



575.35
Tag
1

UNIVERSITAS INDONESIA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

**ANALISA TINGKAH LAKU AYUNAN
BERDASARKAN
PERSAMAAN DIFFERENSIAL NONLINIER AYUNAN
PADA BIDANG FASE**

TUGAS AKHIR

Diajukan Oleh :

FLAFIANA M. T. T. TAGUNG

038501703B

Pembimbing :

Drs. **BORKAT RITONGA**



Diajukan Untuk Melengkapi Syarat-Syarat
Menempuh Ujian Sarjana Matematika

DEPOK

1993

KATA PENGANTAR

"Segala perkara dapat kutanggung di dalam Dia yang memberi kekuatan kepadaku." (Filipi 4:13)

Segala puji, hormat dan syukur anakMu panjatkan bagiMu Allahku yang terus menerus melimpahkan kekuatan dan pertolongan kepadaku di tengah-tengah kelemahan-kelemahanku dalam penyelesaian tugas akhir ini.

Tugas akhir ini diajukan untuk melengkapi syarat-syarat dalam menempuh ujian Sarjana Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyatakan sangat berterima kasih kepada Bapak Drs. Borkat Ritonga yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk membimbing penulis dengan sabar dalam menyusun tugas akhir ini.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada :

- Ibu Dr. Belawati Widjaja, selaku ketua jurusan Matematika FMIPA-UI.
- Ibu Dra. Sandra Gunawan, MS dan Drs. Gatot F., MSc sebagai Dosen wali penulis.
- Ibu Dra. Rianti Setiadi Tambunan Msc yang banyak menolong penulis dalam doa dan motivasi serta materi skripsi.
- Seluruh Staff Dosen jurusan Matematika, FMIPA-UI.
- Karyawan perpustakaan Matematika, perpustakaan FMIPA-UI,

dan juga perpustakaan Matematika ITB.

- Saudara - saudara penulis dalam Kristus di FMIPA-UI, Perkantas dan secara khusus anak-anak kelompok kecil serta anak-anak kelompok PA penulis yang terus mendoakan dan memberi penghiburan kepada penulis.
- Adik-adik rohaniku Guntur, Ratih dan Daniel beserta anggota keluarga masing-masing yang banyak menolong dalam menyediakan fasilitas pengetikan dan printer.

Teristimewa untuk orang tua dan adik-adik tercinta, penulis ucapkan terima kasih atas doa dan dorongan baik moril maupun materiil yang diberikan kepada penulis.

Penulis berharap walaupun di dalam ketidaksempurnaan, tugas akhir ini dapat berguna.

Depok, Februari 1993

Penulis.

DAFTAR ISI

	Halaman
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
ABSTRAK	v
BAB I. : PENDAHULUAN	1
BAB II. : TEORI DASAR	
II.1. Persamaan Differensial Ayunan Tanpa Redaman	3
II.2. Persamaan Differensial Ayunan Dengan Redaman	8
II.3. Analisa Kestabilan Linier dari solusi kesetimbangan untuk Ayunan Tanpa Redaman dan Ayunan Dengan Redaman	10
II.3.1. Analisa Kestabilan Linier dari Solusi Keseimbangan untuk Ayunan Tanpa Redaman	12
II.3.2. Analisa Kestabilan Linier dari Solusi Keseimbangan untuk Ayunan Dengan Redaman	15
BAB III. : TINGKAH LAKU AYUNAN TANPA REDAMAN	
III.1. Kurve Energi dan Bidang Fase	23
III.2. Bidang Fase Ayunan Tanpa Redaman dan Tingkah Laku yang Dilukiskannya	27

BAB IV.	TINGKAH LAKU AYUNAN DENGAN REDAMAN	
IV.1.	Isoklin	39
IV.2.	Isoklin pada Ayunan Dengan Redaman ...	41
IV.3.	Tingkah Laku yang Dihasilkan Kurve Solusi Berdasarkan Isoklin pada Ayunan Dengan Redaman	45
IV.3.1.	Analisa Bidang Fase dalam lingkungan posisi setimbang stabil	46
IV.3.2.	Analisa Bidang Fase dalam lingkungan posisi setimbang tidak stabil	51
IV.3.3.	Analisa Bidang Fase dalam lingkungan antara posisi setimbang stabil dan tidak stabil	53
BAB V.	PENUTUP	57
LAMPIRAN 1	63
LAMPIRAN 2	66
DAFTAR PUSTAKA	68

ABSTRAK

Flafiana M.T.T. Tagung (038501703B)

Analisa Tingkah Laku Ayunan Berdasarkan
Persamaan Differensial Nonlinier Ayunan Pada Bidang Fase
v + 68 halaman (1993)

Bibl., 7 (1949 - 1986)

Dalam skripsi ini akan dibahas mengenai tingkah laku ayunan tanpa redaman dan dengan redaman yang dihasilkan berdasarkan bentuk penyelesaian persamaan differensial ayunan nonlinier pada bidang fase.

BAB I

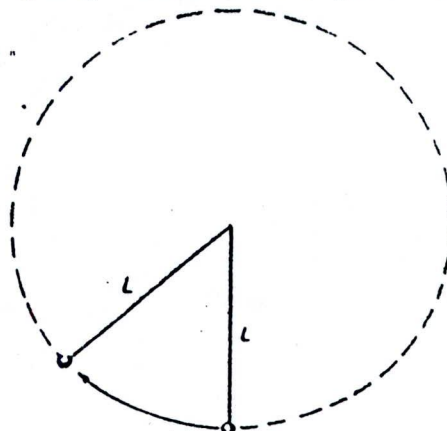
PENDAHULUAN

Terdapat beberapa cara untuk menyelesaikan persamaan differensial nonlinier. Pembahasan dalam skripsi ini sangat berkaitan dengan salah satu bentuk penyelesaian persamaan differensial nonlinier tersebut.

Dalam skripsi ini akan dibahas mengenai aplikasi dari vibrasi nonlinier yang memiliki persamaan differensial nonlinier order 2 yaitu analisa oskilasi nonlinier dalam gerak ayunan. Adapun cara yang digunakan untuk menganalisa oskilasi nonlinier dalam gerak ayunan ini adalah dengan menyelesaikan persamaan differensial biasa nonlinier order 2 dari ayunan sedemikian sehingga didapat hubungan antara kecepatan dan jarak ayunan yang tertuang dalam bidang fase.

Analisa yang dimaksud disini adalah analisa tingkah laku dari ayunan. Apakah ayunan sedang berada dalam kondisi diam dan bilamana kondisi ini terjadi, ataukah ayunan sedang berayun terus menerus dan bilamana kondisi ini terjadi dan lain-lain.

Ayunan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah ayunan yang bergerak sepanjang sebuah lingkaran dengan radius L gambar di bawah ini.



Bab I yaitu pendahuluan membahas tujuan dari penulisan skripsi ini dan juga gambaran umum dari isi setiap bab, serta pembatasan dari pembahasan.

Bab II membahas teori-teori dasar yang diperlukan untuk tujuan pembahasan skripsi ini, antara lain: pembahasan mengenai persamaan differensial ayunan, baik ayunan tanpa redaman maupun dengan redaman dan juga analisa kestabilan linier sebagai dasar untuk menentukan jenis-jenis kesetimbangan dari posisi ayunan tanpa redaman dan ayunan dengan redaman.

Bab III menguraikan tentang tingkah laku ayunan tanpa redaman yang dibagi dalam 4 kondisi sesuai dengan besar energi yang diberikan pada ayunan. Kurve energi atau integral energi pada bidang fase merupakan dasar menentukan tingkah laku ayunan tersebut, oleh karena itu hal ini akan dibahas pada awal bab ini.

Bab IV berisi pembahasan tingkah laku pada ayunan dengan redaman yang dibagi dalam 3 kondisi sesuai dengan lingkungan posisi ayunan. Adapun kondisi redaman yang dibahas pada bagian ini hanyalah kondisi kurang redam dan kondisi terlampau redam. Pada awal bab ini diuraikan pembahasan mengenai isoklin yang menjadi dasar untuk menentukan tingkah laku ayunan dengan redaman.

Dan pada akhirnya, skripsi ini akan diakhiri dengan penulisan rangkuman dari semua pembahasan yang diuraikan pada bab-bab sebelumnya, yang ditulis secara khusus dalam Bab V.

BAB II

TEORI DASAR

II.1 Persamaan Differensial Ayunan Tanpa Redaman

Pandang sebuah ayunan dengan panjang L . Pada salah satu ujungnya ditahan pada sebuah titik yang ditetapkan dan bebas berotasi mengelilingi titik tersebut. Sebuah massa m terletak pada ujung lainnya seperti digambarkan di bawah ini.



Gambar 2.1.1

Pada pembahasan ini yang diperhitungkan hanya massa dari bandul atau beban ayunan, sedangkan massa lainnya yaitu massa tiang ayunan dalam hal ini diabaikan.

Untuk mendapatkan persamaan ayunan akan digunakan Hukum Newton II,

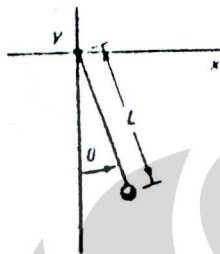
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

dimana \vec{F} : merupakan penjumlahan vektor dari semua gaya yang bekerja terhadap titik massa dari massa m

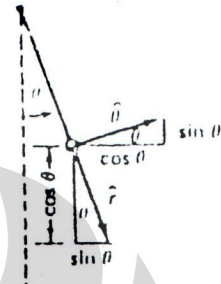
m : massa beban ayunan (konstan)

\vec{a} : vektor percepatan dari massa

Karena ayunan bergerak sepanjang keliling dari sebuah lingkaran, maka Hukum Newton II yang dipakai, akan dikembangkan dalam koordinat polar. Dalam koordinat polar, vektor posisi ayunan \vec{x} diarahkan keluar dengan panjang L , seperti pada gambar 2.1.2 di kiri bawah ini.



Gambar 2.1.2



Gambar 2.1.3

$$\vec{x} = L \cdot \hat{r}$$

dimana L : merupakan panjang ayunan (konstan)

\hat{r} : vektor satuan radial, $|\hat{r}|=1$

\vec{x} : vektor posisi massa

Dengan asumsi θ positif adalah seperti pada gambar 2.1.2, maka melalui gambar 2.1.3 dapat dilihat bahwa,

$$\hat{r} = |\hat{r}| \sin \theta \hat{i} + |\hat{r}| \cos \theta (-\hat{j}) = \sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}$$

Jika $\hat{\theta}$ adalah vektor yang tegak lurus dengan \hat{r} ($|\hat{\theta}|=1$) maka,

$$\hat{\theta} = |\hat{\theta}| \cos \theta \hat{i} + |\hat{\theta}| \sin \theta \hat{j} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

Dibawah ini akan dicari vektor kecepatan massa $\frac{d\vec{x}}{dt}$ untuk memperoleh vektor percepatan massa $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$ dan juga gaya-gaya yang bekerja pada ayunan tanpa redaman, yang berguna untuk menentukan persamaan ayunan tanpa redaman.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = L \frac{d\hat{r}}{dt} + \hat{r} \frac{dL}{dt}$$

$$= L \frac{d\hat{r}}{dt} = L \left(\frac{d\hat{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$= L \left((\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$= L \left(\hat{\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$= L \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{\theta}$$

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} + L \frac{d\theta}{dt} \frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

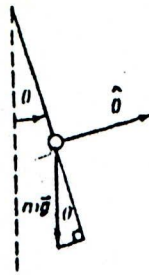
$$= L \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} + L \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$= L \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} + L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \right)$$

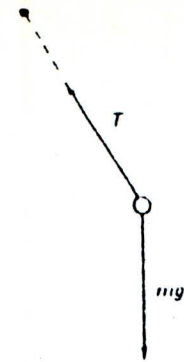
$$= L \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} - L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \hat{r}$$

dengan $L \frac{d^2\theta}{dt^2}$ disebut komponen angular dari percepatan

$L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ disebut komponen radial dari percepatan



Gambar 2.1.4



Gambar 2.1.5

Terdapat 2 buah gaya yang bekerja pada ayunan tanpa redaman yaitu $-T\hat{r}$ (Gaya pada ayunan) dan $m\vec{g}$ (Gaya gravitasi). Dengan demikian,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$-T\hat{r} + m\vec{g} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

$$-T\hat{r} + mg(-\hat{j}) = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

$$-T\hat{r} + mg(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) = m(L \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} - L(\frac{d\theta}{dt})^2 \hat{r})$$

$$-T\hat{r} + mg \cos \theta \hat{r} - mg \sin \theta \hat{\theta} = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} - mL(\frac{d\theta}{dt})^2 \hat{r}$$

$$(mg \cos \theta - T)\hat{r} - mg \sin \theta \hat{\theta} = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} - mL(\frac{d\theta}{dt})^2 \hat{r}$$

Masing-masing komponen dari persamaan gaya vektor menghasilkan sebuah persamaan differensial nonlinier yaitu,

$$mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \dots \dots \dots (2.1.1)$$

$$mL \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -mg \cos \theta + T \dots \dots \dots (2.1.2)$$

Dari persamaan 2.1.1 dapat dilihat bahwa gerak ayunan tidak tergantung pada massa, melainkan tergantung pada panjang L (serta g) sebagai berikut,

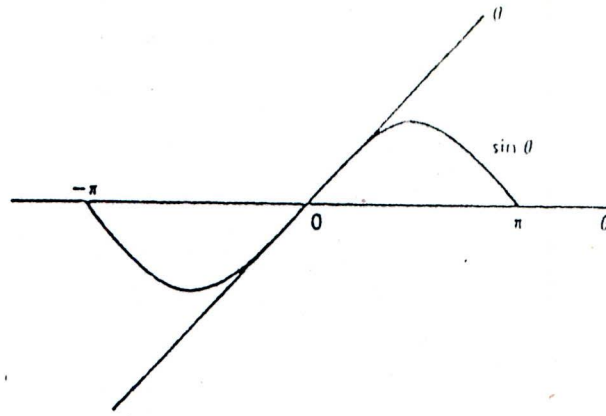
$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Dengan demikian persamaan ayunan tanpa redaman adalah:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan differensial nonlinier, sehingga ayunan dimana persamaan ini berlaku disebut Ayunan Nonlinier.

