dengan banyaknya simpul 1 sampai 6), dan graf lingkaran (dengan banyaknya simpul 3 sampai 5). Listing program dapat dilihat di Lampiran 1 - 3. Simulasi dijalankan pada *Personal Computer* dengan *processor AMD Turion(tm) X2 Dual-Core Mobile RM -75 (2CPUs) 2.2GHz*, memory 1024MB *RAM*, sistem operasi *Windows 7 Professional 32-bit*.

Program untuk tampilan awal pada MATLAB adalah pemodelan.m. Pemanggilan program dilakukan dengan cara mengetikan "pemodelan" pada *Command Window*, dan akan ada tampilan awal seperti pada Gambar 4.1.



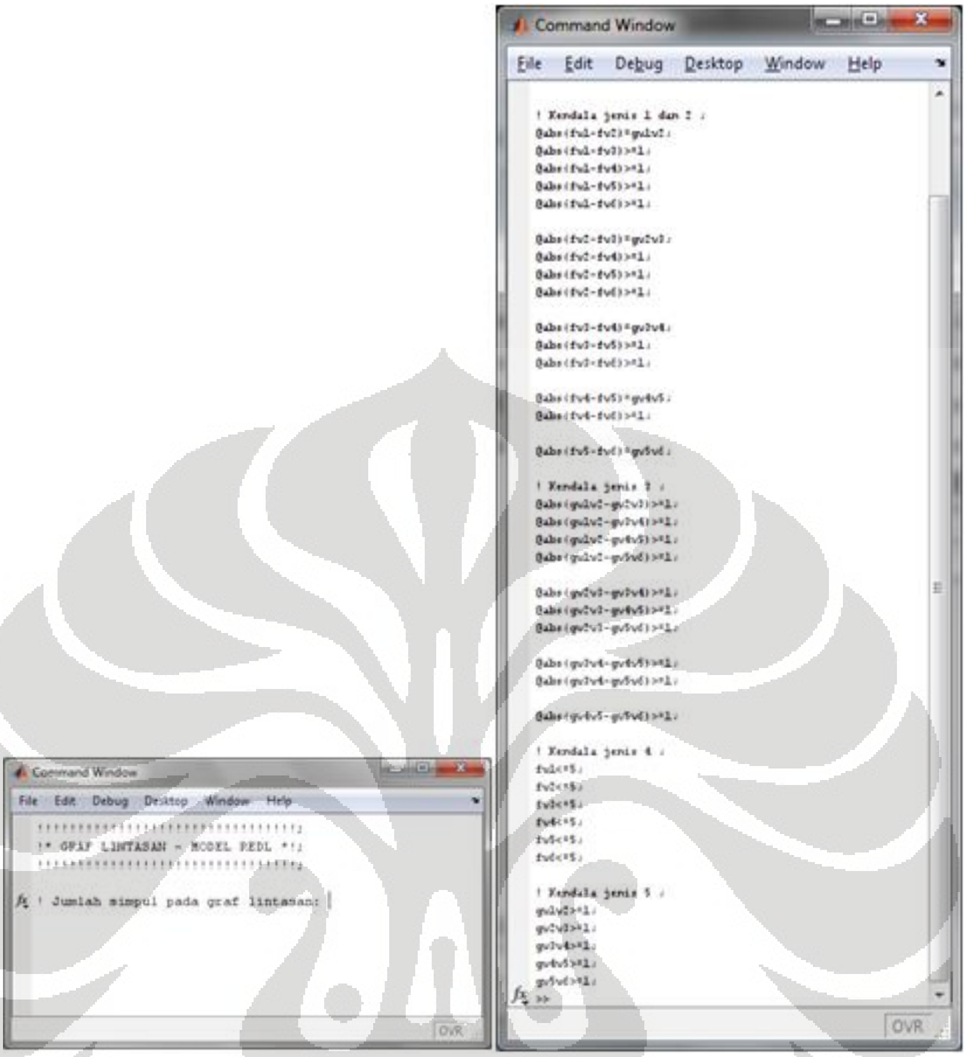
Gambar 4. 1 Tampilan awal pada *Command Window* di MATLAB

Pengguna diminta memasukan jenis graf dengan mengetikan 1 atau 2, sesuai dengan jenis graf yang diinginkan.

