ESTIMASI MODEL SPASIAL DEPENDEN DENGAN METODE

GENERALIZED SPATIAL TWO STAGE LEAST SQUARES

ERMA HARVIANI
0 3 0 4 0 1 0 2 3 4

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

DEPARTEMEN MATEMATIKA

DEPOK

2008

ESTIMASI MODEL SPASIAL DEPENDEN DENGAN METODE

GENERALIZED SPATIAL TWO STAGE LEAST SQUARES

Skripsi diajukan sebagai salah satu syarat

untuk memperoleh gelar Sarjana Sains

Oleh :

ERMA HARVIANI
0 3 0 4 0 1 0 234

DEPOK

2008

SKRIPSI	:	ESTIMASI MODEL SPASIAL DEPENDEN DENGAN METODE *GENERALIZED SPATIAL TWO STAGE LEAST SQUARES*
NAMA	:	ERMA HARVIANI
NPM	:	0304010234

SKRIPSI INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 16 DESEMBER 2008

Dr. Dian Lestari, DEA	**Dra. Siti Nurrohmah, M.Si**
PEMBIMBING I	PEMBIMBING II

Tanggal lulus Ujian Sidang Sarjana : 19 Desember 2008

Penguji I : Dr. Dian Lestari, DEA

Penguji II : Fevi Novkaniza, S.Si, M.Si

Penguji III : Dr. Zuherman Rustam, DEA

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil 'alamin penulis ucapkan hanya kepada Allah SWT atas segala karunia yang Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat serta salam senantiasa dihaturkan kepada Rasulullah SAW serta para pengikutnya yang istiqomah hingga akhir zaman.

Banyak pihak yang telah membantu dalam pembuatan tugas akhir ini . Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak terutama

1. Mama dan Papa, Ibu Titi Nurtiani dan Bapak Mulyadi atas segala yang telah diberikan dalam hidup penulis. " Salah satu anugerah terbesar dalam hidupku adalah memiliki orang tua seperti Kalian".
2. Ibu Dr. Dian Lestari, DEA dan Ibu Dra. Siti Nurrohmah, M.Si selaku pembimbing skripsi yang telah memberikan ilmu dan semangat dengan penuh kesabaran dalam pembuatan tugas akhir ini.
3. Ibu Yekti dan ibu Siti Aminah selaku pembibing akademik dan seluruh dosen serta karyawan Departemen Matematika Universitas Indonesia.
4. Kaka, Jiji, Ka Afifah, dan Husna sebagai keluarga penulis yang telah memberikan segenap bantuan, doa, dan motivasi.
5. Keluarga besar Mbah dan Nenek atas perhatian, dukungan dan serta doanya.

6. Laskar skripsi, diantaranya Nuri, Rimbun, Novi, Ega, Handhi, Murni, Echa, Ajat, Vajar, Wicha, dan lain-lain atas kebersamaan dan keceriaan dalam hari-hari mengerjakan skripsi serta saling memotivasi dan mengingatkan dalam perjuangan ini. (Merdeka!!!).
7. Teman-teman 2004 yang telah melewati hari-hari di kampus bersama penulis, terutama saudaraku, Iif, yang telah memberikan bantuan dan perhatian yang sangat berarti kepada penulis.
8. Reja, Rusvan, dan Luthfi atas segala bentuk perhatian yang telah diberikan selama ini.
9. Keluarga Besar UKM Pencak Silat Merpati Putih Universitas Indonesia , terutama para pelatih, senior dan sahabat-sahabatku atas segala pengalaman yang tak terlupakan dan ilmu yang berharga.
10. Keluarga Besar Bimbingan Belajar Salemba Group atas kepercayaan, dukungan finansial dan pengertiannya dalam kerjasama selama ini.
11. Sahabat-sahabat SMA, April, Cici, Nunu, Sutong.
12. Teman teman Matematika UI angkatan 00,01,02,03,05, dan 06 terutama Andra 03 yang telah memberikan inspirasi kepada penulis.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis memohon maaf atas segala kekurangan serta mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk penyempurnaan tugas akhir ini. Terima kasih atas perhatiannya dan selamat membaca.

Penulis, 2008

ABSTRAK

Dalam penerapan analisis regresi seringkali terdapat efek dependensi spasial (lokasi) yaitu nilai observasi variabel dependen pada suatu lokasi bergantung pada nilai observasi di lokasi lain. Karateristik ini dinamakan spasial lag. Bentuk dependensi lain adalah spasial error yaitu error pada suatu lokasi dipengaruhi oleh error pada lokasi sekitarnya. Model regresi yang melibatkan efek dependensi spasial disebut model spasial dependen. Dalam kenyataannya tidak tertutup kemungkinan spasial dependen pada data cross section memiliki kedua kararateristik dependensi spasial. Tugas akhir ini membahas tentang prosedur mengestimasi parameter model dengan kedua jenis spasial dependen, yaitu spasial lag sekaligus spasial error dengan metode *Generalized Spatial Two Stage Least Squares* (GS2SLS). Metode ini menggunakan *Two Stage Least Squares, Generalized Moment,* dan transformasi Cochrane-Orcutt. Taksiran yang dihasilkan bersifat konsisten.

Kata Kunci: Spasial Lag, Spasial Error, *Two Stage Least Squares*, *Generalized Moment*, Transformasi Cochrane-Orcutt

x + 51 hlm; lamp

Bibliografi: 10 (1995-2007)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Analisis regresi merupakan cabang dari metodologi statistik yang fokus pada analisis hubungan antara variabel dependen Y dengan himpunan variabel independen X. Hal ini bertujuan untuk membuat model yang baik yang menggambarkan hubungan tersebut sehingga mampu memprediksi nilai Y diberikan nilai X dengan error terkecil. Model yang dihasilkan disebut model regresi.

Pada penerapan analisis regresi seringkali ditemui kasus bahwa nilai observasi dan atau error pada suatu lokasi bergantung pada lokasi lainnya. Hal ini disebut spasial dependen. Jika kondisi ini tidak diperhatikan, maka asumsi error antar observasi saling bebas tidak terpenuhi. Oleh karena itu diperlukan suatu model yang memperhatikan efek dependensi spasial ini. Model ini disebut model spasial dependen. Model spasial dependen dibagi menjadi dua, yaitu model yang memperhatikan dependensi observasi antar lokasi disebut model spasial lag dan model yang memperhatikan dependensi error antar lokasi disebut dengan model spasial error. Model yang memperhatikan kedua jenis dependensi antar lokasi disebut model spasial lag sekaligus spasial error.

Penggunaan metode penaksiran OLS untuk menaksir parameter model spasial dependen yang memiliki karateristik spasial lag sekaligus spasial error tidak menghasilkan taksiran yang konsisten. Oleh karena itu diperlukan metode estimasi khusus yang menghasilkan taksiran yang konsisten sehingga semakin besar ukuran sampel maka nilai taksiran semakin mendekati parameter sebenarnya.

1.2 PERMASALAHAN

Bagaimana mengestimasi parameter pada model yang memiliki kedua karateristik spasial dependen, yaitu model spasial lag sekaligus spasial error.

1.3 TUJUAN

Membahas prosedur untuk mengestimasi model spasial lag sekaligus spasial error dengan metode *Generalized Spatial Two Stage Least Squares* (GS2SLS).

1.4 PEMBATASAN MASALAH

Metode yang digunakan pada tulisan ini untuk mengestimasi model dengan data *cross section*.

1.5 SISTEMATIKA PENULISAN

Penulisan tugas akhir ini dibagi menjadi 5 bab sebagai berikut.

Bab I membahas tentang latar belakang, permasalahan, tujuan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II membahas tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam mengestimasi model.

Bab III membahas tentang metode yang digunakan dalam mengestimasi model, langkah-langkah estimasi, variabel instrumen, dan matriks bobot spasial.

Bab IV membahas tentang contoh aplikasi estimasi model.

Bab V kesimpulan dan saran tentang tugas akhir ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bagian ini akan dibahas tentang teori-teori dasar yang digunakan untuk dalam mengestimasi parameter model.

2. 1 MATRIKS DAN VEKTOR

Definisi 1 :

Trace dari matriks bujur sangkar $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ adalah penjumlahan elemen-elemen diagonalnya atau $Tr\left(\mathbf{A}\right) = \sum_i a_{ii}$

Definisi 2 :

Jika $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ adalah vektor-vektor tak nol maka persamaan vektor

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + ... + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

mempunyai paling tidak satu penyelesaian, yaitu

$$c_1 = 0 \;\; c_2 = 0, \; ..., \; c_n = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya penyelesaian, maka $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ disebut *linearly independent*. Jika adalah penyelesaian lainnya, maka $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ disebut *linearly dependent.*

Definisi 3 :

Rank dari suatu matriks **A** didefinisikan sebagai berikut

Rank (**A**) = banyaknya baris yang *linearly independent* pada **A**

= banyaknya kolom yang *linearly independent* pada **A**

Definisi 4 :

Jika **A** matriks berukuran n x p dan memiliki rank yang merupakan nilai terkecil antara n dan p maka **A** memiliki *full rank* atau dapat disebut *full column rank* atau *full row rank*.

Definisi 5 :

Misalkan **A** merupakan matriks simetris. Maka **A** adalah matriks definit positif jika dan hanya jika untuk sembarang vektor **x** yang bukan vektor **0** berlaku

$$\mathbf{x'Ax} > 0$$

2.2. VARIABEL RANDOM

Misalkan terdapat suatu percobaan random pelemparan sebuah koin dengan kemungkinan hasil yaitu muka atau belakang. Ruang sampel dari percobaan ini adalah *C* = {c; c adalah muka atau c adalah belakang}. Misalkan X adalah sebuah fungsi sedemikian sehingga X(c) = 0 jika c adalah muka dan X(c) = 1 jika c adalah belakang, maka X merupakan sebuah fungsi yang memetakan elemen-elemen himpunan ruang sampel C dengan himpunan bilangan real *A* = {0,1}.

Definisi 6 :

Misalkan sebuah percobaan random mempunyai ruang sample C. Sebuah fungsi X yang memetakan masing-masing elemen c$\in$ C ke satu dan hanya satu bilangan real X(c)=x, disebut variable random. Ruang nilai dari X adalah himpunan bilangan real A = {x; x = X(c), c$\in$ C }.

Misalkan X suatu variable random dengan pengamatan yang dilakukan sebanyak n kali maka pengamatan tersebut dinotasikan sebagai $X_1, X_2, ..., X_n$ jika nilai-nilai untuk $X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n$ maka X dapat dinotasikan dalam bentuk vektor sebagai berikut.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2.3 EKSPEKTASI, VARIANSI, KOVARIANSI dan KORELASI

Misalkan X suatu variabel random yang memiliki sifat:

- Untuk X diskret, $\sum_x |x| f(x)$ konvergen ke suatu limit berhingga
- Untuk X kontinu, $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ konvergen ke suatu limit berhingga

maka nilai ekspektasi dari variabel random X didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i) \text{, untuk X diskret}$$

atau $\quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad$ untuk X kontinu

Definisi 7 :

Dengan definisi ekspektasi yang telah dijelaskan , momen ke-k dari distribusi X didefinisikan sebagai $E(X^k)$.

Misalkan X memiliki mean μ maka $E(X) = \mu$

Sifat-sifat ekspektasi:

1. Sifat 1:

   Misalkan X dan Y merupakan variabel random maka

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

2. Sifat 2:

   Misalkan X suatu variabel random dan k suatu konstanta maka

$$E(kX) = kE(X)$$

3. Sifat 3:

   Misalkan X dan Ymerupakan variabel random yang independen maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Misalkan X suatu variabel random dengan mean μ maka variansi dari X didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}
\text{var}(X) = \sigma_x^2 &= E\left([X-\mu]^2\right) \\
&= E\left(X^2 - 2X\mu + \mu^2\right) \\
&= E\left(X^2\right) - E(2X\mu) + E\left(\mu^2\right)
\end{aligned}$$

$$=E\left(X^2\right)-2E\left(X\right)\mu+\mu^2$$

$$=E\left(X^2\right)-2\left[E\left(X\right)\right]\left[E\left(X\right)\right]+\left[E\left(X\right)\right]^2$$

$$=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2$$

(2.1)

Misalkan X adalah variabel random dengan mean μ_x dan variansi σ_x^2 sedangkan Y adalah variabel random dengan mean μ_y dan variansi σ_Y^2 maka kovariansi X dan Y didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left[X,Y\right]&=E\left(\left[X-\mu_x\right]\left[Y-\mu_Y\right]\right)\\&=E\left(XY-X\mu_Y-Y\mu_x+\mu_x\mu_Y\right)\\&=E\left(XY\right)-E\left(X\mu_Y\right)-E\left(Y\right)+\mu_x\mu_Y\\&=E\left(XY\right)-\mu_Y E\left(X\right)-\mu_x E\left(Y\right)+\mu_x\mu_Y\\&=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)-E\left(Y\right)E\left(X\right)+E\left(X\right)E\left(Y\right)\\&=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)\end{aligned}$$

(2.2)

Sifat-sifat variansi

1. Sifat 4

   Misalkan X suatu variabel random dan a suatu konstanta maka

   $$\operatorname{var}\left(aX\right)=a^2\operatorname{var}(X)$$

2. Sifat 5

   Misalkan X dan Y suatu variabel random maka

$$\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

- X dan Y merupakan variabel random yang tidak berkorelasi jika dan hanya jika cov(X,Y) = 0

  Bukti:

$$\rho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

  dengan ρ merupakan koefisien korelasi

  Jika $\text{cov}(X,Y) = 0$ maka ρ =0 yang mengartikan bahwa X dan Y tidak berkorelasi sedangkan ρ =0 terjadi ketika $\text{cov}(X,Y) = 0$

(terbukti)

2.4 KONVERGEN DALAM PROBABILITAS

Definisi 8 :

Variabel random X_n dengan n pengamatan disebut konvergen dalam probabilitas ke c atau $\text{plim } X_n = c$ jika untuk sembarang bilangan positif $\varepsilon > 0$ berlaku $\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - c| < \varepsilon) = 1$

Teorema 1 :

Jika X_n memiliki mean c dan memiliki variansi σ_n^2 dengan limit adalah 0 maka $\text{plim } X_n = c$

Bukti:

Pembuktian ini menggunakan dalil pertidaksamaan Chebyshev. Dalil tersebut berisi sebagai berikut.