Bagi ayunan yang bergerak dalam sudut θ yang kecil, dengan pendekatan $\sin \theta \approx \theta$ berlaku persamaan ayunan yang dilinierkan. Secara geometri fungsi $\sin \theta$ hampir identik dengan fungsi θ untuk θ kecil.



Gambar 2.1.6

Persamaan differensial untuk ayunan yang dilinierkan:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

II.2 Persamaan Differensial Ayunan Dengan Redaman

Dalam Ayunan dengan redaman terdapat 3 buah gaya yang bekerja. Selain gaya pada ayunan $-\hat{T}r$ dan gaya gravitasi $m\bar{g}$ juga terdapat gaya redaman. Gaya redam itu adalah fungsi linier dari kecepatan, $\bar{F}_R = c \frac{d\bar{x}}{dt}$, dimana c merupakan koefisien redam. Gaya redaman merupakan gaya penghambat atau gaya gesekan yang menyebabkan gerakan itu akan berhenti. Dengan demikian,

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

$$-T\hat{r} + m\bar{g} - \bar{F}_R = m \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$$

$$-T\hat{r} + mg(-\hat{j}) - c \frac{d\bar{x}}{dt} = m \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$$

$$-T\hat{r} + mg \cos \theta \hat{r} - mg \sin \theta \hat{\theta} - cL \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} - mL \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{r}$$

$$(mg \cos \theta - T)\hat{r} + (-mg \sin \theta - cL \frac{d\theta}{dt})\hat{\theta} = mL \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} - mL \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{r}$$

Persamaan differensial biasa dari komponen angular,

$$-mg \sin \theta - cL \frac{d\theta}{dt} = mL \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta - \frac{c.L}{m} \frac{d\theta}{dt}$$

Maka didapat persamaan untuk ayunan dengan redaman dalam bentuk Persamaan differensial nonlinier,

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta - k \frac{d\theta}{dt}$$

dengan $k = \frac{c.L}{m}$ positif, $k > 0$.

Pandang persamaan ayunan di lingkungan $\theta=0$,

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0$$

(Pembahasan ada di II.3.2 (i))

maka didapat:

- (i) Jika $k^2 < 4Lg$, maka kondisi ayunan kurang redam.
- (ii) Jika $k^2 > 4Lg$, maka kondisi ayunan terlampau redam.

II.3 Analisa kestabilan linier dari solusi kesetimbangan untuk Ayunan Tanpa Redaman dan Ayunan Dengan Redaman

Ayunan yang sedang berada dalam posisi setimbang akan berada dalam kondisi menetap. Ambil $\theta = \theta_E$ merupakan posisi setimbang, berarti θ konstan dan θ_E merupakan konstanta. Dengan demikian,

$$\frac{d\theta_E}{dt} = \frac{d^2\theta_E}{dt^2} = 0$$

Pada $\theta = \theta_E$, maka persamaan $L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta_E$ menjadi

$\sin \theta_E = 0$. Didapat $\theta_E = 0, \pi$ (atau $n\pi$, untuk $n \in \mathbb{Z}$)

Untuk $\theta_E = 0$, ayunan dikatakan berada dalam posisi 'natural'.

Pada posisi 'natural', apabila ayunan diberi dorongan yang cukup kecil maka ayunan akan berosilasi dalam daerah sekitar posisi tersebut. Sedangkan untuk $\theta_E = \pi$, ayunan dikatakan

sedang berada dalam posisi 'inverted' (tidak stabil). Pada posisi ini bila ayunan diberi dorongan yang kecil sekalipun akan membuat ayunan tersebut bergerak meninggalkan titik-titik di sekitar posisi 'inverted' tersebut.



Posisi 'Natural'

Gambar 2.3.1



Posisi 'Inverted'

Gambar 2.3.2

Hanya pada 2 posisi inilah gaya akan setimbang dan tidak menghasilkan gerak. Meskipun ke 2 posisi di atas sama-sama merupakan posisi setimbang, tetapi terdapat perbedaan yang mendasar antara 2 solusi tersebut, yaitu:

- Untuk $\theta_E = 0$ merupakan posisi setimbang stabil,
- Untuk $\theta_E = \pi$ merupakan posisi setimbang yang sangat tidak stabil.

Analisa yang digunakan untuk dapat membedakan jenis-jenis dari solusi kesetimbangan disebut Analisa kestabilan linier dari solusi kesetimbangan.

Dibawah ini akan dibahas mengenai analisa tersebut pada ayunan tanpa redaman dan pada ayunan dengan redaman.

II.3.1 Analisa Kestabilan Linier dari Solusi Kesetimbangan untuk Ayunan Tanpa Redaman

Apabila sebuah gaya pengembalian f bekerja pada sebuah ayunan, maka

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -f(\theta)$$

$\theta = \theta_E$ merupakan posisi setimbang jika $f(\theta_E) = 0$.

Untuk menganalisa kestabilan posisi setimbang, akan diselidiki posisi-posisi dari ayunan yang dekat dengan posisi setimbangnya. Untuk θ dekat θ_E , fungsi $f(\theta)$ dapat didekati menggunakan beberapa bagian dari deret Taylor sekitar $\theta = \theta_E$,

$$f(\theta) = f(\theta_E) + (\theta - \theta_E)f'(\theta_E) + \frac{(\theta - \theta_E)^2}{2!} f''(\theta_E) + \dots$$

Dengan demikian,

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -f(\theta_E) - (\theta - \theta_E)f'(\theta_E) - \frac{(\theta - \theta_E)^2}{2!} f''(\theta_E) - \dots$$

karena $\theta = \theta_E$ merupakan posisi setimbang, maka $f(\theta_E) = 0$,

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - (\theta - \theta_E) f'(\theta_E) - \frac{(\theta - \theta_E)^2}{2!} f''(\theta_E)$$

Untuk θ yang cukup mendekati θ_E , maka $(\theta - \theta_E)^2 < (\theta - \theta_E)$ dan konsekuensinya bagian kwadrat $(\theta - \theta_E)^2 f''(\theta_E)/2!$ dapat diabaikan, juga untuk bagian yang ordernya lebih tinggi lagi dari deret Taylor tersebut. Dalam hal ini $f'(\theta_E) \neq 0$. Pendekatannya menjadi,

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - (\theta - \theta_E) f'(\theta_E)$$

Untuk lebih mudah menyelesaikan masalah ini, akan dibuat substitusi yaitu $\gamma = \theta - \theta_E$. Maka $\theta = \gamma + \theta_E$, dengan θ_E merupakan sebuah konstanta.

$$L \frac{d^2 (\gamma + \theta_E)}{dt^2} = - \gamma f'(\theta_E)$$

$$L \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = - f'(\theta_E) \cdot \gamma \quad \dots 2.3.1.i$$

dimana koefisien $f'(\theta_E)$ adalah sebuah konstanta.

Analisa sederhana dari persamaan 2.3.1.i yang disebut Analisa kestabilan linier menunjukkan bahwa:

1. Jika $f'(\theta_E) > 0$, maka posisi kesetimbangan stabil.

Ambil $f'(\theta_E) = +k$, maka

$$L \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = -k\gamma$$

$$\gamma = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\text{dengan } \omega^2 = \frac{k}{L}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan gerak harmonik sederhana, dengan demikian gaya yang bekerja di sekitar posisi setimbang akan cenderung mengembalikan ayunan ke posisi setimbangnya.

2. Jika $f'(\theta_E) < 0$, maka posisi kesetimbangan tidak stabil.

Ambil $f'(\theta_E) = -k$, maka

$$L \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = +k\gamma$$

$$\gamma = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$\text{dengan } \omega^2 = \frac{k}{L}$$

Solusi eksponensial tersebut mengakibatkan jarak dari posisi setimbang secara eksponensial akan bertambah jauh.

Dengan menggunakan analisa di atas akan dianalisa kestabilan linier dari posisi-posisi setimbang pada ayunan tanpa redaman.

Persamaan differensial ayunan tanpa redaman,

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Posisi - posisi setimbang yang akan dianalisa adalah $\theta_E = 0$ dan $\theta_E = \pi$. Dalam persamaan differensial diatas didapat bahwa $f(\theta_E) = g \sin \theta$, maka $f'(\theta_E) = g \cos \theta$.

Analisa:

$$f'(\theta=0) = g > 0$$

$$f'(\theta=\pi) = -g < 0$$

Dari analisa terbukti bahwa $\theta_E = 0$ merupakan posisi setimbang stabil dan $\theta_E = \pi$ merupakan posisi setimbang tidak stabil.

II.3.2 Analisa Kestabilan Linier dari Solusi Kesetimbangan untuk Ayunan Dengan Redaman

Pandang bentuk umum dari Hukum Newton yang berhubungan dengan gaya pengembalian dan gaya gesekan pada ayunan

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin \theta + k \frac{d\theta}{dt} = 0$$

maka $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ dapat dianggap sebagai sebuah fungsi dari θ dan $\frac{d\theta}{dt}$ sebagai berikut,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta, \frac{d\theta}{dt}). \quad \dots\dots 2.3.2.i$$

Dalam persamaan ini ketergantungan persamaan terhadap waktu (t) tidak dinyatakan secara eksplisit. Persamaan seperti ini disebut persamaan Otonom.

Analisa kestabilan linier dalam ayunan dengan redaman untuk solusi kesetimbangan akan menggunakan persamaan otonom sebagai dasar analisa.

Dimisalkan $\theta = \theta_E$ merupakan sebuah solusi kesetimbangan dari persamaan gerak 2.3.2.i. Jika posisi awal θ dekat dengan θ_E dalam kecepatan yang kecil, maka $f(\theta, \frac{d\theta}{dt})$ dapat diperluas dalam bentuk deret Taylor sebuah fungsi dari 2 variabel,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0,y_0} + (y-y_0) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0,y_0} + \dots$$

menjadi,

$$f(\theta, \frac{d\theta}{dt}) = f(\theta_E, 0) + (\theta - \theta_E) \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta_E, 0} + \frac{d\theta}{dt} \left. \frac{\partial f}{\partial (\frac{d\theta}{dt})} \right|_{\theta_E, 0} + \dots$$

dimana bagian deret Taylor dalam order tinggi akan diabaikan karena θ dekat dengan θ_E dan $\frac{d\theta}{dt}$ yang kecil. Karena θ_E merupakan solusi kesetimbangan, maka $f(\theta_E, 0) = 0$.

Dengan demikian persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = (\theta - \theta_E) \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta_E, 0} + \frac{d\theta}{dt} \left. \frac{\partial f}{\partial (\frac{d\theta}{dt})} \right|_{\theta_E, 0}$$

Dengan substitusi $\gamma = \theta - \theta_E$, dihasilkan

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -k\gamma - c \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\text{dimana } -k = \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta_E, 0} \text{ dan } -c = \left. \frac{\partial f}{\partial (\frac{d\theta}{dt})} \right|_{\theta_E, 0}$$

Persamaan yang dihasilkan merupakan persamaan differensial biasa homogen berorder 2, maka solusi yang didapat merupakan solusi eksponensial

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + c \frac{d\gamma}{dt} + k\gamma = 0 \quad \dots\dots 2.3.2.ii$$

$$(D^2 + cD + k)r = 0$$

Bentuk ini memiliki solusi dalam bentuk e^{rt} dengan akar karakteristiknya,

$$r_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4k}}{2}$$

Solusi kesetimbangan dikatakan stabil secara linier jika untuk semua kondisi mula-mula dekat $\theta = \theta_E$ dan $\frac{d\theta}{dt} = 0$, berarti jarak dari kesetimbangan tidak bertambah jauh. Tabel berikut menunjukkan tingkah laku dari solusi kesetimbangan.

