UNIVERSITAS INDONESIA

PENAKSIRAN PARAMETER KOINTEGRASI MULTIVARIAT DENGAN MENGGUNAKAN METODE JOHANSEN MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

NURGIYANTI
0606067660

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010

UNIVERSITAS INDONESIA

PENAKSIRAN PARAMETER KOINTEGRASI MULTIVARIAT DENGAN MENGGUNAKAN METODE JOHANSEN MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

NURGIYANTI
0606067660

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010

HALAMAN PERYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua

sumber baik yang dikutip maupun dirujuk

telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Nurgiyanti
NPM	: 0606067660
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 6 Juli 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :

Nama : NURGIYANTI

NPM : 0606067660

Program Studi : Matematika

Judul Skripsi : Penaksiran Parameter Kointegrasi Multivariat dengan Menggunakan Metode Johansen Maksimum Likelihood

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dra. Ida Fithriani, M.Si ( )

Pembimbing : Mila Novita, S.Si, M.Si ( )

Penguji : Prof. Dr. Djati Kerami ( )

Penguji : Dra. Saskya Mary, M.Si ( )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 6 Juli 2010

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi rabbil'aalamiin. Puji syukur senantiasa penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dalam menyelesaikan tugas akhir ini, tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih penulis haturkan kepada :

1. Ibu Dra. Ida Fithriani, M.Si. dan Ibu Mila Novita, S.Si., M.Si., selaku pembimbing tugas akhir, terima kasih telah bersedia mengorbankan waktu, tenaga dan pikiran untuk membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih juga untuk semua arahan, masukan, nasehat, doa dan hari-hari bimbingan yang menyenangkan yang telah diberikan kepada penulis. Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan Ibu Ida dan Mba Mila.
2. Ibu Dra. Nora Hariadi, M.Si., selaku pembimbing akademik, terima kasih telah sabar membimbing penulis dari sejak masuk kuliah hingga lulus. Terima kasih atas semua saran, masukan, nasehat dan doa yang telah diberikan kepada penulis. Terima kasih juga telah bersedia meluangkan waktu untuk mendengarkan keluh kesah penulis ketika penulis menghadapi masalah dalam perkuliahan.
3. Dr. Yudi Satria, selaku Ketua Departemen Matematika UI dan Ibu Rahmi Rusin, S.Si., M. ScTech., selaku Sekretaris Departemen Matematika UI, terima kasih atas semua bantuan yang telah diberikan kepada penulis.
4. Seluruh Staf Dosen dan Karyawan Departemen Metematika UI, terima kasih telah mendidik penulis dari sejak masuk kuliah hingga lulus. Doakan penulis supaya penulis dapat berguna bagi bangsa dan negara dengan ilmu yang telah penulis peroleh.

5. Kedua Orang Tua tercinta yang selalu memberikan semangat, nasehat dan dukungan kepada penulis. Terima kasih atas cinta dan kasih sayang yang tak terkira yang telah diberikan selama ini kepada penulis. Kalian adalah yang terpenting bagi penulis.
6. Kakak dan sepupu penulis, Mba Darsini, Mba Daryati, Mas Sumadi, Mas Giyarto dan Sugeng Basuki, terima kasih atas semua dukungan dan bantuan yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan kuliah di Universitas Indonesia.
7. Sahabat penulis, Ar Rizqiyatul Barokah, S.Si dan Sri Milawati Asshagab, S.H.Terima kasih untuk hari-hari yang menyenangkan yang telah diberikan selama ini. Untuk Rizqi, terima kasih telah bersedia membantu penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini. Untuk Asa, terima kasih atas semua semangat dan nasehat yang telah diberikan. *Our friendship is a neverending friendship*.
8. Miptah Abdurrojak Romli S.Sos., terima kasih telah setia menemani, membantu, mengerti penulis selama ini. *You make me stronger with your love honey*.
9. Mr. Soren Johansen. *Thanks a lot for your paper and your kindness to answer all of my questions.*
10. Semua teman-teman Matematika UI angkatan 2006; Alfa, Mela, Tami, Puspa, Nadya, Noor, Milla,Widya, Lena, Novi, Lee, Yuri, Rita, Syafira, Farah, Putri Helmet, Nita, Poe, Rahmanita, Kiky, Dita, Rita, Tasya,Laninca,Stefani, Ranti, Novi, Tika, Tino,Teguh, Reza, Yuko, Aliman, Rendy, Budi, Ichwan,Oza, Dani, Billy, Ali, Rama, Seven Hot, Bekti, Indra, Michael, Sutisna, Rifza, Latief, Rafli, Pangky, Rian, Dody. Terima kasih atas hari-hari kuliah yang menyenangkan selama ini. Untuk yang sudah lulus, *finally we did it!* Untuk yang belum lulus, semangat kawan, kalian pasti bisa.
11. Lembaga-lembaga yang telah memberikan beasiswa kepada penulis; BMU, Qatar *Charity*, PPA dan BBM, POSCO Tj *Park Foundation.* Terima kasih atas semua bantuan beasiwa yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan kuliah di Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun senantiasa penulis harapkan demi sempurnanya tugas akhir ini. Akhir kata, semoga tugas akhir ini dapat berguna bagi siapa saja yang mengkajinya serta dapat dikembangkan dan disempurnakan agar lebih bermanfaat untuk kepentingan orang banyak.

Penulis

2010

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nurgiyanti
NPM	: 0606067660
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Penaksiran Parameter Kointegrasi Multivariat dengan menggunakan metode Johansen Maksimum Likelihood

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 6 Juli 2010

Yang menyatakan

(Nurgiyanti)

ABSTRAK

Nama	:	Nurgiyanti
Program Studi	:	Matematika
Judul	:	Penaksiran Parameter Kointegrasi Multivariat dengan Menggunakan Metode Johansen Maksimum Likelihood

Asumsi kestasioneran merupakan asumsi yang harus dipenuhi pada sebagian besar teori ekonometri. Pada kenyataannya, hal ini hampir tidak terpenuhi untuk variabel-variabel ekonomi. Granger dan Newbold (1974) menunjukkan bahwa regresi yang dibentuk oleh variabel-variabel nonstasioner yang tidak berkorelasi akan menciptakan *spurious regression* (regresi palsu). Pada tahun 1987, Engle dan Granger merumuskan suatu ide untuk membuat kombinasi linier yang stasioner dari variabel-variabel nonstasioner yang disebut kointegrasi. Dalam ekonometrika, variabel-variabel yang terkointegrasi dikatakan berada dalam kondisi keseimbangan jangka panjang (*long run equilibrium*). Pengujian kointegrasi untuk kasus bivariat dapat dilakukan dengan menggunakan metode *Engle - Granger*, sedangkan penaksiran parameternya dapat dilakukan dengan metode *Engle - Granger two step procedurre.* Walaupun metode Engle - Granger mudah diterapkan, akan tetapi mempunyai beberapa kelemahan apabila diterapkan pada kasus kointegrasi mutivariat. Johansen (1988) merumuskan suatu metode pengujian kointegrasi untuk kasus multivariat yang disebut sebagai *Johansen Cointegration Test.* Pengujian kointegrasi Johansen mampu mendeteksi secara langsung ada berapa hubungan kointegrasi yang terbentuk dari n variabel yang diuji,. Sedangkan untuk penaksiran parameternya digunakan metode *Johansen Maximum Likelihood.* Dalam tugas akhir ini, hubungan kointegrasi multivariat diterapkan pada nilai Produk Domestik Bruto (PDB), ekspor dan Investasi di Indonesia pada tahun 1970-2007.

Kata kunci : variabel nonstasioner; kointegrasi; uji *Engle-Granger*; *Engle - Granger two step procedurre*; *Johansen Cointegration Test*; *Johansen Maximum Likelihood.*

xv + 78 hal.; 3 gbr.; 6 lamp.; 4 tab.

Bibliografi : 14 (1974-2009)

ABSTRACT

Name : Nurgiyanti
Program Study : Mathematics
Title : Estimation Multivariate Cointegration Parameters Using Johansen Maximum Likelihood Method

The majority of econometric theories are based on the assumption of stationarity. In fact, it is hardly fulfilled by economic variables. Granger and Newbold (1974) showed that the regression formed by uncorrelated nonstationary variables would create a spurious regression. In 1987, Engle and Granger formulated an idea to create a stationary linear combination of nonstationary variables that called cointegration. In econometrics, cointegrated variables are said to be in long run equilibrium relationship. For bivariate case, cointegration relationship can be tested by using *Engle and Granger* method, whereas the cointegration parameter can be estimated using *Engle and Granger two step procedurre*. Although *Engle and Granger's* method is easy to be implemented, but it has several weaknesses if it is applied in the multivariate cointegration case. Johansen (1988) formulated a method for multivariat cointegration case test called *Johansen Cointegration Test*. The Johansen's method is able to detect how many cointegration relations are formed directly from the n-variables tested. While, for estimating the cointegration parameters can be used *Johansen Maximum Likelihood* method. In this final project, the multivariate cointegration relationship is applied to the value of Gross Domestic Bruto (GDP), exports and investment in Indonesia from 1970 to 2007.

Key words : nonstationary variables; cointegration ; *Engle-Granger* test; *Engle-Granger two step procedurre; Johansen Cointegration Test; Johansen Maximum Likelihood.*

xv + 78 page ; 3 fig; 6 attach. ; 4 tab.

Bibliography : 14 (1974-2009)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Hubungan keseimbangan jangka panjang *(long run equilibrium)* antara variabel-variabel ekonomi merupakan salah satu bagian yang penting dalam teori ekonomi. Hal tersebut dikarenakan variabel-variabel yang mempunyai hubungan keseimbangan jangka panjang akan mempunyai tren stokastik yang sama dan selanjutnya memiliki arah pergerakan yang sama dalam jangka panjang. Sebagian besar variabel-variabel ekonomi yang membentuk hubungan keseimbangan jangka panjang tersebut adalah variabel runtun waktu *(time series)*. Oleh karena itu, banyak studi ekonometri yang memerlukan data runtun waktu *(time series)* untuk mengevaluasi hubungan keseimbangan jangka panjang tersebut.

Dalam analisa runtun waktu *(time series)*, asumsi kestasioneran dari variabel runtun waktu merupakan hal yang harus dipenuhi apabila akan melakukan inferensi statistik. Variabel runtun waktu *(time series)* dikatakan stasioner apabila variabel tersebut tidak mengalami perubahan rata-rata dan variansi secara sistematik sepanjang waktu atau dengan kata lain konstan dalam sistem.

Pada kenyataannya, sebagian besar variabel ekonomi merupakan variabel runtun waktu *(time series)* yang nonstasioner. Selama bertahun-tahun, para pelaku ekonometri menganggap bahwa kestasioneran dari variabel ekonomi tersebut hanya dapat dicapai dengan membuang komponen deterministik (*drifts* dan *trends*) dari data (Dolado, Gonzalo, dan Marmol, 1999). Oleh karena itu, masalah kenonstasioneran pada variabel ekonomi agaknya diabaikan dalam beberapa penerapan kasus. Para pelaku ekonometri lebih sering melakukan inferensi statistik yang melibatkan variabel-variabel nonstasioner dengan membentuk regresi linier secara langsung.

Granger dan Newbold (1974) telah menunjukkan bahwa regresi linier yang dibentuk dari variabel-variabel nonstasioner yang tidak berkorelasi akan menciptakan *nonsense* atau *spurious regression* (regresi palsu). Salah satu contoh dari *spurious regression* adalah regresi antara indeks harga saham gabungan (IHSG) dengan volume perdagangan saham di Bursa Efek Indonesia. Regresi antara dua variabel nonstasioner tersebut dapat menghasilkan koefisien determinasi (R^2) yang cukup tinggi dan hasil uji t yang signifikan, namun tidak mempunyai arti dalam ilmu ekonomi karena pada kenyataannya IHSG tidak berkorelasi secara langsung dengan volume perdagangan saham.

Secara ekonomi, yang berkorelasi langsung dengan volume perdagangan saham adalah besarnya perubahan indeks harga saham gabungan pada suatu waktu t, yang merupakan variabel stasioner, bukanlah besarnya indeks harga saham gabungan pada waktu t, sehingga regresi linier yang seharusnya dibentuk adalah regresi linier dari variabel perubahan indeks harga saham gabungan dengan besarnya volume perdagangan saham supaya tidak menghasilkan *spurious regression.*

Taksiran *least squares* pada *spurious regression* tidak konsisten, sehingga uji statistik yang biasanya berlaku untuk regresi linier tidak dapat diterapkan pada *spurious regression* (Enders, 2004). Hasil *spurious regression* tersebut tidak dapat diinterpretasikan karena akan menimbulkan kesimpulan yang salah dan tidak sesuai dengan keadaan yang sebenarnya. Oleh karena itu, muncul ide baru untuk menganalisa variabel-variabel ekonomi yang nonstasioner.

Engle dan Granger (1987) untuk pertama kalinya merumuskan suatu ide untuk mengkointegrasikan variabel-variabel nonstasioner tersebut menjadi suatu variabel yang stasioner. Dua atau lebih variabel nonstasioner dikatakan terkointegrasi apabila kombinasi linear dari variabel-variabel nonstasioner tersebut adalah suatu variabel yang stasioner. Misalkan, terdapat dua buah variabel runtun waktu (*time series*) nonstasioner Y_t dan X_t. Dua buah variabel tersebut dikatakan terkointegrasi apabila terdapat variabel stasioner Z_t, dimana $Z_t = Y_t - \alpha X_t$ dan α adalah parameter kointegrasi.

Konsep integrasi merupakan salah satu konsep yang penting dalam analisis kointegrasi. Suatu variabel runtun waktu (*time series*) dikatakan mempunyai orde integrasi d (I (d)) apabila setelah dilakukan proses *difference* sebanyak d kali, variabel tersebut menjadi variabel yang stasioner. Investasi merupakan salah satu contoh variabel I(1) karena variabel tersebut stasioner setelah di-*difference* sebanyak 1 kali, sedangkan variabel inflasi merupakan salah satu contoh variabel I(2) karena variabel tersebut stasioner setelah di-*difference* sebanyak 2 kali.

Dalam kointegrasi, variabel–variabel yang terkointegrasi harus mempunyai orde integrasi yang sama. Pada kenyataannya, variabel-variabel ekonomi sebagian besar adalah variabel I(1), sehingga studi ekonometri memfokuskan pada analisis kointegrasi variabel–variabel I (1).

Jika dilihat berdasarkan jumlah variabel yang terkointegrasi, kointegrasi dibagi menjadi dua, yaitu kointegrasi bivariat dan multivariat. Dalam konsep kointegrasi bivariat, hanya terdapat 2 buah variabel yang terkointegrasi, sehingga hanya terdapat 1 vektor kointegrasi. Sebagai contoh hubungan kointegrasi antara investasi dan nilai ekspor Indonesia yang telah dibahas oleh Aryanto,2009. Sementara itu, jika variabel yang terkointegrasi lebih dari 2 variabel, maka persamaan kointegrasi dan vektor kointegrasi yang dihasilkan bisa lebih dari 1. Hubungan kointegrasi yang di uji pada 3 variabel atau lebih disebut sebagai kointegrasi multivariat.

Konsep kointegrasi multivariat banyak diterapkan dalam model ekonomi karena pada kenyataannya hubungan kointegrasi banyak terjadi pada 3 variabel ekonomi atau lebih. Sebagai contoh hubungan kointegrasi antara nilai Produk Domestik Bruto,ekspor dan investasi Indonesia yang akan dibahas dalam penelitian pada tugas akhir ini.

Dalam ekonometrika, variabel yang saling terkointegrasi dikatakan dalam kondisi keseimbangan jangka panjang (*long-run equilibrium*), sedangkan untuk jangka pendek perlu diperhitungkan adanya fluktuasi atau lonjakan variabel pada jangka pendek. Realitanya, keseimbangan jangka panjang pada variabel yang terkointegrasi dapat berubah. Hal ini mungkin terjadi karena berbagai alasan, seperti krisis ekonomi, kemajuan teknologi, dan perubahan kebijakan suatu negara. Jika penyimpangan dari kondisi keseimbangan mempengaruhi perubahan sehimpunan variabel, maka diperlukan suatu *misspecification error*. Sargan (1964) memperkenalkan pertama kali (selanjutnya dipopulerkan oleh Engle dan Granger) suatu metode yang digunakan untuk mengoreksi ketidakseimbangan (*disequilibrium*) jangka pendek menuju pada keseimbangan jangka panjang yang disebut *Error Correction Model* (ECM).

Pada kasus kointegrasi multivariat, banyaknya vektor kointegrasi terbentuk lebih dari satu, sehingga prosedur pengujian kointegrasi dan metode penaksiran parameter kointegrasinya berbeda dan lebih kompleks dibandingkan dengan kasus kointegrasi bivariat. Metode *Ordinary Least Square* (OLS) biasa ataupun *Engle and Granger Two Step Procedure* yang digunakan pada penaksiran parameter kointegrasi bivariat (Aryanto, 2009) tidak dapat lagi digunakan pada kasus kointegrasi multivariat.

Johansen (1988) memperkenalkan suatu metode untuk menguji hubungan kointegrasi multivariat, yang disebut sebagai *Johansen Cointegration Test.* Pengujian kointegrasi Johansen tersebut mampu mendeteksi adanya vektor kointegrasi yang lebih dari satu, sehingga dapat menentukan secara langsung, dari n variabel I(1) yang ada, variabel mana saja yang terkointegrasi dan ada berapa banyak hubungan kointegrasi yang terjadi.

Untuk penaksiran parameter kointegrasinya digunakan metode maksimum likelihood yang dikenal sebagai *Johansen Maximum Likelihood* (JML). Metode pengujian kointegrasi multivariat dan metode penaksiran parameter yang diperkenalkan oleh Johansen tersebut merupakan metode yang akan dibahas dalam tugas akhir ini.

1.2 Permasalahan

Permasalahan dalam tugas akhir ini adalah :

1. Bagaimana cara menaksir parameter hubungan kointegrasi multivariat dengan menggunakan metode *Johansen Maximum Likelihood* (JML)?
2. Bagaimana cara menguji hubungan kointegrasi multivariat dengan menggunakan *Johansen Cointegration Test*?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Untuk menaksir parameter hubungan kointegrasi multivariat dengan menggunakan metode *Johansen Maximum Likelihood* (JML).
2. Untuk menguji hubungan kointegrasi multivariat dengan menggunakan *Johansen Cointegration Test.*

1.4 Pembatasan Masalah

Permasalahan pada tugas akhir ini dibatasi pada hubungan kointegrasi multivariat untuk kasus variabel-variabel I(1).

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan pada tugas akhir ini dibagi menjadi lima bab, yaitu:

Bab I. Pendahuluan

Berisi latar belakang, permasalahan, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II. Landasan Teori

Berisi pembahasan mengenai konsep runtun waktu, *Unit Root Test*, konsep dasar kointegrasi, *Vector Auto Regression* (VAR), matriks, differensiasi pada vektor dan matriks, metode maksimum likelihood, metode *ordinary least square*, dan penentuan panjang lag.

Bab III. Penaksiran Parameter Kointegrasi Multivariat

Berisi pembahasan mengenai konsep kointegrasi multivariat, penaksiran parameter kointegrasi multivariat dan pengujian kointegrasi Johansen.