Misalkan X merupakan barisan variabel random dengan mean μ dan variansi σ^2 maka pertidaksamaan Chebyshev adalah sebagai berikut:

$$\Pr\left(\left|X-\mu\right|<k\sigma\right)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

dengan k suatu konstanta.

Dari pertidaksamaan Chebyshev diperoleh

$$\Pr\left(\left|X_n-c\right|<k\sigma_n\right)\geq 1-\frac{1}{k^2} \tag{2.3}$$

Ambil $\varepsilon = k\sigma_n$ maka $k=\dfrac{\varepsilon}{\sigma_n}$

sehingga persamaan (2.3) menjadi:

$$\Pr\left(\left|X_n-c\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{{\sigma_n}^2}{\varepsilon^2}$$

Dengan mengambil limit untuk n→∞ pada kedua ruas persamaan di atas maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(\left|X_n-c\right|<\varepsilon\right)\geq \lim_{n\to\infty}1-\frac{{\sigma_n}^2}{\varepsilon^2}$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^2=0$ maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left(\left|X_n-c\right|<\varepsilon\right)\geq 1$$

Karena nilai probabilitas adalah dari 0 hingga 1 maka

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left|X_n - c\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Berdasarkan definisi 8 maka $\text{plim } X_n = c$ *(terbukti)*

2.5 PENAKSIR KONSISTEN

Definisi 9 :

Suatu statistik $\hat{\theta}$ disebut penaksir yang konsisten untuk parameter θ jika dan hanya jika $\hat{\theta}$ konvergen dalam probabilitas ke parameter θ atau

$$\text{plim } \hat{\theta} = \theta$$

2.6 MODEL REGRESI LINIER

Model regresi merupakan persamaan yang menggambarkan hubungan antara variabel dependen dengan variabel independen. Jika parameter pada model regresi berhubungan secara linear dengan variabel dependen maka disebut model regresi linier. Selanjutnya model ini dapat digunakan untuk memprediksi nilai variabel dependen apabila diberikan nilai dari variabel independen. Oleh karena itu taksiran model yang didapatkan sebaiknya memenuhi kriteria model yang baik sehingga mampu digunakan sebagai prediksi dengan error yang terkecil.

Misalkan y_i adalah observasi dari variabel dependen Y untuk pengamatan ke-i, x_{it} adalah nilai variabel independen ke-t untuk pengamatan ke-i dan ε_i merupakan error pengamatan ke-i. Misalkan terdapat k variabel independen dan n pengamatan. Maka model regresi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \ldots + x_{1k}\beta_k + \varepsilon_1 \\
y_2 &= x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \ldots + x_{2k}\beta_k + \varepsilon_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
y_n &= x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \ldots + x_{nk}\beta_k + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

atau dapat ditampilkan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \tag{2.4}$$

Dimana $\mathbf{y}$ = vektor observasi variabel dependen berukuran n x 1

$\mathbf{X}$ = matriks k variabel independen atau variabel regressor berukuran n x k

β = vektor parameter berukuran k x 1

u = vektor error (n x 1)

Untuk menaksir vektor parameter β**,** salah satu metode penaksiran yang dapat digunakan adalah *Ordinary Least Squares (OLS).* Metode penaksiran ini menggunakan prinsip meminimumkan jumlah penyimpangan kuadrat antara nilai prediksi dengan nilai sebenarnya. Untuk mendapat taksiran yang baik dalam menggunakan metode penaksiran ini ada beberapa asumsi yang harus dipenuhi yaitu:

1. **X** berukuran n x k mempunyai rank k
2. $E\left[\mathbf{u} \middle| \mathbf{X}\right] = \mathbf{0}$

3. $E\left[\mathbf{uu}'|\mathbf{X}\right] = \sigma^2\mathbf{I}$

4. $\mathbf{u} \sim$ Normal

Dengan metode OLS diperoleh taksiran untuk $\boldsymbol{\beta}$, yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \qquad (2.5)$$

yang merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\beta}$.

Bukti:

Berdasarkan definisi tentang penaksir yang konsisten akan dibuktikan bahwa plim $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$. Dengan mensubtitusikan persamaan (2.4) ke persamaan (2.5) didapatkan bentuk

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}) \\ &= \left(\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right) + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u} \qquad (2.6)$$

Dengan mengambil bentuk probabilitas limit pada kedua ruas tersebut maka diperoleh persamaan

$$\text{plim}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) \qquad (2.7)$$

Untuk mendapatkan hasil plim $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$ dapat dilakukan dengan membuktikan bahwa plim$\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = \mathbf{0}$. Untuk membuktikan hal ini dapat digunakan teorema 1 dengan mencari mean dari $\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right)$ dan limit dari variansi $\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right)$.

Misalkan $\mathbf{x}_i$ adalah vektor baris yang berisi nilai dari variabel-variabel independen untuk pengamatan ke-i, maka

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right) = E\left[\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n\end{pmatrix}\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}\right]$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n}\mathbf{x}_i u_i\right) \tag{2.8}$$

berdasarkan sifat 1 dan sifat 2 maka

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i u_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\mathbf{x}_i u_i\right)$$

dimana

$$E\left(\mathbf{x}_i u_i\right) = \mathrm{cov}(\mathbf{x}_i, u_i) + E\left(\mathbf{x}_i\right)E\left(u_i\right)$$

Jika diasumsikan **u** pada masing-masing observasi tidak berkorelasi dengan **X** maka $\mathrm{cov}(\mathbf{x}_i, u_i) = 0$. Karena disumsikan bahwa $E\left[\mathbf{u}|\mathbf{X}\right] = \mathbf{0}$ maka

$$E\left(\mathbf{x}_i u_i\right) = 0$$

Oleh karena itu didapatkan hasil untuk persamaan (2.8) yaitu

$$E\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right) = \mathbf{0}$$

Selanjutnya akan dicari limit dari variansi $\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right)$. Karena $E\left(\mathbf{uu'}\right) = \sigma^2\mathbf{I}$ maka

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right) &= E\left(\left[\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right]\left[\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right]'\right) \\
&= E\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\frac{1}{n}\mathbf{u'X}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}E\left(\mathbf{X'}\right)E\left(\mathbf{uu'}\right)E\left(\mathbf{X}\right) \\
&= \frac{\sigma^2}{n^2}E\left(\mathbf{X'}\right)E\left(\mathbf{X}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right) = \mathbf{0}$$

Karena mean dari $\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right)$ adalah **0** dan variansinya konvergen ke **0** berdasarkan teorema 1 maka $\operatorname{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right) = \mathbf{0}$. Sehingga didapatkan hasil bahwa

$$\operatorname{plim}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$$

Berdasarkan definisi 9 maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\beta}$.

(terbukti)

2. 7 MODEL SPASIAL DEPENDEN

Pada analisis regresi seringkali dijumpai adanya ketergantungan antar lokasi (dependensi spasial) pada nilai observasi dan atau errornya. Model regresi yang memperhatikan efek dependensi spasial ini disebut model spasial dependen.

Terdapat dua jenis dependensi spasial yaitu spasial lag dan spasial error. Ada kemungkinan suatu data spasial memenuhi kedua karateristik dependensi ini.

Spasial lag muncul akibat adanya ketergantungan nilai observasi pada suatu daerah dengan daerah lain yang berhubungan dengannya. Dengan kata lain misalkan lokasi i berhubungan dengan lokasi j maka nilai observasi pada lokasi i merupakan fungsi dari nilai observasi pada lokasi j dengan $i \neq j$. Model yang memperhatikan kondisi ini disebut model spasial lag.

Misalkan y_i adalah nilai observasi variabel dependen pada lokasi ke-i, x_{it} adalah nilai variabel independen ke-t pada lokasi ke-i, w_{ij} adalah bobot yang menggambarkan hubungan antara lokasi ke-i dan lokasi ke-j, dan u_i merupakan error pada lokasi ke-i. Misalkan terdapat k variabel independen dan n lokasi pengamatan, maka model spasial lag adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \ldots + x_{1k}\beta_k + \lambda(w_{12}y_2 + w_{13}y_3 + \ldots + w_{1n}y_n) + u_1 \\
y_2 &= x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \ldots + x_{2k}\beta_k + \lambda(w_{21}y_1 + w_{23}y_3 + \ldots + w_{2n}y_n) + u_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
y_n &= x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \ldots + x_{nk}\beta_k + \lambda(w_{n1}y_1 + w_{n2}y_2 + \ldots + w_{n-1n}y_n) + u_n
\end{aligned}
$$

atau dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \lambda\mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{u} \tag{2.9}$$

y = vektor observasi variabel dependen berujuran n x 1

X = matriks k variabel independen berukuran n x k

W = matriks bobot spasial terstandarisasi $\left(\sum_j w_{ij} = 1\right)$ berukuran n x n

β = vektor parameter regresi berukuran k x 1

λ = parameter skalar spasial lag

u = vektor error berukuran n x 1

Spasial error muncul akibat adanya ketergantungan nilai error suatu lokasi dengan error pada lokasi yang lain yang berhubungan dengannya. Hal ini terjadi apabila terdapat variabel-variabel yang mempengaruhi nilai variabel dependen tapi tidak diikutsertakan dalam model, berkorelasi antar lokasi. Model yang memperhatikan kondisi ini disebut model spasial error.

Misalkan y_i adalah nilai observasi variabel dependen pada lokasi ke-i, x_{it} adalah nilai variabel independen ke-t pada lokasi ke-i, u_i adalah nilai error pada lokasi ke-i, m_{ij} adalah bobot yang menggambarkan hubungan antara lokasi ke-i dan lokasi ke-j, dan ε_i merupakan inovasi pada lokasi ke-i. Inovasi ini merepresentasikan error untuk model spasial error. Misalkan terdapat n lokasi pengamatan dan k variabel independen, maka model spasial error dapat dituliskan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \ldots + x_{1k}\beta_k + u_1 \\
y_2 &= x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \ldots + x_{2k}\beta_k + u_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
y_n &= x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \ldots + x_{nk}\beta_k + u_n
\end{aligned}
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \rho(m_{12}u_2 + m_{13}u_3 + \ldots + m_{1n}u_n) + \varepsilon_1 \\
u_2 &= \rho(m_{21}u_1 + m_{23}u_3 + \ldots + m_{2n}u_n) + \varepsilon_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
u_n &= \rho(m_{n1}u_1 + m_{n2}u_2 + \ldots + m_{n-1n}u_n) + \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

atau dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \rho\mathbf{Mu} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.10}$$

y = vektor observasi variabel dependen berukuran n x 1

X = matriks k variabel independen berukuran n x k

u = vektor error berukuran n x 1

M = matriks bobot spasial terstandarisasi $\left(\sum_j m_{ij} = 1\right)$ berukuran n x n

ρ = parameter skalar spasial error

ε = vektor inovasi berukuran n x 1

BAB III

ESTIMASI PARAMETER MODEL DENGAN GS2SLS

Pada bab ini akan dibahas tentang bentuk model spasial lag sekaligus spasial error dan prosedur *Generalized Spatial Two Stage Least Squares* (GS2SLS) untuk mengestimasi parameter pada model tersebut. Selain itu akan dijelaskan pula mengenai pemilihan matriks variabel instrumen dan matriks bobot spasial.

3.1 MODEL

Pada bab sebelumnya telah dibahas bahwa terdapat dua jenis karateristik spasial dependen yaitu spasial lag dan spasial error. Ada kemungkinan suatu data spasial memenuhi kedua karateristik dependensi spasial. Hal ini mengartikan bahwa terdapat dependensi pada nilai observasi antar lokasi disertai dengan dependensi error antar lokasi. Bentuk modelnya merupakan gabungan model spasial lag dan spasial error. Model spasial lag sekaligus spasial error tersebut adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \lambda\mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{u} \tag{3.1}$$

dengan

$$\mathbf{u} = \rho\mathbf{M}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.2}$$

Keterangan:

y = vektor observasi variabel dependen berukuran n x 1

X = matriks k variabel independen berukuran n x k

W, M = matriks bobot spasial terstandarisasi $\left(\sum_j w_{ij} = 1, \ \sum_j m_{ij} = 1\right)$

berukuran n x n

β = vektor parameter regresi berukuran k x 1

λ, ρ = parameter skalar

u = vektor error berukuran n x 1

ε = vektor inovasi berukuran n x 1

Untuk penyederhanaan penulisan model dapat dibentuk menjadi:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{u} \tag{3.3}$$

dengan

$$\mathbf{u} = \rho\mathbf{M}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.4}$$

$\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{W}\mathbf{y})$ matriks berukuran n x (k+1)

$\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\beta}', \lambda)'$ vektor parameter berukuran (k+1) x 1

Model di atas dapat ditulis secara individual yaitu

$$y_i = \sum_{t=1}^{k} x_{it}\beta_j + \lambda\sum_j w_{ij} y_j + u_i \tag{3.5}$$

dengan

$$u_i = \rho\sum_j m_{ij} u_j + \varepsilon_i \tag{3.6}$$

$\sum_j w_{ij} = 1$ dan $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

Pada model spasial dependen jenis ini nilai observasi dan nilai error pada suatu lokasi berkorelasi pada lokasi sekitarnya dimana hubungan tersebut direpresentasikan oleh matriks bobot $\mathbf{W} = (w_{ij})$ dan $\mathbf{M} = (m_{ij})$

Asumsi yang digunakan dalam model adalah sebagai berikut:

1. Matriks $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})$ dan $(\mathbf{I} - \rho\mathbf{M})$ merupakan matriks nonsingular

2. Matriks **X** memiliki *full column rank*

3. Vektor inovasi **ε** berisi komponen random $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ dengan

   $E\left(\varepsilon_i^2\right) = \sigma^2$ dan $E\left(\varepsilon_i\right) = 0$ dimana $0 < \sigma^2 < b$ dengan $b < \infty$

4. **X** tidak berkorelasi dengan **u**

Untuk menghilangkan autokorelasi error pada model tersebut maka akan dilakukan transformasi Cochrane-Orcutt , yaitu sebagai berikut.