4.1 Simulasi pada Graf Lintasan

Untuk membentuk model dari graf lintasan ketik "1" pada tampilan awal, maka akan tampil seperti pada Gambar 4.2 (a). Pengguna diminta untuk memasukan jumlah simpul pada graf lintasan yang diinginkan (n). Banyaknya simpul (n) akan memengaruhi banyaknya kendala dalam model yang akan terbentuk.

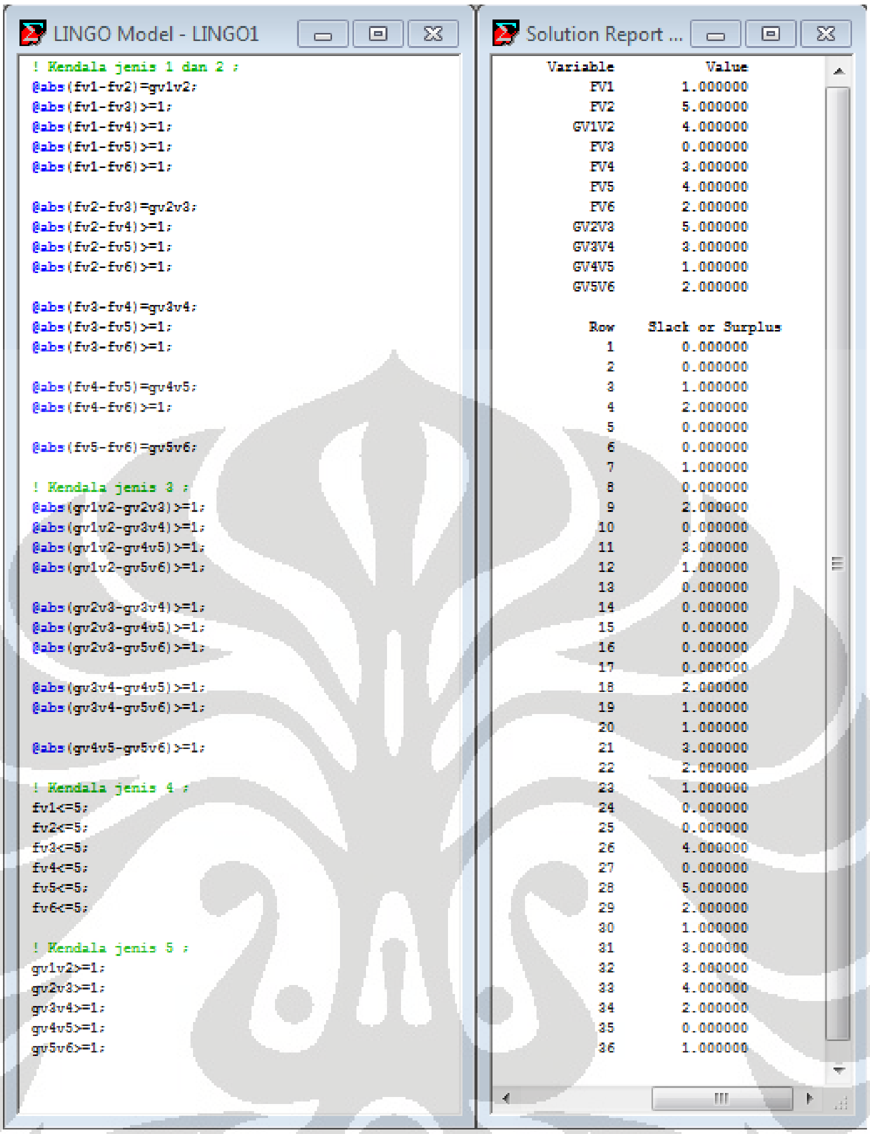
Pada Gambar 4.2 (a) diberikan contoh masukan (*input*) banyaknya simpul $n = 6$ (graf P_6), dan dihasilkan kendala dari masalah pelabelan graceful untuk graf P_6 seperti pada Gambar 4.2 (b). Model yang terbentuk ini sama dengan model lintasan P_6 pada Subbab 3.2.