$c^2 - 4k > 0$	<p>Tidak stabil jika $c \leq 0$</p> <p>Tidak stabil jika $c > 0$ tapi $k < 0$</p> <p>Stabil untuk kondisi lainnya ($c > 0$ dan $k \geq 0$)</p>
$c^2 - 4k = 0$	<p>Stabil jika $c > 0$</p> <p>Tidak stabil jika $c \leq 0$</p>
$c^2 - 4k < 0$	<p>Tidak stabil jika $c < 0$</p> <p>Stabil jika $c \geq 0$</p> <p>(Kadang-kadang disebut 'Neutrally stable' jika $c=0$, karena solusi bergetar murni jika $c=0$).</p>

Informasi ini bisa dikomunikasikan melalui sebuah diagram kestabilan dalam ruang parameter c-k sebagai berikut,

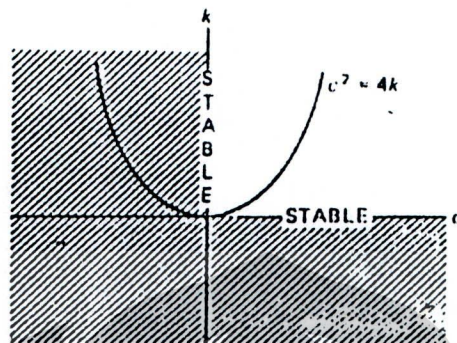


Diagram kestabilan
(Daerah yang diarsir tidak stabil)

Gambar 2.3.2.1

Dengan menggunakan analisa di atas akan dianalisa kestabilan linier dari posisi-posisi setimbang pada ayunan dengan redaman. Tetapi sebelumnya akan ditentukan terlebih dahulu posisi-posisi setimbang tersebut.

Dalam pembahasan II.3 sudah dijelaskan bahwa untuk posisi setimbang $\theta = \theta_E$, maka

$$\frac{d\theta_E}{dt} = \frac{d^2\theta_E}{dt^2} = 0.$$

Persamaan ayunan dengan redaman,

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta - k \frac{d\theta}{dt}.$$

Pada $\theta = \theta_E$, maka persamaan di atas menjadi $\sin \theta = 0$.

Didapat $\theta_E = 0, \pi$ (atau $n\pi$ untuk $n \in \mathbb{Z}$).

Akan dianalisa jenis kestabilan dari ke 2 posisi di atas.

1. Untuk $\theta_E = 0$.

Berdasarkan pembahasan gambar 2.1.5, maka persamaan ayunan dengan redaman menjadi,

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g\theta - k \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta - \frac{k}{L} \frac{d\theta}{dt}$$

Melihat persamaan 2.3.2.ii, maka didapat

$$c = \frac{k}{L} > 0$$

dimana $k > 0$

$$k = \frac{g}{L} > 0.$$

Dengan demikian,

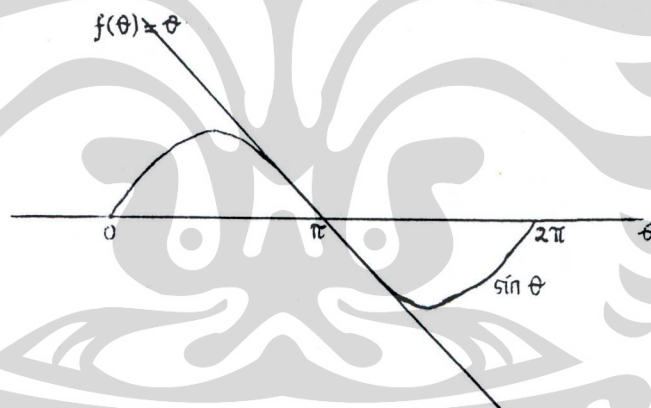
$$c^2 - 4k = \frac{k^2}{L^2} - \frac{4 \cdot g}{L}$$

memiliki 3 kemungkinan:

- Untuk kemungkinan $c^2 - 4k > 0$, dengan $c > 0$ dan $k > 0$, maka menurut tabel kesetimbangan merupakan solusi kesetimbangan stabil.
- Untuk kemungkinan $c^2 - 4k = 0$, dengan $c > 0$ didapat solusi setimbang stabil.
- Untuk kemungkinan $c^2 - 4k < 0$, dengan $c > 0$ didapat solusi setimbang stabil.

Untuk semua kemungkinan yang ada, didapat solusi setimbang stabil, dengan demikian untuk $\theta_E = 0$, ayunan dengan redaman berada dalam kondisi posisi setimbang stabil.

2. Untuk $\theta_E = \pi$.



Gambar pendekatan $\sin \theta$ untuk $\theta \approx \pi$

Similar dengan pendekatan $\sin \theta \approx \theta$ pada daerah sekitar $\theta_E = 0$, maka diperoleh pendekatan untuk daerah sekitar $\theta_E = \pi$ sebagai berikut:

$$\sin \theta \approx \pi - \theta.$$

Persamaan ayunan dengan redaman untuk pendekatan $\sin \theta \approx \pi - \theta$ menjadi,

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g(\pi - \theta) - k \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} (\pi - \theta) - \frac{k}{L} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{g}{L} (\theta - \pi) - \frac{k}{L} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 (\theta - \pi)}{dt^2} = \frac{g}{L} (\theta - \pi) - \frac{k}{L} \frac{d(\theta - \pi)}{dt}$$

Dengan melihat persamaan 2.3.2.ii maka didapat,

$$k = -\frac{g}{L} < 0 \quad \text{dan} \quad c = \frac{k}{L} > 0.$$

$$\text{Dengan demikian } c^2 - 4k = \frac{k^2}{L^2} + 4\frac{g}{L} > 0.$$

Karena $c > 0$ dan $k < 0$, maka ayunan dengan redaman untuk $\theta_E = \pi$ berada dalam posisi setimbang tidak stabil.

BAB III

TINGKAH LAKU AYUNAN TANPA REDAMAN

Bab ini akan membahas tingkah laku dari ayunan tanpa redaman yang ditentukan oleh Kurve Energi yang dilukiskan dalam Bidang Fase. Untuk itu akan dibahas terlebih dahulu mengenai Kurve Energi dan Bidang Fase.

III.1 Kurve Energi dan Bidang Fase

Dasar untuk membuat Kurve energi adalah persamaan Kekekalan energi atau Integral energi yang merupakan solusi dari persamaan $m \frac{d^2x}{dt^2} = -f(x)$, (dimana m adalah massa benda dan x merupakan posisi benda terhadap posisi setimbangnya) sebagai berikut:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -f(x)$$

Ke 2 ruas dikalikan $\frac{dx}{dt}$ sebagai berikut,

$$\frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2x}{dt^2} = -f(x) \right)$$

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = -f(x) \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) = -f(x) \frac{dx}{dt}$$

Ke 2 ruas dikalikan dt , didapat

$$m \, d\left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = -f(x) \, dx$$

$$m \int d\left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = \int -f(x) \, dx$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -F(x) + E$$

Maka didapatlah Integral energi,

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + F(x) = E$$

dimana $F(x) = \int_{x_1}^x f(\tilde{x}) \, d\tilde{x}$

E merupakan konstanta integrasi, dengan harga E adalah,

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \int_{x_1}^{x_0} f(\tilde{x}) \, d\tilde{x}$$

dengan $x_0 = x(t_0)$: posisi mula-mula

$v_0 = \frac{dx}{dt}(t_0)$: kecepatan mula-mula

x_1 = posisi yang ditetapkan

E merupakan energi total dengan bagian - bagiannya $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m v^2$ adalah energi kinetik yang digunakan untuk

menggerakkan massa dan $\int_{x_1}^x f(\tilde{x}) \, d\tilde{x}$ adalah energi potensial

yang merupakan usaha yang diperlukan untuk memindahkan massa dari x_1 ke x .

Definisi:

Kurve energi adalah kurve yang dihasilkan oleh

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \int_{x_1}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \int_{x_1}^{x_0} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \approx E$$

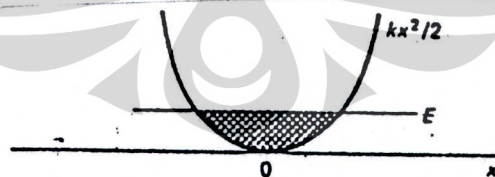
dalam bidang x dan dx/dt dan merupakan kurve dari energi konstan.

Grafik kurve energi konstan bergantung pada fungsi energi potensial.

Contoh:

$$f(x) = kx. \text{ (ambil } x_1 = 0 \text{)}$$

$$\text{Maka } F(x) = \int_0^x k\tilde{x} d\tilde{x} = \frac{kx^2}{2} \text{ merupakan energi potensial.}$$



Lukisan energi potensial dan energi konstan total

Gambar 9.1.1

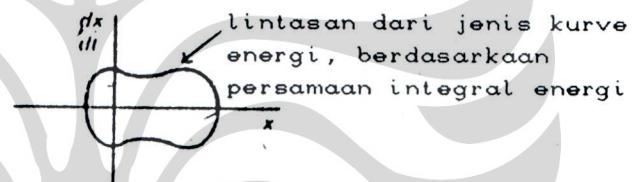
Karena energi kinetik positif $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \geq 0$, maka

$E \geq \frac{kx^2}{2}$ seperti yang dilukiskan pada daerah yang diarsir, dengan harga x tertentu.

Definisi:

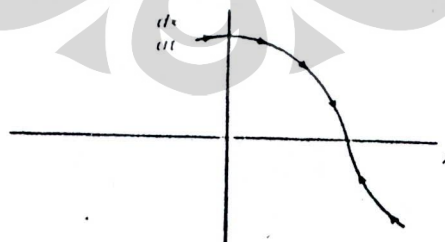
Sistem koordinat yang terdiri dari x dan dx/dt sebagai ke 2 sumbunya, dimana x adalah posisi massa terhadap posisi setimbangnya dan dx/dt kecepatan massa disebut **Bidang Fase.**

Contoh:



Bidang Fase
Gambar 3.1.2

Kurve energi dalam bidang fase akan disertai dengan tanda panah pada kurve. Berikut akan dibahas mengenai fungsi tanda paanah tersebut pada sebuah bidang fase sembarang.



Gambar 3.1.3

Fungsi tanda panah dalam diagraam bidang fase tersebut untuk menunjukkan arah solusi yang berubah dengan waktu.

Dalam kwadran atas $dx/dt > 0$ menunjukkan bahwa x bertambah dengan harga tertentu dalam satu satuan waktu, sedangkan pada kwadran bawah $dx/dt < 0$ menunjukkan bahwa x berkurang dengan harga tertentu dalam satu satuan waktu.

III.2 Bidang Fase Ayunan Tanpa Redaman dan Tingkan laku yang dilukiskannya

Pada pembahasan di atas telah diuraikan mengenai integral energi dan bidang fase secara umum, maka pada bagian ini akan dibahas mengenai integral energi dan bidang fase pada ayunan tanpa redaman.

Pada ayunan tanpa redaman didapat persamaan differensial

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

maka,

$$mL \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Leftrightarrow mL d\left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = -mg \sin \theta d\theta$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \frac{L}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -mg (1 - \cos \theta) + mE$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g (1 - \cos \theta) = E \quad \dots 3.2.1$$

Energi potensial di sini dihitung secara relatif terhadap posisi 'natural' dari ayunan $\theta = 0$, sehingga didapat

$$\int_0^{\theta} g \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} = g (1 - \cos \theta).$$

Pada $\theta = 0$ untuk integral energi yang didapat, energi E hanya terdiri dari energi kinetik.

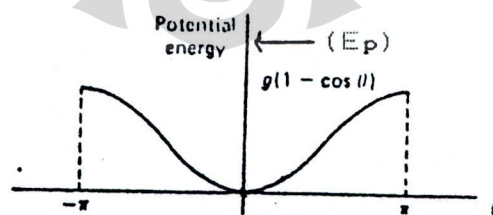
Besar energi E konstan dan ditentukan dari kondisi mula-mula, yaitu:

$$E = \frac{L}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + g (1 - \cos \theta_0).$$

Akan dilukiskan lintasan dalam bidang fase berdasarkan integral energi yang didapat. Persamaan 3.2.1 merupakan dasar untuk melukiskan lintasan tersebut.

Ada 2 tahap yang akan dibahas sebelum masuk dalam melukiskan bidang fase dalam beberapa kasus berdasarkan besar energi.

1. Lukiskan energi potensial sebagai fungsi dari θ

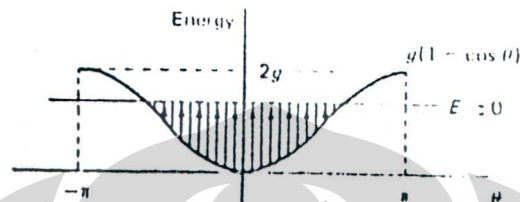


Gambar 3.2.1

2. Lukiskan garis-garis vertikal yang panjangnya merupakan

selisih antara energi total E dengan energi potensial dan menghasilkan energi kinetik $\frac{L}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \geq 0$.