Perhatikan bentuk model spasial lag pada bentuk model (3.3). Jika kedua ruas dikalikan dengan $\rho\mathbf{M}$ maka didapatkan bentuk

$$\rho\mathbf{My} = \rho\mathbf{MZ\delta} + \rho\mathbf{Mu} \tag{3.7}$$

Jika persamaan (3.1) dikurangkan dengan persamaan (3.7) maka didapat bentuk

$$\mathbf{y} - \rho\mathbf{My} = \mathbf{Z\delta} + \mathbf{u} - \rho\mathbf{MZ\delta} - \rho\mathbf{Mu}$$
$$(\mathbf{y} - \rho\mathbf{My}) = (\mathbf{I} - \rho\mathbf{M})\mathbf{Z\delta} + (\mathbf{u} - \rho\mathbf{Mu})$$

atau dalam bentuk lain

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{Z}^*\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.8}$$

dengan $\mathbf{y}^* = \mathbf{y} - \rho\mathbf{My}$, $\mathbf{Z}^* = (\mathbf{I} - \rho\mathbf{M})\mathbf{Z}$, dan $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u} - \rho\mathbf{Mu}$

Meskipun pada model yang telah ditransformasi Cochrane Orcutt (persamaan 2.8) tidak lagi mengandung autokorelasi pada error namun **y*** dan **Z*** merupakan fungsi dari ρ. Karena nilai parameter ρ tidak diketahui maka estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$ belum dapat dilakukan. Oleh karena itu dibutuhkan tiga tahap prosedur yang disebut *Generalized Spatial Two Stage Least Squares* (GS2SLS) yaitu sebagai berikut:

1. estimasi parameter $\boldsymbol{\delta}$ pada model (3.3) yang berisi β dan λ dengan metode *Two Stage Least Squares* (2SLS).
2. estimasi parameter ρ pada model (3.2) dengan metode *Generalized Moment* dengan menggunakan nilai residual antara nilai observasi sebenarnya dengan nilai hasil taksiran pada tahap 1.
3. setelah taksiran ρ didapatkan, estimasi kembali parameter $\boldsymbol{\delta}$ pada model yang telah ditransformasi Cochrane-Orcutt setelah mensubtitusikan $\hat{\rho}$ yang didapat dari tahap 2 ke dalam model tersebut.

3.2 PROSEDUR ESTIMASI

3.2.1 Tahap 1: Estimasi Parameter Model Spasial Lag

Pada bagian ini akan dilakukan penaksiran parameter model spasial lag tanpa mempertimbangkan adanya spasial error. Penaksiran ini menggunakan metode penaksiran 2SLS. Oleh karena itu akan dibahas terlebih dahulu tentang 2SLS pada model regresi secara umum.

3.2.1.1 Two Stage Least Square (2 SLS)

Misalkan dalam model regresi yang telah dijelaskan pada BAB II, terdapat kasus dimana terdapat variabel regressor berkorelasi dengan error. Kasus ini terjadi pada model dengan regressor **X** yang merupakan variabel random. Karena terdapat variabel regressor **X** berkorelasi dengan **u** maka asumsi $E\left[\mathbf{u}|\mathbf{X}\right]=\mathbf{0}$ tidak terpenuhi. Hal ini karena nilai **X** pada masing-masing pengamatan memberikan informasi kepada ekspektasi dari **u** pada pengamatan tersebut. Hal ini menyebabkan bahwa

$$\text{plim}\ \frac{\mathbf{X'u}}{n}\neq\mathbf{0} \tag{3.9}$$

(bukti pada lampiran 3).

Oleh karena itu, pada kasus ini $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ bukan merupakan taksiran yang konsisten untuk β**.**

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ bukan merupakan taksiran yang konsisten untuk β**.**

Dari persamaan (2.7) didapatkan hasil bahwa

$$\text{plim}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}+\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'X}\right)^{-1}\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right)$$

Karena plim $\frac{\mathbf{X'u}}{n} \neq \mathbf{0}$ maka plim $\hat{\boldsymbol{\beta}} \neq \boldsymbol{\beta}$. Dengan demikian, berdasarkan definisi 9 maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ bukan merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\beta}$. *(terbukti)*

Untuk mengatasi hal ini maka diperlukan suatu metode untuk mendapatkan taksiran yang konsisten. Metode penaksiran ini dinamakan *Instrumental Variable*. Pada metode penaksiran *Instrumental Variable*, dibutuhkan variabel-variabel instrumen yang memenuhi kriteria berikut.

Misalkan **H** (n x p) merupakan matriks variabel instrumen yang berisi p variabel-variabel instrumen. Maka **H** harus memenuhi sifat:

i. Tidak berkorelasi dengan **u** atau $E\left[\mathbf{u}\middle|\mathbf{H}\right] = \mathbf{0}$

ii. **H** harus mengandung variabel minimal sebanyak k atau $p \geq k$ sedemikian sehingga **H** berkorelasi dengan **X**

Karena **H** harus mengandung variabel sebanyak atau lebih banyak dari jumlah variabel **X (** $p \geq k$) maka prosedur mendapatkan taksiran pada metode *Instrumental Variable* dibagi menjadi dua kasus, yaitu

a) Jumlah variabel instrumen $p = k$

Formula taksiran untuk pemilihan variabel instrumen sebanyak $p = k$ diperoleh dengan langkah-langkah berikut.

Kalikan persamaan regresi (2.4) dengan transpos matriks **H** sehingga didapat:

$$\mathbf{H}'\mathbf{y} = \mathbf{H}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{H}'\mathbf{u}$$

atau

$$\mathbf{H}'\mathbf{y} = \mathbf{H}'\left[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}\right] \tag{3.10}$$

Dengan mengambil bentuk konvergen dalam probabilitas pada kedua ruas maka diperoleh

$$\begin{aligned} \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H}'\mathbf{y}\right) &= \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H}'\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}\right)\right) \\ &= \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right) + \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H}'\mathbf{u}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

`

Karena **H** tidak berkorelasi dengan **u** maka

$$\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H}'\mathbf{u}\right) = \mathbf{0} \tag{3.12}$$

(bukti pada lampiran 4)

Oleh karena itu persamaan (3.11) dapat dibentuk menjadi

$$\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H}'\mathbf{y}\right) = \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H}'\mathbf{X}\right)\boldsymbol{\beta}$$

Dari hasil yang didapatkan pada persamaan tersebut untuk mendapatkan taksiran yang konsisten untuk β yaitu yang memenuhi plim $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \beta$ maka taksirannya haruslah

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{H}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{y} \tag{3.13}$$

sehingga $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ pada (3.13) merupakan taksiran yang konsisten untuk β.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ pada persamaan (3.13) merupakan taksiran yang konsisten untuk β. Berdasarkan definisi tentang penaksir yang konsisten (definisi 9) maka akan dibuktikan bahwa $\text{plim}\ \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$.

Karena $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ maka persamaan (3.13) dapat dibentuk menjadi:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{H'X})^{-1}\mathbf{H'}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{H'X})^{-1}\mathbf{H'X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{H'X})^{-1}\mathbf{H'u} \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{H'X})^{-1}\mathbf{H'u}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Oleh karena itu diperoleh bahwa

$$\text{plim}\ \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'X}\right)^{-1} \text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right) \tag{3.15}$$

Dari hasil pada pada persamaan (3.12) telah terbukti bahwa $\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right) = \mathbf{0}$ sehingga dari persamaan (3.15) didapatkan hasil bahwa $\text{plim}\ \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$.

Berdasarkan definisi 9 maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\beta}$.

(terbukti)

b) Jumlah variabel instrumen $p > k$

Jika p > k, $\mathbf{H}'\mathbf{X}$ pada persamaan (3.13) tidak memiliki invers sehingga tidak didapatkan taksiran dengan formula tersebut. Untuk kasus ini, digunakan metode lebih spesifik dari *Instrumental Variables* yang dinamakan dengan *Two Stage Least Squares (2SLS)*. Prinsip 2SLS adalah menggunakan prinsip OLS yang dilakukan dalam 2 langkah, yaitu:

1. lakukan regresi menggunakan OLS untuk **X** pada matriks variabel instrumen sehingga dihasilkan $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{H}\left(\mathbf{H}^{'}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{'}\mathbf{X} \tag{3.16}$$

   Persamaan (3.16) mengartikan bahwa regressor tidak digunakan secara langsung melainkan merupakan nilai yang dihasilkan dari regresi terhadap variabel-variabel instrumen.

2. lakukan regresi menggunakan OLS untuk **y** pada $\hat{\mathbf{X}}$ untuk mendapatkan taksiran parameter, yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}}\right]^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{y} \tag{3.17}$$

Dengan taksiran ini maka $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk β.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ pada persamaan (3.17) merupakan taksiran yang konsisten untuk β sehingga berdasarkan definisi tentang penaksir yang konsisten pada definisi 9 maka akan dibuktikan bahwa $\text{plim}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$.

Karena $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ maka (3.17) dapat dibentuk menjadi

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \left[\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}}\right]^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{y} \\ &= \left[\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}}\right]^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\left[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}\right]\end{aligned} \tag{3.18}$$

Untuk penyerdehanaan bentuk yang dihasilkan pada (3.18) akan ditunjukkan bahwa $\left[\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}}\right]=\left[\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{X}\right]$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}' &= \left[\left(\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\right)\mathbf{X}\right]' \\
&= \left[\mathbf{X}'\left(\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\right)'\right] \\
&= \left[\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\right]
\end{aligned}
\qquad (3.19)
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}} &= \left[\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}\right] \\
&= \left[\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}\right] \\
&= \left[\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{X}\right]
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu (3.18) menjadi:

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \left[\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}}\right]^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\left[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}\right] \\
&= \left[\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{X}\right]^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\left[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}\right] \\
&= \left[\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\left[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}\right] \\
&= \left[\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+ \\
&\quad \left[\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{u} \\
&= \boldsymbol{\beta}+\left[\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{u}
\end{aligned}
\qquad (3.20)
$$

Kemudian akan dicari bentuk konvergen dalam probabilitas untuk $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Dari persamaan (3.20) didapat bentuk persamaan

$$\text{plim } \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \text{plim}\left\{\left[\frac{1}{n}\mathbf{X'H}\left(\mathbf{H'H}\right)^{-1}\mathbf{H'X}\right]^{-1}\mathbf{X'H}\left(\mathbf{H'H}\right)^{-1}\right\}\text{plim}\left\{\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right\} \quad (3.21)$$

Pada lampiran 4 telah dibuktikan bahwa $\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right) = \mathbf{0}$ sehingga dari persamaan (3.21) didapatkah hasil bahwa $\text{plim } \hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$. Menurut definisi 9 maka terbukti bahwa $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ pada (3.17) merupakan taksiran yang konsisten untuk β. *(terbukti)*

3.2.1.2. Estimasi Model Spasial Lag dengan 2SLS

Pada bagian ini akan dilakukan penaksiran vektor parameter $\boldsymbol{\delta}$ pada model spasial lag dengan *Two Stage Least Squares* (2SLS).

Pada model spasial lag yang dibentuk pada persamaan (3.3), terjadi kasus bahwa variabel **Wy** berkorelasi dengan dengan **u** (bukti pada lampiran 5). Karena pada model ini terdapat kasus bahwa terdapat variabel regressor yang berkorelasi dengan error maka digunakan metode penaksiran 2SLS untuk menghasilkan taksiran yang konsisten. Formula taksiran 2SLS untuk model ini adalah:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \left(\hat{\mathbf{Z}}'\hat{\mathbf{Z}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}'\mathbf{y} \quad (3.22)$$

dengan $\hat{\mathbf{Z}} = \left(\mathbf{X}, \mathbf{H}\left(\mathbf{H}'\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H'Wy}\right)$

di mana **H** adalah matriks variabel instrumen.

Tahap ini menghasilkan model taksiran spasial lag

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} + \tilde{\lambda}\mathbf{W}\mathbf{y}$$

Model taksiran ini belum merupakan model taksiran akhir untuk model spasial lag karena belum memperhatikan aspek spasial error yang dikandungnya. Model ini digunakan untuk memperoleh nilai residual yang akan diperlukan pada langkah 2 prosedur GS2SLS.