Bab IV Penerapan Kointegrasi terhadap Nilai Produk Domestik Bruto, Ekspor, dan Investasi Indonesia Pada Tahun 1970−2007

Berisi pembahasan mengenai konsep dan definisi variabel penelitian, data penelitian, analisis deskriptif, tujuan penelitian, analisis data, serta kesimpulan dan saran penelitian.

Bab V Penutup

Berisi kesimpulan.

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa teori yang diperlukan untuk pembahasan bab-bab selanjutnya, antara lain konsep runtun waktu, *Unit Root Test*, konsep dasar kointegrasi, *Vector Auto Regression* (VAR), matriks, differensiasi pada vektor dan matriks, metode maksimum likelihood, metode *ordinary least square*, dan penentuan panjang *lag*.

2.1 Konsep Runtun Waktu

2.1.1 Definisi Runtun Waktu

Runtun waktu adalah himpunan barisan pengamatan yang terurut dalam waktu, dengan jarak interval waktu yang sama (Box-Jenkins, 1976). Jika barisan pengamatan tersebut dicatat dalam waktu yang kontinu, maka disebut runtun waktu kontinu; dan jika dicatat dalam waktu diskrit, maka disebut runtun waktu diskrit. Pada tugas akhir ini, akan dibahas runtun waktu diskrit dengan waktu t_i, i = 1, 2, . . ., n; dengan n adalah jumlah pengamatan.

Barisan pengamatan runtun waktu dinyatakan dengan $Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}$. Jadi, Y_{t_i} menyatakan pengamatan pada waktu t_i dengan Y adalah variabel acak (*random variable*). Himpunan berindeks dari variabel acak Y dengan indeks t anggota himpunan T disebut proses stokastik. Runtun waktu yang akan dianalisis dapat dianggap sebagai salah satu perwujudan dari proses stokastik. Contoh data runtun waktu (*time series*) dalam dunia ekonomi, antara lain adalah data harian Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG), data harian nilai tukar rupiah terhadap dollar Amerika, dan data tahunan Produk Domestik Bruto (PDB) Indonesia.

2.1.2 Kestasioneran

Supaya dapat melakukan inferensi statistik mengenai struktur proses stokastik pada pengamatan yang berhingga dari suatu proses, terlebih dahulu harus dibuat penyederhanaan tentang struktur tersebut, yang dinyatakan dalam suatu asumsi. Asumsi terpenting yang harus dipenuhi adalah kestasioneran. Kestasioneran terdiri dari dua jenis, yaitu stasioner kuat (*strictly stationary*) dan stasioner lemah (*weakly stationary*).

Misal barisan $\{Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}\}$ atau $\{Y_t\}$ adalah proses stokastik. Proses stokastik $\{Y_t\}$ disebut stasioner kuat (*strictly stationary*) jika distribusi bersama dari $Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}$ sama dengan distribusi bersama dari $Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, ..., Y_{t_n-k}$ untuk semua pilihan waktu $t_1, t_2, ..., t_n$ dan jeda waktu (*lag*) k.

- Kasus $n = 1$

  $P(Y_t) = P(Y_{t-k}) = P(Y)$

  Pada kasus ini, *mean:* $\mu_t = E(Y_t) = E(Y_{t-k})$ sehingga *mean* akan konstan sepanjang waktu; dan variansi, $Var(Y_t) = Var(Y_{t-k}) = \sigma_Y^2$, juga akan konstan sepanjang waktu.
- Kasus $n = 2$

  Karena p.d.f (*probability density function*) bersama dari $P(Y_t, Y_s) = P(Y_{t-k}, Y_{s-k})$, maka kestasioneran juga mengakibatkan kovariansi dan korelasi antara Y_t dan Y_s serta antara Y_{t-k} dan Y_{s-k} akan selalu sama dan konstan sepanjang waktu untuk setiap bilangan bulat k. Jadi, kovariansi dan korelasi tidak bergantung pada waktu t dan s, tetapi bergantung pada selisih waktu $|t - s|$. Kovariansi dan korelasi tersebut dinotasikan sebagai berikut:

  $\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k})$,

  $\rho_k = Corr(Y_t, Y_{t-k})$.

  Otokorelasi pada *lag k* didefinisikan sebagai rasio otokovariansi pada *lag k* dengan otokovariansi *lag* nol, yaitu $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$.

Menurut Cryer (1986), suatu proses stokastik disebut stasioner lemah (*weakly stationary*) jika :

1. Fungsi *mean* konstan sepanjang waktu.
2. $\gamma_{t,t-k} = \gamma_{0,k}$ $\forall$ waktu ke-t, t = 1, 2, . . ., n dan *lag* ke-k, k = ...-2,-1,0, 1, 2,...

2.1.3 *White Noise*

Suatu proses *white noise* didefinisikan sebagai barisan variabel acak $\{a_t\}$ yang saling bebas dan berdistribusi identik; dengan *mean* nol, $E(a_t) = 0$, dan variansi konstan, $Var(a_t) = \sigma_a^2$. Jika proses *white noise* diasumsikan berdistribusi normal, $a_t \sim N.I.I.D.\ (0, \sigma_a^2)$, maka proses tersebut dinamakan proses *normal* atau *Gausian white noise*.

Berikut adalah nilai otokovariansi dan otokorelasi dari proses *white noise*:

- Untuk *lag* $k = 0$:

Otokovariansi: $\gamma_0 = E[(a_t - E(a_t))(a_t - E(a_t))]$

$$= E\left[(a_t - E(a_t))^2\right] = E(a_t)^2$$

$$= Var(a_t) = \sigma_a^2.$$

Otokorelasi: $\rho_0 = \dfrac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1.$

- Untuk *lag* $k = 1$:

Otokovariansi: $\gamma_1 = E[(a_t - E(a_t))(a_{t-1} - E(a_{t-1}))]$

$$= E[(a_t - 0)(a_{t-1} - 0)]$$

$$= E(a_t a_{t-1})$$

$$= E(a_t)E(a_{t-1}) = 0.$$

Otokorelasi: $\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0.$

- Secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad \rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}.$$

White noise merupakan proses stasioner kuat (*strictly stationary*) karena distribusi bersama dari $a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_n}$ sama dengan distribusi bersama dari $a_{t_1-k}, a_{t_2-k}, ..., a_{t_n-k}$ untuk semua pilihan waktu $t_1, t_2, ..., t_n$ dan *lag k*.

Bukti:

$$P(a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_n}) = \Pr(a_{t_1} \le x_1, a_{t_2} \le x_2, ..., a_{t_n} \le x_n)$$

$$
\begin{aligned}
P\left(a_{t_1}, a_{t_2}, \ldots, a_{t_n}\right) &= \Pr\left(a_{t_1} \le x_1\right)\Pr\left(a_{t_2} \le x_2\right)\ldots\Pr\left(a_{t_n} \le x_n\right) \\
&\quad \text{(karena saling bebas)} \\
&= \Pr\left(a_{t_1-k} \le x_1\right)\Pr\left(a_{t_2-k} \le x_2\right)\ldots\Pr\left(a_{t_n-k} \le x_n\right) \\
&\quad \text{(karena berdistribusi sama)} \\
&= \Pr\left(a_{t_1-k} \le x_1, a_{t_2-k} \le x_2, \ldots, a_{t_n-k} \le x_n\right) \\
&= \Pr\left(a^{t_1-k}, a_{t_2-k}, \ldots, a^{t_n-k}\right)
\end{aligned}
$$

2.1.4 *Random Walk*

Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah variabel acak yang saling bebas dan berdistribusi identik, masing-masing dengan *mean* nol dan variansi σ_a^2. Runtun waktu $\{Y_t\}$ yang diamati dapat juga dinyatakan sebagai bentuk berikut:

$$
\begin{aligned}
&Y_1 = a_1 \\
&Y_2 = a_1 + a_2 \\
&Y_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\quad\vdots \\
&Y_t = a_1 + a_2 + \ldots + a_t = \sum_{i=1}^{t} a_i \ .
\end{aligned}
$$

Atau dapat juga ditulis sebagai $Y_t = Y_{t-1} + a_t$. Proses $\{Y_t\}$ dengan model $Y_t = Y_{t-1} + a_t$ disebut sebagai *random walk*. *Mean* dari runtun waktu $\{Y_t\}$ tersebut adalah :

$$\mu_t = E(Y_t) = E(a_1 + a_2 + \ldots + a_t) = E(a_1) + E(a_2) + \ldots + E(a_t) = 0,$$

sedangkan variansinya adalah :

$$
\begin{aligned}
Var(Y_t) &= Var(a_1 + a_2 + \ldots + a_t) \\
&= Var(a_1) + Var(a_2) + \ldots + Var(a_t) = t\sigma_a^2.
\end{aligned}
$$

Karena variansi dari proses *random walk* bergantung pada waktu, maka *random walk* merupakan runtun waktu yang nonstasioner. Model *random walk* dapat diperluas dengan menambahkan konstanta a_0, sehingga modelnya menjadi :

$$Y_t = a_0 + Y_{t-1} + a_t.$$

Model ini disebut model *random walk with drift*.

2.1.5 Model *Autoregressive* Orde Satu, AR(1)

Model runtun waktu univariat lainnya adalah model *Autoregressive* (AR). Asumsikan Y_t adalah runtun waktu stasioner. Runtun waktu Y_t dikatakan mempunyai model *Autoregressive* orde satu, dinotasikan dengan AR(1), jika nilai saat ini dari runtun waktu Y_t dapat dinyatakan sebagai fungsi linier dari nilai satu periode waktu sebelumnya, Y_{t-1}, dan *white noise*, a_t.

Model AR(1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Y_t = \varphi\, Y_{t-1} + a_t \qquad (2.1.5a)$$

dengan:

Y_t : pengamatan runtun waktu stasioner pada saat t

Y_{t-1} : pengamatan runtun waktu stasioner pada saat $t-1$

φ : parameter model AR(1)

a_t : runtun *white noise*, $a_t \sim N.I.I.D.\ (0, \sigma_a^2)$

Runtun *white noise* a_t diasumsikan saling bebas dengan runtun Y_{t-k} untuk $k = 1, 2, \ldots$, sehingga $E(a_t Y_{t-k}) = E(a_t)E(Y_{t-k}) = 0$. *Mean* dari model AR(1) dengan penggunaan model pada persamaan (2.1.5.1) adalah

$$E(Y_t) = E(\varphi\, Y_{t-1} + a_t) = \varphi\, E(Y_{t-1}) + E(a_t).$$

Oleh karena asumsi runtun waktu stasioner, maka $E(Y_t) = E(Y_{t-1})$ dan *mean* runtun *white noise* adalah $E(a_t) = 0$, maka *mean* dari model AR(1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(Y_t) = \varphi\, E(Y_{t-1}) + 0$$

$$(1-\varphi)E(Y_t) = 0$$

$$E(Y_t) = 0,\ \varphi \neq 1.$$

Variansi dari model AR(1) pada persamaan (2.1.5a) adalah

$$\begin{aligned} Var(Y_t) &= E\left[(Y_t - E(Y_t))^2\right] \\ &= E\left[Y_t^2\right] \\ &= E\left[(\varphi Y_{t-1} + a_t)^2\right] \\ &= E\left[(\varphi Y_{t-1})^2 + 2\varphi Y_{t-1} a_t + (a_t)^2\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[(\varphi Y_{t-1})^2\right] + E(2\varphi Y_{t-1}a_t) + E(a_t)^2 \\
&= \varphi^2 E(Y_{t-1})^2 + 2\varphi E(Y_{t-1}a_t) + E(a_t)^2 \\
&= \varphi^2 Var(Y_t) + 0 + \sigma_a^2 \\
(1-\varphi^2)Var(Y_t) &= \sigma_a^2 \\
Var(Y_t) &= \frac{\sigma_a^2}{(1-\varphi^2)}.
\end{aligned}
$$

Karena variansi nonnegatif, maka

$1-\varphi^2 > 0,$

$\varphi^2 < 1$ atau $|\varphi| < 1.$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa pertidaksamaan $|\varphi| < 1$ merupakan syarat agar runtun waktu AR(1) stasioner.

Variansi Y_t didefinisikan sebagai otokovariansi Y_t pada *lag* nol, dinotasikan dengan γ_0. Otokovariansi dari Y_t pada *lag k*, dinotasikan dengan γ_k, adalah kovariansi antara Y_t dan Y_{t-k} yang didefinisikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\gamma_k &= Cov(Y_t, Y_{t-k}) \\
&= E\left[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-k} - E(Y_{t-k}))\right] \\
&= E(Y_t Y_{t-k}) \\
&= E((\varphi Y_{t-1} + a_t)Y_{t-k}) \\
&= E(\varphi Y_{t-1}Y_{t-k} + a_t Y_{t-k}) \\
&= \varphi E(Y_{t-1}Y_{t-k}) + E(a_t Y_{t-k}) \\
&= \varphi\gamma_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Untuk k = 1, diperoleh $\gamma_1 = \varphi\gamma_0 = \varphi\sigma_a^2 / (1 - \varphi^2)$. Untuk k = 2, diperoleh $\gamma_2 = \varphi\gamma_1 = \varphi^2\sigma_a^2 / (1 - \varphi^2)$. Jadi, secara umum nilai otokovariansi pada *lag k* adalah

$$\gamma_k = \varphi^k \frac{\sigma_a^2}{(1 - \varphi^2)} = \varphi^k \gamma_0, k \geq 1.$$

Otokorelasi pada *lag k*, dinotasikan dengan ρ_k, didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\varphi^k \gamma_0}{\gamma_0} = \varphi^k, k \geq 1$$

2.1.6 Model *Autoregressive* Orde *p*, AR(*p*)

Secara umum, model *Autoregressive* orde *p* atau AR(*p*) dinyatakan sebagai berikut:

$$(Y_t - \mu) = \varphi_1(Y_{t-1} - \mu) + \varphi_2(Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \varphi_p(Y_{t-p} - \mu) + a_t$$

$$Y_t = (1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_p)\mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \ldots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t$$

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \ldots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t$$

dengan:

Y_{t-i} : pengamatan runtun waktu stasioner pada saat $t - i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, p$

φ_j : parameter model *Autoregressive* ke-j, $j = 1, 2, \ldots, p$

a_t : runtun *white noise*, $a_t \sim N.I.I.D.\ (0, \sigma_a^2)$

μ : *mean* dari Y_t

Model AR(*p*) merupakan proses stasioner jika dan hanya jika akar-akar persamaan karakteristik

$$1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 - \ldots - \varphi_p z^p = 0$$

mempunyai modulus lebih besar dari satu. (Cryer, 1986). Dengan melihat kondisi kestasioneran dari hal tersebut, sebagai contoh model AR(1) sebagai kasus sederhana. Persamaan karakteristik untuk model AR(1) adalah $1-\varphi z=0$. Solusi dari persamaan karakteristik tersebut adalah $z=1/\varphi$. Agar kondisi kestasioneran model AR(1) dapat terpenuhi, maka akar persamaan karakteristik $1-\varphi z=0$ harus mempunyai modulus lebih besar dari satu, sehingga

$$|z|=\left|\frac{1}{\varphi}\right|>1 \Leftrightarrow \frac{|1|}{|\varphi|}>1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\varphi|}>1 \Leftrightarrow |\varphi|<1$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa model AR(1) stasioner jika dan hanya jika $|\varphi|<1$.

Bukti :

Ö Akan dibuktikan bahwa jika model AR (1) stasioner maka $|\varphi|<1$

Pandang model AR(1) sebagai berikut :

$$Y_t=\varphi\ Y_{t-1}+a_t$$

Karena Y_t stasioner, maka $E(Y_t)$ konstan dan Var (Y_t) konstan dan Cov (Y_t, Y_{t-k}) hanya bergantung pada lag k. Pada subbab sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $Var(Y_t)=\frac{\sigma_a^2}{(1-\varphi^2)}$. Karena $\sigma_a^2>0$ dan Var $(Y_t)>0$, maka

$1-\varphi^2>0$ Ù $\varphi^2<1$ Ù $|\varphi|<1$

Terbukti bahwa jika model AR(1) stasioner maka $|\varphi|<1$.

Õ Akan dibuktikan bahwa jika $|\varphi|<1$ maka model AR(1) stasioner.

- Pertama-tama akan diperiksa apakah $E(Y_t)$ konstan.

  Jika $|\varphi|<1$, maka $E(Y_t)=E(\varphi\ Y_{t-1}+a_t)=0$.

- Kemudian akan diperiksa apakah $Var(Y_t)$ konstan

  $Var(Y_t)=Var(\varphi\ Y_{t-1}+a_t)$ (lakukan iterasi ke belakang)

  $= Var(\varphi\ a_{t-1}+\varphi^2\ a_{t-2}+\varphi^3\ a_{t-3}+.....+a_t)$

  $= Var(a_t+\varphi\ a_{t-1}+\varphi^2\ a_{t-2}+\varphi^3\ a_{t-3}+.....)$

$=\text{Var}(a_t) + \text{Var}(\varphi\, a_{t-1}) + \text{Var}(\varphi^2\; a_{t-2}) + \text{Var}(\varphi^3\; a_{t-3})+.....$

$= \sigma_a^2 + \varphi^2\sigma_a^2 + \varphi^4\sigma_a^2 + \varphi^6\sigma_a^2 +.......$

$= \sigma_a^2\;(1+\varphi^2+\varphi^4+\varphi^6+........)$

Karena $|\varphi| < 1$ maka deret geometri $(1+\varphi^2+\varphi^4+\varphi^6+........)$ konvergen,

sehingga $\text{Var}(Y_t) = \dfrac{\sigma_a^2}{(1-\varphi^2)}$

$= \gamma_0$

$\text{Var}(Y_t)$ konstan.

- Terakhir diperiksa apakah $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k})$ hanya bergantung pada lag k

Pada model AR(1) berikut :

$Y_t = \varphi\; Y_{t-1} + a_t$

Untuk lag k=1, kalikan kedua ruas persamaan dengan Y_{t-1}, sehingga diperoleh :

$$Y_t\, Y_{t-1} = \varphi\; Y_{t-1}\, Y_{t-1} + a_t\, Y_{t-1}$$

$$E(Y_t\, Y_{t-1}) = E(\varphi\; Y_{t-1}\, Y_{t-1} + a_t\, Y_{t-1})$$

$$E(Y_t\, Y_{t-1}) = E(\varphi\; Y_{t-1}\, Y_{t-1}) + E(a_t\, Y_{t-1})$$

$$E(Y_t\, Y_{t-1}) - E(Y_t)\, E(Y_{t-1}) = \varphi\; E(Y_{t-1}^2) - E(Y_{t-1})\, E(Y_{t-1}) + E(a_t)E(Y_{t-1})$$

$$E(Y_t\, Y_{t-1}) - 0 = \varphi\; E(Y_{t-1}^2) - 0 + 0\; E(Y_{t-1})$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \varphi\; \text{Var}(Y_{t-1})$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \varphi\; \frac{\sigma_a^2}{(1-\varphi^2)} = \varphi\;\gamma_0$$

Untuk lag ke- k, lakukan hal serupa sehingga diperoleh :

$$Y_t\, Y_{t-k} = \varphi\; Y_{t-1}\, Y_{t-k} + a_t\, Y_{t-k}$$

$$E(Y_t\, Y_{t-k}) = E(\varphi\; Y_{t-1}\, Y_{t-k} + a_t\, Y_{t-k})$$

$$E(Y_t\, Y_{t-k}) = E(\varphi\; Y_{t-1}\, Y_{t-k}) + E(a_t\, Y_{t-k})$$

$$E(Y_t\, Y_{t-k}) - E(Y_t)\, E(Y_{t-k}) = \varphi\; E(Y_{t-1}\, Y_{t-k}) - E(Y_{t-1})E(Y_{t-k}) + E(a_t)E(Y_{t-k})$$

$$E(Y_t\, Y_{t-k}) - 0 = \varphi\; E(Y_{t-1}\, Y_{t-k}) - 0 + 0\; E(Y_{t-1})$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \varphi\;\gamma_{k-1} = \varphi^k\gamma_0$$

$$\text{Cov}\,(Y_t\,,Y_{t-k}) \;=\; \varphi^{k}\,\frac{\sigma_a^2}{\left(1-\varphi^2\right)}$$

Jika $|\varphi\,| < 1$, maka otokovariansi pada lag ke –k hanya bergantung pada lag k

Terbukti bahwa jika $|\varphi\,| < 1$ maka model AR(1) stasioner.