Lukisan di bawah ini menggambarkan $\frac{L}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$ yang bergantung pada θ .



Gambar 3.2.2

Berdasarkan gambar 3.2.2 akan dilukiskan bidang-bidang fase untuk kondisi-kondisi E yang berbeda dan tingkah laku yang dihasilkan.

i. Untuk $E = 0$.

Pada $E = 0$, karena energi kinetik ≥ 0 , maka energi potensialnya sama dengan nol. Maka diperoleh $g(1 - \cos \theta) = 0$. Karena $g \neq 0$, maka didapat $\theta = 0, 2n\pi$ dengan n bilangan bulat.

Dengan demikian θ yang dihasilkan adalah: $-2\pi, 0, 2\pi$ untuk $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.



Gambar 3.2.i

Untuk menentukan tingkah laku ayunan tanpa redaman dalam kondisi $E = 0$, perlu dicari $f'(\theta)$

$$g (1 - \cos \theta) = \int_0^{\theta} g \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} = F(\theta)$$

maka,

$$f(\theta) = g \sin \theta$$

dan,

$$f'(\theta) = g \cos \theta.$$

Dengan demikian,

$$f'(-2\pi) = f'(0) = f'(2\pi) = g > 0.$$

Dari pembahasan analisa kestabilan linier pada bab II, maka dapat ditentukan bahwa tingkah laku ayunan tanpa redaman dalam kasus besar energi nol adalah **Ayunan berada dalam posisi setimbang stabil**. Ayunan tidak akan bergerak dari posisi tersebut.

ii. Untuk $0 < E < 2g$.

Diketahui bahwa energi kinetik ≥ 0 , dengan demikian

$$E - g (1 - \cos \theta) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow E \geq g (1 - \cos \theta).$$

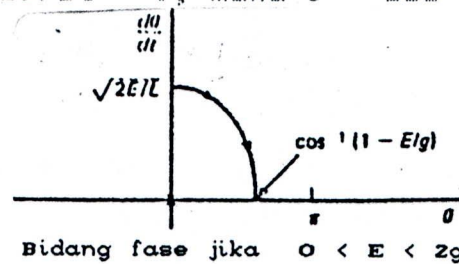
Maka sudut yang berlaku adalah $-\pi < \theta < \pi$.

Untuk melukiskan bidang fase hanya diwakilkan pada kwadran dimana $d\theta/dt > 0$ dan $0 < \theta < \pi$. (karena kurvenya simetris, mengingat $f(d\theta/dt)$ dan $f(\theta)$ dalam persamaan 3.2.1 merupakan fungsi genap)

Berdasarkan persamaan 3.2.1 didapat,

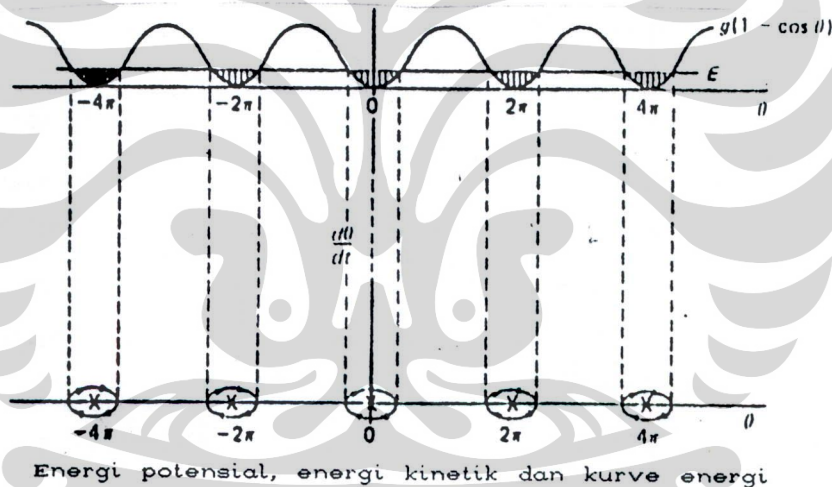
$$\text{untuk } \theta = 0, \text{ maka } d\theta/dt = (2E/L)^{1/2}$$

untuk $d\theta/dt = 0$, maka $\theta = \cos^{-1}(1-E/g)$



Gambar 3.2.ii.1

Tanda panah menunjukkan perubahan dalam solusi sesuai dengan bertambahnya waktu dalam satu satuan. Solusi berperiodik dalam waktu, seperti dilukiskan dalam gambar di bawah ini.



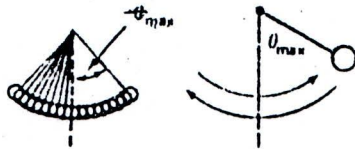
Energi potensial, energi kinetik dan kurve energi

Gambar 3.2.ii.2

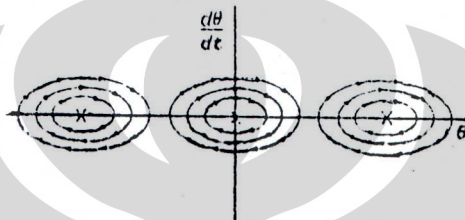
Tingkah laku yang dihasilkan dari ayunan tanpa redaman dengan besar energi $0 < E < 2g$ adalah **ayunan bergerak terus menerus melalui posisi setimbang stabil dengan sudut yang sama** sesuai dengan harga E yang diberi dan harga sudut terbesar $= \theta_{\max}$. sebagai berikut,

$$\theta_{\max} = \cos^{-1}(1-E/g)$$

seperti digambarkan di bawah ini.



Gambar 3.2.ii.3



Gambar 3.2.ii.4

iii. Untuk $E = 2g$.

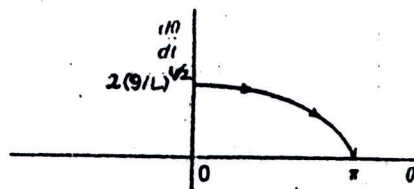
Dengan memasukkan $E = 2g$ ke dalam persamaan 3.2.1, maka didapat

$$\frac{L}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g (\cos \theta - 1) + 2g$$

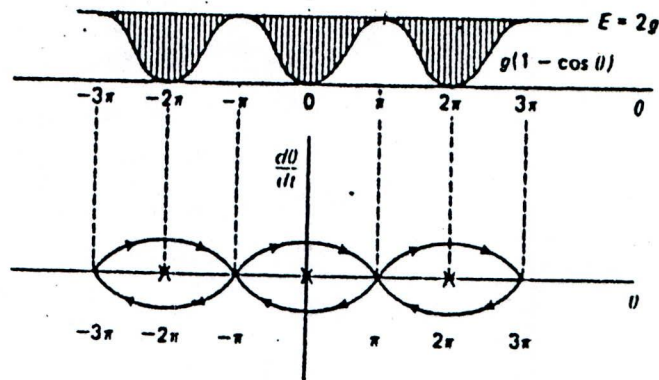
$$\Leftrightarrow \frac{L}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g (\cos \theta + 1) \quad \dots\dots 3.2.2$$

Untuk $\theta = 0$, maka $d\theta/dt = 2(g/L)^{1/2}$.

Untuk $d\theta/dt = 0$, maka $\theta = \pi$.



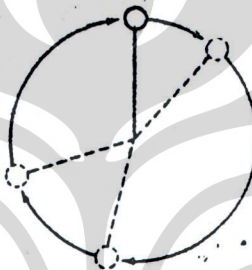
Bidang fase jika $E = 2g$
Gambar 3.2.iii.1



Kurve energi $E = 2g$

Gambar 3.2.iii.2

Sudut yang mungkin dicapai dengan $E = 2g$ digambarkan di bawah ini.

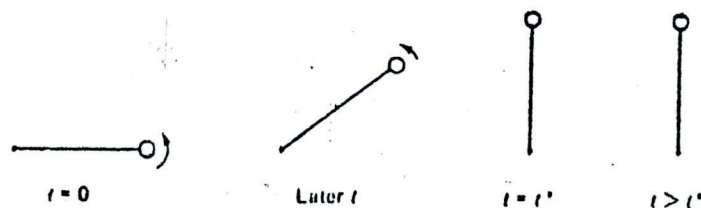


Gambar 3.2.iii.3

Dari bidang fase yang dilukiskan untuk kurve energi $E = 2g$ menunjukkan bahwa tingkah laku ayunan menuju posisi 'inverted'. (Baik untuk $\theta = -\pi$ maupun $\theta = \pi$)

Contoh:

$E = 2g$, dengan kondisi ayunan mula-mula pada $\theta = \pi/2$, maka ayunan akan sampai pada puncak dengan kecepatan nol seperti pada gambar di bawah ini.



Ayunan mandekati kesetimbangan 'inverted' / tidak stabil
Gambar 3.2.iii.4

Ayunan mencapai puncak dengan kecepatan angular nol.
($d\theta/dt = 0$).

Terdapat kesulitan teoritis dengan solusi ini yang berakibat jika ayunan pernah mencapai puncak dengan kecepatan tepat nol, maka ayunan akan tetap diam pada posisi puncak karena posisi tersebut merupakan posisi setimbang.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $E = 2g$ ayunan tidak pernah mencapai puncak melainkan hanya mendekati puncak dan untuk mencapai puncak dibutuhkan waktu yang tak hingga.

Hal tersebut akan dibuktikan dalam 2 cara.

1. Teknik pendekatan.

Persamaan energi ayunan tanpa redaman untuk $E=2g$,

$$L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g (\cos \theta + 1)$$

Perluasan persamaan energi ini dalam deret Taylor di sekitar $\theta=\pi$, menghasilkan

$$L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g \left(1 + \cos \pi - (\theta - \pi) \sin \pi - \frac{(\theta - \pi)^2}{2} \cos \pi + \dots \right)$$

Pendekatan yang diambil yaitu mengambil hanya bagian pertama yang tidak nol, mengingat bagian yang lain mendekati nol sehingga diabaikan,

$$L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g (\theta - \pi)^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mp (\theta - \pi) \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Tanda \mp menunjukkan ayunan yang mengayun searah atau berlawanan arah jarum jam juga menuju atau semakin jauh dari posisi setimbang $\theta = \pi$.

Dalam kasus ini hanya akan diselidiki ayunan yang mengayun menuju posisi setimbang,

$$\frac{d\theta}{dt} = - (\theta - \pi) \sqrt{\frac{g}{L}}$$

(Jika $\theta < \pi$, maka $\frac{d\theta}{dt} > 0$ dan jika $\theta > \pi$, maka $\frac{d\theta}{dt} < 0$).

$$\Leftrightarrow \frac{d(\theta - \pi)}{d(t - t_0)} + \sqrt{\frac{g}{L}} (\theta - \pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(D + \sqrt{\frac{g}{L}} \right) (\theta - \pi) = 0$$

Akar karakteristiknya,

$$r = - \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Dengan demikian,

$$\theta - \pi = A \cdot e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot (t - t_0)}$$

Solusi ini menunjukkan $\theta \rightarrow \pi$ membutuhkan $t \rightarrow \infty$.

2. Berdasarkan persamaan 3.2.2.

Berdasarkan persamaan 3.2.2, maka didapat,

$$\frac{d\theta}{dt} = + \sqrt{\frac{2 \cdot g}{L}} \sqrt{\cos \theta + 1}$$

Tanda + dipilih karena diasumsikan θ mula-mula adalah $\theta < \pi$ dan θ bertambah besar.

$$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2 \cdot g}{L}} \sqrt{\cos \theta + 1}} = dt$$

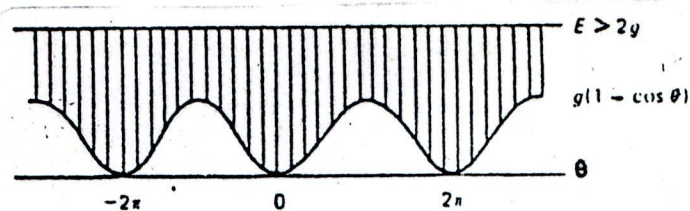
Jika $\theta = \theta_0$ pada $t = 0$, maka untuk $\theta = \pi$, waktu t^* adalah,

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2 \cdot g}{L}}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta + 1}} = t^*$$

Untuk $\theta \rightarrow \pi$, maka integral divergen dan $t^* = \infty$.

Jadi untuk $E = 2g$ tingkah laku yang dihasilkan adalah ayunan mengayun menuju posisi 'inverted' tapi tidak pernah mencapai posisi tersebut, sekalipun melalui bidang fase yang dilukiskan posisi 'inverted' bisa dicapai. Ini merupakan teorema yang unik dari persamaan differensial biasa.