(a) (b)

Gambar 4. 2 (a) Program lintasan.m di MATLAB
(b) Model graf lintasan P_n dengan $n = 6$ pada *Command Window* di MATLAB

Model ini diselesaikan dengan LINGO seperti pada Gambar 4.3 (a), dan diperoleh keluaran (*output*) seperti yang ditunjukan pada Gambar 4.4 (b). Dari keluaran tersebut didapat $f(v_1) = 1, f(v_2) = 5, f(v_3) = 0, f(v_4) = 3, f(v_5) = 4, f(v_6) = 2$, dan menginduksikan pelabelan pada busurnya adalah $g(v_1v_2) = 4, g(v_2v_3) = 5, g(v_3v_4) = 3, g(v_4v_5) = 1, g(v_5v_6) = 2$. Solusi tersebut adalah solusi layak, jadi graf P_6 adalah graf graceful. Label yang tersedia untuk simpul semuanya terpakai. Pada simulasi ini, hanya satu solusi dapat dimunculkan.

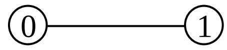
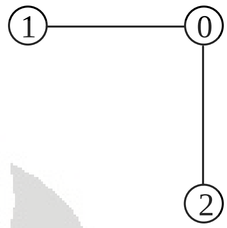
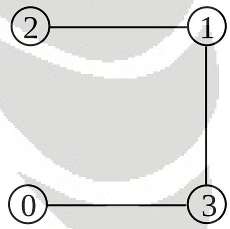


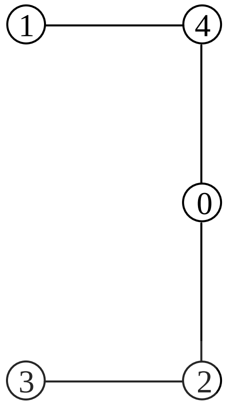
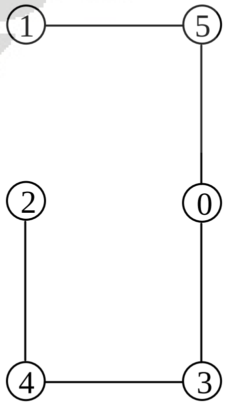
(a) (b)

Gambar 4. 3 (a) Model untuk P_6 di LINGO
(b) *Solution Report* di LINGO

Pada Tabel 4.1 diberikan simulasi untuk graf lintasan P_2 - P_6. Kolom pertama menunjukan jumlah simpul pada graf lintasan. Kolom kedua menunjukan model kendala yang terbentuk untuk graf P_n. Kolom ketiga memerlihatkan solusi dari model pemrograman matematikanya. Kolom keempat menyatakan apakah graf P_n graceful atau tidak. Kolom kelima adalah gambar dari graf tersebut.