2.2 *Unit Root Test*

Selain menggunakan metode grafik (plot antara nilai pengamatan dengan waktu) dan korelogram (plot antara nilai otokorelasi sampel dengan lag-nya), asumsi kestasioneran dapat juga diperiksa dengan menggunakan uji formal yang disebut *unit root test*. Dalam tugas akhir ini, uji *unit root* yang akan dibahas adalah *Dickey-Fuller Test* dan *Augmented Dickey-Fuller Test.*

2.2.1 *Dickey-Fuller Test* (Gujarati, 2003)

Dasar pemikiran dari metode *Dickey-Fuller Test* adalah menguji apakah suatu runtun waktu merupakan proses *random walk* atau bukan. Selanjutnya, pernyataan mengenai kestasioneran atau bukan akan merujuk pada proses *random walk*.

Misalkan Y_t mengikuti model AR(1) sebagai berikut :

$$Y_t = \mu + \varphi\, Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad -1 \le \varphi \le 1 \qquad (2.2.1a)$$

Jika φ =1, maka model di atas menjadi model proses *random walk*. Seperti yang telah dijelaskan pada subbab sebelumnya, *random walk* merupakan proses stokastik nonstasioner atau dengan kata lain Y_t mempunyai *unit root.* Jika pada persamaan (2.2.1a), kedua ruas dikurangi dengan Y_{t-1}, maka diperoleh :

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu\ \varphi\, Y_{t-1} - Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Dari persamaan diatas dapat dibuat hipotesis pengujian sebagai berikut :

H_0: $\delta = 0$ atau H_0: $\varphi = 1$

H_1: $\delta < 0$ atau H_1: $\varphi < 1$

Dickey dan Fuller (1979) telah menunjukkan bahwa *unit root* di bawah hipotesis nol, statistik uji *t* untuk taksiran parameter Y_{t-1}, tidak mengikuti distribusi *t* sekalipun untuk sampel yang besar. Akan tetapi, Dickey dan Fuller telah membuktikan (dari sejumlah simulasi) bahwa uji *t* terhadap hipotesis di atas mengikuti statistik uji τ (tau) atau *Dickey-Fuller* (DF).

Teknik pengujian *unit root* adalah dengan membentuk regresi antara ΔY_t dan Y_{t-1}. Dickey dan Fuller menetapkan tiga bentuk model regresi berikut:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.2.1b}$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.2.1c}$$

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.2.1d}$$

Pada model (2.2.1b) tidak mengandung komponen deterministik, model (2.2.1c) mengandung konstanta, dan model (2.2.1d) mengandung konstanta dan *time trend*. Pada semua bentuk model tersebut, jika parameter $\delta = 0$ maka runtun *Yt* mengandung *unit root*. Lalu, hal yang sangat penting untuk diperhatikan adalah nilai kritis statistik uji τ untuk menguji hipotesis bahwa $\delta = 0$ berbeda pada tiap bentuk model dan ukuran sampel. Tabel nilai kritis yang dibuat oleh Dickey-Fuller ini selanjutnya dikembangkan oleh MacKinnon (1991).

Penaksiran parameter δ pada tiga persamaan regresi di atas dilakukan dengan menggunakan metode OLS dan kemudian hitung nilai *standard error* untuk kasus yang bersesuaian. Statistik uji τ diperoleh dengan :

$$\tau = \frac{\hat{\varphi}_1 - 1}{std.error(\hat{\varphi})} \sim Dickey - Fuller$$

Jika nilai statistik uji τ lebih kecil dari nilai kritis DF atau *MacKinnon* maka hipotesis nol ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat stasioner, sedangkan jika nilai statistik uji τ lebih besar dari nilai kritis DF atau *MacKinnon* maka hipotesis nol tidak ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat nonstasioner.

2.2.2 *Augmented Dickey-Fuller Test*

Kekurangan dari *Dickey-Fuller Test* adalah dengan mengasumsikan bahwa komponen *error*, ε_t , tidak berkorelasi pada model (2.2.1b), (2.2.1c), dan (2.2.1d).

Untuk mengantisipasi adanya korelasi tersebut, Dickey dan Fuller (1981) mengembangkan pengujian *Dickey-Fuller Test* menjadi *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) *Test*.

Pengujian *Dickey-Fuller* dapat diperluas untuk model AR dengan order lebih dari satu. Perhatikan model AR(2) berikut:

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \tag{2.2.2a}$$

Lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan persamaan (2.2.2a) dengan $\varphi_2 Y_{t-1}$, sehingga diperoleh

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + (\varphi_2 Y_{t-1} - \varphi_2 Y_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2) Y_{t-1} - \varphi_2 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2) Y_{t-1} - \varphi_2 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Kemudian, kurangi kedua ruas dengan Y_{t-1} , sehingga diperoleh

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2) Y_{t-1} - Y_{t-1} - \varphi_2 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2 - 1) Y_{t-1} - \varphi_2 \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \alpha \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

dengan $\delta = \varphi_1 + \varphi_2 - 1$ dan $\alpha = -\varphi_2$

Selanjutnya, perhatikan model AR(3) berikut :

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t \tag{2.2.2b}$$

Lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan persamaan (2.2.2b) dengan $\varphi_3 Y_{t-2}$, sehingga diperoleh

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + (\varphi_3 Y_{t-2} - \varphi_3 Y_{t-2}) + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + (\varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-2} - \varphi_3 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + (\varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-2} - \varphi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Kemudian, lakukan operasi penjumlahan dan pengurangan pada ruas kanan dengan $(\varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-1}$, sehingga diperoleh :

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + (\varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-2} - \varphi_3 \Delta Y_{t-2} + \{(\varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-1}\} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - \varphi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3) \Delta Y_{t-1} - \varphi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

Terakhir, lakukan operasi pengurangan pada kedua ruas dengan Y_{t-1} sehingga diperoleh

$$Y_t - Y_{t-1} = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) Y_{t-1} - Y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3)\Delta Y_{t-1} - \varphi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 1) Y_{t-1} - (\varphi_2 + \varphi_3)\Delta Y_{t-1} - \varphi_3 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

dengan $\delta = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 1$, $\alpha_1 = -(\varphi_2 + \varphi_3)$, $\alpha_2 = -\varphi_3$

Dengan melihat pola yang ada pada model AR(2) dan AR(3) di atas, pengujian *Dickey-Fuller* dapat diperluas untuk model AR(*p*). Perhatikan model AR(*p*) berikut:

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \dots\dots\dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (2.2.2c)$$

Dengan cara yang serupa pada model AR(2) dan AR(3), akan diperoleh :

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \alpha_2 \Delta Y_{t-1} + \alpha_3 \Delta Y_{t-2} + \dots\dots\dots + \alpha_p \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t \qquad (2.2.2d)$$

dengan $\delta = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i - 1$ dan $\alpha_i = -\sum_{j=i}^{p} \varphi_j$.

Jika model regresi (2.2.2d) ditambahkan dengan komponen *time trend* maka akan terbentuk model regresi berikut:

$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (2.2.2e)$$

dengan $\delta = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i - 1$, $\alpha_i = -\sum_{j=i+1}^{m} \varphi_j$, ε_t adalah komponen *error,* dan m = p-1 adalah panjang lag. Model regresi (2.2.2e) inilah yang akan diuji pada metode *Augmented Dickey-Fuller (ADF) Test*. Berdasarkan regresi (2.2.2e), dapat dipilih tiga bentuk model regresi yang akan digunakan untuk melakukan uji *Augmented Dickey-Fuller(ADF)*, yaitu

1. Model dengan konstanta (μ) dan trend (β), seperti model (2.2.2e)
2. Model dengan konstanta (μ), yaitu :

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

3. Model tanpa konstanta (μ) dan trend (β), yaitu :

$$\Delta Y_t = \delta\, Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

Dari model (2.2.2e) dapat dibuat hipotesis sebagai berikut :

H_0: $\delta = 0$ atau H_0: $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i = 1$

H_1: $\delta < 0$ atau H_1: $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i < 1$

Selanjutnya, lakukan uji signifikansi berdasarkan hipotesis di atas. Uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) mengikuti distribusi yang sama dengan uji *Dickey-Fuller* (DF), sehingga nilai kritis statistik uji τ juga dapat diterapkan pada ADF *Test*. Statistik uji τ diperoleh dengan

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{p} \hat{\varphi}_i - 1}{std.error(\sum_{i=1}^{p} \hat{\varphi}_i)} \sim Dickey - Fuller$$

Jika nilai statistik uji τ lebih kecil dari nilai kritis DF atau *MacKinnon* maka hipotesis nol ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat stasioner, sedangkan jika nilai statistik uji τ lebih besar dari nilai kritis DF atau *MacKinnon* maka hipotesis nol tidak ditolak yang berarti data runtun waktu bersifat nonstasioner.

2.3 Konsep Dasar Kointegrasi

Konsep kointegrasi pertama kali diperkenalkan oleh Granger pada tahun 1981 dan selanjutnya dipublikasikan oleh Engle dan Granger (1987) pada makalah ilmiahnya. Ide dasar dibalik kointegrasi adalah untuk mencari kombinasi linier yang stasioner dari variabel-variabel nonstasioner. Hal tersebut dimungkinkan karena kombinasi linier tersebut saling menghilangkan tren stokastik yang ada pada variabel nonstasioner. Granger (1986) menyatakan bahwa pengujian kointegrasi dapat dianggap sebagai pengujian awal untuk menghindari keadaan *spurious regression* (Gujarati, 2003).

Menurut Enders (2004), analisis kointegrasi secara formal diawali dengan menganggap suatu himpunan variabel ekonomi berada pada keseimbangan jangka panjang (*long run equilibrium*) ketika pembatas (*constraint*) linier berikut :

$$\beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + ... + \beta_n x_{nt} = 0$$

berlaku (Aryanto,2009). Persamaan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk vektor $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_t = 0$, dimana $\boldsymbol{\beta}'$ dan $\mathbf{x}_t$ menotasikan vektor $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ dan $(x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{nt})'$.

Untuk lebih formal, Engle dan Granger (1987) mendefinisikan kointegrasi sebagai berikut:

Definisi 2.1. Komponen-komponen vektor $\mathbf{x}_t' = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{nt})'$ dikatakan terkointegrasi pada orde *d,b* dinonatsikan $\mathbf{x}_t \sim CI(d,b)$, jika :

a. Semua komponen vektor $\mathbf{x}_t$ adalah variabel I(d) dan
b. Terdapat sebuah vektor $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, sedemikian sehingga $\mathbf{e_t} = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_t \sim I(d-b)$,dimana d ≥ b > 0. Vektor $\boldsymbol{\beta}$ disebut vektor kointegrasi.

Terdapat 5 hal penting yang perlu diperhatikan dari definisi kointegrasi di atas, yaitu :

1. Secara teoritis dimungkinkan untuk terbentuknya kointegrasi dari hubungan nonlinier di antara peubah-peubah nonstasioner. Akan tetapi, hal ini baru mulai dikembangkan lebih lanjut oleh para pelaku ekonometri.
2. Perhatikan bahwa vektor kointegrasi $\boldsymbol{\beta}$ tidak unik. Jika $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)'$ adalah vektor kointegrasi maka $(\lambda\beta_0, \lambda\beta_1, \lambda\beta_2, ..., \lambda\beta_n)'$ juga merupakan vektor kointegrasi untuk sebarang nilai λ yang bukan nol. Hal ini dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi kointegrasi di atas. (Bukti dapat dilihat [1])
3. Untuk membentuk hubungan kointegrasi, semua peubah harus memiliki orde integrasi yang sama; tetapi semua peubah yang memiliki orde integrasi sama tidak harus terkointegrasi. Meskipun demikian, hal tersebut bukan merupakan suatu masalah karena konsep kointegrasi telah diperluas dengan melibatkan jumlah peubah yang lebih dari dua buah dan dimungkinkannya peubah

tersebut memiliki orde integrasi yang berbeda. Konsep ini disebut multikointegrasi.

4. Jika vektor $\mathbf{x}_t$ mempunyai n komponen maka terdapat $n - 1$ vektor kointegrasi yang bebas secara linier. Oleh karena itu, jika vektor $\mathbf{x}_t$ hanya terdiri dari dua peubah maka paling banyak terdapat satu vektor kointegrasi. Jumlah dari vektor kointegrasi disebut peringkat kointegrasi (*cointegrating rank*) dari $\mathbf{x}_t$ yang dinotasikan dengan r.
5. Hubungan kointegrasi kebanyakan difokuskan pada kasus dimana peubah memiliki *unit root* tunggal atau dengan kata lain peubah tersebut terintegrasi pada orde satu, $I(1)$.

   (Aryanto,2009)

2.4 *Vector Auto Regression* (VAR)

Dalam kenyataan sehari-hari, hubungan fungsional antara variabel-variabel ekonomi yang tampaknya sederhana, bisa jadi merupakan suatu proses yang rumit. Misalkan, harga ditentukan oleh kekuatan penawaran dan permintaan. Akan tetapi, jumlah yang ditawarkan dan diminta juga tergantung harga yang terjadi di pasar. Oleh karena itu, terjadi masalah dalam menentukan variabel mana yang harus diestimasi pertama kali.(Josua,2007)

Model *Vector Auto Regression* (VAR) merupakan salah satu model yang cocok untuk mengatasi masalah diatas, karena pada model VAR, tidak ada penentuan variabel endogen dan eksogen, melainkan semua variabelnya diasumsikan endogen.

Pada kasus dua variabel, $\{y_{1t}\}$ dan $\{y_{2t}\}$, $\{y_{1t}\}$ berpengaruh terhadap $\{y_{2t}\}$ dan sebaliknya juga $\{y_{2t}\}$ berpengaruh terhadap $\{y_{1t}\}$. Dalam VAR efek *interrelationship* (saling mempengaruhi) seperti ini dimodelkan sebagai berikut:

$$y_{1t} = b_{10} - b_{12} y_{2t} + \gamma_{11} y_{1,t-1} + \gamma_{12} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \qquad (2.4.1)$$

$$y_{2t} = b_{20} - b_{21} y_{1t} + \gamma_{21} y_{1,t-1} + \gamma_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \qquad (2.4.2)$$

dimana diasumsikan :

1. $\{y_{1t}\}$ dan $\{y_{2t}\}$ stasioner

2. $\{\varepsilon_{1t}\}$ dan $\{\varepsilon_{2t}\}$ bersifat *white noise* dengan variansi masing-masing adalah σ_1^2 dan σ_2^2
3. $\{\varepsilon_{1t}\}$ dan $\{\varepsilon_{2t}\}$ tidak berkorelasi.

Persamaan (2.4.1) dan (2.4.2) merupakan VAR order pertama karena jumlah *lag* tertinggi adalah satu. VAR yang sederhana ini merupakan contoh yang berguna untuk memahami VAR dengan jmlah variabel dan *lag* yang lebih banyak.

Persamaan (2.4.1) dan (2.4.2) bukanlah merupakan persamaan *reduced form* karena y_{1t} mempunyai efek serentak bersama $y_{2t.}$ Supaya kedua persamaan tersebut dapat diestimasi, maka keduanya perlu dirubah bentuknya menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis dengan $\mathbf{B}\mathbf{y}_t = \mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$, dimana :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{y}_{t-1} = \begin{bmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan $\mathbf{B}^{-1}$ pada kedua sisi, maka diperoleh VAR dalam bentuk standar sebagai berikut:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{e}_t \qquad (2.4.3)$$

dimana :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{\Gamma}_0 \,,\ \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{\Gamma}_1 \,,\ \mathbf{e}_t = \mathbf{B}^{-1}\,\boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Bentuk VAR standar pada persamaan (2.4.3) dapat diperluas untuk jumlah variabel dan *lag* yang lebih banyak. Berikut adalah bentuk VAR standar dengan banyaknya variabel n dan jumlah *lag* p:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathbf{A}_{p-1}\mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \qquad (2.4.4)$$

dimana :

$$\mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{y}_t = \left(y_{1t} \quad y_{2t} \quad \mathbf{L} \quad y_{(n-1)t} \quad y_{nt}\right)'$$

$\mathbf{A_0}$ = matriks konstanta berukuran (nx1)

$\mathbf{A_i}$ = matriks koefisien berukuran (nxn), i=1,2,.....,p

$\mathbf{e}_t$ = vektor error yang berukuran (nx1)

2.5 Matriks

2.5.1 Definisi dan Notasi

Suatu matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ merupakan suatu susunan dari skalar yang berbentuk persegi atau persegi panjang , yaitu :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matriks $\mathbf{A}$ juga dapat diidentifikasi dalam bentuk yang sederhana sebagai $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$. Jika $m = n$, maka $\mathbf{A}$ disebut matriks persegi berdimensi m. Apabila matriks $\boldsymbol{a}$ berukuran $m \times 1$, yaitu :

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Matriks $\boldsymbol{a}$ di atas disebut dengan vektor kolom atau vektor. Elemen a_i menunjukkan komponen ke-*i* dari $\boldsymbol{a}$. Sedangkan matriks yang berukuran $1 \times m$ disebut dengan vektor baris. Baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks $\mathbf{A}$ terkadang dinotasikan secara berurutan dengan $(\mathbf{A})_{\mathbf{i}.}$ dan $(\mathbf{A})_{.\mathbf{j}}$

Elemen diagonal dari matriks $\mathbf{A}$ yang berukuran $m \times m$ adalah $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$. Jika elemen lainnya dari matriks $\mathbf{A}$ adalah 0, maka matriks $\mathbf{A}$ disebut dengan matriks diagonal dan dapat dinotasikan dengan $\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, \ldots, a_{mm})$. Jika elemen diagonal dari matriks $\mathbf{A}$, yaitu $a_{ii} = 1$ untuk $i = 1, \ldots, m$, sehingga $\mathbf{A} = \text{diag}(1, \ldots, 1)$, maka matriks $\mathbf{A}$ disebut dengan matriks identitas berdimensi m dan dapat ditulis dengan $\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$ atau dapat ditulis dalam bentuk yang sederhana yaitu $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Kolom ke-i dari matriks identitas yang berukuran $m \times m$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{e}_i$; $\boldsymbol{e}_i$ adalah vektor berukuran $m \times 1$ yang komponen ke-i adalah 1 sedangkan komponen lainnya adalah 0.