IV. Untuk $E > 2g$.



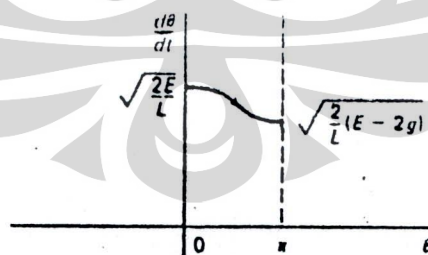
Gambar 3.2.iv.1

$$E = \frac{L}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + g (1 - \cos \theta)$$

Seperti sudah dibahas pada pembahasan 3.2.ii bahwa $f(d\theta/dt)$ dan $f(\theta)$ merupakan fungsi-fungsi genap, maka bidang fase yang akan dilukiskan dalam kasus ini dapat diwakilkan pada daerah $0 \leq \theta \leq \pi$ dan $d\theta/dt \geq 0$.

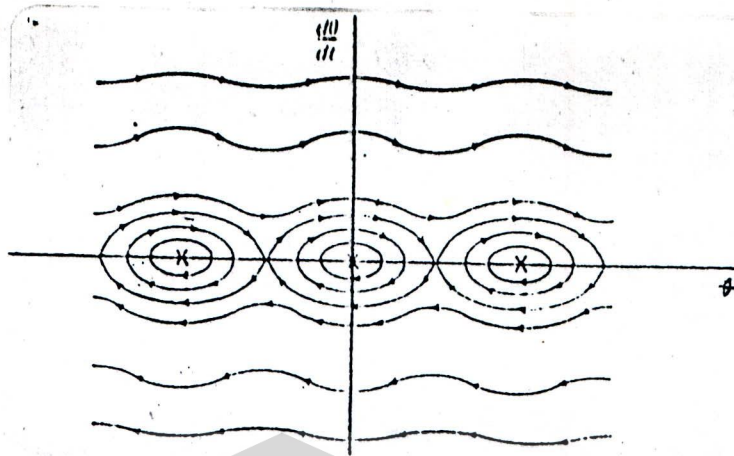
Untuk $\theta=0$, $d\theta/dt = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{L}}$.

Untuk $\theta=\pi$, $d\theta/dt = \sqrt{\frac{2}{L} (E-2g)}$



Gambar 3.2.iv.2

Dengan gambar 3.2.iv.2, maka akan dilukiskan bidang fase dari ayunan secara lengkap dalam gambar di bawah ini.



Gambar 3.2.iv.3

Jadi untuk $E > 2g$, $|\theta|$ terus bertambah (dan $\Rightarrow \infty$).

Tingkah laku yang dihasilkan adalah ayunan akan berputar terus (searah atau berlawanan arah jarum jam dalam ruang real bergantung pada θ tambah naik atau tambah turun), antara lain seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.2.iv.4

BAB IV

TINGKAH LAKU AYUNAN DENGAN REDAMAN

Pada ayunan tanpa redaman tingkah laku ayunan ditentukan oleh gambar kurve energi pada bidang fase yang dihasilkan dari integral energi. Tapi untuk ayunan dengan redaman tidak ada integral dari persamaannya, sedemikian sehingga dapat dihasilkan integral energi dalam bidang fase. Dalam hal ini tingkah laku ayunan dengan redaman akan ditentukan berdasarkan **isoklin** yang dihasilkannya.

Apa yang dimaksud dengan **isoklin**?

Hal ini akan dijelaskan pada pembahasan pertama bab ini.

IV.1 ISOKLIN

Persamaan otonom yang disinggung pada bagian II.3.2 dapat dinyatakan sebagai hubungan dx/dt dan x , dimana dx/dt merupakan kecepatan dari massa benda dan x merupakan posisi massa benda terhadap posisi setimbangnya.

Ambil $v = dx/dt$, maka

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Dengan demikian persamaan otonom umumnya $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt})$ menjadi,

$$v \frac{dv}{dx} = f(x, v)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{f(x, v)}{v}$$

Persamaan differensial order I ini tidak selalu dapat diselesaikan secara eksplisit, tapi dapat digambarkan sebagai berikut.

Pandang bahwa $dv/dx = g(x, v)$. Pada masing-masing harga x , persamaan differensial tersebut menyatakan gradien (kemiringan) dari solusi dv/dx untuk v yang diketahui. Gambar dibawah ini yang disebut 'Field Berarah' dari persamaan differensial di atas melukiskan garis lurus pendek (dashes) sebagai kemiringan $g(x, v)$.



'Field Berarah'

Gambar 4.1.1

Masing-masing titik solusi tersebut **harus paralel** dengan 'dashes' ini. Dengan hubungan kasar dari segmen-segmen garis paralel dari titik solusi, solusi dalam bidang fase (v sebagai fungsi x) dapat dilukiskan.

Untuk memudahkan melukis 'field berarah', maka kemiringan atau dv/dx tersebut berupa sebuah konstanta yang

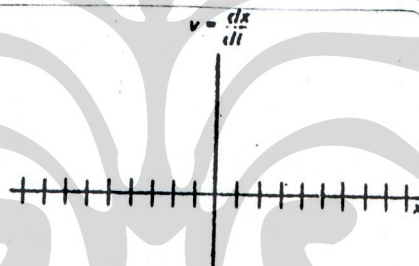
kadang dapat dihitung. Kurve - kurve sepanjang kemiringan (dv/dx) yang konstan berada inilah yang disebut ISOKLIN

Contoh:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(x,v)}{v}$$

Untuk $v = 0$, maka $dv/dx = \infty$. Berarti sepanjang sumbu x dimana $v = 0$, solusi mempunyai gradien tak hingga.

$v = 0$ merupakan sebuah Isoklin. Kurve solusi yang melalui sumbu x harus paralel dengan 'dashes' ini.



Gambar 4.1.2

Pembahasan berikut akan menguraikan secara umum Isoklin pada ayunan.

IV.2 Isoklin pada Ayunan Dengan Redaman

Persamaan umum untuk ayunan dengan redaman adalah,

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta - k \frac{d\theta}{dt} \dots\dots(4.2.1)$$

$$\text{dengan } k = \frac{c \cdot L}{m} \geq 0.$$

Untuk $k > 0$, penyelesaian akan dicari berdasarkan isoklin-isoklin yang diperoleh.

Akan ditunjukkan variabel bidang fase sebagai berikut:

kecepatan angular $v = \frac{d\theta}{dt}$ dan sudut polar θ .

Maka,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dv}{d\theta} = v \frac{dv}{d\theta}.$$

Persamaan differensial 4.2.1 menjadi persamaan differensial order I,

$$\begin{aligned} L v \frac{dv}{d\theta} &= -g \sin \theta - kv \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{d\theta} &= \frac{-g \sin \theta - kv}{Lv} \dots\dots(4.2.2) \end{aligned}$$

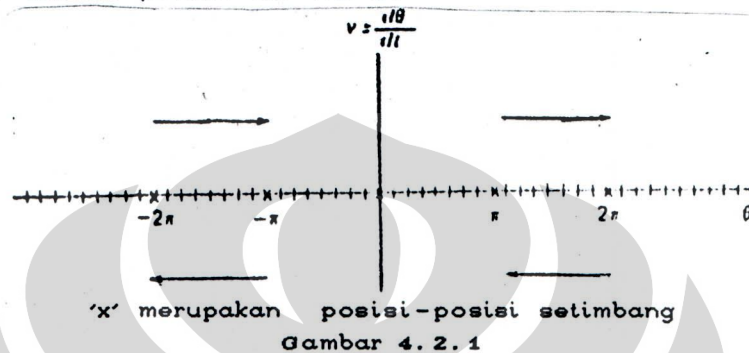
Akan diuraikan langkah demi langkah untuk melukiskan beberapa isoklin pada bidang fase untuk ayunan dengan redaman.

i. Lihat persamaan 4.2.2.

Ambil $v = 0$, maka $dv/d\theta = \infty$. Field berarahnya vertikal. Didapat isoklin $v = 0$ dan kurve solusi berupa potongan garis lurus pada $v = 0$ yang tegak lurus pada $v=0$.

Untuk $v = d\theta/dt > 0$, maka θ semakin besar ditandai dengan tanda panah ke kanan.

Untuk $v = d\theta/dt < 0$, maka θ semakin kecil ditandai dengan tanda panah ke kiri.



- ii. Akan ditentukan arah dari bagian-bagian isoklin $v = 0$.
Lihat persamaan 4.2.1.

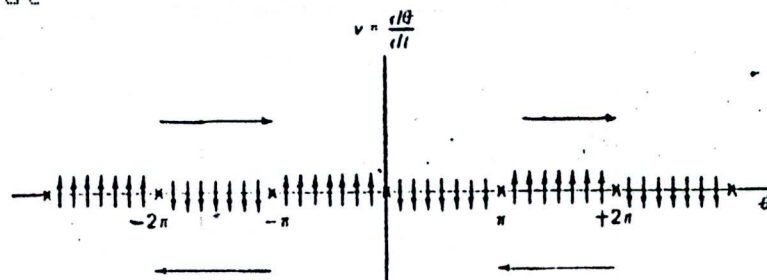
Pada $d\theta/dt = v = 0$, maka

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{L} \sin \theta.$$

Dengan demikian pada isoklin $v = 0$,

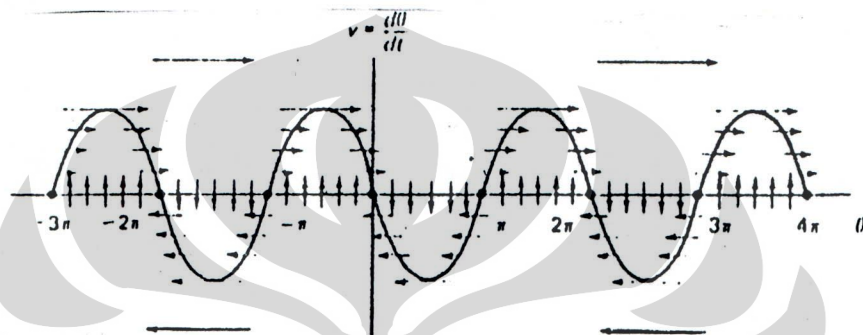
$$\frac{dv}{dt} > 0 \text{ untuk } \sin \theta < 0 \text{ (antara lain } -\pi < \theta < 0)$$

$$\frac{dv}{dt} < 0 \text{ untuk } \sin \theta > 0 \text{ (antara lain } 0 < \theta < \pi)$$



iii. Akan ditentukan lagi sebuah isoklin melalui persamaan umum 4.2.2.

Ambil $dv/d\theta = 0$, maka didapat isoklin $v = -(g/k) \sin \theta$ yang merupakan kurve sinusoidal. Dengan demikian kurve solusi merupakan potongan garis sejajar sumbu θ pada kurve sinusoidal dengan $dv/d\theta = 0$.



'Field berarah' pada ayunan dengan redaman untuk $dv/d\theta = 0$ dan ∞

Gambar 4.2.3

iv. Setiap daerah pada bidang fase tersebut ditentukan dengan v dan θ yang bertambah atau berkurang dalam waktu.

Akan dilukiskan petunjuk untuk hal di atas.

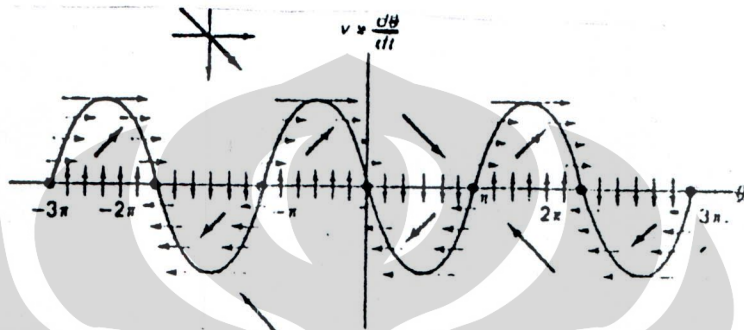
Untuk θ berkurang dalam waktu (\leftarrow) dan v bertambah dalam waktu (), maka simbol untuk daerahnya adalah ().

Untuk θ berkurang dalam waktu (\leftarrow) dan v berkurang dalam waktu (), maka simbol untuk daerahnya adalah ().

Untuk θ bertambah dalam waktu (\rightarrow) dan v bertambah

dalam waktu (\uparrow), maka simbol untuk daerahnya adalah (\nearrow).

Untuk θ bertambah dalam waktu (\longrightarrow) dan v berkurang dalam waktu (\downarrow), maka simbol untuk daerahnya adalah (\searrow).



Petunjuk umum dari lintasan-lintasan
Gambar 4.2.4

IV.3 Tingkah laku yang dihasilkan Kurve solusi berdasarkan Isoklin pada Ayunan dengan redaman

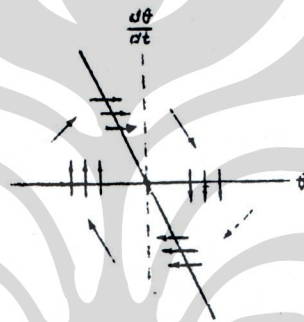
Akan dianalisa 3 lingkungan dari posisi ayunan untuk menggambarkan tingkah laku ayunan dengan redaman, yaitu:

1. Analisa bidang fase dalam lingkungan posisi setimbang stabil.
2. Analisa bidang fase dalam lingkungan posisi setimbang tidak stabil.
3. Analisa bidang fase dalam lingkungan antara posisi setimbang stabil dan tidak stabil.