Tabel 4. 1 Solusi dari masalah pelabelan graceful pada graf lintasan P_2 - P_6

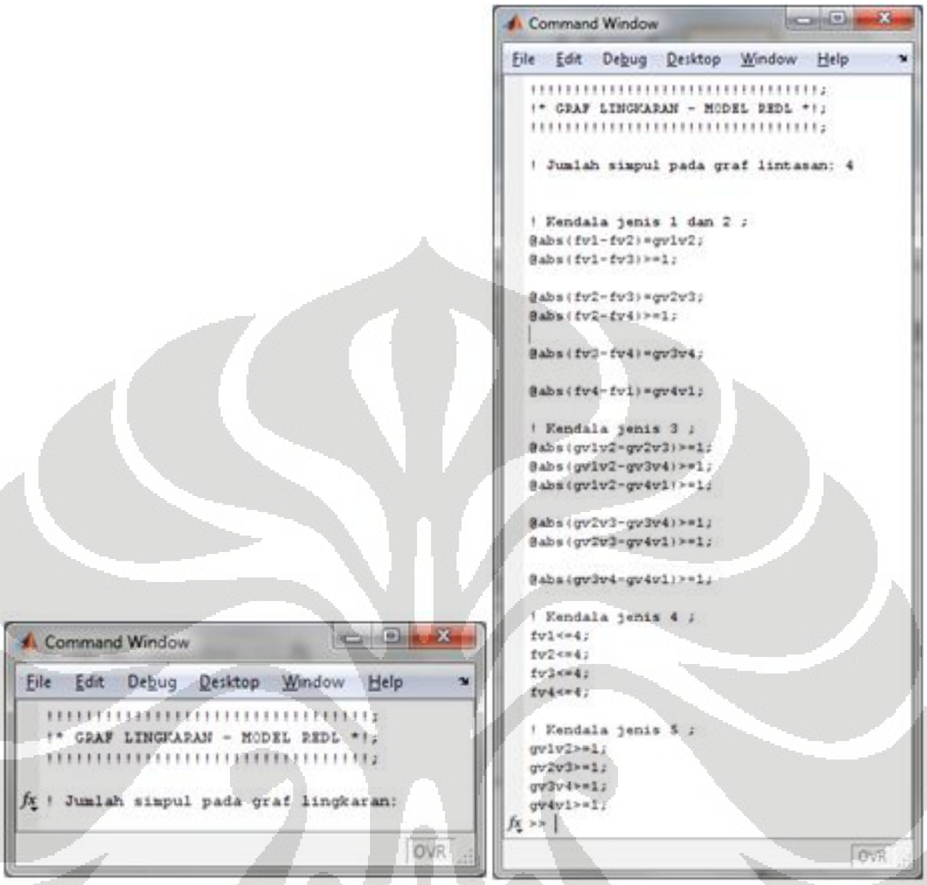
n	Model Kendala	Solusi	Graceful?	Gambar Graf P_n
2	$\lvert f(v_1) - f(v_2)\rvert = g(v_1v_2)$ $f(v_1) \leq 1$ $f(v_2) \leq 1$ $g(v_1v_2) \geq 1$	$f(v_1) = 0$ $f(v_2) = 1$ $g(v_1v_2) = 1$	Graceful	
3	$\lvert f(v_1) - f(v_2)\rvert = g(v_1v_2)$ $\lvert f(v_2) - f(v_3)\rvert = g(v_2v_3)$ $\lvert f(v_1) - f(v_3)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_2v_3)\rvert \geq 1$ $f(v_1) \leq 2$ $f(v_2) \leq 2$ $f(v_3) \leq 2$ $g(v_1v_2) \geq 1$ $g(v_2v_3) \geq 1$	$f(v_1) = 1$ $f(v_2) = 0$ $f(v_3) = 2$ $g(v_1v_2) = 1$ $g(v_2v_3) = 2$	Graceful	
4	$\lvert f(v_1) - f(v_2)\rvert = g(v_1v_2)$ $\lvert f(v_2) - f(v_3)\rvert = g(v_2v_3)$ $\lvert f(v_3) - f(v_4)\rvert = g(v_3v_4)$ $\lvert f(v_1) - f(v_3)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_1) - f(v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_2) - f(v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_2v_3)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_3v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3) - g(v_3v_4)\rvert \geq 1$ $f(v_1) \leq 3$ $f(v_2) \leq 3$ $f(v_3) \leq 3$ $f(v_4) \leq 3$ $g(v_1v_2) \geq 1$ $g(v_2v_3) \geq 1$ $g(v_3v_4) \geq 1$	$f(v_1) = 2$ $f(v_2) = 1$ $f(v_3) = 3$ $f(v_4) = 0$ $g(v_1v_2) = 1$ $g(v_2v_3) = 2$ $g(v_3v_4) = 3$	Graceful	