Vektor yang semua komponennya adalah 0 disebut dengan vektor null, sedangkan matriks yang semua elemennya adalah 0 disebut dengan matriks null dan dinotasikan dengan **0** atau (0).

2.5.2 Penjumlahan dan Perkalian Matriks

Penjumlahan dari dua matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ terdefinisi jika kedua matriks tersebut berukuran sama. Misalkan $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ dan $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, maka penjumlahan dari matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{a_{ij} + b_{ij}\}$ dan hasil perkalian antara skalar α dengan matriks $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ adalah $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = \{\alpha a_{ij}\}$.

Perkalian antara matriks $\mathbf{A}$ dengan matriks $\mathbf{B}$ terdefinisi jika banyaknya kolom dari matriks $\mathbf{A}$ sama dengan banyaknya baris dari matriks $\mathbf{B}$. Dengan demikian, jika $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times p$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $p \times n$, maka $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ yang elemen ke (i,j) adalah c_{ij} dimana :

$$c_{ij} = (\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{B})_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Definisi dari $\mathbf{BA}$ similar dengan definisi $\mathbf{AB}$. Yaitu, $\mathbf{BA}$ terdefinisi jika banyaknya kolom dari matriks $\mathbf{B}$ sama dengan banyaknya baris dari matriks $\mathbf{A}$. Jika matriks $\mathbf{A}$ adalah matriks persegi, maka hasil perkalian $\mathbf{AA}$, atau dalam bentuk sederhana dinotasikan dengan $\mathbf{A}^2$, terdefinisi. Jika $\mathbf{A}^2 = \mathrm{A}$, maka matriks $\mathbf{A}$ disebut dengan matriks idempoten.

2.5.3 Matriks Transpose

Transpose dari matriks $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ yang berukuran $m \times n$ adalah matriks berukuran $n \times m$ yang didapat dengan menukarkan baris dengan kolom dari matriks $\mathbf{A}$ dan dinotasikan dengan $\mathbf{A}^T$. Dengan demikian elemen ke (i,j) dari matriks $\mathbf{A}^T$ adalah a_{ji}. Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $m \times p$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $p \times n$, maka elemen ke (*i*,*j*) dari $(\mathbf{AB})^T$ adalah

$$\left((\mathbf{AB})^T\right)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = (\mathbf{A})_{j.}(\mathbf{B})_{.i} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk} b_{ki} = (\mathbf{B}^T)_{i.}(\mathbf{A}^T)_{.j} = (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ij}$$

sehingga didapat bahwa $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Teorema 2.1 Misalkan α dan β adalah skalar, serta $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks. Maka :

a) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$

b) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

c) $(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})^T = \alpha\mathbf{A}^T + \beta\mathbf{B}^T$

d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks persegi yang berukuran $m \times m$, maka $\mathbf{A}^T$ juga merupakan matriks persegi yang berukuran $m \times m$. Jika $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, maka $\mathbf{A}$ disebut dengan matriks simetris. Jika $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ merupakan matriks simetris, maka $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Untuk vektor, transpose dari vektor kolom adalah vektor baris, begitu pula sebaliknya.

2.5.4 Invers Matriks

Misalkan $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ adalah suatu matriks persegi berukuran $m \times m$. $\mathbf{A}$ disebut nonsingular jika terdapat matriks $\mathbf{A}^{-1}$ sedemikian sehingga $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. $\mathbf{A}^{-1}$ disebut dengan invers dari matriks $\mathbf{A}$.

2.5.5 Determinan dan *Adjoint* Matriks

Misalkan $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ menyatakan matriks berukuran $m \times m$ dan $\mathbf{A}_{ij}$ menyatakan submatriks dari $\mathbf{A}$ berukuran $(m-1) \times (m-1)$ yang didapat dengan menghilangkan baris serta kolom yang mengandung elemen a_{ij}, yakni baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Determinan dari submatriks $\left|\mathbf{A}_{ij}\right|$ disebut minor dari elemen a_{ij}, sedangkan $(-1)^{i+j}\left|\mathbf{A}_{ij}\right|$ disebut kofaktor dari a_{ij}. Misalkan a_{ij} menyatakan elemen ke-*ij* dari matriks berukuran $m \times m$, dan misalkan α_{ij} menyatakan kofaktor dari a_{ij} dimana *i* , *j* = 1,2,…,*m*. Maka, untuk *i* = 1,2,…,*m*,

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_{ij} = a_{i1}\alpha_{i1} + \ldots + a_{im}\alpha_{im}$$

dan untuk *j* = 1,2,…,*m*,

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\alpha_{ij} = a_{1j}\alpha_{1j} + \ldots + a_{mj}\alpha_{mj}.$$

Catatan: Transpos matriks kofaktor dari $\mathbf{A}$ disebut matriks *adjoint* dan dinotasikan dengan $adj(\mathbf{A})$, yaitu:

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \ldots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

dimana memenuhi sifat:

1. $\mathbf{A}\, adj(\mathbf{A}) = adj(\mathbf{A})\,\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_m$
2. $adj(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ atau ekivalen dengan $\mathbf{A}^{-1} = (1/|\mathbf{A}|)\, adj(\mathbf{A})$

2.5.6 *Rank* Matriks

Definisi 2.1 Matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$, maka $r(\mathbf{A}) \le \min(m,n)$ dimana $r(\mathbf{A})$ adalah notasi dari *rank* $(\mathbf{A})$.

Definisi 2.2 Matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dikatakan *full rank* jika $r(\mathbf{A}) = \min(m,n)$. Matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dikatakan *full colomn rank* jika $r(\mathbf{A}) = n$. Matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dikatakan *full row rank* jika $r(\mathbf{A}) = m$.

2.6 Differensiasi pada Vektor dan Matriks

2.6.1 Differensiasi pada Vektor (Shayle R. Searll,1982)

Misalkan **y** adalah vektor kolom (nx1), dimana **y= Ax,** yaitu :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

Turunan **y** terhadap **x** didefinisikan sebagai :

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{Ax}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{A}'$$

Contoh 1:

$$\mathbf{y}=\mathbf{Ax}= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 6x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{Ax}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(2x_1+6x_2-x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(3x_1-2x_2+4x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(3x_1+4x_2+7x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(2x_1+6x_2-x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial(3x_1-2x_2+4x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial(3x_1+4x_2+7x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(2x_1+6x_2-x_3)}{\partial x_3} & \frac{\partial(3x_1-2x_2+4x_3)}{\partial x_3} & \frac{\partial(3x_1+4x_2+7x_2)}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 6 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{A}'$$

Contoh 2

Misalkan **y**=**Ax**= $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 4x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{Ax}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(-2x_1 + 4x_2 + x_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(-2x_1 + 4x_2 + x_3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(-2x_1 + 4x_2 + x_3)}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}'$$

2.6.2 Diferensiasi dari Determinan Matriks (James R. Schott,1997)

Misalkan $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ adalah matriks berukuran $m \times m$. Misalkan juga ξ_{ij} menyatakan kofaktor dari x_{ij} . Bentuk $\det(\mathbf{X})$ dapat dijabarkan sebagai $\det(\mathbf{X}) = |\mathbf{X}| = \sum_{t=1}^{m} x_{it}\xi_{it}$ dimana $\xi_{i1}, \xi_{i2}, ..., \xi_{im}$ berupa konstanta sehingga didapat

$$\frac{\partial \det(X)}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} | X | = \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \sum_{t=1}^{m} x_{it}\xi_{it}$$

$$\sum_{t=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} x_{ij} \right) \xi_{it} = \xi_{it} \tag{2.6.2a}$$

Hasil (2.6.2a) mengindikasikan bahwa turunan dari $\det(\mathbf{X})$ terhadap $\mathbf{X}$ adalah matriks kofaktor dari $\mathbf{X}$ atau ekivalen dengan :

$$\frac{\partial \det(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \left[adj(\mathbf{X}) \right]^T \tag{2.6.2b}$$

2.6.3 Diferensiasi dari Matriks Invers (James R. Schott,1997)

Misalkan $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}$ adalah matriks nonsingular berukuran $m \times m$. Maka

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial X} = -X^{-1}X^{-1} \tag{2.6.3a}$$

Untuk membuktikan (2.6.3a), perhatikan persamaan $\mathbf{I}_m = \mathbf{XX}^{-1}$.
Kemudian dengan mendifferensialkan kedua ruas dari persamaan tersebut, akan didapat :

$$0 = \frac{\partial I_m}{\partial X} = \frac{\partial XX^{-1}}{\partial X} = \frac{\partial X}{\partial X}(X^{-1}) + \frac{\partial X^{-1}}{\partial X}X$$

$$0 = \frac{\partial X}{\partial X}(X^{-1}) + \frac{\partial X^{-1}}{\partial X}X$$

$$0 = X^{-1} + \frac{\partial X^{-1}}{\partial X}X$$

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial X}X = -X^{-1}$$

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial X} = -X^{-1}X^{-1}$$

(terbukti)

2.6 Metode Maksimum Likelihood

Misal $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_m)^T$ adalah vektor *random* dengan $f(\boldsymbol{x};\theta)$, $\theta \in \Omega \in \Re^p$ dimana θ merupakan suatu vektor dari *p*-parameter yang tidak diketahui. Langkah-langkah dalam melakukan penaksiran maksimum likelihood adalah sebagai berikut :

1. Mencari *joint* pdf dari $X_1, X_2, ..., X_m$, yaitu $f(x_1, x_2, ..., x_m;\theta)$. Oleh karena $\boldsymbol{X}$ adalah vektor *random* dari $X_1, X_2, ..., X_m$ maka $f(x_1, x_2, ..., x_m;\theta) = f(\boldsymbol{x};\theta)$.
2. Mencari fungsi *likelihood* yang didefinisikan sebagai *joint* pdf dari $X_1, X_2, ..., X_m$ dan dapat dianggap sebagai fungsi dari θ. Misalkan fungsi *likelihood* $L(\theta; x_1, x_2, ..., x_m) = L(\theta; \boldsymbol{x})$, maka $L(\theta; \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x};\theta)$.
3. Mencari taksiran dari $\theta = \hat{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. $\hat{\theta}$ disebut sebagai taksiran *maksimum likelihood* dari θ.

Mencari nilai taksiran θ yang memaksimumkan fungsi $\ln \; L(\theta\,;\boldsymbol{x})$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai taksiran θ yang memaksimumkan $L(\theta\,;\boldsymbol{x})$. Maka baik $L(\theta\,;\boldsymbol{x})$ maupun $\ln\, L(\theta\,;\boldsymbol{x})$ dapat digunakan untuk mencari nilai $\hat{\theta}$. (Bukti dapat dilihat pada lampiran)

2.7 Model Regresi dan Metode *Ordinary Least Square* (OLS)

Analisis regresi merupakan suatu metode untuk menyelidiki hubungan fungsional antara variabel dependen dengan variabel-variabel independen. Hubungan ini dinyatakan dalam bentuk suatu persamaan atau model yang menghubungkan variabel dependen dengan variabel-variabel independen yang disebut dengan model regresi. Salah satu bentuk model regresi adalah model regresi linear, yaitu

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + ... + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i \text{ , i=1,2....n} \qquad (2.8.1)$$

Salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi koefisien dari model regresi linear adalah metode *Ordinary Least Square* (OLS). Ide dasar pada metode OLS dalam menaksir parameter $\beta_i, i = 1,2....., p$ adalah dengan meminimumkan *Sum of Square error*.

Dalam tugas akhir ini, model regresi linier yang dipakai adalah model regresi linier multivariat. Oleh karena itu, selanjutnya akan dibahas mengenai penaksiran koefisien regresi untuk kasus multivariat dengan menggunakan metode OLS.

Pada model regresi linier multivariat, terdapat n variabel dependen dan independen, atau dapat ditulis dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.8.2)$$

dimana:

Y= matriks variabel dependen berukuran (nx1)

$\boldsymbol{\beta}$ = matriks parameter berukuran (p+1)x1

X= matriks variabel independen berukuran nx(p+1) dengan semua elemen pada kolom pertamanya bernilai 1

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = matriks error berukuran (nx1)

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, prinsip dasar metode OLS adalah meminimumkan *sum of square error*, sehingga untuk menaksir $\boldsymbol{\beta}$, persamaan (2.8.2) dapat ditulis menjadi :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

sehingga :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^2 &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

Karena $\mathbf{Y}^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ berukuran (1x1), maka $\mathbf{Y}^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \left(\mathbf{Y}^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right)^T = (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{Y}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2 (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{Y} + (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

Supaya *sum of square error* minimum, maka $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0$

Sehingga diperoleh $-2 (\mathbf{X})^T \mathbf{Y} + 2(\mathbf{X})^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = 0$

$$(\mathbf{X})^T \mathbf{Y} = (\mathbf{X})^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$((\mathbf{X})^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X})^T \mathbf{Y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

2.9 Penentuan Panjang *Lag*

Salah satu metode untuk memilih panjang *lag* yang optimal adalah dengan menggunakan *Akaike Information Criterion*(AIC) dan *Schwarz Information Criterion*(SIC) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$AIC = \ln\left(\left(\frac{SSR}{n}\right) + \left(\frac{2k}{n}\right)\right)$$

$$SIC = \ln\left(\left(\frac{SSR}{n}\right) + \left(\frac{k \ln n}{n}\right)\right)$$

dengan SSR adalah jumlah kuadrat , n adalah ukuran sampel, dan k adalah jumlah parameter (termasuk *intercept*). Panjang *lag* ditentukan oleh nilai AIC dan SIC yang terkecil.

BAB 3
PENAKSIRAN PARAMETER KOINTEGRASI MULTIVARIAT

Pada bab ini akan dibahas mengenai konsep kointegrasi multivariat, penaksiran parameter kointegrasi multivariat dan pengujian kointegrasi multivariat dengan menggunakan metode Johansen (1988).

3.1 Kointegrasi Multivariat

Seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, berdasarkan jumlah variabel yang akan diuji hubungan kointegrasinya, kointegrasi dapat dibagi menjadi dua, yaitu kointegrasi bivariat dan multivariat. Pada kasus kointegrasi bivariat, pengujian kointegrasi hanya dilakukan pada dua variabel saja, sedangkan pada kasus multivariat, pengujian kointegrasi dilakukan pada dua variabel atau lebih. Pengujian dan penaksiran parameter kointegrasi untuk kasus bivariat dapat dilakukan dengan metode *Engle and Granger* (1987) seperti yang telah dibahas pada [1].

Walaupun metode *Engle and Granger* (1987) mudah untuk diterapkan pada pengujian kointegrasi, akan tetapi metode tersebut mempunyai beberapa kelemahan apabila diterapkan pada pengujian kointegrasi multivariat. Estimasi persamaan regresi keseimbangan jangka panjang pada metode tersebut mengharuskan adanya penentuan variabel endogen dan eksogen. Sebagai contoh, misalkan terdapat dua variabel, pengujian kointegrasi dengan menggunakan metode *Engle and Granger* (1987) dapat dilakukan dengan menggunakan salah satu residual dari dua persamaan keseimbangan jangka panjang dibawah ini :

$$y_t = \beta_{10} + \beta_{11} z_t + e_{1t} \tag{3.1.1}$$

atau

$$z_t = \beta_{20} + \beta_{21} y_t + e_{2t} \tag{3.1.2}$$

Apabila ukuran sampelnya cukup besar, secara asimtotis, pengujian *unit root* pada barisan $\{e_{1t}\}$ akan ekuivalen dengan pengujian *unit root* pada barisan

$\{e_{2t}\}$(Enders, 2004). Akan tetapi, pada kenyataannya sampel yang tersedia pada bidang ekonomi tidak terlalu besar. Selain itu, apabila pengujian dilakukan pada 3 variabel atau lebih,terjadi masalah dalam menentukan variabel mana yang menjadi variabel eksogen atau endogen. Lebih jauh lagi, apabila vektor kointegrasi yang terbentuk lebih dari 1, metode *Engle and Granger* tidak menjamin vektor kointegrasi yang terbentuk akan unik (Enders,2004).

Kelemahan lain dari metode *Engle and Granger* adalah pada metode penaksiran *two step estimatornya.* Pada metode tersebut, langkah pertama adalah mengestimasi e_t dan kemudian membangkitkan barisan $\{\hat{e}_t\}$. Langkah kedua adalah menggunakan barisan $\{\hat{e}_t\}$ untuk mengestimasi persamaan regresi $\Delta\hat{e}_t = \hat{a}_1\hat{e}_{t-1} + \hat{a}_2\hat{e}_{t-2} + ...\hat{a}_p\hat{e}_{t-p}$. Hal ini berarti, koefisien $\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_p$ diperoleh dari estimasi persamaan regresi yang menggunakan residual dari persamaan regresi yang lain, sehingga error yang dihasilkan pada lengkah pertama akan dibawa pada langkah kedua. Untuk lebih jelasnya mengenai metode *Engle and Granger two step estimator* dapat dilihat pada [1].

Beberapa metode telah dikembangkan untuk mengatasi kelemahan metode *Engle and Granger* tersebut, seperti metode *maximum likelihood estimator* yang dikembangkan oleh Johansen (1988) dan Stock - Watson (1988). Metode Johansen (1988) tidak mengharuskan adanya penentuan variabel eksogen atau endogen, melainkan semua variabelnya diasumsikan sebagai variabel endogen. Pada metode tersebut, persamaan kointegrasi direpresentasikan dalam bentuk *Vector Autoregression* (VAR) order p seperti pada persamaan di bawah ini:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{A}_3\mathbf{x}_{t-3}.............+\mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t \qquad (3.1.3)$$

dimana :

$\mathbf{x}_t$: matriks (nx1) yang entrinya variabel-variabel $x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{nt}$ dengan masing-masing x_{it} , i = 1,2,...n adalah variabel I(1) sehingga Δx_{it} adalah variabel yang stasioner.

$\mathbf{A}_i$: matriks parameter yang berukuran (nxn)

$\mathbf{e}_t$: matriks error berukuran (nx1) yang entrinya $e_{1t}, e_{2t}, \ldots, e_{nt}$ dengan masing-masing e_{it} , i = 1,2,...n adalah variabel stasioner dan e_{it} berdistribusi gaussian ($\mathbf{0}$, $\mathbf{\Lambda}$).