IV.3.1 Analisa Bidang Fase dalam lingkungan posisi setimbang stabil

Posisi yang akan dianalisa adalah posisi ayunan sekitar $\theta = 0$, dengan demikian untuk $dv/d\theta = 0$ yang berarti $v = - (g/k) \sin \theta$ dapat didekati dengan kurve berupa garis lurus $v = - (g/k) \theta$.

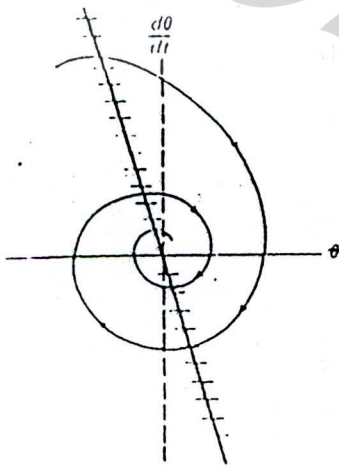
Berdasarkan penguraian di atas dan gambar 4.2.4, maka didapat gambar di bawah ini.



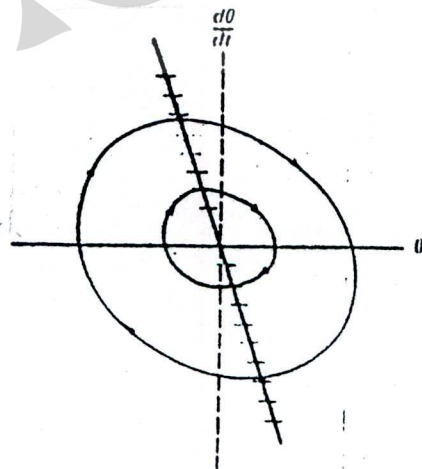
Tingkah laku lintasan-lintasan dalam lingkungan posisi setimbang 'natural' dari ayunan teredam

Gambar 4.3.1.1

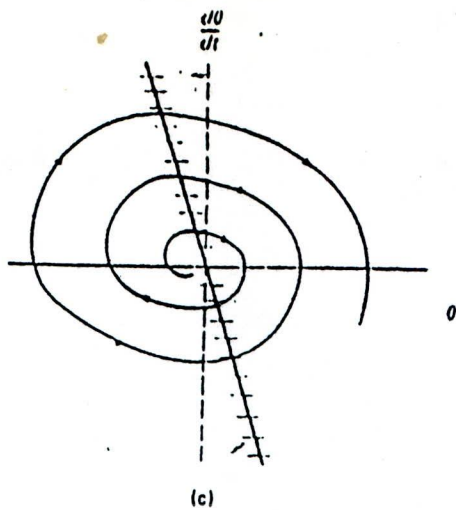
Terdapat 4 kemungkinan tingkah laku yang dihasilkan dari gambar di atas, yang dilukiskan dalam gambar di bawah ini.



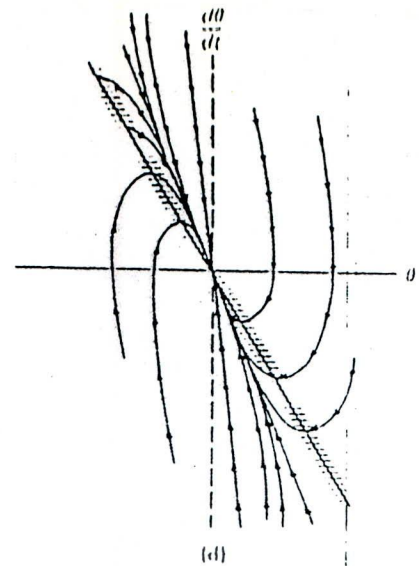
(a)



(b)



Gambar 4.3.1.2



Kemungkinan yang terjadi apabila energi berkurang adalah gambar (a) dan (d), dan jika energi tidak berkurang adalah gambar (b) dan (c).

Di bawah ini akan dibahas untuk 2 kondisi ayunan, yaitu:

- i. Untuk ayunan kurang redam.
- ii. Untuk ayunan terlampau redam.

i. *Ayunan kurang redam.*

Hal ini berlaku untuk kondisi $k^2 < 4Lg$.

Karena $\sin \theta$ mendekati θ , maka persamaan 4.2.2 menjadi

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{-g\theta - kv}{Lv}$$

Akan diberikan isoklin-isoklin umum yang berlaku dalam lingkungan setimbang stabil.

Ambil $v = \frac{\lambda g \theta}{k}$, masukkan ke dalam $\frac{dv}{d\theta} = \frac{-g\theta - kv}{Lv}$, maka

akan dihasilkan $\frac{dv}{d\theta} = \frac{-(1+\lambda)k}{\lambda L}$, dengan λ sembarang.

Secara umum lintasan yang diperoleh adalah lintasan yang digambarkan pada gambar 4.3.1.2.(a), yaitu berupa spiral ke dalam.

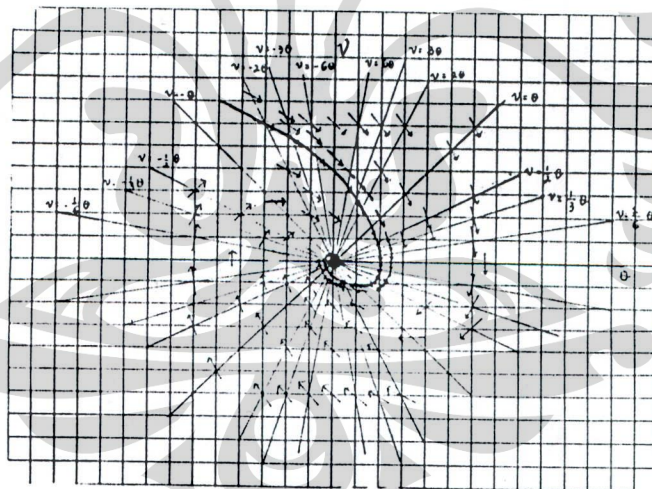
Contoh:

Ambil $k = 1$, $L = 1$, dan $g = 1$.

Isoklin-isoklin yang diperoleh adalah:

$$v = \lambda\theta \text{ dengan } \frac{dv}{d\theta} = -\frac{1+\lambda}{\lambda},$$

dengan $\lambda \in \mathbb{R}$.



Gambar 4.3.1.3

Gambar di atas berdasarkan data-data di bawah ini.

λ	θ	v	$dv/d\theta$
0	0	0	$-\frac{1}{\infty}$
-1	θ	$-\theta$	0
1	θ	θ	-2
$-\frac{1}{2}$	θ	$-\frac{1}{2}\theta$	1
$\frac{1}{2}$	θ	$\frac{1}{2}\theta$	-3
2	θ	2θ	$-\frac{3}{2}$
-2	θ	-2θ	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	θ	$\frac{1}{3}\theta$	-4
$-\frac{1}{3}$	θ	$-\frac{1}{3}\theta$	2
3	θ	3θ	$-\frac{4}{3}$
-3	θ	-3θ	$-\frac{2}{3}$
$\frac{1}{6}$	θ	$\frac{1}{6}\theta$	-7
$-\frac{1}{6}$	θ	$-\frac{1}{6}\theta$	5
6	θ	6θ	$-\frac{7}{6}$
-6	θ	-6θ	$-\frac{5}{6}$

Dari gambar 4.3.1.2.(a) dan gambar 4.3.1.3, maka dapat ditentukan tingkah laku dari ayunan kurang redam yaitu:
ayunan perlahan-lahan akan menuju posisi setimbang stabil $\theta=0$ dan diam pada posisi tersebut.

ii. *Ayunan terlampau redam.*

Hal ini berlaku pada kondisi $k^2 > 4Lg$.

Persamaan 4.2.2. menjadi,

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{-g\theta - kv}{Lv}$$

Isoklin-isoklin umum:

Ambil $v = \frac{\lambda g \theta}{k}$, masukkan ke dalam $\frac{dv}{d\theta} = \frac{-g\theta - kv}{Lv}$, maka

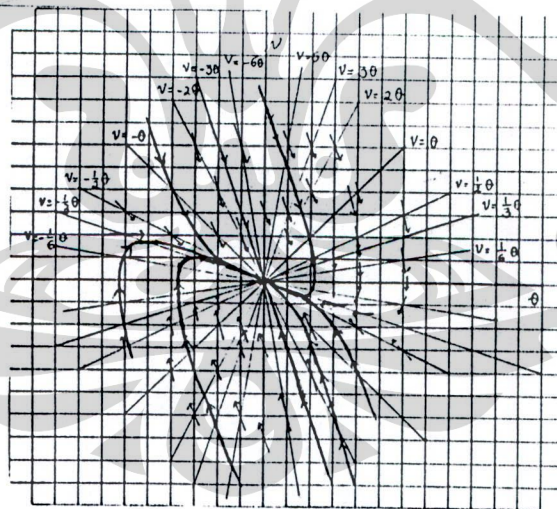
akan dihasilkan $\frac{dv}{d\theta} = -\frac{(1+\lambda)k}{\lambda L}$ dengan λ sembarang.

Contoh:

Ambil $k = 3$, $L = 1$, $g = 1$.

Isoklin-isoklin yang diperoleh adalah:

$$v = \frac{\lambda \cdot \theta}{3}, \text{ dengan } \frac{dv}{d\theta} = -\frac{3 \cdot (1+\lambda)}{\lambda}$$



Gambar 4.3.1.4

λ	θ	v	$dv/d\theta$
	0		-9
-1	θ	$-\frac{\theta}{3}$	0
1	θ	$\frac{\theta}{3}$	-6
3	θ	θ	-4
-3	θ	$-\theta$	-2
6	θ	2θ	$-7/2$
-6	θ	-2θ	$-5/2$
$3/2$	θ	$\frac{\theta}{2}$	-5
$-3/2$	θ	$-\frac{\theta}{2}$	-1
-9	θ	-3θ	$-8/3$
9	θ	3θ	3
18	θ	6θ	$-19/6$
-18	θ	-6θ	$-17/6$
$1/2$	θ	$\frac{\theta}{6}$	-6
$-1/2$	θ	$-\frac{\theta}{6}$	3

Dari gambar 4.3.1.2.(d) dan gambar 4.3.1.4, maka dapat ditentukan tingkah laku dari ayunan terlampau redam yaitu: **Ayunan secara cepat akan menuju posisi setimbang stabil $\theta=0$** , ayunan mengayun melalui posisi setimbang stabil tidak lebih dari satu kali, hal ini disebabkan oleh gesekan yang cukup besar.

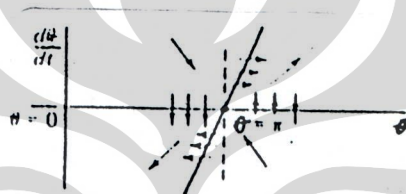
IV.3.2 Analisa Bidang Fase dalam lingkungan posisi setimbang tidak stabil

Posisi yang akan dianalisa adalah posisi ayunan sekitar

$\theta = \pi$, dengan demikian untuk $dv/d\theta = 0$ yang berarti $v = - (g/k) \sin \theta$ dapat didekati menjadi,

$$v = - \frac{g}{k} (\pi - \theta) = \frac{g}{k} (\theta - \pi)$$

Berdasarkan gambar 4.2.4 dan penguraian di atas, maka didapat gambar di bawah ini.

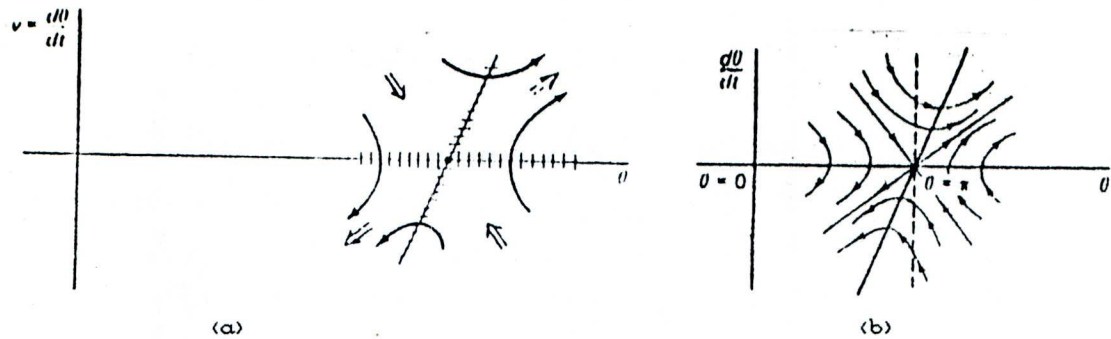


Tingkah laku ayunan teredam
dekat posisi setimbang 'inverted'

Gambar 4 3 2 1

Gambar di atas secara umum menunjukkan bahwa lintasan-lintasan cenderung menuju posisi setimbang 'inverted' pada daerah-daerah tertentu dalam bidang fase, sementara pada daerah-daerah lain lintasan-lintasan bergerak meninggalkan posisi tersebut. Jelaslah ini menunjukkan bahwa $\theta = \pi$ adalah posisi setimbang tidak stabil dan berlaku untuk semua jenis redaman.