5	$\lvert f(v_1)-f(v_2)\rvert = g(v_1v_2)$ $\lvert f(v_2)-f(v_3)\rvert = g(v_2v_3)$ $\lvert f(v_3)-f(v_4)\rvert = g(v_3v_4)$ $\lvert f(v_4)-f(v_5)\rvert = g(v_4v_5)$ $\lvert f(v_1)-f(v_3)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_1)-f(v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_1)-f(v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_2)-f(v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_2)-f(v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_3)-f(v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2)-g(v_2v_3)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2)-g(v_3v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2)-g(v_4v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3)-g(v_3v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3)-g(v_4v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_3v_4)-g(v_4v_5)\rvert \geq 1$ $f(v_1) \leq 4$ $f(v_2) \leq 4$ $f(v_3) \leq 4$ $f(v_4) \leq 4$ $f(v_5) \leq 4$ $g(v_1v_2) \geq 1$ $g(v_2v_3) \geq 1$ $g(v_3v_4) \geq 1$ $g(v_4v_5) \geq 1$	$f(v_1) = 1$ $f(v_2) = 4$ $f(v_3) = 0$ $f(v_4) = 2$ $f(v_5) = 3$ $g(v_1v_2) = 3$ $g(v_2v_3) = 4$ $g(v_3v_4) = 2$ $g(v_4v_5) = 1$	Graceful	
6	$\lvert f(v_1)-f(v_2)\rvert = g(v_1v_2)$ $\lvert f(v_2)-f(v_3)\rvert = g(v_2v_3)$ $\lvert f(v_3)-f(v_4)\rvert = g(v_3v_4)$ $\lvert f(v_4)-f(v_5)\rvert = g(v_4v_5)$ $\lvert f(v_5)-f(v_6)\rvert = g(v_5v_6)$ $\lvert f(v_1)-f(v_3)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_1)-f(v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_1)-f(v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert f(v_1)-f(v_6)\rvert \geq 1$	$f(v_1) = 1$ $f(v_2) = 5$ $f(v_3) = 0$ $f(v_4) = 3$ $f(v_5) = 4$ $f(v_6) = 2$ $g(v_1v_2) = 4$ $g(v_2v_3) = 5$ $g(v_3v_4) = 3$	Graceful	

	$\|f(v_2) - f(v_4)\| \geq 1$ $\|f(v_2) - f(v_5)\| \geq 1$ $\|f(v_2) - f(v_6)\| \geq 1$ $\|f(v_3) - f(v_5)\| \geq 1$ $\|f(v_3) - f(v_6)\| \geq 1$ $\|f(v_4) - f(v_6)\| \geq 1$ $\|g(v_1v_2) - g(v_2v_3)\| \geq 1$ $\|g(v_1v_2) - g(v_3v_4)\| \geq 1$ $\|g(v_1v_2) - g(v_4v_5)\| \geq 1$ $\|g(v_1v_2) - g(v_5v_6)\| \geq 1$ $\|g(v_2v_3) - g(v_3v_4)\| \geq 1$ $\|g(v_2v_3) - g(v_4v_5)\| \geq 1$ $\|g(v_2v_3) - g(v_5v_6)\| \geq 1$ $\|g(v_3v_4) - g(v_4v_5)\| \geq 1$ $\|g(v_3v_4) - g(v_5v_6)\| \geq 1$ $\|g(v_4v_5) - g(v_5v_6)\| \geq 1$ $f(v_1) \leq 5$ $f(v_2) \leq 5$ $f(v_3) \leq 5$ $f(v_4) \leq 5$ $f(v_5) \leq 5$ $f(v_6) \leq 5$ $g(v_1v_2) \geq 1$ $g(v_2v_3) \geq 1$ $g(v_3v_4) \geq 1$ $g(v_4v_5) \geq 1$ $g(v_5v_6) \geq 1$	$g(v_4v_5) = 1$ $g(v_5v_6) = 2$		