Bentuk persamaan VAR order p pada persamaan (3.1.3) di atas, dapat diparameterisasi ke dalam bentuk persamaan *Error Correction Model* (ECM), dengan sedikit manipulasi aljabar. Pertama, lakukan operasi penambahan dan pengurangan dengan $\mathbf{A}_p \mathbf{x}_{t-p+1}$ pada ruas kanan persamaan VAR sehingga diperoleh :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + \mathrm{A}_{p-1}\mathbf{x}_{t-p+1} - \mathrm{A}_p\mathbf{x}_{t-p+1} + \mathrm{A}_p\mathbf{x}_{t-p+1} + \mathrm{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathrm{A}_{p-1} + \mathrm{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+1} - \mathrm{A}_p(\mathbf{x}_{t-p+1} - \mathbf{x}_{t-p}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathrm{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+1} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

Lalu, lakukan operasi penambahan dan pengurangan lagi dengan $(\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+2}$ pada ruas kanan, sehingga diperoleh :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \ldots + \mathrm{A}_{p-2}\mathbf{x}_{t-p+2} + (\mathbf{A}_{p-1} + \mathrm{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_{p-1} + \mathrm{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+2} - (\mathrm{A}_{p-1} + \mathrm{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+2} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \ldots + (\mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+2} - (\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-p+2} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Kemudian , lakukan operasi penambahan dan pengurangan lagi dengan $(\mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+3}$ pada ruas kanan, sehingga diperoleh :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \ldots + (\mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+2} - (\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-p+2} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} +$$
$$\{(\mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+3} - (\mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+3}\} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \ldots + (\mathbf{A}_{p-3} + \mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+3} - (\mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)(\mathbf{x}_{t-p+3} - \mathbf{x}_{t-p+2}) -$$
$$(\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-p+2} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \ldots + (\mathbf{A}_{p-3} + \mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p+3} - (\mathbf{A}_{p-2} + \mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-p+3} -$$
$$(\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-p+2} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Dengan melakukan hal serupa, maka akan diperoleh :

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-1} - (\mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \ldots\ldots - (\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-p+2} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Selanjutnya lakukan operasi pengurangan kedua ruas dengan $\mathbf{x}_{t-1}$ sehingga diperoleh :

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1} = (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1} - (\mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \ldots\ldots - (\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-p+2} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} +$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I})\mathbf{x}_{t-1} - (\mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \ldots\ldots - (\mathbf{A}_{p-1} + \mathbf{A}_p)\Delta\mathbf{x}_{t-p+2} - \mathbf{A}_p\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{\Pi}_0\,\mathbf{x}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1}\mathbf{\Pi}_i\,\Delta\mathbf{x}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (3.1.4)$$

Dengan $\mathbf{\Pi}_0 = -(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^{P}\mathbf{A}_i)$ dan $\mathbf{\Pi}_i = -\sum_{j=i+1}^{p}\mathbf{A}j$

Bentuk persamaan (3.1.4) di atas mirip dengan bentuk persamaan pada pengujian *unit root Augmented Dickey Fuller* yang telah di bahas pada bab sebelumnya.

Secara garis besar, prinsip pengujian pada metode Johansen tidak lain adalah generalisasi multivariat dari pengujian Dickey Fuller . Pada kasus univariat, persamaan untuk pengujian Dickey Fuller dapat ditulis sebagai

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (3.1.5)$$

kurangkan masing-masing ruas dengan y_{t-1} sehingga diperoleh :

$$y_t - y_{t-1} = a_1 y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = (a_1 - 1)\,y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (3.1.6)$$

dari persamaan (3.1.6), diperoleh bahwa jika $(a_1 - 1) = 0$, maka :

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (3.1.7)$$

Bentuk persamaan (3.1.7) tersebut merupakan bentuk persamaan proses *random walk*, yaitu suatu proses runtun waktu yang nonstasioner, sehingga dapat disimpulkan jika $(a_1 - 1)$ =0, maka $\{y_t\}$ adalah runtun yang nonstasioner.

Pada kasus multivariat, generalisasi sederhana dari metode Dickey Fuller dapat dilihat dengan mensubstitusi persamaan (3.1.3) dengan p=1, sehingga bentuk persamaan (3.1.3) dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

kurangkan masing – masing ruas dengan $\mathbf{x}_{t-1}$ sehingga diperoleh :

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{\Pi}_0\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (3.1.8)$$

Metode Johansen menitikberatkan pada hubungan antara rank dari matriks $\mathbf{\Pi}_0$ dan banyaknya vektor kointegrasi yang terbentuk. Terdapat 3 kemungkinan nilai rank dari $\mathbf{\Pi}_0$, yaitu:

1. Jika rank $\mathbf{\Pi}_0 = 0$, maka matriks $\mathbf{\Pi}_0$ adalah matriks nol, sehingga persamaan (3.1.8) menjadi :

$$\Delta\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1} = \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \dots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ \dots \\ x_{nt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \dots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix} \qquad (3.1.9)$$

Dari persamaan (3.1.9) diperoleh bahwa $x_{it} = x_{it-1} + \varepsilon_{it}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap runtun waktu $\{x_{it}\}$, i=1,2,...,n adalah suatu proses *random walk* dan tidak ada kombinasi linier yang stasioner dari runtun waktu tersebut, sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak ada kointegrasi antara variabel – variabel runtun waktu tersebut.

2. Jika rank $\mathbf{\Pi}_0 = n$, maka $\mathbf{\Pi}_0$ merupakan matriks *full rank*, sehingga $\mathbf{\Pi}_0$ dapat direduksi menjadi matriks identitas $\mathbf{I_n}$ dengan mengalikan $\mathbf{\Pi}_0$ dengan matriks dasar elementer $E_1, E_2, ..E_k$, sehingga persamaan (3.1.8) menjadi :

$$\mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}....\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}....\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{\Pi}_0\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}....\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{\Pi}_0^{-1}\Delta\mathbf{x}_t = \mathrm{I}\mathbf{x}_{t-1} + \Pi_0^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots. & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \\ \dots. \\ \Delta x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots. & 0 \\ 0 & 1 & \dots. & 0 \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \dots. \\ x_{nt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots. & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \dots. \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

Dari baris pertama persamaan (3.1.10) diatas diperoleh bahwa :

$$a_{11}\Delta x_{1t} + a_{12}\Delta x_{2t} + ... + a_{1n}\Delta x_{nt} = x_{1t} + a_{11}\varepsilon_{1t} + a_{12}\varepsilon_{2t} + ... + a_{1n}\varepsilon_{nt}$$

$$a_{11}\Delta x_{1t} + a_{12}\Delta x_{2t} + ... + a_{1n}\Delta x_{nt} - (+a_{11}\varepsilon_{1t} + a_{12}\varepsilon_{2t} + ... + a_{1n}\varepsilon_{nt}) = x_{1t}$$

Karena Δx_{it} dan ε_{it} adalah runtun yang stasioner, maka kombinasi linier dari Δx_{it} atau ε_{it} juga merupakan runtun yang stasioner, sehingga dapat disimpulkan bahwa x_{1t} adalah runtun waktu yang stasioner. Dengan cara yang sama, dari baris kedua sampai ke-n diperoleh kesimpulan bahwa $x_{2t}, x_{3t}, \ldots, x_{nt}$ juga merupakan runtun yang stasioner. Karena masing – masing runtun $x_{it}, i = 1,2,\ldots,n$ sudah merupakan runtun yang stasioner, maka tidak ada hubungan kointegrasi antara variabel-variabel runtun waktu tersebut.

3. Apabila rank $\mathbf{\Pi}_0$ = r, r < n, maka $\mathbf{\Pi}_0$ dapat direduksi dan terdapat n-r baris nol pada $\mathbf{\Pi}_0$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \\ \cdots \\ \cdots \\ \Delta x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \cdots \\ \cdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix} \quad (3.1.11)$$

Dari baris pertama persamaan (3.1.11) diatas, diperoleh :

$$a_{11}\Delta x_{1t} + a_{12}\Delta x_{2t} + \ldots\ldots + a_{1n}\Delta x_{nt} = x_{1t} + b_{1(r+1)}x_{(r+1)t} + \ldots + b_{1n}x_{nt} + a_{11}\varepsilon_{1t} + a_{12}\varepsilon_{2t} + \ldots\ldots + a_{1n}\varepsilon_{nt}$$

$$(a_{11}\Delta x_{1t} + a_{12}\Delta x_{2t} + \ldots\ldots + a_{1n}\Delta x_{nt}) - (a_{11}\varepsilon_{1t} + a_{12}\varepsilon_{2t} + \ldots\ldots + a_{1n}\varepsilon_{nt}) = x_{1t} + b_{1(r+1)}x_{(r+1)t} + \ldots + b_{1n}x_{nt}$$

Karena Δx_{it} dan ε_{it} adalah runtun yang stasioner, maka kombinasi linier dari Δx_{it} atau ε_{it} juga merupakan runtun yang stasioner dan kombinasi linier $x_{1t} + b_{1(r+1)}x_{(r+1)t} + \ldots + b_{1n}x_{nt}$ juga merupakan kombinasi linier yang stasioner, sehingga dapat disimpulkan bahwa ada hubungan kointegrasi antara $x_{1t}, x_{r+1}, \ldots, x_{nt}$. Dengan cara yang sama, dari baris kedua sampai baris ke-r dapat diperoleh kesimpulan bahwa terdapat r hubungan kointegrasi sehingga terdapat r vektor kointegrasi.

Dari penjelasan diatas, dapat disimpulkan bahwa apabila 0 <rank $\mathbf{\Pi}_0$ < r, maka rank $\mathbf{\Pi}_0$ menunjukkan banyaknya vektor kointegrasi. Sedangkan untuk mengetahui rank $\mathbf{\Pi}_0$, dapat dilihat dari banyaknya akar karakteristik/nilai eigen

(λ) dari matriks $\mathbf{\Pi}_0$ yang berbeda dengan nol. Ide dasar dari pengujian kointegrasi Johansen adalah untuk menguji ada berapa nilai eigen (λ) dari matriks $\mathbf{\Pi}_0$ yang secara statistik berbeda dengan nol, yang secara tidak langsung menguji ada berapa vektor kointegrasi yang terjadi.

Langkah-langkah pengujian kointegrasi dengan menggunakan metode Johansen dan penaksiran matriks parameter $\mathbf{\Pi}_0$ dengan menggunakan metode Johansen *maximum likelihood* akan di bahas lebih detail pada sub bab selanjutnya.

3.2 Penaksiran Parameter Kointegrasi Multivariat

Johansen (1988) mengusulkan suatu metode penaksiran parameter untuk kasus kointegrasi multivariat. Seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, pada metode Johansen, barisan runtun waktu $\{x_{it}\}$dinyatakan dalam bentuk *Vector Autoregression* (VAR) order p, yaitu :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t \qquad (3.2.1)$$

dimana :

$\mathbf{A}_i$: matriks parameter yang berukuran (nxn)

$\mathbf{x}_t$: matriks (nx1) yang entrinya variabel-variabel $x_{1t}, x_{2t}, \ldots\ldots, x_{nt}$ dengan masing-masing x_{it} , i = 1,2,...n adalah variabel I(1) sehingga Δx_{it} adalah variabel yang stasioner.

$\mathbf{e}_t$: matriks error berukuran (nx1) yang entrinya $e_{1t}, e_{2t}, \ldots\ldots, e_{nt}$ dengan masing-masing e_{it} , i = 1,2,...n adalah variabel stasioner dan e_{it} berdistribusi gaussian ($\mathbf{0}$, $\mathbf{\Lambda}$).

dengan cara yang serupa seperti pada subbab sebelumnya, persamaan (3.2.1) dapat diparameterisasi kedalam bentuk *error correction model* (ECM).

Pertama-tama, lakukan operasi penambahan dan pengurangan dengan $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-2}$ pada ruas kanan persamaan VAR sehingga diperoleh:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-2} - \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + \mathbf{A}_{p-1}\mathbf{x}_{t-p+1} + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-2}) + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + \mathbf{A}_{p-1}\mathbf{x}_{t-p+1} + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + \mathbf{A}_{p-1}\mathbf{x}_{t-p+1} + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

kemudian, lakukan operasi penambahan dan pengurangan dengan $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{x}_{t-3}$ pada ruas kanan, sehingga diperoleh:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{x}_{t-2} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{x}_{t-3} - (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{x}_{t-3} + \mathbf{A}_3\mathbf{x}_{t-3} \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)(\mathbf{x}_{t-2} - \mathbf{x}_{t-3}) + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3)\mathbf{x}_{t-3} \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3)\mathbf{x}_{t-3} \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

dengan melakukan hal serupa, akan diperoleh:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

Selanjutnya lakukan operasi pengurangan kedua ruas dengan $\mathbf{x}_{t-1}$ sehingga diperoleh :

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

kemudian, kurangkan dan tambahkan $\mathbf{x}_{t-2}$ pada ruas kanan sehingga diperoleh:

$$\Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{x}_{t-2} - \mathbf{x}_{t-2} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} - (\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-2}) - \mathbf{x}_{t-2} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \Delta\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-2} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-2} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

lalu, kurangkan dan tambahkan $\mathbf{x}_{t-3}$ pada ruas kanan sehingga diperoleh:

$$\Delta\mathbf{x}_t = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{x}_{t-3} - \mathbf{x}_{t-3} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-1} - (\mathbf{x}_{t-2} - \mathbf{x}_{t-3}) - \mathbf{x}_{t-3} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \Delta\mathbf{x}_{t-2} - \mathbf{x}_{t-3} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-1} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-2} - \mathbf{x}_{t-3} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p)\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

dengan cara serupa, akan diperoleh :

$$\Delta\mathbf{x}_t = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-1} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_{p-1} - \mathbf{I})\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + (\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I})\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

$$\Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{\Pi}_2\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathbf{\Pi}_{p-1}\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \mathbf{\Pi}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t \qquad (3.2.2)$$

dimana :

$$\mathbf{\Pi}_i = (-\mathbf{I} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots\ldots. + \mathbf{A}_i)$$

Dengan memindahkan komponen $\prod_p \mathbf{x}_{t-p}$ ke ruas kiri dan komponen $\Delta\mathbf{x}_t$ ke ruas kanan akan diperoleh :

$$\mathbf{\Pi}_p\mathbf{x}_{t-p} = \Delta\mathbf{x}_t - \mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{\Pi}_2\Delta\mathbf{x}_{t-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \mathbf{\Pi}_{p-1}\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} - \mathbf{e}_t \qquad (3.2.3)$$

Karena tiap pernyataan pada ruas kanan stasioner, maka komponen $\mathbf{\Pi}_p\mathbf{x}_{t-p}$ harus stasioner juga; dan oleh karena matriks $\mathbf{\Pi}_p$ hanya mengandung konstanta, maka tiap baris pada matriks $\mathbf{\Pi}_p\mathbf{x}_{t-p}$ merupakan kombinasi linier yang stasioner dari $\mathbf{x}_{t-p}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa tiap baris pada matriks $\mathbf{\Pi}_p$ merupakan vektor kointegrasi untuk $\mathbf{x}_{t-p}$, yang berarti juga vektor kointegrasi untuk $\mathbf{x}_t$. Sebagai contoh, baris pertama dari matriks $\mathbf{\Pi}_p\mathbf{x}_{t-p}$ dapat ditulis sebagai $(\pi_{11}\,\mathbf{x}_{1t-p} + \pi_{12}\,\mathbf{x}_{2t-p} + \dots + \pi_{1n}\,\mathbf{x}_{nt-p})$. Karena tiap variabel $\mathbf{x}_{it}$ adalah variabel I(1) dan kombinasi liniernya stasioner, maka vektor $(\pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}, \dots, \pi_{1n})'$ merupakan vektor kointegrasi untuk $\mathbf{x}_t$.

Penaksiran parameter kointegrasi pada metode Johansen difokuskan pada persamaan ECM diatas, khususnya pada matriks $\mathbf{\Pi}_p$. Langkah-langkah penaksiran parameter kointegrasi dengan menggunakan Johansen adalah sebagai berikut :

Pertama – tama didefinisikan matriks $\boldsymbol{\beta}$ yang berukuran (nxr), dimana tiap baris pada matriks $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_{t-p}$ adalah variabel yang stasoiner atau dengan kata lain, baris – baris pada matriks $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor kointegrasi untuk $\mathbf{x}_t$. Karena banyaknya vektor kointegrasi yang terbentuk dari n variabel maksimal (n – 1), maka r < n.

Langkah kedua adalah mendefinisikan matriks $\boldsymbol{\alpha}$ berukuran (nxr) sedemikian sehingga :

$$-\mathbf{\Pi}_p = \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}'$$

$\boldsymbol{\alpha}$ dapat didefinisikan sebagai matriks koefisien koreksi keseimbangan jangka panjang karena $\boldsymbol{\alpha}$ mengoreksi *disequilibrium* hubungan keseimbangan jangka pendek pada $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_{t-p}$ menuju hubungan keseimbangan jangka panjang pada persamaan ECM (3.2.2) . Untuk selanjutnya, penaksiran parameter difokuskan pada penaksiran matriks $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$.

Substitusi $\mathbf{\Pi}_p = -\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}'$ pada persamaan (3.2.2) sehingga diperoleh :

$$\Delta\mathbf{x}_t = \mathbf{\Pi}_1\Delta\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{\Pi}_2\Delta\mathbf{x}_{t-2} + \dots + \mathbf{\Pi}_{p-1}\Delta\mathbf{x}_{t-p+1} - \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}'\,\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{e}_t$$

(3.2.4) Karena $\mathbf{e}_t$ berdistribusi Gaussian($\mathbf{0}$, $\mathbf{\Lambda}$), maka pdf $\mathbf{e}_t$ adalah :

$$f_e(\mathbf{e}_t) = \frac{1}{|\mathbf{\Lambda}|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_t'\,\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{e}_t\right) \qquad (3.2.5)$$

maka fungsi likelihood untuk (3.2.4) adalah :

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Pi}_{1,\ldots\ldots}, \boldsymbol{\Pi}_{p-1}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^{-T/2} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t=T} (\mathbf{e}_t' \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{e}_t)\} \qquad (3.2.6)$$

Untuk memaksimumkan fungsi likelihood (3.2.6), salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan meminimumkan $\{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t=T} (\mathbf{e}_t' \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{e}_t)\}$. Misalkan persamaan (3.2.4), ditulis ulang menjadi :

$$\Delta\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}'\,\mathbf{x}_{t-p} = \boldsymbol{\Pi}_1 \Delta\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Pi}_2 \Delta\mathbf{x}_{t-2} + \ldots\ldots + \boldsymbol{\Pi}_{p-1} \Delta\mathbf{x}_{t-p+1} + \mathbf{e}_t \qquad (3.2.7)$$

Dari persamaan (3.2.7), apabila ($\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}'$) diasumsikan diketahui, maka *maksimum likelihood estimator* dari $\boldsymbol{\Pi}_i$ dapat diperoleh dengan *ordinary least square* (OLS), yaitu dengan meregresikan masing-masing $\Delta\mathbf{x}_t$ dan $\mathbf{x}_{t-p}$ dengan $\Delta\mathbf{x}_{t-1}$, $\Delta\mathbf{x}_{t-2}, \ldots\ldots, \Delta\mathbf{x}_{t-p+1}$. Misalkan regresi antara $\Delta\mathbf{x}_t$ dengan $\Delta\mathbf{x}_{t-1}$, $\Delta\mathbf{x}_{t-2}, \ldots.., \Delta\mathbf{x}_{t-p+1}$ menghasilkan residual $\mathbf{R}_{0t}$ dan regresi antara $\mathbf{x}_{t-p}$ dengan $\Delta\mathbf{x}_{t-1}$, $\Delta\mathbf{x}_{t-2}, \ldots\ldots$, $\Delta\mathbf{x}_{t-p+1}$ menghasilkan residual $\mathbf{R}_{kt}$, maka persamaan *error term* dari persamaan (3.2.7) dapat ditulis menjadi :

$$\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt} = \mathbf{e}_t \qquad (3.2.8)$$

karena $\mathbf{R}_{0t}$ dan $\mathbf{R}_{kt}$ adalah residual dari regresi yang diperoleh dari metode *Ordinary Least Square* (OLS), maka nilainya minimum, sehingga nilai $\mathbf{e}_t$ minimum yang berarti nilai $\{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t=T} (\mathbf{e}_t' \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{e}_t)\}$ juga minimum. Substitusi persamaan (3.2.8) ke persamaan (3.2.6) sehingga fungsi likelihoodnya menjadi:

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Lambda}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^{-T/2} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t=T} (\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})'\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})\} \qquad (3.2.9)$$

Untuk nilai $\boldsymbol{\beta}$ *fixed* , taksiran untuk $\boldsymbol{\alpha}$ yang memaksimumkan fungsi likelihood (3.2.9) dapat diperoleh dengan regresi linier dari $\mathbf{R}_{0t}$ pada $-\boldsymbol{\beta}'\mathbf{R}_{kt}$, yaitu:

$$\mathbf{R}_{0t} = -\,\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\beta}'\,\mathbf{R}_{kt}) + \mathbf{e}_t \qquad (3.2.10)$$

Taksiran $\boldsymbol{\alpha}$ yang diperoleh dengan metode OLS pada regresi linier diatas akan memaksimumkan fungsi likelihood (3.2.9) karena taksiran $\boldsymbol{\alpha}$ dicari sedemikian sehingga nilai residual $\mathbf{e}_t$ yang dihasilkan dari persamaan regresi (3.2.10) minimum, sehingga nilai dari $\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}')\ \mathbf{R}_{kt}$ pasti juga minimum. Apabila nilai $\mathbf{e}_t = \mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{\beta}')\ \mathbf{R}_{kt}$ minimum maka fungsi likelihood (3.2.10) akan maksimum.