Di bawah ini akan dilukiskan secara khusus beberapa lintasan dalam lingkungan $\theta = \pi$.



Lintasan-lintasan ayunan teredam
di sekitar posisi setimbang tidak stabil

Gambar 4.9.2.2

Gambar di atas memperlihatkan lintasan-lintasan yang terjadi adalah lintasan yang menuju $\theta = \pi$ meninggalkan posisi 'inverted' $\theta = \pi$ dengan kondisi ayunan mengayun turun atau melalui $\theta = \pi$ tapi tidak menetap pada posisi setimbang tersebut.

IV.3.3 Analisa Bidang Fase dalam lingkungan antara posisi setimbang stabil dan tidak stabil

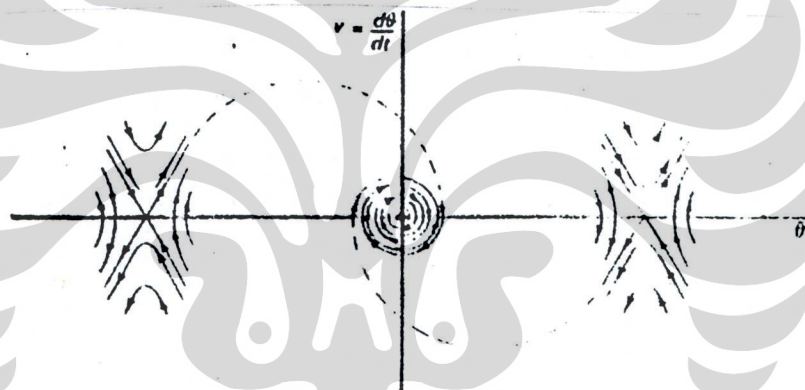
Dalam 2 pembahasan di atas sudah dipaparkan bagaimana tingkah laku ayunan yang mengayun di sekitar posisi setimbang stabil ($\theta=0$) dan di sekitar posisi setimbang tidak stabil ($\theta=\pi$). Untuk melengkapi pembahasan mengenai tingkah laku ayunan nonlinier dengan redaman, di bawah ini akan dibahas tingkah laku dari ayunan yang memiliki posisi diantara ke 2 posisi setimbang stabil tersebut.

Pembahasan akan diberikan dalam 2 kondisi, yaitu:

- i. Kondisi ayunan kurang redam ($k^2 < 4Lg$).
- ii. Kondisi ayunan terlampau redam ($k^2 > 4Lg$).

i. *Ayunan kurang redam.*

Untuk menyelidiki tingkah laku dari ayunan kurang redam yang memiliki sudut ayun jauh dari ke 2 posisi setimbang atau berada di antara ke 2 posisi setimbang, maka dalam bidang fase dihubungkan kurve-kurve solusi yang berlaku dalam lingkungan $\theta = 0$ dengan $k^2 < 4Lg$ dan $\theta = \pi$, seperti yang digambarkan di bawah ini.



Bidang fase ayunan kurang redam
untuk lintasan dalam lingkungan ke 2 posisi setimbang

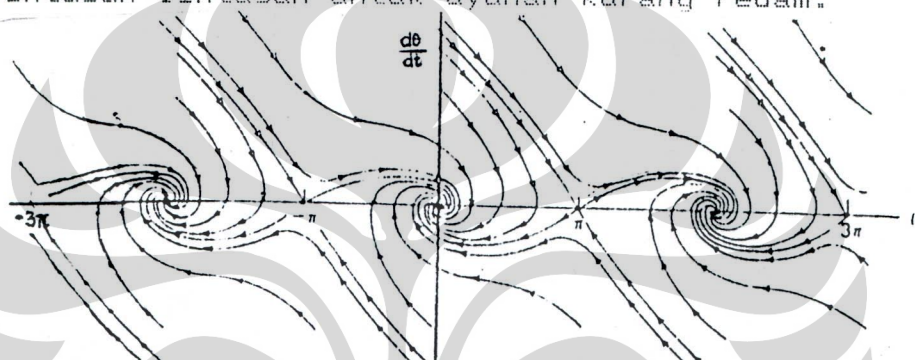
Gambar 4.9.3.i.1

Dari gambar di atas terlihat lintasan yang keluar dari $\theta = -\theta_0$ dengan $0 < \theta_0 < \pi$ dan kecepatan $v = d\theta/dt = 0$ harus tiba pada posisi kurang dari $\theta = \theta_0$ dengan kecepatan pada posisi tersebut kembali nol ($v=0$). Posisi maksimum ayunan akan berkurang setelah setelah tiap-tiap oskilasi karena gesekan yang kecil.

Berdasarkan persamaan 4.2.2 didapat isoklin-isoklin secara umum sebagai berikut,

dengan mengambil $v = \frac{\lambda \cdot g \sin \theta}{k}$, didapat $\frac{dv}{d\theta} = - \frac{(1+\lambda)k}{\lambda L}$.

Dengan menggunakan isoklin-isoklin di atas didapat gambar lintasan-lintasan untuk ayunan kurang redam.



Lintasan-lintasan untuk ayunan kurang redam
Gambar 4.3.3.i.2

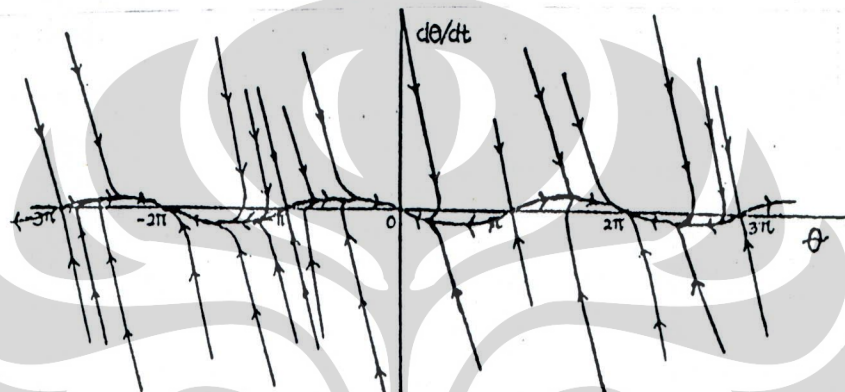
Melalui gambar di atas dapat ditentukan solusi dari ayunan nonlinier kurang redam yaitu: **Ayunan akan berayun dengan sudut yang bertambah kecil.** Jika kecepatan awal cukup besar diberikan, maka ayunan akan mengayun dalam jumlah hingga kali dan secara kontinu menjadi lambat ayunannya, ayunan akan mengayun di sekitar posisi 'natural' dan mencapai posisi setimbang stabil atau ayunan akan diam menetap pada posisi 'natural' tersebut.

ii. Ayunan terlampau redam.

Berdasarkan persamaan 4.2.2 didapat isoklin-isoklin umum,

Dengan mengambil $v = \frac{\lambda \cdot g}{k} \sin \theta$, didapat $\frac{dv}{d\theta} = - \frac{(1+\lambda)k}{\lambda L}$.

Dengan menggunakan isoklin-isoklin di atas, maka didapat kurve solusi seperti pada gambar di bawah ini.



Lintasan-lintasan pada Ayunan terlampau redam
Gambar 4.3.3.ii.1

Melalui gambar di atas dapat ditentukan solusi dari ayunan nonlinier terlampau redam yaitu: **Ayunan langsung berayun menuju posisi setimbang stabil dan diam menetap di sana.**

Dengan melihat gambar 4.3.3.i.2, maka terlihat pada gambar 4.3.3.ii.1 jarak sudut yang dihasilkan lebih kecil apabila diberi kecepatan awal yang sama. Hal tersebut terlihat dari lebih curamnya kurve yang dihasilkan. Dengan perkataan lain, jarak yang ditempuh pada waktu ayunan digerakkan, lebih kecil karena terlampau besarnya redaman yang terjadi.

BAB V

PENUTUP

Bab ini berisi rangkuman dari isi skripsi yang sudah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

1. Persamaan ayunan yang dibahas terbagi menjadi 2 persamaan differensial nonlinier yaitu:

- A. Persamaan differensial nonlinier untuk ayunan tanpa redaman,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta .$$

- B. Persamaan differensial nonlinier untuk ayunan dengan redaman,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{k}{L} \frac{d\theta}{dt} .$$

2. Tingkah laku yang terjadi pada ayunan tanpa redaman dibahas dalam 2 bagian,

- A. Berdasarkan analisa kestabilan linier dari solusi kesetimbangan.

- i. Pada $\theta = 0$ (atau $\theta = n\pi$, dengan n genap), maka

ayunan berada pada posisi kesetimbangan stabil.

- ii. Pada $\theta = \pi$ (atau $\theta = n\pi$, dengan n ganjil), maka ayunan berada pada posisi kesetimbangan tidak stabil.

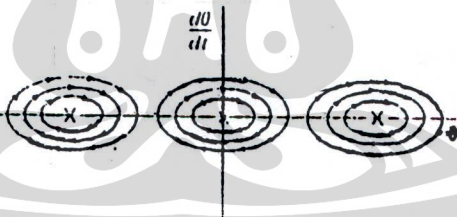
B. Berdasarkan kurve energi atau integral energi dalam bidang fase .

- i. Untuk besar energi nol ($E=0$).



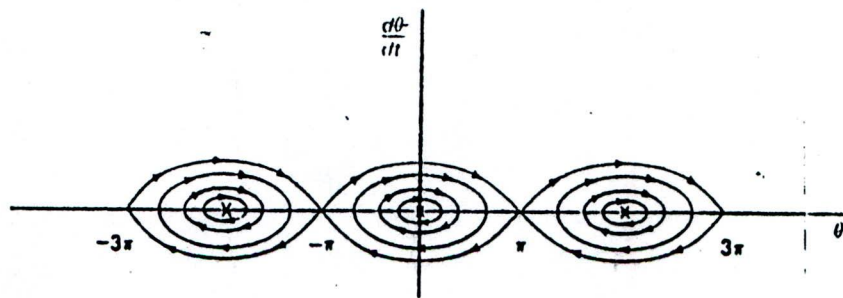
Ayunan berada dalam kondisi diam atau pada posisi kesetimbangan stabil.

- ii. Untuk besar energi $0 < E < 2g$.



Ayunan bergerak mengayun terus menerus melalui posisi setimbang stabil dengan sudut maximal yang sama, yaitu $\theta_{\max.} = \cos^{-1}(1-E/g)$.

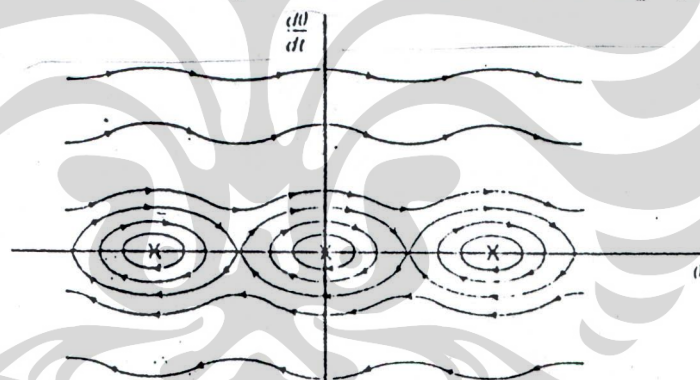
iii. Untuk besar energi sebesar $2g$ ($E=2g$).



Bagian ini merupakan kasus yang unik.

Ayunan mengayun menuju posisi 'inverted' tapi tidak pernah mencapai posisi tersebut, sekalipun pada bidang fase terlihat bahwa ayunan mencapai posisi 'inverted'.

iv. Untuk besar energi lebih besar dari $2g$ ($E>2g$).



Ayunan akan berputar terus menerus searah atau berlawanan arah jarum jam dalam ruang real, bergantung pada θ bertambah naik atau bertambah turun.

3. Tingkah laku yang terjadi pada ayunan dengan redaman dibahas dalam 2 bagian,

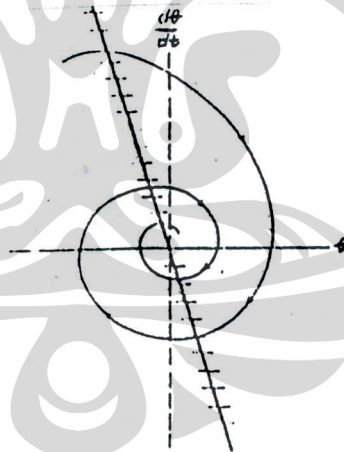
A. Berdasarkan analisa kestabilan linier dari solusi kesetimbangan.