4.2 Simulasi pada Graf Lingkaran

Untuk membuat model dari graf lingkaran ketik “2” pada tampilan awal (program pemodelan.m), maka akan tampil seperti pada Gambar 4.4 (a). Pengguna diminta untuk memasukan jumlah simpul pada graf lingkaran yang diinginkan (n). Banyaknya simpul (n) akan memengaruhi banyaknya kendala dalam model yang akan terbentuk.

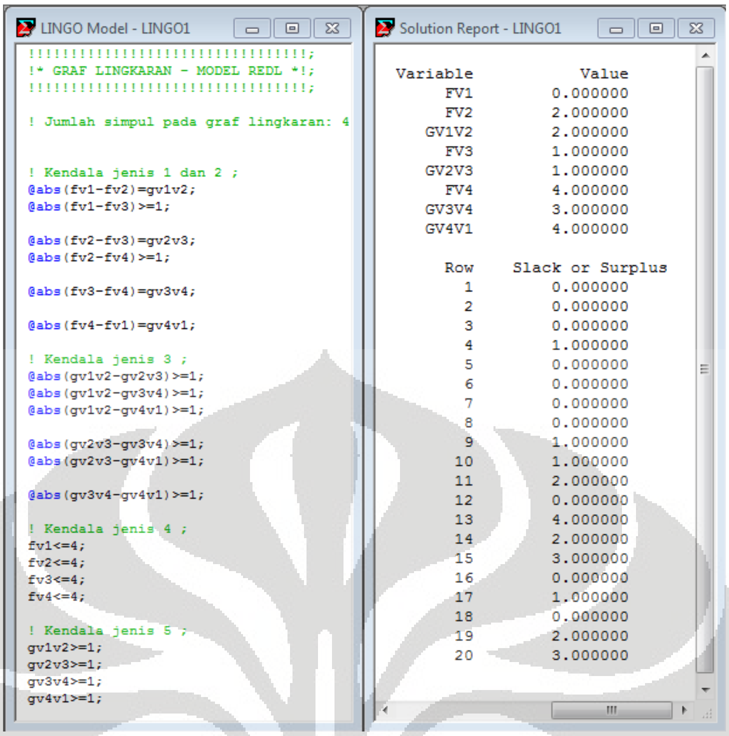


(a) (b)

Gambar 4. 4 (a) Program lingkaran.m di MATLAB
(b) Model graf lingkaran C_n dengan $n = 4$ pada *Command Window* di MATLAB

Pada Gambar 4.4 (a) diberikan contoh masukan banyaknya simpul $n = 4$ (graf C_4), dan dihasilkan kendala dari masalah pelabelan graceful untuk graf C_4 seperti pada Gambar 4.4 (b). Kemudian diselesaikan pada LINGO.

Gambar 4.5 (a) adalah hasil salinan dari model yang dihasilkan MATLAB, yang merupakan input pada LINGO. Setelah diselesaikan, dihasilkan keluaran seperti pada Gambar 4.5 (b). Dari keluaran tersebut didapat $f(v_1) = 0, f(v_2) = 2, f(v_3) = 1, f(v_4) = 4$, dan menginduksikan pelabelan pada busurnya adalah $g(v_1v_2) = 2, g(v_2v_3) = 1, g(v_3v_4) = 3, g(v_4v_1) = 4$. Solusi tersebut adalah solusi layak, jadi graf C_4 adalah graf graceful. Label yang tersedia untuk simpul pada graf C_4 tidak semuanya terpakai.