Dengan metode OLS, akan dicari taksiran nilai $\boldsymbol{\alpha}$ pada persaman regresi (3.2.10), dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- Persamaan regresi (3.2.10) dapat ditulis kembali dalam bentuk :

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{R}_{0t} + \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}) \qquad (3.2.11)$$

- Meminimumkan *sum square error* (SSE) dari persamaan (3.2.11), yaitu :

$$\min \sum_{t=1}^{T} (\mathbf{e}_t)^2 = \min \sum_{t=1}^{T} (\ \mathbf{R}_{0t} + \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'(\mathbf{R}_{0t} + \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt})$$

$$\min \sum_{t=1}^{T} \{\ \mathbf{R}_{0t}'\ \mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'\ \mathbf{R}_{0t} + \mathbf{R}_{0t}'\ \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}) +$$

$$(\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'\ \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt})\} \qquad (3.2.12)$$

Karena($\mathbf{R}_{0t}'\ \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt})$) adalah matriks 1x1, maka :

$(\ \mathbf{R}_{0t}'\ \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt})) = (\ \mathbf{R}_{0t}'\ \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{R}_{kt}))' = (\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'\ \mathbf{R}_{0t},$

sehingga (3.2.12) menjadi:

$$= \min \sum_{t=1}^{T} \{\ \mathbf{R}_{0t}'\ \mathbf{R}_{0t} + 2(\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'\ \mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'\ \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt})\}$$

$$= \min \sum_{t=1}^{T} \{\ \mathbf{R}_{0t}'\ \mathbf{R}_{0t}\ \} + \sum_{t=1}^{T} \{\ 2(\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'\ \mathbf{R}_{0t}\} + \sum_{t=1}^{T} \{(\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'\ \boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt})\}$$

- Fungsi SSE di atas akan diminimumkan terhadap $\boldsymbol{\alpha}$, yaitu apabila

$$\frac{\partial SSE}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} \{2\ \mathbf{R}_{0t}\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt})'\} + 2\ \boldsymbol{\alpha} \sum_{t=1}^{T} \{\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt})\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}))'\} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T} \{2\ \mathbf{R}_{0t}\ \mathbf{R}_{kt}'\ \boldsymbol{\beta}\} + 2\boldsymbol{\alpha} \sum_{t=1}^{T} \{\ (\boldsymbol{\beta}'\ \mathbf{R}_{kt}\ \mathbf{R}_{kt}'\ \boldsymbol{\beta})\} = 0$$

$$2\sum_{t=1}^{T}\{\mathbf{R}_{0t}\,\mathbf{R}_{kt}'\boldsymbol{\beta}\} = -\,2\;\boldsymbol{\alpha}\sum_{t=1}^{T}\{\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\beta}'\,\mathbf{R}_{kt}\,\mathbf{R}_{kt}\,\boldsymbol{\beta})\}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\{\mathbf{R}_{0t}\,\mathbf{R}_{kt}'\,\boldsymbol{\beta}\} = -\,\boldsymbol{\alpha}\sum_{t=1}^{T}\{\boldsymbol{\beta}'\,\mathbf{R}_{kt}\,\mathbf{R}_{kt}\,\boldsymbol{\beta}\}$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{\mathbf{R}_{0t}\,\mathbf{R}_{kt}'\,\boldsymbol{\beta}\}\,T\,\Big(\sum_{t=1}^{T}\{\boldsymbol{\beta}'\,\mathbf{R}_{kt}\,\mathbf{R}_{kt}\,\boldsymbol{\beta}\}\Big)^{-1} = -\,\boldsymbol{\alpha}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{\mathbf{R}_{0t}\,\mathbf{R}_{kt}'\,\boldsymbol{\beta}\}\Big(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{\boldsymbol{\beta}'\,\mathbf{R}_{kt}\,\mathbf{R}_{kt}\,\boldsymbol{\beta}\}\Big)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\{\mathbf{R}_{0t}\,\mathbf{R}_{kt}'\}\,\boldsymbol{\beta}\,\{\boldsymbol{\beta}'\,\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_{kt}\,\mathbf{R}_{kt})\boldsymbol{\beta}\}^{-1}$$

Kemudian definisikan $S_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_{it}\,\mathbf{R}_{kt}')$, dimana i, j = 0,k. Sehingga diperoleh :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}\,(\boldsymbol{\beta}) = -\,\mathbf{S}_{ok}\boldsymbol{\beta}\,(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\,\boldsymbol{\beta})^{-1} \qquad (3.2.12)$$

Setelah $\hat{\boldsymbol{\alpha}}\,(\boldsymbol{\beta})$ diperoleh, maka taksiran untuk $\boldsymbol{\Lambda}\,(\boldsymbol{\beta})$ yang memaksimumkan fungsi likelihood (3.2.9) dapat diperoleh dengan memaksimumkan Ln dari fungsi likelihood (3.2.9), yaitu :

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Lambda}) = |\boldsymbol{\Lambda}|^{-T/2}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})'\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})\}$$

$$\mathrm{L\,n\,L} = \mathrm{Ln}\,|\boldsymbol{\Lambda}|^{-T/2} + \{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})'\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})\}$$

$$L n L = -\frac{T}{2} Ln|\mathbf{\Lambda}| + \{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})'\,\mathbf{\Lambda}^{-1}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})\}$$

Nilai Ln L akan maksimum apabila $\frac{\partial LnL}{\partial \mathbf{\Lambda}}=\mathbf{0}$, yaitu:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \mathbf{\Lambda}} = \frac{-T/2\,\partial Ln|\mathbf{\Lambda}|}{\partial \mathbf{\Lambda}} + -\{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})'\,\frac{\partial \mathbf{\Lambda}^{-1}}{\partial \mathbf{\Lambda}}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})\} = \mathbf{0}$$

$$(-\frac{T}{2})\frac{1}{|\mathbf{\Lambda}|}\frac{\partial|\mathbf{\Lambda}|}{\partial \mathbf{\Lambda}} = \{\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{\Lambda}^{-1}}{\partial \mathbf{\Lambda}}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}')\,\mathbf{R}_{kt})'\}$$

Berdasarkan (2.6.2b) dan (2.6.3a)

$$\left(-\frac{T}{2}\right)\frac{1}{|\Lambda|}(\text{adj}\,(\Lambda))' = \left\{\left(-\frac{1}{2}\Lambda^{-1}\Lambda^{-1}\right)\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})'\right\} = 0$$

Karena Λ adalah matriks simetris, maka (adj (Λ))'= (adj (Λ)), sehingga :

$$\left(-\frac{T}{2}\right)\frac{1}{|\Lambda|}(\text{adj}\,(\Lambda)) = -\frac{1}{2}(\Lambda^{-1}\Lambda^{-1})\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})'$$

$$T\frac{\text{adj}(\Lambda)}{|\Lambda|} = \Lambda^{-1}\Lambda^{-1}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})'$$

$$T\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda^{-1}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})'$$

$$\Lambda T\Lambda^{-1} = \Lambda\Lambda^{-1}\Lambda^{-1}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})'$$

$$T = \Lambda^{-1}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})'$$

$$\Lambda T = \Lambda\Lambda^{-1}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})'$$

$$\Lambda = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})(R_{0t}+(\alpha\,\beta')R_{kt})'$$

$$\hat{\Lambda}(\beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}R_{0t}' + ((\alpha\,\beta')R_{kt})R_{0t}' + R_{0t}((\alpha\,\beta')R_{kt})' + ((\alpha\,\beta')R_{kt})((\alpha\,\beta')R_{kt})')$$

$$\hat{\Lambda}(\beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}R_{0t}' + (\alpha\,\beta')R_{kt}R_{0t}' + ((\alpha\,\beta')R_{kt})'(R_{0t} + ((\alpha\,\beta')R_{kt}))$$

$$\hat{\Lambda}(\beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(R_{0t}R_{0t}' + (\alpha\,\beta')R_{kt}R_{0t}' + R_{kt}'\,\beta\,\alpha'(R_{0t} + (\alpha\,\beta')R_{kt}))$$

$$\hat{\Lambda}_{0t0t}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t}\mathbf{R}_{0t}') + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{kt}\mathbf{R}_{0t}')$$

$$+ \mathbf{R}_{kt}'\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}'\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\mathbf{R}_{kt}) \qquad (3.2.13)$$

dari persamaan (3.2.11) diperoleh bahwa $\mathbf{R}_{0t} + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\mathbf{R}_{kt} = \mathbf{e}_t$, sehingga persamaan (3.2.13) menjadi :

$$\hat{\Lambda}_{0t0t}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t}\mathbf{R}_{0t}') + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{kt}\mathbf{R}_{0t}') + \mathbf{R}_{kt}'\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}'\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{e}_t)$$

karena $\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{e}_t) = 0$ dan $S_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{R}_{it}\mathbf{R}_{kt}')$, dimana i, j = 0,k maka diperoleh :

$$\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{0t}\mathbf{R}_{0t}') + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}(\mathbf{R}_{kt}\mathbf{R}_{0t}')$$

$$\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{S}_{00} + (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}')\mathbf{S}_{ko}$$

substitusi $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta}) = -S_{ok}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta})^{-1}$ sehingga diperoleh :

$$\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{ok}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{ko}$$

Setelah $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\beta})$ dan $\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\beta})$ diperoleh, selanjutnya akan dicari taksiran untuk $\boldsymbol{\beta}$ yang memaksimumkan fungsi likelihood (3.2.9). Untuk memaksimumkan fungsi likelihood (3.2.9), $|\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\beta})|$ harus minimum, yang berarti meminimumkan $|\mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{ok}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{ko}|$. Untuk meminimumkan $|\mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{ok}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{ko}|$, definisikan matriks :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \tag{3.2.14}$$

Matriks (3.2.14) diatas dapat difaktorisasi kedalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S}_{00}^{-1}\mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

Sehingga determinan $\begin{vmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} . \det\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S}_{00}^{-1}\mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$

$$= |\mathbf{S}_{00}||\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0}\mathbf{S}_{00}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\boldsymbol{\beta}| \tag{3.2.15}$$

Matriks (3.2.14) diatas juga dapat difaktorisasi menjadi :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Sehingga determinan $\begin{vmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta} \end{vmatrix} . \det\begin{vmatrix} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta} \\ (\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0} & \mathbf{I} \end{vmatrix}$

$$= |\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta}|\,|\mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0}| \qquad (3.2.16)$$

Dari (3.2.15) dan (3.2.16) diperoleh

determinan $\begin{pmatrix} \mathbf{S_{00}} & \mathbf{S_{0k}\beta} \\ \mathbf{\beta' S_{k0}} & \mathbf{\beta' S_{kk}\beta} \end{pmatrix} = |\mathbf{S}_{00}||\,\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\,\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta}|$

$$= |\,\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\,\boldsymbol{\beta}\,||\,\mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta}\,(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta})^{-1}\,\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0}|$$

Yang berarti apabila ingin meminimumkan $|\,\mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta}\,(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{0k}\boldsymbol{\beta})^{-1}\,\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{ko}|$ terhadap $\boldsymbol{\beta}$, maka akan sama dengan meminimumkan :

$$|\,\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\,\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\boldsymbol{\beta}|/|\,\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{kk}\,\boldsymbol{\beta}\,| \qquad (3.2.17)$$

Untuk meminimumkan (3.2.16), pertama –tama akan dicari nilai eigen dari matriks $\mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}$ yang bersesuaian dengan matriks $\mathbf{S}_{kk}$, yaitu nilai eigen yang merupakan solusi dari persamaan karakteristik :

$$\mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\,\mathbf{E} = \lambda\,\mathbf{S}_{kk}\,\mathbf{E}$$

$$\lambda\,\mathbf{S}_{kk}\,\mathbf{E} - \mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$(\lambda\,\mathbf{S}_{kk} - \mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\,)\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$|\lambda\,\mathbf{S}_{kk} - \mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\,||\mathbf{E}| = 0$$

Agar diperoleh solusi vektor karakteristik E yang nontrivial, maka E bukan merupakan matriks singular yang berarti $|\mathbf{E}| \neq 0$, sehingga :

$$|\lambda\,\mathbf{S}_{kk} - \mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\,| = 0 \qquad (3.2.18)$$

Misalkan $\lambda_1 > \ldots\ldots\ldots > \lambda_{r-1} > \lambda_r$ adalah solusi dari persamaan (3.2.18) dan misalkan juga **D** adalah matriks diagonal yang entrinya merupakan nilai-nilai eigen yang terurut $\lambda_1 > \ldots\ldots\ldots > \lambda_{r-1} > \lambda_r$ di atas, maka berlaku :

$$\mathbf{S}_{kk}\,\mathbf{E}\,\mathbf{D} = \mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\,\mathbf{E}$$

Dimana **E** dinormalisasi sedemikian sehingga $\mathbf{E}'\,\mathbf{S}_{kk}\,\mathbf{E} = \mathbf{I}.$

Sekarang pilih $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{E}\xi$, dimana ξ matriks rxr, maka bentuk (3.2.17) menjadi :

$$|\,(\mathbf{E}\xi)'\mathbf{S}_{kk}\,(\mathbf{E}\xi) - (\mathbf{E}\xi)'\mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}(\mathbf{E}\xi)|/|\,(\mathbf{E}\xi)'\mathbf{S}_{kk}\,(\mathbf{E}\xi)\,|$$

$$= |\,\xi'\,(\mathbf{E}\,'\mathbf{S}_{kk}\,\mathbf{E})\,\xi - \xi'\mathbf{E}'(\mathbf{S}_{k0}\,\mathbf{S}_{00}{}^{-1}\mathbf{S}_{ok}\mathbf{E})\,\xi|/|\,\xi'(\mathbf{E}'\mathbf{S}_{kk}\,\mathbf{E})\,\xi\,|$$

$$= |\,\xi'\,\mathbf{I}\xi - \xi'\mathbf{E}'\mathbf{S}_{kk}\mathbf{E}\mathbf{D}\,\xi|/|\,\xi'\mathbf{I}\,\xi\,|$$

$$= |\,\xi'\,\xi - \xi'\mathbf{I}\mathbf{D}\,\xi|/|\,\xi'\,\xi\,|$$

$$= |\,\xi'\,\xi - \xi'\mathbf{D}\,\xi|/|\,\xi'\,\xi\,| \qquad (3.2.19)$$

Berarti untuk meminimumkan (3.2.17) akan sama dengan meminimumkan (3.2.19). Supaya (3.2.19) menjadi minimum, dapat dipilih ξ

sebagai matriks identitas $\mathbf{I_r}$ atau sama dengan memilih $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ sebagai matriks yang entrinya vektor – vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 > \dots\dots\dots > \lambda_{r-1} > \lambda_r$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{E}$. (Johansen, 1988)

Setelah diperoleh taksiran untuk $\boldsymbol{\beta}$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{E}$, dimana $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dinormalisasi sedemikian sehingga $\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\mathbf{S}_{kk}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{I}$, maka diperoleh juga taksiran untuk $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Pi}$, dan $\boldsymbol{\Lambda}$ yaitu :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\,\mathbf{S}_{ok}\hat{\boldsymbol{\beta}}\,(\hat{\boldsymbol{\beta}}\;\mathbf{S}_{kk}\hat{\boldsymbol{\beta}})^{-1} = -\,\mathbf{S}_{ok}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\,\mathbf{S}_{ok}\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}} = \mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{ok}\hat{\boldsymbol{\beta}}\,(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{S}_{kk}\,\hat{\boldsymbol{\beta}})^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{S}_{ko} = \mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{ok}\hat{\boldsymbol{\beta}}\,\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{S}_{ko}$$

3.3 Pengujian Kointegrasi Multivariat

Johansen (1988) merumuskan suatu metode pengujian kointegrasi untuk kasus multivariat. Metode Johansen tersebut mampu mendeteksi adanya vektor kointegrasi yang lebih dari satu, sehingga pengujian kointegrasi ini dapat menentukan secara langsung, dari n variabel I(1) yang ada, variabel mana saja yang terkointegrasi dan ada berapa banyak hubungan kointegrasi yang terjadi. Pengujian kointegrasi ini sering dikenal dengan nama *Johansen Cointegration Test*. Adapun langkah – langkah pengujian kointegrasi Johansen adalah sebagai berikut :

1. Lakukan uji orde integrasi pada n variabel runtun waktu yang ada dengan menggunakan uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF). Berdasarkan definisi, kointegrasi mengharuskan variabel – variabel tersebut terintegrasi pada orde yang sama. Dalam konteks ini peubah harus terintegrasi pada orde satu, *I*(1). Namun, jika ada variabel yang telah stasioner maka variabel tersebut tidak dimasukkan ke pengujian selanjutnya karena analisa kointegrasi hanya diperlukan untuk variabel-variabel runtun waktu nonstasioner.
2. Plot data untuk melihat ada tidaknya trend linier dan *intercept* dari masing-masing variabel runtun waktu tersebut.