3.2.2 Tahap 2: Estimasi Parameter ρ

Pada bagian ini akan dilakukan estimasi parameter) spasial error ρ pada model (3.2) dengan metode yang dinamakan *Generalized Moment*. Prosedur pada tahap ini telah melibatkan aspek spasial lag karena menggunakan hasil yang didapat pada langkah 1. Dari taksiran parameter yang didapatkan pada langkah 1 akan didapatkan nilai $\tilde{\mathbf{y}}$ yang merupakan nilai yang didapatkan dari model hasil taksiran. Nilai residual yang didapatkan dari selisih $\mathbf{y}$ dengan nilai $\hat{\mathbf{y}}$ sebenarnya pada sampel dinotasikan sebagai $\tilde{\mathbf{u}}$.Nilai residual inilah yang akan digunakan sebagai vektor pengamatan untuk variabel random $\mathbf{u}$ pada model spasial error.

$$\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{u}} \tag{3.23}$$

Prinsip metode penaksiran *Generalized Moment* adalah meminimumkan residual dari taksiran kondisi momen. Karena kondisi momen direpresentasikan dalam bentuk persamaan momen maka metode penaksiran ini akan menggunakan persamaan momen. Oleh karena itu akan dibentuk suatu persamaan momen

$$\mathbf{\Gamma\alpha - \gamma = 0}$$

sedemikian sehingga $\boldsymbol{\alpha}$ merupakan vektor parameter, $\boldsymbol{\Gamma}$ dan $\boldsymbol{\gamma}$ merupakan matriks yang elemen-elemennya berupa momen. Untuk membuat persamaan momen dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Perhatikan persamaan (3.2). Dari persamaan tersebut diperoleh bahwa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u} - \rho\mathbf{Mu}$$

Misalkan $\mathbf{Mu} = \overline{\mathbf{u}}$ maka

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u} - \rho\overline{\mathbf{u}} \tag{3.24}$$

Jika kedua ruas persamaan tersebut dikalikan dengan matriks **M** maka

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{u}} - \rho\overline{\overline{\mathbf{u}}} \tag{3.25}$$

dengan $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}$ dan $\overline{\overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{u}}$

Akan didapatkan tiga persamaan dari hasil memanipulasi persamaan (3.24) dan (3.25). Ketiga persamaan tersebut adalah

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n}\rho\mathbf{u}'\overline{\mathbf{u}} - \frac{1}{n}\rho^2\overline{\mathbf{u}}'\overline{\mathbf{u}} + \frac{1}{n}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{n}\mathbf{u}'\mathbf{u} \\
\frac{2}{n}\rho\overline{\mathbf{u}}'\overline{\overline{\mathbf{u}}} - \frac{1}{n}\rho^2\overline{\overline{\mathbf{u}}}'\overline{\overline{\mathbf{u}}} + \frac{1}{n}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{n}\overline{\mathbf{u}}'\overline{\mathbf{u}} \\
\frac{1}{n}\rho\left(\mathbf{u}'\overline{\overline{\mathbf{u}}} + \overline{\mathbf{u}}'\overline{\mathbf{u}}\right) - \frac{1}{n}\rho^2\overline{\mathbf{u}}'\overline{\overline{\mathbf{u}}} + \frac{1}{n}\boldsymbol{\varepsilon}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{n}\mathbf{u}'\overline{\mathbf{u}}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

(bukti pada lampiran 6)

Dari persamaan (3.26) dapat dibentuk kondisi momen yaitu

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{n}\rho E\left[\mathbf{u}'\overline{\mathbf{u}}\right]-\frac{1}{n}\rho^{2}E\left[\overline{\mathbf{u}}'\overline{\mathbf{u}}\right]+\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\right]-\frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\mathbf{u}\right]=0 \\
\frac{2}{n}\rho E\left[\overline{\mathbf{u}}'\overline{\overline{\mathbf{u}}}\right]-\frac{1}{n}\rho^{2}E\left[\overline{\overline{\mathbf{u}}}'\overline{\overline{\mathbf{u}}}\right]+\frac{1}{n}E\left[\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]-\frac{1}{n}E\left[\overline{\mathbf{u}}'\overline{\mathbf{u}}\right]=0 \\
\frac{1}{n}\rho E\left[\mathbf{u}'\overline{\overline{\mathbf{u}}}+\overline{\mathbf{u}}'\overline{\mathbf{u}}\right]-\frac{1}{n}\rho^{2}E\left[\overline{\mathbf{u}}'\overline{\overline{\mathbf{u}}}\right]+\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]\frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\overline{\mathbf{u}}\right]=0
\end{aligned}
$$

(3.27)

Akan dicari nilai dari $\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\right]$, $\frac{1}{n}E\left[\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]$, dan $\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]$ pada persamaan

(3.27)

- Nilai dari $\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\right]$,

$$\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i}\varepsilon_i^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{i}E\left[\varepsilon_i^2\right]$$

  Karena diasumsikan bahwa $E\left[\varepsilon_i^2\right]=\sigma^2$ maka

$$\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\right]=\frac{1}{n}\sum_{i}E\left[\varepsilon_i^2\right]=\frac{1}{n}n\sigma^2=\sigma^2 \qquad (3.28)$$

- Nilai dari $\frac{1}{n}E\left[\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]$

$$\frac{1}{n}E\left[\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]=\frac{1}{n}\sigma^2 Tr(\mathbf{M}'\mathbf{M}) \qquad (3.29)$$

  (bukti pada lampiran 7)

- Nilai dari

$$\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]=0 \tag{3.30}$$

(bukti pada lampiran 8)

Dari hasil yang didapatkan pada persamaan (3.28), (3.29), dan (3.30), maka persamaan (3.27) menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n}\rho E\left[\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}\right]-\frac{1}{n}\rho^2E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right]+\sigma^2-\frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\mathbf{u}\right]&=0\\
\frac{2}{n}\rho E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right]-\frac{1}{n}\rho^2E\left[\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right]+\sigma^2Tr\left(\mathbf{M}'\mathbf{M}\right)-\frac{1}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right]&=0\\
\frac{1}{n}\rho E\left[\mathbf{u}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}+\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right]-\frac{1}{n}\rho^2E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right]+0-\frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}\right]&=0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Jika dinotasikan dalam bentuk matriks maka persamaan (3.31) menjadi

$$\begin{bmatrix}
\frac{2}{n}E\left[\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}\right] & -\frac{1}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right] & 1\\
\frac{2}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right] & -\frac{1}{n}E\left[\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right] & \frac{1}{n}Tr\left(\mathbf{M}'\mathbf{M}\right)\\
\frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}+\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right] & -\frac{1}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right] & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\rho\\ \rho^2\\ \sigma^2\end{bmatrix}
-\begin{bmatrix}
\frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\mathbf{u}\right]\\
\frac{1}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right]\\
\frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}\right]
\end{bmatrix}=\mathbf{0} \tag{3.32}$$

Dari hasil ini diperoleh kondisi momen

$$\boldsymbol{\Gamma\alpha}-\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$$

sedemikian sehingga $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho^2\\ \sigma^2\end{bmatrix}$ merupakan vektor parameter dengan

$$\Gamma=\begin{bmatrix}\frac{2}{n}E\left[\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}\right] & -\frac{1}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right] & 1\\ \frac{2}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right] & -\frac{1}{n}E\left[\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right] & \frac{1}{n}Tr\left(\mathbf{M'M}\right)\\ \frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}+\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right] & -\frac{1}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right] & 0\end{bmatrix}\text{ dan }\gamma=\begin{bmatrix}\frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\mathbf{u}\right]\\ \frac{1}{n}E\left[\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right]\\ \frac{1}{n}E\left[\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}\right]\end{bmatrix}$$

Misalkan $\tilde{\bar{\mathbf{u}}}=\mathbf{M}\tilde{\mathbf{u}}$ dan $\tilde{\bar{\bar{\mathbf{u}}}}=\mathbf{M}\tilde{\bar{\mathbf{u}}}$ dimana $\tilde{\mathbf{u}}$ merupakan residual yang diperoleh dari tahap 1 maka penaksir untuk $\boldsymbol{\Gamma}$ dan γ adalah **G** dan **g** yaitu sebagai berikut:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\frac{2}{n}\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\bar{\mathbf{u}}} & -\frac{1}{n}\tilde{\bar{\mathbf{u}}}'\tilde{\bar{\mathbf{u}}} & 1\\ \frac{2}{n}\tilde{\bar{\mathbf{u}}}'\tilde{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} & -\frac{1}{n}\tilde{\bar{\bar{\mathbf{u}}}}'\tilde{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} & \frac{1}{n}Tr\left(\mathbf{M'M}\right)\\ \frac{1}{n}\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\bar{\bar{\mathbf{u}}}}+\tilde{\bar{\mathbf{u}}}'\tilde{\bar{\mathbf{u}}} & -\frac{1}{n}\tilde{\bar{\mathbf{u}}}'\tilde{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} & 0\end{bmatrix}\text{ dan }\mathbf{g}=\begin{bmatrix}\frac{1}{n}\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}}\\ \frac{1}{n}\tilde{\bar{\mathbf{u}}}'\tilde{\bar{\mathbf{u}}}\\ \frac{1}{n}\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\bar{\mathbf{u}}}\end{bmatrix}$$

(3.33)

Sehingga diperoleh persamaan empiris untuk kondisi momen yaitu

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{g}=\mathbf{v} \tag{3.34}$$

Dengan **v** merupakan vektor residual.

Hasil penaksiran dengan *Generalized Moment* didefinisikan sebagai hasil meminimumkan jumlah kuadrat residual atau **v'v** pada (3.34), yaitu dengan langkah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\mathbf{v'v}&=\left[\mathbf{g}-\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}\right]'\left[\mathbf{g}-\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}\right]\\ &=\mathbf{g'g}-\mathbf{g'G}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{G'g}+\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{GG}\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

(3.35)

Karena hasil dari $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{G'g}$ berupa skalar maka $\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{G'g}$ simetris maka

$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{G}'\mathbf{g} = (\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{G}'\mathbf{g})' = (\mathbf{G}'\mathbf{g})'\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{g}'\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$$

sehingga persamaan (3.35) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{g}'\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{G}'\mathbf{g} + \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{G}\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} \qquad (3.36)$$

Nilai taksiran α diperoleh dengan meminimumkan nilai kuadrat residual **v’v** yaitu

$$\frac{\partial \mathbf{v}'\mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -2\mathbf{G}'\mathbf{g} + 2\mathbf{G}'\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} = 0$$

$$\mathbf{G}'\mathbf{g} = \mathbf{G}'\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}$$

Sehingga didapatkan taksiran untuk α yaitu

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\mathbf{G}'\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{g} \qquad (3.37)$$

Solusi ini meminimumkan jumlah kuadrat residual untuk persamaan (3.34) (bukti pada lampiran 9). Dari hasi penaksiran ini didapatkan taksiran parameter spasial error yaitu $\hat{\rho}$. Taksiran parameter ini akan digunakan untuk tahap 3.

3.2.3 Tahap 3: Estimasi Model Akhir

Pada bagian ini vektor parameter $\boldsymbol{\delta}$ yang berisi vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan λ akan diestimasi kembali dengan 2SLS. Penaksiran kembali parameter-parameter ini harus dilakukan karena penaksiran yang dihasilkan pada tahap 1 belum memperhatikan adanya korelasi error antar unit lokasi.

Dari prosedur yang dilakukan pada langkah 2 didapatkan nilai taksiran parameter ρ yaitu $\hat{\rho}$. Selanjutnya taksiran ini akan disubtitusikan ke dalam model yang telah ditransformasi Cochrane-Orcutt sehingga penaksiran kembali vektor parameter **β** dan λ dapat dilakukan.

Perhatikan model yang telah ditransformasi yaitu persamaan (3.8). Jika nilai penaksir ρ yaitu $\hat{\rho}$ disubtitusi ke persamaan tersebut maka didapatkan nilai dari

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{y} - \hat{\rho}\mathbf{M}\mathbf{y} \qquad \text{dan} \qquad \mathbf{Z}^* = \left(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{Z}$$

Karena

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^* &= \left(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{Z} \\ &= \left(\mathbf{I} - \hat{\rho}\mathbf{M}\right)\left(\mathbf{X}, \mathbf{Wy}\right) \\ &= \left(\mathbf{X} - \hat{\rho}\mathbf{MX}, \mathbf{Wy} - \hat{\rho}\mathbf{MWy}\right) \\ &= \left(\mathbf{X}^*, \mathbf{Wy}^*\right) \end{aligned}$$

maka model hasil transformasi pada persamaan (3.8) dapat pula ditulis sebagai

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \lambda\mathbf{Wy}^* + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.38}$$

dengan $\mathbf{X}^* = \mathbf{X} - \hat{\rho}\mathbf{MX}$ dan $\mathbf{Wy}^* = \mathbf{Wy} - \hat{\rho}\mathbf{MWy}$

Selanjutnya akan dilakukan penaksiran vektor parameter β dan parameter λ dalam vektor **δ** dengan metode 2SLS. Pada model yang telah ditransformasi yaitu pada bentuk model (3.38) terdapat kasus bahwa variabel regressor **Z*** mengandung **Wy*** yang berkorelasi dengan ε (bukti pada lampiran 10). Karena terdapat kasus bahwa terdapat variabel regressor yang berkorelasi dengan error maka penaksiran dilakukan dengan metode 2SLS. Formula taksirannya adalah sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \left[\hat{\mathbf{Z}}^*(\hat{\rho})'\hat{\mathbf{Z}}^*(\hat{\rho})\right]^{-1}\hat{\mathbf{Z}}^*(\hat{\rho})'\mathbf{y}^*(\hat{\rho}) \tag{3.39}$$

Dimana $\hat{\mathbf{Z}}^* = \left[\mathbf{X} - \hat{\rho}\mathbf{MX}, \mathbf{S}\left(\mathbf{S}'\mathbf{S}\right)^{-1}\mathbf{S}'\left(\mathbf{Wy} - \hat{\rho}\mathbf{MWy}\right)\right]$, dengan **S** merupakan matriks instrumen variabel.

Dari hasil penaksiran ini didapatkan model transformasi taksiran

$$\hat{\mathbf{y}}_i^* = \mathbf{X}^*\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\lambda}\mathbf{Wy}^* \tag{3.40}$$

Dengan mengembalikan bentuk setelah ditransformasi tersebut ke dalam bentuk semula, maka didapatkan model

$$\hat{y}_i = \hat{\rho}\sum_j m_{ij}y_j + \sum_{t=1}^{k} x_{it}\hat{\beta}_t + \hat{\lambda}\sum_j w_{ij}y_j - \hat{\rho}\sum_{t=1}^{k}\sum_j w_{ij}x_{it}\hat{\beta}_t - \hat{\rho}\sum_j m_{ij}w_{ij}y_j$$

Model ini merupakan model taksiran akhir karena telah melibatkan efek spasial lag dan spasial error pada penaksirannya.