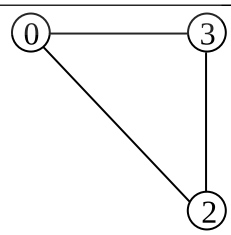


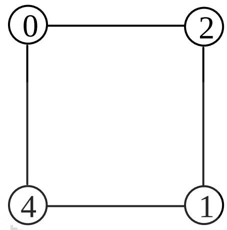
(a) (b)

Gambar 4. 5 (a) Model untuk C_4 di LINGO
(b) *Solution Report* di LINGO

Pada Tabel 4.2 diberikan simulasi untuk graf lintasan C_3 - C_5. Kolom pertama menunjukan jumlah simpul pada graf lintasan. Kolom kedua menunjukan model kendala yang terbentuk untuk graf C_n. Kolom ketiga memerlihatkan solusi dari model pemrograman matematikanya. Kolom keempat menyatakan apakah graf C_n graceful atau tidak. Kolom kelima adalah gambar dari graf tersebut.

Tabel 4. 2 Solusi dari masalah pelabelan graceful pada graf lingkaran C_3 - C_5

n	Model	Solusi	Graceful?	Gambar Graf C_n
3	$\lvert f(v_1) - f(v_2)\rvert = g(v_1v_2)$ $\lvert f(v_2) - f(v_3)\rvert = g(v_2v_3)$ $\lvert f(v_3) - f(v_1)\rvert = g(v_3v_1)$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_2v_3)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_3v_1)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3) - g(v_3v_1)\rvert \geq 1$ $f(v_1) \leq 3$	$f(v_1) = 0$ $f(v_2) = 3$ $f(v_3) = 2$ $g(v_1v_2) = 3$ $g(v_2v_3) = 1$ $g(v_3v_1) = 2$	Graceful	

	$f(v_2) \leq 3$ $f(v_3) \leq 3$ $g(v_1v_2) \geq 1$ $g(v_2v_3) \geq 1$ $g(v_3v_1) \geq 1$			
4	$\lvert f(v_1) - f(v_2) \rvert = g(v_1v_2)$ $\lvert f(v_2) - f(v_3) \rvert = g(v_2v_3)$ $\lvert f(v_3) - f(v_4) \rvert = g(v_3v_4)$ $\lvert f(v_4) - f(v_1) \rvert = g(v_4v_1)$ $\lvert f(v_1) - f(v_3) \rvert \geq 1$ $\lvert f(v_2) - f(v_4) \rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_2v_3) \rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_3v_4) \rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_4v_1) \rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3) - g(v_3v_4) \rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3) - g(v_4v_1) \rvert \geq 1$ $\lvert g(v_3v_4) - g(v_4v_1) \rvert \geq 1$ $f(v_1) \leq 4$ $f(v_2) \leq 4$ $f(v_3) \leq 4$ $f(v_4) \leq 4$ $g(v_1v_2) \geq 1$ $g(v_2v_3) \geq 1$ $g(v_3v_4) \geq 1$ $g(v_4v_1) \geq 1$	$f(v_1) = 0$ $f(v_2) = 2$ $f(v_3) = 1$ $f(v_4) = 4$ $g(v_1v_2) = 2$ $g(v_2v_3) = 1$ $g(v_3v_4) = 3$ $g(v_4v_1) = 4$	Graceful	
5	$\lvert f(v_1) - f(v_2) \rvert = g(v_1v_2)$ $\lvert f(v_2) - f(v_3) \rvert = g(v_2v_3)$ $\lvert f(v_3) - f(v_4) \rvert = g(v_3v_4)$ $\lvert f(v_4) - f(v_5) \rvert = g(v_4v_5)$ $\lvert f(v_5) - f(v_1) \rvert = g(v_5v_1)$ $\lvert f(v_1) - f(v_3) \rvert \geq 1$ $\lvert f(v_1) - f(v_4) \rvert \geq 1$ $\lvert f(v_2) - f(v_4) \rvert \geq 1$ $\lvert f(v_2) - f(v_5) \rvert \geq 1$	-	Tidak Graceful	