- i. Pada $\theta = 0$ (atau $\theta = n\pi$, dengan n genap), maka ayunan berada dalam posisi kesetimbangan stabil.
- ii. Pada $\theta = \pi$ (atau $\theta = n\pi$, dengan n ganjil), maka ayunan berada dalam posisi kesetimbangan tidak stabil.

B. Berdasarkan isoklin-isoklin yang diperoleh.

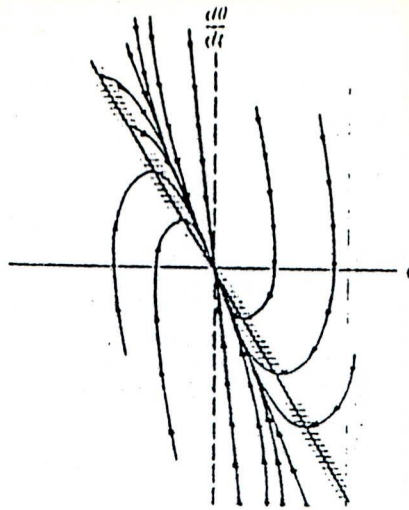
i. Posisi ayunan sekitar $\theta = 0$.

a. Kondisi kurang redam ($k^2 < 4Lg$).



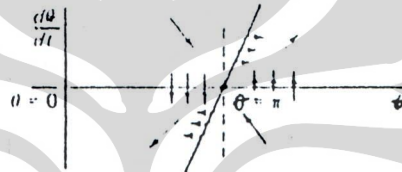
Ayunan mengayun perlahan-lahan menuju posisi setimbang stabil $\theta = 0$ dan diam pada posisi tersebut.

b. Kondisi terlampau redam ($k^2 > 4Lg$).



Ayunan secara cepat menuju posisi setimbang stabil $\theta=0$ dan mengayun melalui posisi setimbang stabil tidak lebih dari satu kali.

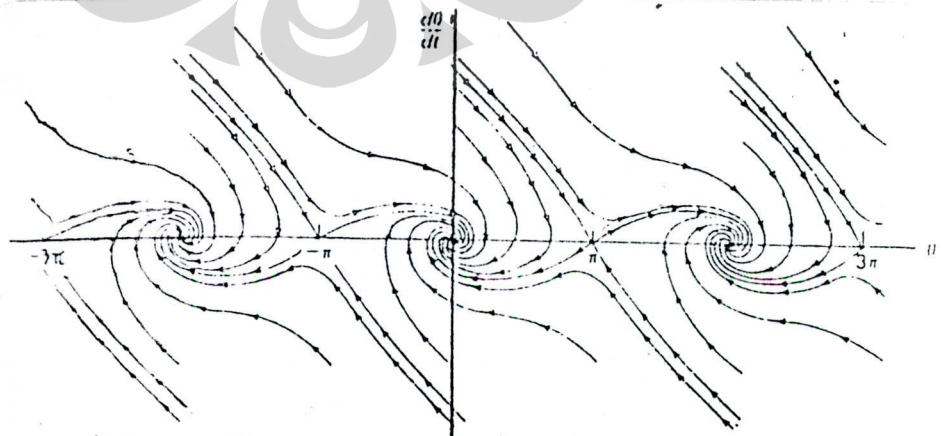
ii. Posisi ayunan sekitar $\theta = \pi$



Untuk kondisi ayunan kurang redam maupun terlampau redam ayunan tidak akan diam pada posisi $\theta=\pi$ melainkan menuju $\theta=\pi$ kemudian kembali atau melewati $\theta=\pi$.

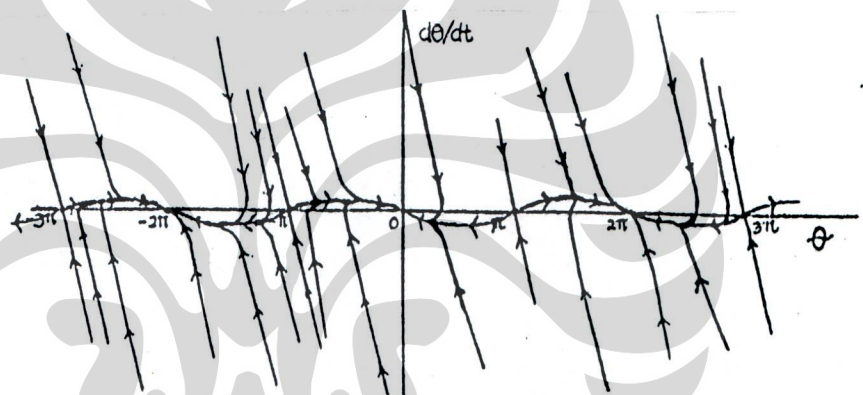
iii. Posisi ayunan dalam lingkungan antara lingkungan setimbang stabil dan tidak stabil.

a. Kondisi kurang redam.



Ayunan akan berayun dengan sudut yang bertambah kecil. Dengan kecepatan awal yang cukup besar, ayunan akan mengayun dalam jumlah hingga kali dan secara kontinu menjadi lambat dan masuk dalam lingkungan sekitar posisi 'natural' sampai pada akhirnya diam menetap pada posisi tersebut.

b. Kondisi terlampau redam.



Ayunan langsung berayun menuju posisi setimbang stabil dan menetap di sana.

Lampiran 1

Akan dibuktikan bahwa untuk $k^2 < 4Lg$, maka ayunan teredam berada dalam kondisi kurang redam, sedangkan untuk $k^2 > 4Lg$ dalam kondisi terlampau redam.

Pandang persamaan $L \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0$. (Sekitar $\theta=0$).

i. Untuk $k^2 < 4Lg$.

Akar karakteristik yang didapat dalam kondisi ini adalah,

$$r = -\frac{k}{2L} \mp i\omega$$

$$\text{dengan } \omega = \frac{\sqrt{4Lg - k^2}}{2L}.$$

Dengan demikian,

$$\theta = a.e^{(-k/2L + i\omega)t} + b.e^{(-k/2L - i\omega)t}$$

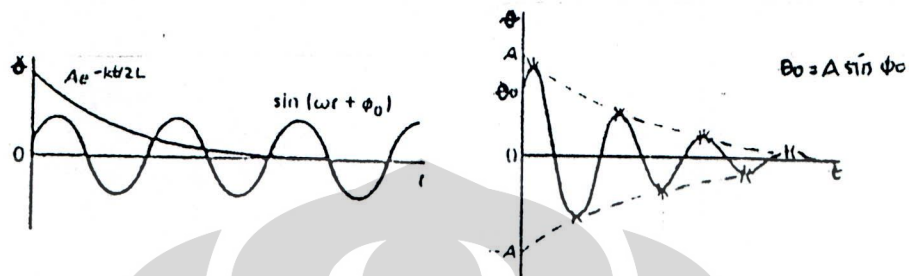
$$= e^{-(kt/2L)t} (a.e^{i\omega t} + b.e^{-i\omega t})$$

$$= e^{-(kt/2L)t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

$$= A.e^{-(kt/2L)t} \sin(\omega t + \phi_0)$$

dimana $C_1 = A \sin \phi_0$ dan $C_2 = A \cos \phi_0$.

Dari persamaan $\theta = A.e^{-(kt/2L)t} \sin(\omega t + \phi_0)$ didapat gambar-gambar di bawah ini.



ii. Untuk $k^2 > 4Lg$.

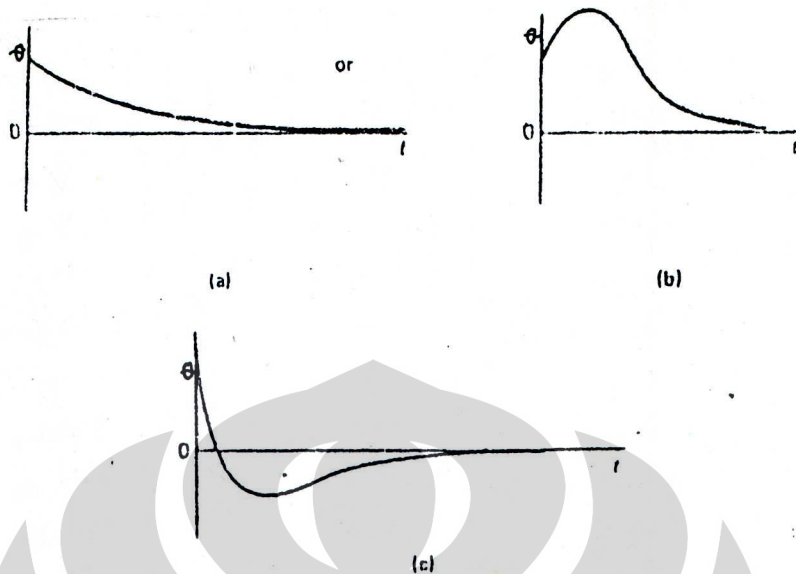
Akar karakteristiknya real dan negatif ke dua-duanya, yaitu:

$$r_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4Lg}}{2L} \quad \text{dan} \quad r_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4Lg}}{2L}.$$

Dengan demikian,

$$\theta = C_1.e^{r_1.t} + C_2.e^{r_2.t}.$$

Jadi jika gesekan cukup besar, maka ayunan akan kembali kembali ke posisi setimbang stabil dengan cepat. Hal ini dapat terlihat pada gambar di bawah $A_3(a)$ atau $A_3(b)$ atau ayunan menuju posisi setimbang stabil dalam waktu yang cepat tapi tidak diam melainkan melewatinya, baru menuju ke posisi setimbang stabil seperti terlihat pada gambar $A_3(c)$.



Gambar A

Dari gambar di atas terlihat bahwa pada kondisi terlampau redam, ayunan tidak dapat melewati posisi setimbang stabil lebih dari satu kali. Ayunan melewati posisi setimbang stabilnya hanya jika kecepatan mula-mula negatif (Diasumsikan bahwa posisi mula-mula positif).

Lampiran 2

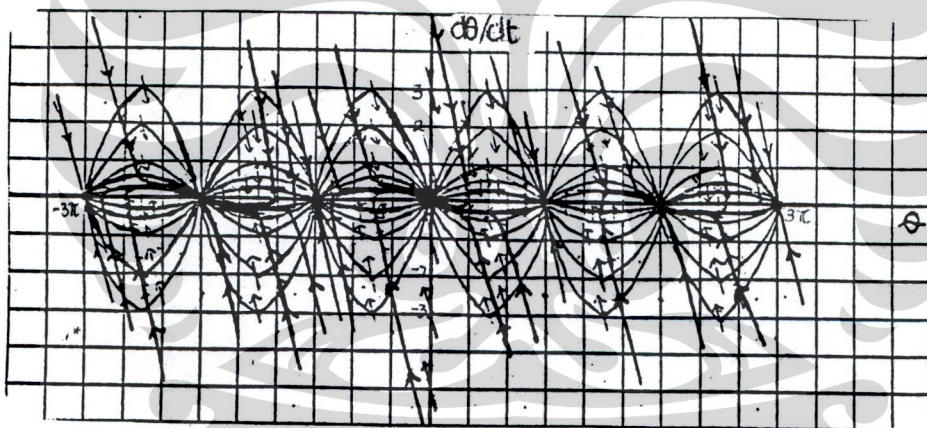
Akan dibuat dasar pembuatan kurve solusi dari ayunan terlampau redam pada lingkungan antara lingkungan posisi setimbang stabil dan lingkungan posisi setimbang tidak stabil.

Ambil $k = 4$, $L = 1$ dan $g = 1$.

Maka isoklin-isoklin yang didapat,

$$v = \frac{\lambda \sin \theta}{4}, \text{ dengan } \frac{dv}{d\theta} = - \frac{4(1+\lambda)}{\lambda}$$

Gambar yang dihasilkan adalah sebagai berikut,



Gambar di atas berdasarkan data-data di bawah ini.

λ	v	θ	$dv/d\theta$
-1	$-\frac{\sin \theta}{4}$		0
1	$\frac{\sin \theta}{4}$		-8
2	$\frac{\sin \theta}{2}$		-6
-2	$-\frac{\sin \theta}{2}$		-2
4	$\sin \theta$		-5
-4	$-\sin \theta$		-3
8	$2 \sin \theta$		$-9/2$
-8	$-2 \sin \theta$		$-7/2$
12	$3 \sin \theta$		$-13/3$
-12	$-3 \sin \theta$		$-11/3$
		0	-4

DAFTAR PUSTAKA

1. Achmad, Amir, Prof., Drs. : Mekanika Klasik I, FMIPA-UNPAD, Bandung, 1986.
2. Andronow, A.A., dan C.E. Chaikin : Theory of Oscillations, English Language edition, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1949.
3. Haberman, Richard : Mathematical Models, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
4. Martin, Robert H., Jr. : Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems, Mc Graw-Hill, New York, 1984.
5. Rainville, Earl D., dan Phillip E. Bedient : Elementary Differential Equations, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1974.
6. Stoker, J.J. : Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, Interscience Publishers, Inc., New York, 1950.
7. Sutrisno : Fisika Dasar, Seri Fisika, ITB, Bandung, 1982.