3.3 MATRIKS VARIABEL INSTRUMEN UNTUK METODE 2SLS DALAM MENGESTIMASI MODEL SPASIAL DEPENDEN

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab sebelumnya, variabel instrumen harus dibentuk sedemikian sehingga tidak berkorelasi dengan error dan berkorelasi dengan variabel regressor. Pada estimasi tahap pertama yang digunakan adalah model spasial lag. Pada model tersebut variabel **X** diasumsikan tidak berkorelasi dengan **u** dan variabel **X** berkorelasi dengan **Wy** sehingga variabel-variabel dalam **X** dapat digunakan sebagai variabel instrumen yang valid. Akan tetapi, banyaknya variabel instrumen tersebut adalah k sehingga belum lebih besar dari banyaknya kolom pada **Z** yaitu k+1. Oleh karena itu banyaknya variabel instrumen ditambah dengan kombinasi dari **X** seperti **WX** atau **MX**. Karena **X** merupakan matriks instrumen variabel yang valid maka perkaliannya dengan suatu matriks **W** atau **M** juga merupakan matriks instrumen variabel yang valid. Oleh karena itu matriks variabel instrumen yang valid yang disarankan untuk tahap 1 adalah $\mathbf{H} = (\mathbf{X}, \mathbf{WX})$ atau $\mathbf{H} = (\mathbf{X}, \mathbf{MX})$ (bukti pada lampiran 11).

Pada estimasi tahap ketiga yang digunakan adalah regressor $\mathbf{Z}^* = (\mathbf{X}^*, \mathbf{Wy}^*)$. Dalam hal ini variabel regressor **X*** tidak berkorelasi dengan ε dan berkorelasi dengan **Wy*.** Dengan penjelasan yang sama seperti menentukan matriks instrumen variabel untuk tahap pertama maka variabel instrumen yang valid yang disarankan untuk estimasi tahap 3 adalah $\mathbf{S} = (\mathbf{X}^*, \mathbf{WX}^*)$ atau $\mathbf{S} = (\mathbf{X}^*, \mathbf{MX}^*)$ (bukti pada lampiran 12).

3.4 MATRIKS BOBOT SPASIAL

Matriks bobot spasial **W** dan **M** memberikan rata-rata bobot untuk observasi dan error dari lokasi-lokasi di sekitar lokasi yang diamati. Dengan kata lain, matriks bobot spasial merepresentasikan keterkaitan antar lokasi yang memberikan pengaruh pada masing-masing lokasi tersebut. Secara umum, elemen-elemen dari **W** yaitu w_{ij} merupakan hubungan antara lokasi ke i dan ke j dimana

$w_{ij} = 0$ jika i tidak berhubungan dengan j atau i=j

$w_{ij} = a,\ a \neq 0$ jika i berhubungan dengan j

Oleh karena itu elemen diagonal matriks bobot diasumsikan sama dengan 0. Matriks bobot spasial yang digunakan terlebih dahulu distandarisasi yaitu $\sum_j w_{ij} = 1$ yang menghasilkan jumlah bobot untuk setiap lokasi yang diamati bernilai satu.

Berikut adalah jenis-jenis penentuan matriks bobot spasial antara lokasi i dan lokasi j yang berhubungan.

i) *Contiguity Weight*

i.1 *Rook Contiguity*

didefinisikan sebagai:

$w_{ij} = 1$ jika lokasi i dan j memiliki *common edge*

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

i.2 *Bishop Contiguity*

didefinisikan sebagai:

$w_{ij} = 1$ jika lokasi i dan j memiliki *common verteks*

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

i.3 *Queen Contiguity*

didefinisikan sebagai:

$w_{ij} = 1$ jika lokasi i dan j memiliki *common ege* atau *common verteks*

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

ii) Distance Weight

Cara lain dalam menentukan entri-entri matriks bobot adalah menggunakan fungsi jarak. Pada prinsipnya bobot jarak antara suatu lokasi dengan lokasi lain ditentukan dengan jarak kedua daerah itu. Semakin dekat jarak kedua lokasi tersebut maka bobot yang diberikan semakin besar. Berikut beberapa cara dalam menentukan matriks bobot berdasarkan fungsi jarak:

ii.1 Fungsi jarak menurun

Didefinisikan sebagai

$$w_{ij} = d_{ij}^{z} \qquad \text{jika} \quad d \leq D, z < 0$$

$$w_{ij} = 0 \qquad \text{jika } d > D$$

ii.2 K lokasi terdekat

Pada cara ini peneliti menentukan sebanyak k lokasi j di sekitar lokasi i yang terdekat dengan lokasi tersebut.

ii.3 Invers jarak

Didefinisikan sebagai

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{ij}} \qquad \text{jika } d \leq D$$

$$w_{ij} = 0 \qquad \text{jika } d > D$$

Keterangan:

D: limit jarak yang ditentukan

d: jarak antar lokasi i dan j

Tidak ada ketentuan tentang bagaimana memilih cara menentukan matriks bobot. Akan tetapi biasanya para peneliti menggunakan metode *queen contiguity* .

BAB IV

APLIKASI

Pada bagian ini akan dibahas bagaimana contoh mengestimasi parameter model yang diasumsikan memiliki karateristik spasial lag sekaligus spasial error. Estimasi dilakukan dengan menggunakan *software* Eviews 3 dan menggunakan GeoDa 0.9.5.i untuk mendapatkan informasi tentang efek spasial serta dibantu oleh SPSS 13.

4.1 LATAR BELAKANG

Kriminalitas merupakan aspek yang sangat penting dalam kehidupan masyarakat. Hal ini menyangkut keamanan dan ketentraman hidup serta kelancaran jalannya aktivitas-aktivitas baik ekonomi, pendidikan, pemerintahan, dan sebagainya. Oleh karena itu, angka kriminalitas merupakan suatu hal yang menjadi perhatian masyarakat untuk dijadikan suatu pertimbangan dalam melakukan berbagai aktivitas maupun pemilihan lokasi untuk suatu kepentingan.

Secara substansi angka kriminalitas dipengaruhi oleh lingkungan. Dengan kata lain, angka kriminalitas di suatu daerah memberi pengaruh dan dipengaruhi oleh angka kriminalitas daerah lain yang berhubungan dengan daerah tersebut. Selain dipengaruhi oleh faktor eksternal tersebut, angka kriminalitas juga dipengaruhi oleh faktor internal pada daerah itu seperti harga rumah dan pendapatan keluarga. Oleh karena itu, hal-hal ini dapat memberikan informasi untuk memprediksi angka kriminal pada suatu daerah.

4.2 TUJUAN

Membuat suatu model yang mampu memprediksi angka kriminalitas pada suatu daerah dengan informasi angka kriminalitas daerah sekitarnya, serta harga rumah dan pendapatan keluarga pada daerah tersebut dan pada daerah sekitarnya.

4.3 DATA

Data yang digunakan adalah data kriminal pada tahun 1980 dari pusat kota Colombus dengan 49 lokasi. Data ini diambil dari Anselin Luc (1998). *Spatial Econometrics. Boston, Kluwer Academic, table* 12.1.p.189. Variabel yang digunakan adalah sebagai berikut.

Crime : angka pencurian isi rumah dan kendaraan per 1000 rumah tangga

Hoval : harga rumah ($ 1000)

Inc : pendapatan keluarga ($ 1000)

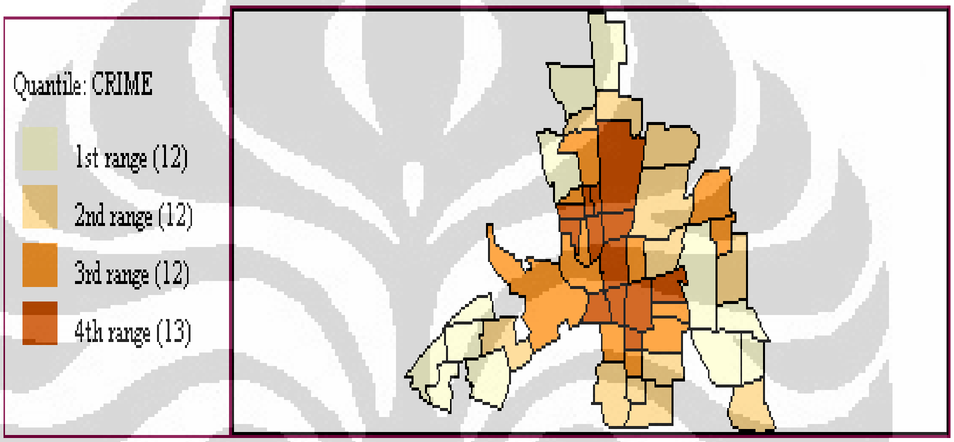
(x,y) : titik koordinat dari pusat observasi

Neig : jumlah tetangga

Dari variabel-variabel diatas, variabel *Crime* digunakan sebagai variabel dependen sedangkan *Hoval* dan *Inc* digunakan sebagai variabel independen. Variabel (x,y) dan *Neigh* memberikan informasi tentang lokasi observasi dan jumlah tetangga yang dimiliki oleh lokasi tersebut.

4.4 *QUARTILE MAP*

Quartile map digunakan untuk melihat distribusi spasial dari sebuah variabel. Berikut adalah quartile map dari variabel *Crime*

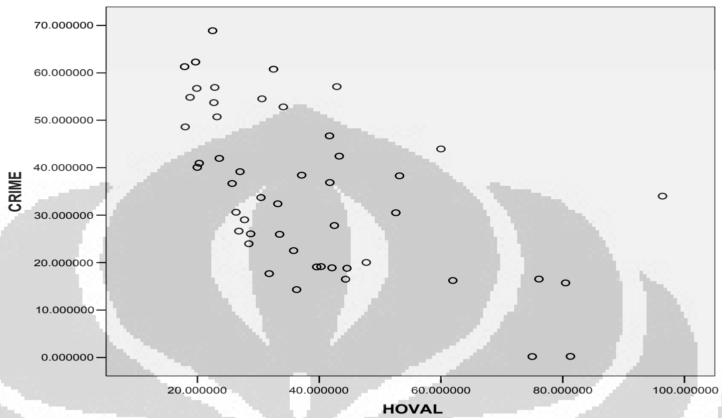


GAMBAR 1.*Quartile Map* dari *Crime*

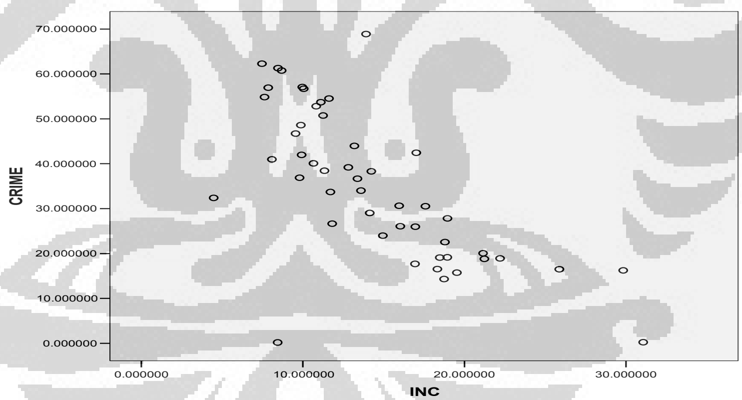
Warna-warna pada gambar di atas merepresentasikan karateristik nilai *Crime*. Dari gambar tersebut terlihat suatu pola bahwa lokasi-lokasi yang berdekatan cenderung memiliki karateristik *crime* yang sama.

4.5 *SCATTER PLOT*

Scatter plot antara dua variabel digunakan untuk melihat hubungan antar kedua variabel tersebut secara visual. Akan tetapi, kelemahan diagnosa dengan menggunakan *scatter plot* adalah adanya unsur subjektif dalam melihat pola pada gambar. Berikut akan ditampilkan *scatter plot* variabel dependen *Crime* dengan variabel-variabel independennya yaitu *Hoval* dan *Inc*.



GAMBAR 2. *Scatter plot Crime* dengan *Hoval*



GAMBAR 3. *Scatter plot Crime* dengan *Inc*

Dari gambar 2 dan 3 dapat diindikasikan bahwa terdapat hubungan linear negatif antara variabel *Hoval* dan *Inc* dengan variabel *Crime* .

4.6 PENAKSIRAN PARAMETER MODEL SPASIAL DEPENDEN

Estimasi parameter model ini dilakukan dengan menggunakan matriks **M** dan **W** berdasarkan metode *Queen Contiguity.* Seperti telah dijelaskan pada BAB III, penaksiran model dilakukan melalui tiga tahap sebagai berikut

4.6.1 Model Taksiran Spasial Lag

Bardasarkan hasil pada Lampiran 1, didapatkan model taksiran spasial lag sebagai berikut

$$\hat{y}_i = 43.96319\text{-}0.265793\left(Hoval\right)_{\mathrm{i}}\text{-}1.009637\left(\mathrm{Inc}\right)_i + 0.453491\sum_{\mathrm{j}} \mathrm{w}_{\mathrm{ij}} y_j$$

4.6.2 Taksiran Parameter Spasial Error

Bardasarkan hasil pada Lampiran 2 didapatkan bahwa $\hat{\rho} =$ 0.065624 . Nilai ini digunakan untuk proses pada tahap berikutnya.