	$\lvert f(v_3) - f(v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_2v_3)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_3v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_4v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_1v_2) - g(v_5v_1)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3) - g(v_3v_4)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3) - g(v_4v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_2v_3) - g(v_5v_1)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_3v_4) - g(v_4v_5)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_3v_4) - g(v_5v_1)\rvert \geq 1$ $\lvert g(v_4v_5) - g(v_5v_1)\rvert \geq 1$ $f(v_1) \leq 5$ $f(v_2) \leq 5$ $f(v_3) \leq 5$ $f(v_4) \leq 5$ $f(v_5) \leq 5$ $g(v_1v_2) \geq 1$ $g(v_2v_3) \geq 1$ $g(v_3v_4) \geq 1$ $g(v_4v_5) \geq 1$ $g(v_5v_1) \geq 1$			

Dari Tabel 4.2 graf lingkaran dengan 5 simpul bukanlah graf graceful, hal ini sesuai dengan Rosa (1967) yang mengatakan bahwa graf lingkaran C_n graceful jika $n \equiv 0, 3\ (mod\ 4)$. Jika banyak simpul pada graf lingkaran adalah 5, maka menurut Rosa graf tersebut tidak graceful, karena $5 \not\equiv 0, 3\ (mod\ 4)$. Hal ini sesuai dengan hasil dari simulasi untuk graf C_5.

BAB 5
KESIMPULAN

Masalah pelabelan graceful dari suatu graf dapat dimodelkan menjadi model pemrograman matematika menurut model Redl maupun model Eshghi-Azimi. Di dalam model Redl masih terdapat kendala berupa nilai mutlak sedangkan pada model Eshghi-Azimi sudah tidak ada kendala yang berupa nilai mutlak. Untuk menyelesaikan model pemrograman matematika yang terdapat kendala nilai peubahnya harus berupa integer dan kendala nilai peubahnya bernilai tak-nol, maka dibuat model baru dengan mengeliminasi kedua jenis kendala tersebut.

Simluasi dilakukan untuk graf lintasan dan lingkaran menggunakan model yang dibuat oleh Redl. Dengan program yang dibuat dapat dihasilkan model pemrograman matematika dari masalah pelabelan graceful pada graf lintasan dan lingkaran dengan sembarang nilai n. Akan tetapi karena keterbatasan perangkat lunak LINGO, penyelesaian model hanya bisa dilakukan untuk $n \leq 6$ untuk graf lintasan dan $n \leq 5$ untuk graf lingkaran.

DAFTAR PUSTAKA

(2010). Dipetik September 29, 2010, dari http://math.youngzones.org.Konigsberg.html

(2010). Dipetik Oktober 4, 2010, dari http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory#cite_note-Biggs-0

Alexanderson, G. L. (2006). About The Cover: Euler and Königsberg's Bridges: A Historical View. 1-2.

Bondy, J A; Murty, U S R. (1976). *Graph Theory With Applications.* Ontario, Canada: University of Waterloo.

Bronson, R. (1982). *Theory and Problems of Operations Research.* United Sates of America: McGraw-Hill.

Eshghi, K., & Azimi, P. (2003). Applications of Mathematical Programming in Graceful Labeling of Graphs. 1-5.

Gallian, J. A. (2009). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics 5* .

Kerami, D. (2008). *Pemrograman Linear* (1 ed.). Jakarta, Indonesia: Universitas Terbuka.

Redl, T. A. (2003). Graceful Graphs and Graceful Labelings: Two Mathematical Programming Formulations and Some Other New Results. 1-9.

Surgandini, A. (2010). *Algoritma Pelabelan Total Busur Ajaib pada Graf Lingkaran, Kipas, dan Roda.* Skripsi. Depok: Departemen Matematika Universitas Indonesia.

West, D. B. (1996). *Intoduction to Graph Theory.* United States of America.