3. Hasil pengujian kointegrasi Johansen ini sangat sensitif terhadap panjang lag yang dipilih. Oleh karena itu, sebelum pengujian kointegrasi dilakukan, panjang lag harus ditentukan terlebih dahulu. Penentuan panjang lag dapat dilakukan dengan melihat AIC / SBC terkecil seperti yang telah dibahas pada bab sebelumnya.
4. Menaksir matriks $\mathbf{\Pi}$ dengan menggunakan metode Johansen maksimum likelihood seperti yang telah dijelaskan pada subbab sebelumnya.
5. Dari hasil taksiran matriks $\mathbf{\Pi}$ pada langkah (4), akan diperoleh nilai eigen $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \ldots\ldots \geq \hat{\lambda}_n$.
6. Setelah diperoleh n nilai eigen, kemudian dilakukan pengujian hipotesis untuk menguji ada berapa nilai eigen yang berbeda dari nol, yang secara tidak langsung menguji ada berapa vektor kointegrasi yang terbentuk. Statistik uji yang dapat digunakan dalam pengujian hipotesis ini ada dua, yaitu λ_{trace} dan $\lambda_{\max}$, dimana :

$$\lambda_{trace}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{n} \ln(1-\hat{\lambda}_i) \qquad (3.3.1)$$

dan

$$\lambda_{\max}(r,s) = -T \ln(1-\hat{\lambda}_{r+1}) \qquad (3.3.2)$$

Dimana :

$\hat{\lambda}_i$= nilai estimasi dari akar karakteristik matriks

T = ukuran/ banyaknya sampel yang digunakan

Statistik uji mana yang akan digunakan tergantung dari hipotesis pengujiannya. Apabila ingin diuji hipotesis dengan H_0 adalah banyaknya vektor kointegrasi r

, melawan hipotesis alternatif H_1= banyaknya vektor kointegrasi > r, maka statistik uji yang digunakan adalah λ_{trace} . Sedangkan apabila ingin menguji hipotesis H_0 adalah banyaknya vektor kointegrasi r, melawan hipotesis alternatif H_1= banyaknya vektor kointegrasi r+1 , maka statistik uji yang digunakan adalah $\lambda_{\max}$.

Misalkan akan di uji hipotesis banyaknya vektor kointegrasi 1 melawan hipotesis alternatif banyaknya vektor kointegrasi lebih dari 1, maka statistik uji yang digunakan adalah λ_{trace}. Apabila nilai dari $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_3$,....., $\hat{\lambda}_n$ semuanya tidak berbeda dengan nol, maka nilai $\sum_{i=r+1}^{n} \ln(1-\hat{\lambda}_i)$ akan mendekati 0 karena ln(1) =0. Sehingga, diperoleh nilai λ_{trace} pada persamaan (3.2.1) yang lebih kecil dari nilai kritis, maka H_0 diterima yang berarti banyaknya vektor kointegrasi ada 1. Apabila nilai dari $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_3$,....., $\hat{\lambda}_n$ ada yang berbeda dengan nol, maka nilai $\sum_{i=r+1}^{n} \ln(1-\hat{\lambda}_i)$ tidak mendekati nol, sehingga diperoleh nilai λ_{trace} pada persamaan (3.2.1) yang lebih besar dari nilai kritis, yang berarti H_0 ditolak. Apabila H_0 ditolak, berarti dapat disimpulkan bahwa vektor kointegrasinya lebih dari 1, sehingga dilakukan pengujian kointegrasi selanjutnya dengan hipotesis H_0 banyaknya vektor kointegrasi 2 melawan hipotesis alternatif banyaknya vektor kointegrasi lebih dari 2. Pengujian kointegrasi dilakukan terus, sampai diperoleh kesimpulan H_0 diterima. Langkah yang sama juga dapat dilakukan dengan menggunakan statistik uji $\lambda_{\max}$, yang berbeda hanyalah pada hipotesis pengujiaanya.

Nilai kritis untuk pengujian hipotesis dengan statistik uji λ_{trace} dan $\lambda_{\max}$ diperoleh dari simulasi monte carlo. Distribusi empiris dari statistik uji λ_{trace} dan $\lambda_{\max}$ tergantung dari beberapa hal, yaitu :

1. Jumlah variabel nonstasioner dibawah H_0, yaitu n-r.
2. Bentuk dari vektor A_0, apakah $A_0=0$, $A_0 \neq 0$ atau bentuk drift/tren.

Nilai kritis untuk pengujian λ_{trace} dan $\lambda_{\max}$ dapat dilihat pada lampiran.

BAB 4
ANALISIS HUBUNGAN KOINTEGRASI ANTARA PRODUK DOMESTIK BRUTO (PDB), EKSPOR DAN INVESTASI INDONESIA PADA TAHUN 1970-2007

Pada bab ini akan dibahas mengenai analisis hubungan keseimbangan jangka panjang/kointegrasi yang diterapkan pada data Produk Domestik Bruto (PDB), nilai ekspor dan investasi Indonesia pada tahun 1970 - 2007. Pembahasan terdiri dari konsep dan definisi peubah penelitian, data penelitian, analisis deskriptif, tujuan penelitian, analisis data, serta kesimpulan dan saran penelitian.

4.1 Konsep dan Definisi Variabel Penelitian

4.1.1 Produk Domestik Bruto (PDB)

Pertumbuhan ekonomi merupakan salah satu indikator untuk menilai kemajuan pembangunan suatu negara. Pertumbuhan ekonomi suatu negara dapat diukur dengan pertumbuhan Produk Domestik Bruto (PDB) pada negara tersebut. Secara sederhana, PDB dapat diartikan sebagai seluruh barang dan jasa yang diproduksi oleh suatu negara pada waktu tertentu.

Dalam sistem perekonomian suatu negara, baik negara berkembang ataupun negara maju, perhitungan barang dan jasa yang diproduksi bukan saja berdasarkan perusahaan milik penduduk negara tersebut melainkan bisa juga perusahaan milik penduduk negara lain di negara yang bersangkutan. Misalkan, pada perusahaan patungan *(joint venture),* perusahaan yang modalnya berasal dari investasi/penanaman modal asing atau perusahanan multinasional.

Perusahaan asing yang beroperasi disuatu negara akan menyediakan modal, teknologi dan tenaga ahli sehingga dapat menaikkan produksi dan nilai barang dan jasa di negara tersebut. Dengan naiknya produksi barang dan jasa di negara tersebut, nilai ekspor di negara tersebut juga akan meningkat. Oleh karena itu, beroperasinya perusahaan asing, baik perusahaan patungan *(joint venture),* perusahaan yang modalnya berasal dari investasi/penanaman modal asing (PMA) ataupun perusahanan multinasional merupakan bagian yang cukup penting dalam perekonomian suatu negara. Nilai barang dan jasa yang diproduksinya perlu diperhitungkan dalam menetapkan jumlah pendapatan nasional. Dengan demikian, Menurut Sukirno (2004) Produk Domestik Bruto (PDB) adalah nilai barang dan jasa di suatu negara yang diproduksi baik oleh faktor-faktor produksi milik warga negara yang berangkutan ataupun oleh perusahaan negara lain yang berada di negara tersebut. (Josua, 2007)

Data PDB sangat penting untuk menentukan tingkat pertumbuhan ekonomi yang dicapai oleh suatu negara dari tahun ke tahun. Tingkat pertumbuhan ekonomi suatu negara ditentukan oleh pertambahan riil barang dan jasa yang diproduksi di dalam perekonomian negara tersebut dan dapat dihitung dengan formula :

$$g = \frac{PDB\_riil_t - PDB\_riil_{t-1}}{PDB\_riil_{t-1}} x100\%$$

Dimana :

g = pertumbuhan ekonomi

PDB_riil_t = PDB pada tahun t (Rupiah)

PDB_riil_{t-1} = PDB pada satu tahun sebelum tahun t (Rupiah)

PDB yang digunakan dalam menentukan pertumbuhan ekonomi di atas adalah PDB yang berdasarkan harga konstan, karena pada PDB yang berdasarkan harga konstan, efek kenaikan harganya sudah dihilangkan sehingga dapat digunakan untuk menghitung tingkat pertumbuhan ekonomi. Dalam tugas akhir ini, PDB yang akan dibahas adalah PDB berdasarkan harga konstan dengan tahun acuan dasar adalah tahun 1970.

4.1.2 Ekspor

Menurut definisinya, ekspor adalah transaksi ekonomi yang terjadi antara penduduk suatu negara/ wilayah dengan penduduk negara atau wilayah lainnya. Transaksi tersebut meliputi transaksi barang dagangan (*merchandise*) seperti migas, textile,elektronik,bahan pangan; ataupun transaksi jasa, seperti jasa pengangkutan, jasa pariwisata, jasa komunikasi dan berbagai jenis transaksi ekonomi lainnya. Sedangkan istilah penduduk yang dimaksud di atas mencakup perorangan , perusahaan, badan pemerintah, dan lembaga lainnya di suatu negara atau wilayah. (Aryanto,2009)

Dalam tugas akhir ini, ekspor yang akan dibahas dalam penelitian adalah nilai ekspor migas (minyak bumi dan gas alam) dan ekspor nonmigas. Ekspor nonmigas meliputi sektor pertanian, industri, pertambangan,barang antik, textile dan lain-lain.

4.1.3 Investasi

Menurut Sharpe et *all* (1993), investasi didefinisikan sebagai berikut : mengorbankan aset yang dimiliki sekarang guna mendapatkan aset pada masa mendatang yang tentu saja dengan jumlah yang lebih besar. Sedangkan Jones (2004), mendefinisikan investasi sebagai komitmen menanamkan sejumlah dana pada satu atau lebih aset selama beberapa periode pada masa mendatang. Definisi yang lebih lengkap diberikan oleh Reilly dan Brown, yang mengatakan bahwa investasi adalah komitmen mengikatkan aset saat ini untuk beberapa periode waktu ke masa depan guna mendapatkan penghasilan yang mampu menggantikan pengorbanan investor berupa keterikatan aset pada waktu tertentu, tingkat inflasi, dan ketidaktentuan penghasilan pada masa mendatang. (Aryanto, 2009)

Dalam tugas akhir ini, investasi yang akan dibahas adalah Penanaman Modal Asing (PMA) yang disetujui pemerintah menurut sektor yang meliputi sektor pertanian, kehutanan dan perikanan, pertambangan, industri, bangunan, perhotelan, pengangkutan, perumahan dan perkantoran serta listrik dan jasa-jasa lainnya. Berdasarkan Undang-Undang N0.1 Tahun 1967 tentang PMA, penanaman modal asing meliputi penanaman modal asing secara langsung yang digunakan untuk menjalankan perusahaan di Indonesia. Dalam hal ini, pemilik modal secara langsung menanggung resiko atas penanaman modal asing tersebut.

4.1.4 Hubungan antara Produk Domestik Bruto, Ekspor dan Investasi

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa secara tidak langsung, terdapat hubungan antara Produk Domestik Bruto (PDB), Ekspor dan

Investasi. Semakin meningkatkan PDB dari suatu negara, nilai ekspor negara tersebut cenderung akan meningkat. Selain itu, apabila nilai investasi asing disuatu negara meningkat, PDB negara tersebut juga akan meningkat karena ada tambahan modal untuk memproduksi barang dan jasa.

4.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah :

1. Data Produk Domestik Bruto (PDB) yang merupakan nilai PDB Indonesia berdasarkan harga konstan dengan tahun acuan dasar adalah tahun 1970 dalam satuan Milyar Rupiah.
2. Data nilai ekspor yang merupakan penjumlahan dari ekspor migas dan nonmigas Indonesia dalam satuan juta dolar AS.
3. Data nilai investasi yang merupakan nilai Penanaman Modal Asing (PMA) yang disetujui pemerintah Indonesia menurut sektor dalam satuan juta dolar AS.

Data untuk penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari sumber yang disajikan pada tabel berikut :

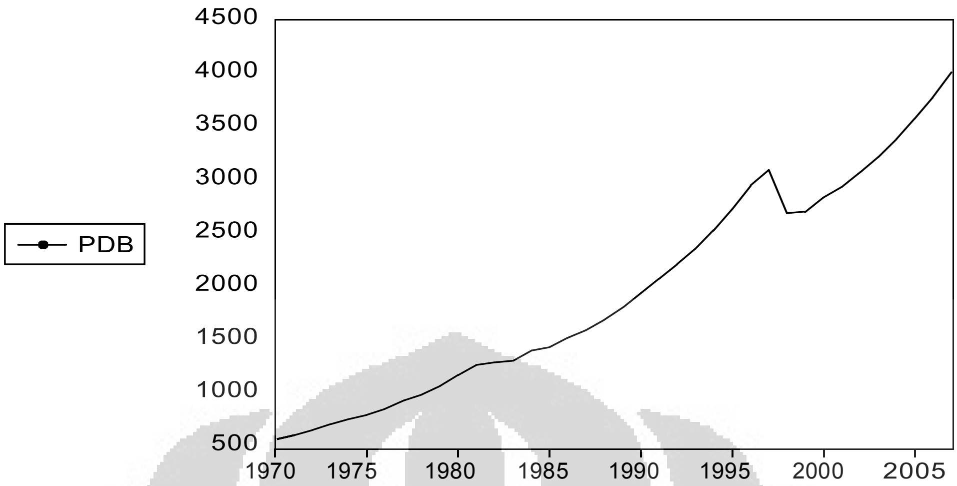
Tabel 4.2.1Variabel penelitian, sumber, jenis, dan periode data

Variabel Penelitian	Sumber	Jenis	Periode
Produk Domestik Bruto	Bank Indonesia (BI)	Tahunan	1970-2007
Ekspor	Badan Pusat Statistik (BPS)	Tahunan	1970-2007
Investasi	Bank Indonesia (BI)	Tahunan	1970-2007

4.3 Analisis Deskriptif

- Produk Domestik Bruto (PDB)

Di bawah ini adalah grafik perkembangan nilai Produk Domestik Bruto (PDB) Indonesia pada tahun 1970 – 2007.



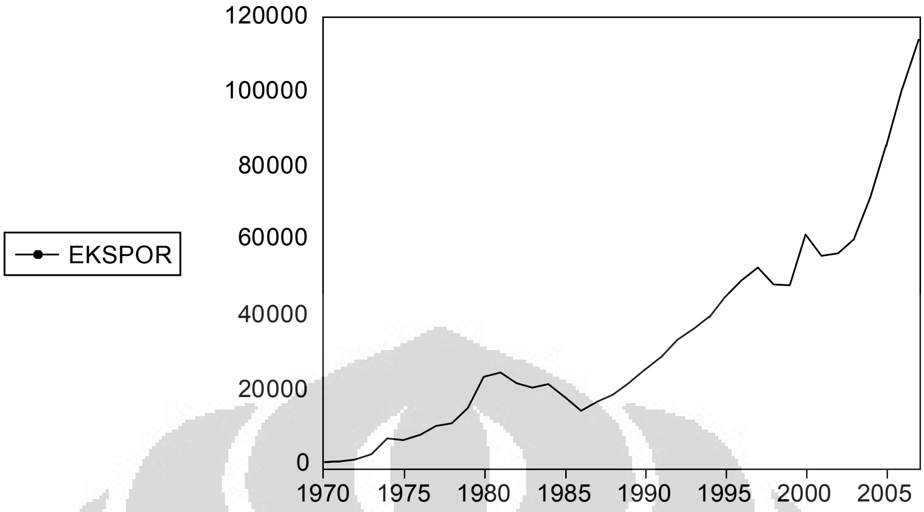
Gambar 4.3.1 Grafik perkembangan nilai Produk Domestik Bruto (PDB) Indonesia pada tahun 1970 – 2007

Dari grafik di atas terlihat bahwa nilai PDB Indonesia pada tahun 1970-2007 cenderung mengalami peningkatan. Hanya pada tahun 1997 – 1998 nilai PDB Indonesia mengalami penurunan, yaitu dari 3089,82 milyar menjadi 2684,23 milyar. Hal tersebut wajar, karena pada tahun 1998, Indonesia mengalami krisis ekonomi, sehingga nilai PDB nya turun.

Adanya fluktuasi dan tren pada nilai PDB yang terlihat dari grafik di atas tentunya mengindikasikan gejala nonstasioner.

- Ekspor

Di bawah ini adalah grafik perkembangan nilai Ekspor Indonesia pada tahun 1970 – 2007.



Gambar 4.3.2 Grafik perkembangan nilai Ekspor Indonesia

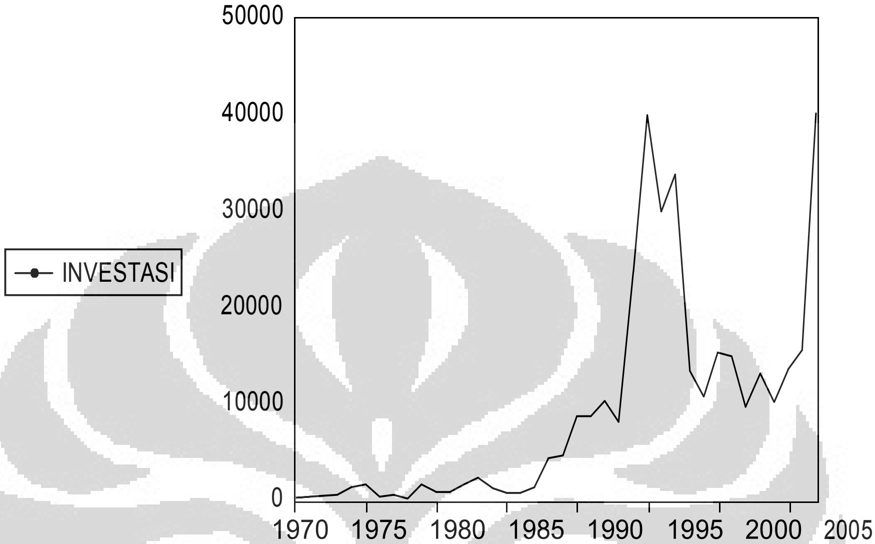
pada tahun 1970 – 2007

Dari grafik di atas terlihat bahwa nilai ekspor Indonesia pada tahun 1970−2007 cenderung meningkat. Di tahun 2003, ekspor mengalami peningkatan menjadi US$ 61.058,2 juta atau naik 6,82 persen dibanding ekspor tahun 2002 yang sebesar US$ 57.158,8 juta. Kondisi yang serupa terjadi hingga tahun 2006 dengan nilai ekspor menembus angka US$ 100 juta menjadi US$ 100.798,6 juta atau naik sebesar 17,67 persen. Pada tahun 2007 terjadi peningkatan nilai ekspor sebesar 13,20 persen menjadi US$114.100, 9 juta yang terdiri dari ekspor migas sebesar US$ 22.088,6 juta dan ekspor nonmigas sebesar US$ 92.012,3.

Fluktuasi yang terjadi pada nilai ekspor Indonesia tentunya mengindikasikan adanya tren stokastik. Berdasarkan grafik di atas, dapat disimpulkan bahwa nilai ekspor Indonesia menunjukkan gejala nonstasioner.

- Investasi

Berikut adalah grafik perkembangan nilai inevstasi (PMA yang disetujui pemerintah menurut sektor) di Indonesia pada tahun 1970 – 2007.



Gambar 4.3.3 Grafik perkembangan nilai Ekspor Indonesia
pada tahun 1970 – 2007

Dari grafik di atas terlihat bahwa nilai investasi asing yang disetujui oleh pemerintah mengalami naik turun. Pada tahun 1994, nilai investasi asing mengalami peningkatan yang sangat tajam, yaitu dari US $ 8.141,8 menjadi US$23.724, atau naik sebesar 191,39 persen dibandingkan tahun 1993. Namun, nilai investasi asing mengalami penurunan pada tahun 1998, yaitu pada saat Indonesia dilanda krisis ekonomi. Pada tahun tersebut, nilai investasi asing turun sebesar 150 persen dibandingkan tahun sebelumnya.