4.6.3 Model Taksiran Akhir

Bardasarkan hasil pada Lampiran 3 didapatkan model taksiran yang mengandung spasial lag sekaligus spasial error untuk model yang telah ditransformasi sebagai berikut

$$\hat{y}_i^* = 40.99922 - 0.271723\left(\mathrm{Hoval}^*\right)_i - 0.985755\ \left(\mathrm{Inc}^*\right)_{\mathrm{i}} + 0.452609\left(\sum_{\mathrm{j}} w_{ij} y_j\right)^*$$

Jika model dikembalikan ke dalam bentuk yang tidak ditransformasi maka:

$$\hat{y}_i = 38.308687 + 0.065624\sum_{j} m_{ij} y_j + 0.452609\sum_{j} w_{ij} y_j - 0.271723(\text{Hoval})_i$$
$$-0.985755(\text{Inc})_i + 0.0177954\sum_{j} m_{ij}(Hoval)_j + 0.0646892\sum_{j} m_{ij}(Inc)_j$$
$$-0.029702\sum_{j} w_{ij} m_{ij} y_j$$

Jika pemilihan matriks bobot **M**= **W** maka model disederhanakan

menjadi:

$$\hat{y}_i = 38.308687 + 0.518251\sum_{j} m_{ij} y_j - 0.271723(\text{Hoval})_i$$
$$-0.985755(\text{Inc})_i + 0.0177954\sum_{j} m_{ij}(Hoval)_j + 0.0646892\sum_{j} m_{ij}(Inc)_j$$
$$-0.029702\sum_{j} m_{ij}^2 y_j$$

Keterangan-keterangan variable pada model adalah sebagai berikut

- $\sum_{j} m_{ij} y_j$, yaitu hasil penjumlahan nilai *Crime* terboboti dari lokasi-lokasi j yang terletak di sekitar lokasi i.
- $(\text{Hoval})_i$, yaitu nilai *Hoval* pada lokasi i.
- $(\text{Inc})_i$, yaitu nilai *Inc* pada lokasi i.
- $\sum_{j} m_{ij}(Hoval)_j$, yaitu hasil penjumlahan nilai *Hoval* terboboti dari lokasi-lokasi j yang terletak di sekitar lokasi i.
- $\sum_{j} m_{ij}(Inc)_j$, yaitu hasil penjumlahan nilai *Inc* terboboti dari lokasi-lokasi j yang terletak di sekitar lokasi i.
- $\sum_{j} w_{ij} m_{ij} y_j$, yaitu hasil penjumlahan nilai *Crime* terboboti dua kali dari lokasi-lokasi j yang terletak di sekitar lokasi i.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 KESIMPULAN

Model spasial dependen merupakan model yang memperhatikan dependensi spasial antara suatu lokasi dengan lokasi lainnya. Spasial dependen dibagi menjadi dua, yaitu spasial lag dan spasial error. Pada model spasial lag terdapat suatu variabel yang merupakan rata-rata terboboti dari nilai variabel dependen pada lokasi sekitarnya sedangkan pada model spasial error terdapat korelasi pada error antar lokasi. Adakalanya suatu model memiliki kedua jenis spasial dependen ini, yaitu model spasial lag sekaligus spasial error. Pada kasus ini terdapat korelasi nilai observasi dan error antar lokasi. Penaksiran parameter model dengan kedua jenis spasial dependen dengan OLS akan menghasilkan taksiran yang tidak konsisten. Oleh karena itu pada tulisan ini dibahas tentang bagaimana mengestimasi model jenis tersebut dengan metode yang dinamakan *Generalized Spasial Two Stage Least Square* (GS2SLS). Tahap-tahap pada metode GS2SLS yaitu estimasi model spasial lag tanpa memperhatikan spasial error, kemudian gunakan nilai residual dari tahap pertama untuk mengestimasi koefisien korelasi error, terakhir estimasi kembali parameter model spasial lag pada model yang telah ditransformasi. Dengan metode ini didapatkan taksiran yang konsisten sehingga semakin besar jumlah sampel maka nilai parameter taksiran semakin mendekati nilai parameter sebenarnya.

5.2 SARAN

Saran yang perlu diperhatikan adalah sebagai berikut.

1. Pada tulisan ini hanya dibahas tentang bagaimana mendapat taksiran yang konsisten tanpa menguji signifikansi taksiran parameter dan menguji kegunaan modelnya. Oleh karena itu perlu adanya pembahasan tentang pengujian-pengujian tersebut.
2. Diperlukan pembahasan tentang pengujian autokorelasi model spasial lag, yaitu dengan Morans I.
3. Metode pada tulisan ini hanya digunakan untuk menaksir model pada data cross section yang memperhatikan aspek lokasi sehingga perlu adanya pembahasan lebih lanjut jika ingin memperhatikan aspek korelasi antar waktu yaitu dalam *Space Time Model*.
4. Metode pada tulisan ini hanya digunakan untuk menaksir model dengan variabel dependen numerik dan kontinu sehingga diperlukan pembahasan tentang model spasial dependen dengan variabel dependen kategorik yaitu *Spatial Probit Model*

DAFTAR PUSTAKA

Andra, Novi. 2007. *Model Spasial Dependen*, Depok: Departemen Matematika Universitas Indonesia

Anselin, Luc. 1999. *Spatial Econometrics.*http://www,csiss.org/learning_ resources/content/papers/balchap.pdf. 19 Septembar 2008, pk.14.00

Hogg R.V and Craig, A.T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Fifth Edition. New Jersey: Prentice-Hall

Green, William H. 1997. *Econometric Analysis*. New Jersey. Prentice-Hall

Kelejian, Harry H. dan Ingmar R. Prucha. 1997. *A Generalized Moments Estimator for the Autoregressive Parameter in a Spatial Model*. http://www.econ.umd.edu/~prucha/papers/IER40(1999).pdf, 25 Februari 2008. pk 11.30.

Kelejian, Harry H. dan Ingmar R. Prucha. 1998. *A Generalized Spatial Two Stage Least Squares Procedure for Estimating a Spatial Autoregressive Model with Autoregressive Disturbances*. http://wwwspringerlink.com/content/94r27454px237115/, 20 Februari 2008. pk 11.00.

McFadden, D. 1999. Chapter 4. *Instrumental Variables*. http://elsa.berkeley. edu/ ~mcfadden_f01/ch4.pdf. 15 Maret 2008, pk 13.00.

Nachrowi, Nachrowi D. 2006. *Pendekatan Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Rencer, Alvin C. 2002. *Methods of Multivariate Analysis*. United States of America: Willey Interscience.

Mendenhall, William and Terry Sincich. 1996. *Regression Analysis*. Fifth edition. New Jersey. Prentice Hall.

LAMPIRAN 1

DATA

POLYID	NEIG	HOVAL	INC	CRIME	X	Y
1	5	80.467003	19.531000	15.725980	38.799999	44.070000
2	1	44.567001	21.232000	18.801754	35.619999	42.380001
3	6	26.350000	15.956000	30.626781	39.820000	41.180000
4	2	33.200001	4.477000	32.387760	36.500000	40.520000
5	7	23.225000	11.252000	50.731510	40.009998	38.000000
6	8	28.750000	16.028999	26.066658	43.750000	39.279999
7	4	75.000000	8.438000	0.178269	33.360001	38.410000
8	3	37.125000	11.337000	38.425858	36.709999	38.709999
9	18	52.599998	17.586000	30.515917	43.439999	35.919998
10	10	96.400002	13.598000	34.000835	47.610001	36.419998
11	38	19.700001	7.467000	62.275448	37.849998	36.299999
12	37	19.900000	10.048000	56.705669	37.130001	36.119999
13	39	41.700001	9.549000	46.716129	35.950001	36.400002
14	40	42.900002	9.963000	57.066132	35.720001	35.599998
15	9	18.000000	9.873000	48.585487	39.610001	34.910000
16	36	18.799999	7.625000	54.838711	37.599998	34.080002
17	11	41.750000	9.798000	36.868774	48.580002	34.459999
18	42	60.000000	13.185000	43.962486	36.150002	33.919998
19	41	30.600000	11.618000	54.521965	35.759998	34.660000
20	17	81.266998	31.070000	0.223797	46.730000	31.910000
21	43	19.975000	10.655000	40.074074	34.080002	30.420000
22	19	30.450001	11.709000	33.705048	43.369999	33.459999
23	12	47.733002	21.155001	20.048504	49.610001	32.650002
24	35	53.200001	14.236000	38.297871	36.599998	32.090000
25	32	17.900000	8.461000	61.299175	39.360001	32.880001
26	20	20.299999	8.085000	40.969742	41.130001	33.139999
27	21	34.099998	10.822000	52.794430	43.950001	31.610001
28	31	22.850000	7.856000	56.919785	41.310001	30.900000
29	33	32.500000	8.681000	60.750446	39.720001	30.639999
30	34	22.500000	13.906000	68.892044	38.290001	30.350000
31	45	31.799999	16.940001	17.677214	27.940001	29.850000
32	13	40.299999	18.941999	19.145592	50.110001	29.910000
33	22	23.600000	9.918000	41.968163	44.099998	30.400000
34	44	28.450001	14.948000	23.974028	30.320000	28.260000
35	23	27.000000	12.814000	39.175053	43.700001	29.180000
36	46	36.299999	18.739000	14.305556	27.270000	28.209999
37	30	43.299999	17.017000	42.445076	38.320000	28.820000
38	24	22.700001	11.107000	53.710938	41.040001	28.780001

39	47	39.599998	18.476999	19.100863	24.250000	26.690001
40	16	61.950001	29.833000	16.241299	48.439999	27.930000
41	14	42.099998	22.207001	18.905146	51.240002	27.799999
42	49	44.333000	25.872999	16.491890	29.020000	26.580000
43	29	25.700001	13.380000	36.663612	41.090000	27.490000
44	25	33.500000	16.961000	25.962263	43.230000	27.309999
45	28	27.733000	14.135000	29.028488	39.320000	25.850000
46	48	76.099998	18.323999	16.530533	25.469999	25.709999
47	15	42.500000	18.950001	27.822861	50.889999	25.240000
48	27	26.799999	11.813000	26.645266	41.209999	25.900000
49	26	35.799999	18.796000	22.541491	42.669998	24.959999

LAMPIRAN 2

OUTPUT

Tahap 1

Dependent Variable: CRIME
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 01/08/99 Time: 05:58
Sample: 1 49
Included observations: 49
Instrument list: Q_HOVAL Q_INC HOVAL INC

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
HOVAL	-0.265793	0.092457	-2.874790	0.0062
Q_CRIME	0.453491	0.191396	2.369390	0.0222
INC	-1.009637	0.388593	-2.598184	0.0126
C	43.96319	11.23648	3.912542	0.0003

R-squared	0.649031	Mean dependent var	35.12882
Adjusted R-squared	0.625633	S.D. dependent var	16.73209
S.E. of regression	10.23762	Sum squared resid	4716.402
F-statistic	25.48041	Durbin-Watson stat	1.623172
Prob(F-statistic)	0.000000		

Tahap 2:

Dependent Variable: U
Method: Generalized Method of Moments
Date: 01/08/99 Time: 06:35
Sample: 1 49
Included observations: 49
White Covariance
Convergence achieved after: 2 weight matricies, 3 total coef iterations
Instrument list: SER01 MU

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MU	0.065624	0.305651	0.214702	0.8309

R-squared	0.001779	Mean dependent var	8.16E-08
Adjusted R-squared	0.001779	S.D. dependent var	9.912536
S.E. of regression	9.903717	Sum squared resid	4708.014
Durbin-Watson stat	1.631119	J-statistic	0.006979

Tahap 3:

Dependent Variable: CRIMESTAR
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 01/08/99 Time: 06:37
Sample: 1 49
Included observations: 49
Instrument list: HOVALSTAR INCSTAR SER06 SER07

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Q_CRIMESTAR	0.452609	0.194191	2.330738	0.0243
HOVALSTAR	-0.271723	0.093054	-2.920068	0.0055
INCSTAR	-0.985755	0.384134	-2.566173	0.0137
C	40.99922	10.40648	3.939779	0.0003

R-squared	0.625982	Mean dependent var	32.82866
Adjusted R-squared	0.601047	S.D. dependent var	16.19348
S.E. of regression	10.22824	Sum squared resid	4707.760
F-statistic	23.29986	Durbin-Watson stat	1.623398
Prob(F-statistic)	0.000000		

LAMPIRAN 3

BUKTI PERSAMAAN (3.9)

Adib: plim $\frac{\mathbf{X'u}}{n} \neq \mathbf{0}$

Bukti:

Misalkan $\mathbf{x}_i$ merupakan vektor yang berisi nilai-nilai k variabel independen untuk pengamatan ke-i. Pada kasus ini diasumsikan **u** pada masing-masing observasi bergantung pada **X** pada observasi tersebut atau dapat ditulis sebagai

$$E(u_i | \mathbf{x}_i) = \alpha_i \text{ dengan } E(\alpha_i) = 0$$

Oleh karena itu didapatkan bahwa

$$E(\alpha_i) = E\left(E(u_i | \mathbf{x}_i)\right) = E\left(u_i\right) = 0$$

Karena **X** berkorelasi dengan **u** maka

$$\text{cov}\left[\mathbf{x}_i, u_i\right] = \gamma$$

sedangkan

$$E\left[\mathbf{x}_i u_i\right] = \text{cov}\left[\mathbf{x}_i, u_i\right] + E\left[\mathbf{x}_i\right] E\left[u_i\right]$$

Karena $E\left[u_i\right] = 0$ maka menyebabkan $E\left[\mathbf{x}_i u_i\right] = \text{cov}\left[\mathbf{x}_i, u_i\right] = \gamma$

Untuk menggunakan teorema 1 pada pembuktian ini maka akan dicari nilai dari $E\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right)$ dan nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} \text{var}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X'u}\right)$

$$E\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = \frac{1}{n}E\left[\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \vdots \\ \mathbf{x}_n\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{n}E\left[\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\mathbf{x}_i u_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma = \gamma$$

Sedangkan

$$\operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = E\left(\left[\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right]\left[\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right]'\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}\frac{1}{n}\mathbf{u}'\mathbf{X}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}E\left(\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}\right)$$

Dengan demikian

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = 0$$

Oleh karena itu berdasarkan teorema 1 maka plim $\dfrac{\mathbf{X}'\mathbf{u}}{n} \neq \mathbf{0}$

LAMPIRAN 4

BUKTI PERSAMAAN (3.12)

Adib: $\text{plim}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right) = \mathbf{0}$

Bukti:

Untuk membuktikannya akan digunakan teorema 1. Oleh karena itu akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $E\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right) = \mathbf{0}$ dan $\lim_{n\to\infty} \text{var}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right) = \mathbf{0}$.

Misalkan $\mathbf{h}_i$ adalah vektor baris yang berisi nilai variabel-variabel instrumen untuk observasi ke-i maka

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right) &= \frac{1}{n}E\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}_1\\ \vdots\\ \mathbf{h}_n\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{n}E\left[\begin{pmatrix}\mathbf{h}_1 & \cdots & \mathbf{h}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(\mathbf{h}_i u_i\right) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Akan dicari nilai dari $E\left(\mathbf{h}_i u_i\right)$. Karena **H** dan **u** saling bebas serta $E\left(u_i\right)$=0 maka

$$E\left(\mathbf{h}_i u_i\right) = E\left(\mathbf{h}_i\right)E\left(u_i\right) = \mathbf{0}$$

Oleh karena itu, dari persamaan (A.1) terbukti bahwa $E\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right)=\mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right) &= E\left(\left[\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right]\left[\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right]'\right)\\ &= E\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\frac{1}{n}\mathbf{u'H}\right)\\ &= \frac{1}{n}E(\mathbf{H'})E(\mathbf{uu'})\frac{1}{n}E(\mathbf{H})\\ &= \frac{\sigma^2}{n}\frac{\mathbf{H'H}}{n}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right)=\mathbf{0}$$

Karena mean dari $\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right)$ adalah **0** dan variansinya konvergen ke **0**,

berdasarkan teorema 1 maka terbukti bahwa plim $\left(\frac{1}{n}\mathbf{H'u}\right)=\mathbf{0}$.

LAMPIRAN 5

VEKTOR Wy BERKORELASI DENGAN VEKTOR u

Adib: $\operatorname{cov}\left[(\mathbf{Wy}),\mathbf{u}\right] \neq \mathbf{0}$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa **Wy** berkorelasi dengan **u**. Berdasarkan teorema 1 maka hal ini dapat dilakukan dengan membukltikan bahwa

$\operatorname{cov}\left[(\mathbf{WY}),\mathbf{u'}\right] \neq \mathbf{0}$.

$$c\operatorname{ov}\left[(\mathbf{Wy}),\mathbf{u'}\right] = E\left[(\mathbf{Wy})\mathbf{u'}\right] - E\left[(\mathbf{Wy})\right]E\left[\mathbf{u'}\right] \tag{A.2}$$

Berdasarkan asumsi bahwa E(ε)= **0** maka $E(\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Sehingga (A.2) dapat dibentuk menjadi

$$c\operatorname{ov}\left[(\mathbf{Wy}),\mathbf{u'}\right] = E\left[(\mathbf{Wy})\mathbf{u'}\right]$$

(A.3)

Karena **W** merupakan matriks konstan maka (A.3) dapat dibentuk menjadi

$$\operatorname{cov}\left[(\mathbf{Wy}),\mathbf{u'}\right] = \mathbf{W}E\left[\mathbf{yu'}\right] \tag{A.4}$$

Dari model (3.1) dan (3.2) didapatkan bentuk

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})^{-1}\mathbf{X\beta} + (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{W})^{-1}\mathbf{u} \tag{A.5}$$

$$\mathbf{u}=\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{(A.6)}$$

Kemudian subtitusikan (A.5) pada (A.4)sehingga

$$\operatorname{cov}\left[(\mathbf{Wy}),\mathbf{u'}\right]=\mathbf{W}E\left\{\left[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}\mathbf{X\beta}+(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}\mathbf{u}\right]\mathbf{u'}\right\}$$

$$=\mathbf{W}E\left[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}\mathbf{X\beta u'}+(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}\mathbf{uu'}\right]$$

$$=\mathbf{W}\left\{E\left[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}\mathbf{X\beta u'}\right]+E\left[(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}\mathbf{uu'}\right]\right\}$$

$$=\ \mathbf{W}\left\{(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}\mathbf{X\beta}E\left[\mathbf{u'}\right]+(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}E\left[\mathbf{uu'}\right]\right\}$$

Karena $E(\mathbf{u})=\mathbf{0}$ maka

$$\operatorname{cov}\left[(\mathbf{Wy}),\mathbf{u'}\right]=\mathbf{W}(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W})^{\mathbf{-1}}E\left[\mathbf{uu'}\right] \qquad \text{(A.7)}$$

Selanjutnya akan dicari nilai $E\left[\mathbf{uu'}\right]$. Subtitusikan bentuk model (A.6) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} E\left[\mathbf{uu'}\right] &= E\left\{\left[(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right]\left[(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right]'\right\} \\ &= E\left\{(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\left[(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})^{-1}\right]'\right\} \\ &= (\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})^{-1}E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]\left[(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})^{-1}\right]' \end{aligned} \qquad \text{(A.8)}$$

Karena nilai tersebut masih mengandung $E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]$ yang belum diketahui maka akan dicari pula nilai dari $E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]$. Telah diasumsikan bahwa ε berisi komponen random $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$, yang independen. Berdasarkan sifat 3 maka

$$E\left[\varepsilon_i\varepsilon_j\right]=E\left[\varepsilon_i\right]E\left[\varepsilon_i\right]$$

Karena diasumsikan bahwa $E\,[\varepsilon_i]=0$ maka

$$E\left[\varepsilon_i\varepsilon_j\right]=0 \tag{A.9}$$

sehingga

$$E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]=E\begin{pmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\left[\varepsilon_1^2\right] & E\left[\varepsilon_1\varepsilon_2\right] & \cdots & E\left[\varepsilon_1\varepsilon_n\right]\\ E\left[\varepsilon_2\varepsilon_1\right] & E\left[\varepsilon_2^2\right] & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ E\left[\varepsilon_n\varepsilon_1\right] & E\left[\varepsilon_n\varepsilon_2\right] & \cdots & E\left[\varepsilon_n^2\right]\end{pmatrix}$$

Berdasarkan asumsi bahwa $E\left[\varepsilon_i^2\right]=\sigma^2$ dan hasil pada persamaan (A.9)

maka

$$E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]=\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma^2\end{pmatrix}=\sigma^2\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

sehingga $E\left[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'\right]=\sigma^2\mathbf{I}$. Oleh karena itu persamanan (A.8) menjadi

$$E\left[\mathbf{uu'}\right]=\sigma^2\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}'\right)^{-1}$$

Dengan demikian didapatkan hasil

$$\operatorname{cov}\left[\left(\mathbf{Wy}\right),\mathbf{u'}\right]=\mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W}\right)^{-1}\sigma^2\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}'\right)^{-1} \tag{A.10}$$

Karena masing-masing term tidak bernilai **0** maka

$$\operatorname{cov}\left[\left(\mathbf{Wy}\right),\mathbf{u'}\right]\neq\mathbf{0}$$

Jadi, terbukti bahwa terdapat korelasi antara **Wy** dan **u**.

LAMPIRAN 6

BUKTI PERSAMAAN (3.26)

Adib: dapat dibentuk ketiga persamaan pada persamaan (3.26)

Bukti

Perhatikan persamaan (3.24). Jika kedua ruas dikalikan dengan $\boldsymbol{\varepsilon}'$ maka

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\mathbf{u}-\rho\bar{\mathbf{u}}\right)'\left(\mathbf{u}-\rho\bar{\mathbf{u}}\right)\\ &=\mathbf{u}'\mathbf{u}-\rho\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}-\rho\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{u}+\rho^2\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Karena **M** simetris maka

$$\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}=\left(\mathbf{M}\mathbf{u}\right)'\mathbf{u}$$

sehingga

$$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{u}'\mathbf{u}-2\rho\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}+\rho^2\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}$$

Dengan memindahkan ruas pada term-termnya dan mengalikannya dengan

$\frac{1}{n}$

maka didapatkan hasil

$$\frac{2}{n}\rho\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}-\frac{1}{n}\rho^2\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}+\frac{1}{n}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{n}\mathbf{u}'\mathbf{u} \qquad \text{(A.11)}$$

Perhatikan persamaan (3.25), jika kedua ruas dikalikan dengan $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'$ maka

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left(\bar{\mathbf{u}}-\rho\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right)'\left(\bar{\mathbf{u}}-\rho\bar{\bar{\mathbf{u}}}\right)\\ &= \bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}-\rho\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}-\rho\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\bar{\mathbf{u}}+\rho^2\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}\end{aligned}$$

Karena **M** simetris maka

$$\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} = (\mathbf{Mu})'\mathbf{MMu} = \mathbf{u}'\mathbf{MMMu} = (\mathbf{MMu})'\mathbf{Mu} = \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\bar{\mathbf{u}}$$

sehingga

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}} - 2\rho\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \rho^2\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}$$

Dengan memindahkan ruas pada term-termnya dan mengalikannya dengan

$\frac{1}{n}$ maka didapatkan hasil

$$\frac{2}{n}\rho\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} - \frac{1}{n}\rho^2\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{1}{n}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{n}\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}} \qquad \text{(A.12)}$$

Perhatikan persamaan (3.24) dan (3.25). Jika kedua persamaan tersebut dikalikan maka

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\mathbf{u} - \rho\bar{\mathbf{u}})'(\bar{\mathbf{u}} - \rho\bar{\bar{\mathbf{u}}}) \\
&= \mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}} - \rho\mathbf{u}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} - \rho\bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}} + \rho^2\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} \\
&= \mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}} - \rho\left(\mathbf{u}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{u}}'\bar{\mathbf{u}}\right) + \rho^2\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}}
\end{aligned}$$

Dengan memindahkan ruas pada term-termnya dan mengalikannya dengan

$\frac{1}{n}$ maka didapatkan hasil

$$\frac{1}{n}\rho\left(\mathbf{u}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{u}\right) - \frac{1}{n}\rho^2\bar{\mathbf{u}}'\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \frac{1}{n}\boldsymbol{\varepsilon}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{n}\mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}} \qquad \text{(A.13)}$$

Dari hasil yang diperoleh pada persamaan (A.11), (A.12), (A.13) maka terbuktI bahwa dapat dibentuk ketiga persamaan pada persamaan (3.26)

LAMPIRAN 7

BUKTI PERSAMAAN (3.29)

Adib: $E\left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]=\sigma^2 Tr\left(\mathbf{M'M}\right)$

Bukti:

$E\left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]=E\left[\left(\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}\right)'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}\right]=E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}\right]$

Misal $\mathbf{m}_i$ adalah vektor kolom dari matriks **M** maka

$$\mathbf{M'M}=\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1\mathbf{m}_1' & \mathbf{m}_1\mathbf{m}_2' & \cdots & \mathbf{m}_1\mathbf{m}_n' \\ \mathbf{m}_2\mathbf{m}_1' & \mathbf{m}_2\mathbf{m}_2' & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_n\mathbf{m}_1' & \cdots & \cdots & \mathbf{m}_n\mathbf{m}_n' \end{pmatrix}$$

$$E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}\right]=E\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{m}_1\mathbf{m}_1' & \mathbf{m}_1\mathbf{m}_2' & \cdots & \mathbf{m}_1\mathbf{m}_n' \\ \mathbf{m}_2\mathbf{m}_1' & \mathbf{m}_2\mathbf{m}_2' & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_n\mathbf{m}_1' & \cdots & \cdots & \mathbf{m}_n\mathbf{m}_n' \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n\end{pmatrix}\right]$$

$$=E\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1\mathbf{m}_1\mathbf{m}_1' + \varepsilon_2\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2' + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{m}_1\mathbf{m}_n' \\ \varepsilon_1\mathbf{m}_2\mathbf{m}_1' + \varepsilon_2\mathbf{m}_2\mathbf{m}_2' + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{m}_2\mathbf{m}_n' \\ \vdots \\ \varepsilon_1\mathbf{m}_n\mathbf{m}_1' + \varepsilon_2\mathbf{m}_n\mathbf{m}_2' + \ldots + \varepsilon_n\mathbf{m}_n\mathbf{m}_n' \end{pmatrix}\right]$$

$$=E\begin{bmatrix} \varepsilon_1^2\mathbf{m}_1\mathbf{m}_1' + \varepsilon_1\varepsilon_2\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2' + \ldots + \varepsilon_1\varepsilon_n\mathbf{m}_1\mathbf{m}_n' + \\ \varepsilon_2\varepsilon_1\mathbf{m}_2\mathbf{m}_1' + \varepsilon_2^2\mathbf{m}_2\mathbf{m}_2' + \ldots + \varepsilon_2\varepsilon_n\mathbf{m}_2\mathbf{m}_n' + \\ \vdots \\ \varepsilon_n\varepsilon_1\mathbf{m}_n\mathbf{m}_1' + \varepsilon_n\varepsilon_2\mathbf{m}_n\mathbf{m}_2' + \ldots + \varepsilon_n^2\mathbf{m}_n\mathbf{m}_n' + \end{bmatrix}$$

Berdasarkan asumsi bahwa $E\left[\varepsilon_i^2\right]=\sigma^2$ dan $E\left(\varepsilon_i\varepsilon_j\right)=0 \quad \forall i,j$ dengan $i\neq j$ maka $E\left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]=\sigma^2 Tr\left(\mathbf{M'M}\right)$ *(terbukti)*

LAMPIRAN 8

BUKTI PERSAMAAN (3.30)

Adib: $\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]=0$

Bukti:

$$E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]=E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}\right]$$

$$=E\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & m_{12} & \cdots & m_{1n}\\ m_{21} & 0 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ m_{n1} & \cdots & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}\right]$$

$$=E\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_2 m_{12}+\ldots+\varepsilon_n m_{1n}\\ \varepsilon_1 m_{21}+\ldots+\varepsilon_n m_{2n}\\ \vdots\\ \varepsilon_1 m_{n1}+\varepsilon_2 m_{n2}+\ldots+\varepsilon_{n-1}m_{n-1n-1}\end{pmatrix}\right]$$

$$=E\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_2 m_{12}+\ldots+\varepsilon_n m_{1n}\\ \varepsilon_1 m_{21}+\ldots+\varepsilon_n m_{2n}\\ \vdots\\ \varepsilon_1 m_{n1}+\varepsilon_2 m_{n2}+\ldots+\varepsilon_{n-1}m_{n-1n-1}\end{pmatrix}\right]$$

$$=E\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2 m_{12}+\ldots+\varepsilon_1\varepsilon_n m_{1n}+\\ \varepsilon_1\varepsilon_2 m_{21}+\ldots+\varepsilon_n\varepsilon_2 m_{2n}+\ldots\\ +\varepsilon_1\varepsilon_n m_{n1}+\varepsilon_2\varepsilon_n m_{n2}+\ldots+\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-1}m_{n-1n-1}\end{pmatrix}\right]$$

Karena $E\left[\varepsilon_i\varepsilon_j\right]=0$ untuk $\forall i\neq j$ dengan $i\neq j$ maka $\frac{1}{n}E\left[\boldsymbol{\varepsilon}'\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\right]=0$ *(terbukti)*

LAMPIRAN 9

SOLUSI MEMINIMUMKAN JUMLAH KUADRAT RESIDUAL

Adib: $\frac{\partial\partial \mathbf{v'v}}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}'} = 2\mathbf{G'G}$ merupakan matriks definit positif

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa solusi yang didapatkan pada persamaan (3.34) meminimumkan jumlah kuadrat residual. Hal ini dapat dilakukan dengan membuktikan bahwa turunan kedua dari **v’v** adalah matriks definit positif.

$$\frac{\partial\partial \mathbf{v'v}}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}'} = 2\mathbf{G'G}$$

Misalkan **c** adalah sembarang vektor tak nol berukuran 3 x 1. Misalkan

$$\mathbf{a} = \mathbf{Gc} \tag{A.14}$$

maka $$q = \mathbf{c'G'Gc} = \mathbf{a'a} = \sum_i a_i^2$$

Jika elemen **a** tidak semua nol maka satu-satunya kemungkinan adalah **q** bernilai positif. Berdasarkan persamaan (A.14), karena tidak semua elemen **G** bernilai nol dan **c** merupakan vektor tak nol maka vektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Oleh karena itu

$$q = \mathbf{c'G'Gc} > 0$$

Berdasarkan definisi 5 maka **G’G** merupakan matriks positif definit . Hal ini membuktikan bahwa solusi pada persamaan (3.34) merupakan solusi yang meminimukan jumlah kuadrat residual.

LAMPIRAN 10

VEKTOR Wy* BERKORELASI DENGAN VEKTOR ε

Adib: $\text{cov}\left[\mathbf{Wy}^{*},\boldsymbol{\varepsilon}'\right] \neq \mathbf{0}$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa variabel regressor $\mathbf{Wy}^{*}$ berkorelasi dengan ε.

Karena $E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\right]=\mathbf{0}$ dan $\mathbf{Wy}^{*}=\mathbf{Wy}-\rho\mathbf{MWy}=\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy}$ maka

$$\begin{aligned}\text{cov}\left[\mathbf{Wy}^{*},\boldsymbol{\varepsilon}'\right] &= \text{cov}\left[\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy},\boldsymbol{\varepsilon}'\right] \\ &= E\left[\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy}\boldsymbol{\varepsilon}'\right]\end{aligned} \tag{A.15}$$

Karena $\boldsymbol{\varepsilon}=\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{u}$ sehingga $\boldsymbol{\varepsilon}'=\mathbf{u}'\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)'$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}E\left[\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy}\boldsymbol{\varepsilon}'\right] &= E\left[\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\left(\mathbf{Wy}\right)\mathbf{u}'\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)'\right] \\ &= \left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)E\left[\left(\mathbf{Wy}\right)\mathbf{u}'\right]\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)'\end{aligned} \tag{A.16}$$

Dari persamaan (A.10) telah didapatkan hasil bahwa

$$E\left[\left(\mathbf{Wy}\right)\mathbf{u}'\right]=\mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W}\right)^{-1}\sigma^{2}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}'\right)^{-1}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\text{cov}\left[\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\left(\mathbf{Wy}\right),\boldsymbol{\varepsilon}'\right] &= E\left[\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy}\boldsymbol{\varepsilon}'\right] \\ &= \sigma^{2}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}'\right)^{-1}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)' \\ &= \sigma^{2}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)\mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\lambda\mathbf{W}\right)^{-1}\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{A.17}$$

Karena masing masing term tidak bernilai **0** maka

$$\mathrm{cov}\left[(\mathbf{I} - p\mathbf{M})(\mathbf{Wy}), \boldsymbol{\varepsilon}'\right] = \mathrm{cov}\left[\mathbf{Wy}^*, \boldsymbol{\varepsilon}'\right] \neq \mathbf{0}$$

Berdasarkan teorema 1 maka terbukti bahwa variabel regressor $\mathbf{Wy}^*$ berkorelasi dengan ε.

LAMPIRAN 11

MATRIKS H MERUPAKAN MATRIKS VARIABEL INSTRUMEN VALID

Adib: matriks $\mathbf{H} = (\mathbf{X}, \mathbf{WX})$ merupakan matriks variabel instrumen yang valid.

Bukti:

Untuk membuktikan kevalidan dari matriks variabel instrumen, akan dibuktikan bahwa variabel-variabel atau kolom-kolom pada matriks tersebut

- Tidak berkorelasi dengan **u** (error)
- Berkorelasi dengan regressor **Wy**

Misalkan $\mathbf{x_t}$ adalah vektor kolom dari matriks **X** yang merepresentasikan variabel ke-t dari **X.** Pada model diasumsikan bahwa **X** tidak berkorelasi dengan **u**. Hal ini mengartikan bahwa setiap $\mathbf{x_t}$ tidak berkorelasi dengan **u**. Karena masing-masing $\mathbf{x_t}$ tidak berkorelasi dengan **u** maka untuk setiap t berlaku $\operatorname{cov}[\mathbf{x}_t, \mathbf{u}] = \mathbf{0}$

Misalkan $(\mathbf{Wx})_t$ adalah variabel ke-t dari **WX**. Akan dibuktikan bahwa untuk sembarang t, $(\mathbf{Wx})_t$ tidak berkorelasi dengan **u.**

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left[(\mathbf{Wx})_t, \mathbf{u}\right] &= E\left[(\mathbf{Wx})_t \mathbf{u'}\right] - E\left[(\mathbf{Wx})_t\right] E[\mathbf{u'}] \\ &= \mathbf{W}E[\mathbf{x}_t\mathbf{u'}] - \mathbf{W}E[\mathbf{x}_t]E[\mathbf{u'}] \\ &= \mathbf{W}\operatorname{cov}[\mathbf{x}_t, \mathbf{u}] \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Karena masing-masing variabel dalam **X** dan **WX** tidak berkorelasi dengan **u** terbukti bahwa variabel-variabel dalam matriks $\mathbf{H}=(\mathbf{X},\mathbf{WX})$ tidak berkorelasi dengan **u**.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa masing-masing variabel pada $\mathbf{H}=(\mathbf{X},\mathbf{WX})$ berkorelasi dengan **Wy.**

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\mathbf{x}_t,\mathbf{Wy}) &= E\left[\mathbf{x}_t(\mathbf{Wy})'\right]-E[\mathbf{x}_t]E\left[(\mathbf{Wy})'\right]\\
&= E[\mathbf{x}_t\mathbf{y}'\mathbf{W}']-E[\mathbf{x}_t]E[\mathbf{y}']\mathbf{W}'\\
&= E[\mathbf{x}_t\mathbf{y}']\mathbf{W}'-E[\mathbf{x}_t]E[\mathbf{y}']\mathbf{W}'\\
&= \left\{E[\mathbf{x}_t\mathbf{y}']-E[\mathbf{x}_t]E[\mathbf{y}']\right\}\mathbf{W}'\\
&= \operatorname{cov}(\mathbf{x}_t,\mathbf{y})\mathbf{W}'
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Karena $\operatorname{cov}(\mathbf{x}_t,\mathbf{y})\neq\mathbf{0}$ dan $\mathbf{W}\neq\mathbf{0}$ maka $\operatorname{cov}(\mathbf{x}_t,\mathbf{Wy})\neq\mathbf{0}$. Oleh karena itu variabel-variabel pada **X** berkorelasi dengan **Wy.**

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left[(\mathbf{Wx})_t,\mathbf{Wy}\right] &= E\left[(\mathbf{Wx})_t(\mathbf{Wy})'\right]-E\left[(\mathbf{Wx})_t\right]E\left[(\mathbf{Wy})'\right]\\
&= E[\mathbf{Wx}_t\mathbf{y}'\mathbf{W}']-\mathbf{W}E[\mathbf{x}_t]E[\mathbf{y}']\mathbf{W}'\\
&= \mathbf{W}E[\mathbf{x}_t\mathbf{y}']\mathbf{W}'-\mathbf{W}E[\mathbf{x}_t]E[\mathbf{y}']\mathbf{W}'\\
&= \mathbf{W}\operatorname{cov}(\mathbf{x}_t,\mathbf{y})\mathbf{W}'
\end{aligned}$$

Karena $\operatorname{cov}(\mathbf{x}_t,\mathbf{y})\neq\mathbf{0}$ dan $\mathbf{W}\neq\mathbf{0}$ maka $\operatorname{cov}\left[(\mathbf{Wx})_t,\mathbf{Wy}\right]\neq\mathbf{0}$. Oleh karena itu variabel-variabel pada **WX** berkorelasi dengan **Wy.**

Karena variabel-variabel dalam **X** dan **WX** berkorelasi dengan **Wy** maka terbukti bahwa variabel-variabel dalam matriks $\mathbf{H}=(\mathbf{X},\mathbf{WX})$ berkorelasi dengan **Wy.** Oleh karena itu, **H** merupakan matriks variabel instrumen yang valid untuk model spasial lag yang digunakan pada tahap 1.

LAMPIRAN 12

MATRIKS S MERUPAKAN MATRIKS VARIABEL INSTRUMEN VALID

Adib: matriks **S** = (**X*,Wy***) merupakan matriks variabel instrumen yang valid

Bukti:

Langkah-langkah pembuktian similar dengan lampiran 11.

Sebelumnya akan dibuktikan bahwa $\text{cov}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}\text{cov}(\mathbf{x}_t\boldsymbol{\varepsilon}) &= E\left[\mathbf{x}_t\left((\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})\mathbf{u}\right)'\right] - E\left[\mathbf{x}_t\right]E\left[\left((\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})\mathbf{u}\right)'\right] \\ &= E\left[\mathbf{x}_t\mathbf{u}'(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})'\right] - E\left[\mathbf{x}_t\right]E\left[\mathbf{u}\right](\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})' \\ &= \text{cov}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u})(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})' \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa variabel-variabel pada matriks **S** tidak berkorelasi dengan ε. Misalkan $\mathbf{x}_t^*$ merupakan variabel ke-t pada **X*** maka

$$\begin{aligned}\text{cov}(\mathbf{x}_t^*, \boldsymbol{\varepsilon}) &= E(\mathbf{x}_t^*\boldsymbol{\varepsilon}') - E(\mathbf{x}_t^*)E(\boldsymbol{\varepsilon}') \\ &= E\left[(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})\mathbf{x}_t\boldsymbol{\varepsilon}'\right] - E\left[(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})\boldsymbol{\varepsilon}_t\right]E(\boldsymbol{\varepsilon}') \\ &= (\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})\text{cov}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Misalkan $(\mathbf{Wx}^*)_t$ adalah variabel ke-t pada matriks **WX*** maka

$$\begin{aligned}\text{cov}(W\mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}) &= E(\mathbf{Wx}_t^*\boldsymbol{\varepsilon}') - E(\mathbf{Wx}_t^*)E(\boldsymbol{\varepsilon}') \\ &= E\left[\mathbf{W}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})\mathbf{x}_t\boldsymbol{\varepsilon}'\right] - E\left[\mathbf{W}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})\mathbf{x}_t\right]E(\boldsymbol{\varepsilon}') \\ &= \mathbf{W}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{M})\text{cov}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa variabel-variabel pada matriks **S** = (**X*,Wy***) tidak berkorelasi dengan ε**.**

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa variabel-variabel dalam **S** berkorelasi dengan **Wy.**

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(\mathbf{x}_t^*,\mathbf{Wy}^*\right) &= E\left(\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{x}_t\left(\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy}\right)'\right)-E\left(\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{x}_t\right)E\left(\left(\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy}\right)'\right)\\
&= \left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)E\left[\mathbf{x}_t\left(\mathbf{Wy}\right)'\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)'\right]-\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)E\left[\mathbf{x}_t^*\right]E\left(\left(\mathbf{Wy}\right)\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)'\right)\\
&= \left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\operatorname{cov}\left(\mathbf{x}_t,\mathbf{Wy}\right)\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)'\\
&\neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(\left(\mathbf{Wx}^*\right)_t,\mathbf{Wy}^*\right) &= E\left(\mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{x}_t\left(\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy}\right)'\right)-E\left(\mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{x}_t\right)E\left(\left(\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\mathbf{Wy}\right)'\right)\\
&= \mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)E\left[\mathbf{x}_t\left(\mathbf{Wy}\right)'\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)'\right]-\mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)E\left[\mathbf{x}_t^*\right]E\left(\left(\mathbf{Wy}\right)\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)'\right)\\
&= \mathbf{W}\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)\operatorname{cov}\left(\mathbf{x}_t,\mathbf{Wy}\right)\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\rho}\mathbf{M}\right)'\\
&\neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Karena terbukti bahwa setiap variabel pada **X*** dan **WX*** berkorelasi dengan **Wy*** maka **S** = (**X*,Wy***) berkorelasi dengan **Wy.** Oleh karena itu terbukti bahwa matriks **S** merupakan matriks instrumen variabel yang valid untuk tahap 3