Untuk tahun- tahun selanjutnya, sampai tahun 2007, nilai invesatsi asing di Indonesia masih mengalami fluktuasi. Pada tahun 2007, nilai inevstasi asing mengalami peningkatan yang cukup signifikan, yaitu mencapai level US $ 40.145,8 juta. Fluktuasi dan peningkatan yang terjadi pada nilai investasi asing yang terlihat pada grafik di atas menunjukkan adanya gejala nonstasioneritas.

4.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian/analisa data ini adalah untuk mengetahui apakah terdapat hubungan kointegrasi/keseimbangan jangka panjang antara Produk Domestik Bruto (PDB), nilai Ekspor dan nilai Investasi asing di Indonesia pada tahun 1970 – 2007. Selain menguji hubungan kointegrasi, akan dicari taksiran parameter kointegrasi.

4.5 Analisa Data

Data nilai Produk Domestik Bruto (PDB), nilai ekspor dan nilai investasi asing Indonesia pada tahun 1970-2007 yang telah diolah dengan *software* Eviews 4.1 akan dianalisis dengan tahapan pengujian sebagai berikut;

4.5.1 *Unit Root Test*

Pada subbab ini akan dilakukan pengujian orde intergrasi terhadap variabel PDB, ekspor dan investasi dengan menggunakan uji *Augmented Dickey Fuller* (ADF). Berikut ini adalah model yang digunakan pada uji ADF:

$$\Delta PDB_t = \alpha_0 + \delta PDB_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \Delta PDB_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Ekspor_t = \beta_0 + \phi Ekspor_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^* \Delta Ekspor_{t-1} + v_t$$

$$\Delta Investasi_t = \gamma_0 + \omega Investasi_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^* \Delta Investasi_{t-1} + w_t \ \backslash$$

Dengan $\delta = \phi = \omega = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i - 1$

Setelah model dibentuk, dilakukan pengujian hipotesis sebagai berikut:

- Hipotesis : H_0: $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i = 1$ (mengandung unit root atau nonstasioner)

  H_1: $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i < 1$ (tidak mengandung unit root atau stasioner)

- Tingkat signifikansi : α = 0,05

- Statistik uji : $\tau = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} \hat{\varphi}_i - 1}{std\_error(\sum_{i=1}^{p} \hat{\varphi}_i)}$

- Aturan keputusan : H_0 ditolak jika nilai statistik uji τ *lebih* kecil dari nilai kritis *Dickey Fuller* (DF) atau *MacKinnon.*

Berikut ini adalah tabel hasil uji *unit root* untuk variabel PDB, ekspor dan investasi pada tingkat level dan *first difference*

Tabel 4.5.1 Hasil Uji Unit Root PDB, Ekspor dan Investasi

Variabel Penelitian	**Statistik Uji ADF**	
	Level	**First Difference**
PDB	-1,97779 (lag 0)	-4,462929*** (lag 0)
Ekspor	3,487910 (lag 0)	-3,259613** (lag 0)
Investasi	-0,985979 (lag 0)	-4,861862*** (lag 0)

Keterangan : *** signifikan pada tingkat signifikansi 1 %

** signifikan pada tingkat signifikansi 5%

* signifikan pada tingkat signifikansi 1%

Pemilihan lag ditentukan dengan menggunakan nilai AIC yang terkecil

Pada tingkat level, nilai statistik uji τ ketiga variabel lebih besar dari nilai kritis *MacKinnon* (lampiran), sehingga diputuskan untuk tidak menolak H_0. Jadi, dapat disimpulkan bahwa variabel PDB, Ekspor dan Investasi pada tingkat level masih mengandung *unit root* atau belum mampu mencapai kestasioneran pada tingkat signifikansi lima persen.

Untuk mencapai kestasioneran, ketiga variabel tersebut di-*difference* satu kali. Pada pengujian dalam bentuk *first difference*, nilai statistik uji τ ketiga variabel lebih kecil dari nilai kritis *MacKinnon* (lampiran), sehingga diputuskan untuk menolak H_0. Jadi dapat disimpulkan bahwa variabel PDB, ekspor dan Investasi tidak mengandung *unit root* atau telah mencapai kestasioneran pada tingkat signifikansi lima persen. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa ketiga variabel telah stasioner dengan proses *difference* satu kali atau dengan kata lain ketiga variabel tersebut terintegrasi pada orde 1, dinotasikan dengan I(1)

4.5.2 Penentuan Panjang Lag Optimal

Sebelum dilakukan pengujian kointegrasi Johansen, perlu ditentukan dahulu panjang lag yang optimal, karena pengujian kointegrasi Johansen sangat peka terhadap panjang lag yang digunakan. Hasil penentuan panjang lag yang optimal adalah sebagai berikut :

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-900.4797	NA	4.14E+21	58.28901	58.42779	58.33425
1	-796.0559	181.8996	8.82E+18	52.13264	52.68773	52.31358
2	-793.1660	4.474603	1.33E+19	52.52684	53.49825	52.84350
3	-768.6177	33.25904	5.13E+18	51.52372	52.91145	51.97609
4	-746.0365	26.22332	2.35E+18	50.64752	52.45156	51.23559
5	-726.3445	19.05678	1.39E+18	49.95771	52.17808	50.68149
6	-717.9997	6.460525	1.90E+18	49.99998	52.63666	50.85947
7	-683.7201	19.90425*	5.89E+17*	48.36904*	51.42204*	49.36424*

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa menurut semua kriteria yang ada, panjang lag optimal adalah 7.

4.5.3 Pengujian Kointegrasi Johansen

Berdasarkan panjang lag optimal diatas, akan dilakukan pengujian kointegrasi Johansen untuk mengetahui apakah terdapat hubungan keseimbangan jangka panjang antara variabel PDB, Ekspor dan Investasi.

- Hipotesis pengujian :

  H_0 : banyaknya vektor kointegrasi (r) = 0

  H_1: banyaknya vektor kointegrasi (r) > 0

- Statistik Uji :

$$\lambda_{trace}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{n} \ln(1-\hat{\lambda}_i) \quad \text{atau} \quad \lambda_{\max}(r,s) = -T \ln(1-\hat{\lambda}_{r+1})$$

- Aturan keputusan : H_0 ditolak jika nilai statistik uji λ_{trace} atau $\lambda_{\max}$ lebih besar dari nilai kritis.

Berikut ini adalah tabel hasil pengujian kointegrasi Johansen:

Tabel 4.5.2 Tabel Nilai Trace Statistic

Hipotesis Null	Nilai eigen	Trace statistik	Nilai kritis (5 persen)	Nilai kritis (1 persen)
r=0	0,954569	171,0366	42,44	48,45
r=1	0,829542	78,28950	25,32	30,45
r=2	0,568456	25,21155	12,25	16,26

Tabel 4.5.3 Nilai Maximum Eigenvalue Statistic

Hipotesis Null	Nilai eigen	λ_{max}	Nilai kritis (5 persen)	Nilai kritis (1 persen)
r=0	0,954569	92,74711	24,25	30,34
r=1	0,829542	53,07795	18,96	23,65
r=2	0,568456	25,21155	12,25	16,26

Berdasarkan kedua tabel di atas, dapat dilihat bahwa nilai *trace statistic* dan *maximum eigenvalue* pada hipotesis null r=0 lebih besar dari nilai kritis, baik pada tingkat signifikansi 5 persen dan satu persen. Hal tersebut berarti hipotesis nol yang menyatakan banyaknya vektor kointegrasi 0 (tidak ada kointegrasi) ditolak.

Karena H_0 ditolak, maka dilakukan pengujian yang sama dengan hipotesis null banyaknya vektor kointegrasi 1 melawan hipotesis alternatif banyaknya vektor kointegrasi lebih dari 1. Dari tabel di atas, dapat dilihat bahwa nilai *trace statistic* dan *maximum eigenvalue* pada hipotesis null r=1 lebih besar dari nilai kritis, baik pada tingkat signifikansi 5 persen dan satu persen, sehingga dapat disimpulkan bahwa hipotesis null ditolak.

Karene hipotesis null ditolak, maka banyaknya vektor kointegrasi lebih dari 1, dan karena banyaknya variabel yang di uji hanyalah 3 variabel, maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya vektor kointegrasi yang terbentuk pada variabel PDB, Ekspor dan Investasi adalah 2 buah.

4.5.4 Persamaan Kointegrasi

Berdasarkan pengujian kointegrasi pada subbab sebelumnya, disimpulkan bahwa terdapat 2 vektor kointegrasi yang terbentuk, sehingga terdapat 2 ekspersamaan kointegrasi. Berikut hasil taksiran koefisien kointegrasi pada pengujian kointegrasi antara variabel PDB, Ekspor dan Investasi :

2 Cointegrating Equation(s):		Log likelihood	-603.6962
Normalized cointegrating coefficients (std.err. in parentheses)			
EKSPOR	PDB	INVESTASI	@TREND(7)
1.000000	0.000000	13.38364	-22067.93
		(2.20199)	(3050.33)
0.000000	1.000000	0.241489	-469.8946
		(0.04706)	(65.1837)

Dari hasil di atas, persamaan kointegrasi yang terbentuk adalah :

- EKSPOR = 13.38364 INVESTASI -22067.93
- PDB = 0.241489 INVESTASI - 469.8946

Terdapat dua hubungan kointegrasi yang terbentuk antara variabel PDB, Ekspor dan Investasi. Ekspor mempunyai hubungan keseimbangan jangka panjang dengan Investasi. Hal tersebut sejalan dengan penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh [1]. Sedangkan Produk domestik Bruto mempunyai hubungan keseimbangan jangka panjang dengan Investasi.

4.6 Kesimpulan dan Saran Penelitian

4.6.1 Kesimpulan

Berikut adalah kesimpulan yang diperoleh dari sejumlah pengujian yang telah dilakukan pada variabel Produk Domestik Bruto(PDB), ekspor dan investasi Indonesia pada tahun 1970−2007:

1. Variabel PDB, ekspor dan investasi adalah variabel yang nonstasioner pada tingkat aras (*level*), tetapi setelah dilakukan proses *difference* satu kali

menghasilkan peubah yang stasioner. Kedua peubah tersebut terintegrasi pada orde satu, dinotasikan dengan $I(1)$.

2. Hasil pengujian kointegrasi Johansen menyatakan bahwa Terdapat dua hubungan kointegrasi yang terbentuk antara variabel PDB, Ekspor dan Investasi. Ekspor mempunyai hubungan keseimbangan jangka panjang dengan Investasi. Hal tersebut sejalan dengan penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh [1]. Sedangkan Produk domestik Bruto mempunyai hubungan keseimbangan jangka panjang dengan Investasi.

4.6.2 Saran

Adapun saran untuk penelitian selanjutnya adalah dengan menggunakan data kuartal (tiga bulanan) dan membagi waktu pengamatan penelitian sebelum dan sesudah terjadinya krisis moneter 1997. Hal ini dilakukan agar diperoleh hasil penelitian yang lebih akurat pada variabel PDB, ekspor dan investasi Indonesia.

BAB 5
PENUTUP

Kesimpulan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Kointegrasi multivariat adalah hubungan kointegrasi yang di uji pada tiga variabel nonstasioner atau lebih. Pada kasus kointegrasi multivariat, banyaknya vektor kointegrasi yang terbentuk bisa lebih dari satu; dan maksimal adalah (n-1), dimana n adalah banyaknya variabel nonstasioner yang di uji. Banyaknya vektor kointegrasi menunjukkan banyaknya hubungan kointegrasi yang terbentuk.
2. Untuk menguji hubungan kointegrasi multivariat dapat digunakan metode Johansen atau yang dikenal dengan *Johansen Cointegration Test.* Metode Johansen mampu mendeteksi secara langsung banyaknya hubungan kointegrasi yang terbentuk dari n variabel nonstasioner yang di uji.
3. Taksiran parameter kointegrasi pada kasus kointegrasi multivariate dapat diperoleh dengan menggunakan metode Johansen Maksimum Likelihood (JML).
4. Pada analisis hubungan kointegrasi antara nilai Produk Domestik Bruto(PDB), nilai ekspor dan nilai investasi Indonesia tahun 1970-2007, terdapat dua hubungan kointegrasi yang terbentuk, yaitu hubungan kointegrasi antara nilai ekspor dan nilai investasi; dan hubungan kointegrasi antara nilai PDB dan nilai investasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Aryanto, Rizky Nugroho.2009. Penaksiran Parameter Kointegrasi. Skripsi. Universitas Indonesia, Depok: x + 126 hlm.

Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. Terj. dari *Elementary Linear Algebra*, oleh Ir. Hari Suminto. Interaksara, Batam.

Cryer, Jonathan D. 1986. *Time Series Analysis*. PSW Publisher, Boston: 9−102

Dolado, J.J., J. Gonzalo & F. Marmol. 1999. *Cointegration*. Dalam: Baltagi, B.H. (ed.). 2001. *A Companion to Theoretical Econometrics*. Blackwell Publishing Ltd, Oxford: 634−654.

Enders, Walter. 2004. *Applied Econometric Time Series, 2nd edition*. John Willey & Sons, Inc., New York: 319−386.

Engle, R.F. & C.W.J. Granger. 1987. Co-*integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing. Econometrica*. 55 (2): 251−276.

Granger, C.W.J. & P. Newbold. 1974. Spurious Regressions in Econometrics. *Journal of Econometrics*. **2**: 111−120.

Gujarati, D.N. 2003. *Basic Econometrics*, 4th *edition*. McGraw-Hill, Inc., New York: 792−830

Johansen, S. (1988b). 'Statistical Analysis of Cointegration Vectors', *Journal* of *Economic Dynamics and Control,* Vol. 12, pp. 231-54.

Johansen, S and Juselius K .1990. "Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration- With Applications to the Demand for Money", Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 52, 169-210.

Josua. 2007. Analisis Vector Autoregression (VAR) terhadap Interrelationship antara Pertumbuhan PDB dan Pertumbuhan Kesempatan Kerja (Studi Kasus: Indonesia Tahun 1977−2006), Skripsi. Universitas Indonesia, Depok: vii+75 hlm

Nachrowi, D.N. & H. Usman. 2006. Pedoman Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan. Lembaga Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta: 183−373 .

Searll,Shayle R.1982. *Matrix Algebra Useful for Statistic*. Wiley & Sons, Inc., New York.

Schott, James R. 1997. *Matrix Analysis for Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

LAMPIRAN

Lampiran 1: Tabel Distribusi *Dickey-Fuller*

Ukuran **Sampel(T)**	Tingkat Signifikansi			
	0.01	**0.025**	**0.05**	**0.10**
Model tanpa konstanta dan *trend*				
25	−2.66	−2.26	−1.95	−1.60
50	−2.62	−2.25	−1.95	−1.61
100	−2.60	−2.24	−1.95	−1.61
250	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
500	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
∞	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
Model dengan konstanta				
25	−3.75	−3.33	−3.00	−2.62
50	−3.58	−3.22	−2.93	−2.60
100	−3.51	−3.17	−2.89	−2.58
250	−3.46	−3.14	−2.88	−2.57
500	−3.44	−3.13	−2.87	−2.57
∞	−3.43	−3.12	−2.86	−2.57
Model dengan konstanta dan *trend*				
25	−4.38	−3.95	−3.60	−3.24
50	−4.15	−3.80	−3.50	−3.18
100	−4.04	−3.73	−3.45	−3.15
250	−3.99	−3.69	−3.43	−3.15
500	−3.98	−3.68	−3.42	−3.13
∞	−3.96	−3.66	−3.41	−3.12

Lampiran 2 : Tabel Distribusi Untuk *Johansen Cointegration Test*

- Model tanpa tren dan konstanta

	Maximal Eigen Value				**Trace Statistic**			
	Tingkat Signifikansi				Tingkat Signifikansi			
n-r	10%	5%	2.5%	1%	10%	5%	2.5%	1%
1	2.86	3.84	4.93	6.51	2.86	3.84	4.93	6.51
2	9.52	11.44	13.27	15.69	10.47	12.53	14.43	16.31
3	15.59	17.89	20.02	22.99	21.63	24.31	26.64	29.75
4	21.56	23.80	26.14	28.82	36.58	39.89	42.30	45.58
5	27.62	30.04	32.51	35.17	54.44	59.46	62.91	66.52

- Model dengan tren

	Maximal Eigen Value				**Trace Statistic**			
	Tingkat Signifikansi				Tingkat Signifikansi			
n-r	10%	5%	2.5%	1%	10%	5%	2.5%	1%
1	2.69	3.76	4.95	6.65	2.69	3.76	4.95	6.65
2	12.07	14.07	16.05	18.63	13.33	15.41	17.52	20.04
3	18.60	20.97	23.09	25.52	26.79	29.68	32.56	35.65
4	24.73	27.07	28.98	32.24	43.95	47.21	50.35	54.46
5	30.90	33.46	35.71	38.77	64.84	68.52	71.80	76.07

- Model dengan konstanta

	Maximal Eigen Value				**Trace Statistic**			
	Tingkat Signifikansi				Tingkat Signifikansi			
n-r	10%	5%	2.5%	1%	10%	5%	2.5%	1%
1	7.52	9.24	10.80	12.97	7.52	9.24	10.80	12.95
2	13.75	15.67	17.63	20.20	17.85	19.96	22.05	24.60
3	19.77	22.00	24.07	26.81	32.00	34.91	37.61	41.07
4	25.56	28.14	30.32	33.24	49.65	53.12	56.06	60.16
5	31.66	34.40	36.90	39.79	72.18	76.07	80.06	84.45

Lampiran 3: Data Nilai Produk Domestik Bruto (PDB), Ekspor dan Investasi

TAHUN	PDB (Milyar Rupiah)	EKSPOR(Juta US $)	INVESTASI(Juta US $)
1970	570,90	1108,10	352,80
1971	611,00	1233,60	426,10
1972	654,00	1777,70	522,30
1973	707,00	3210,80	655,40
1974	760,98	7426,30	1414,20
1975	798,85	7102,50	1761,10
1976	853,87	8546,50	454,40
1977	928,68	10852,60	661,20
1978	991,52	11643,20	203,50
1979	1064,14	15590,10	1753,90
1980	1169,28	23950,40	900,90
1981	1261,97	25164,50	900,40
1982	1290,32	22328,30	1755,90
1983	1306,74	21145,90	2460,50
1984	1397,89	21887,80	1332,30
1985	1432,31	18586,70	859,00
1986	1516,45	14805,00	826,20
1987	1591,16	17135,60	1457,10
1988	1683,13	19218,50	4434,50
1989	1808,64	22158,90	4718,80
1990	1939,62	25675,30	8750,10
1991	2074,43	29142,40	8778,20
1992	2208,42	33967,00	10340,00
1993	2351,89	36823,00	8141,80
1994	2529,22	40053,40	23724,30
1995	2737,13	45418,00	39914,70
1996	2951,12	49814,80	29931,40
1997	3089,82	53443,60	33832,50
1998	2684,23	48847,60	13563,10
1999	2705,46	48665,40	10890,60
2000	2838,57	62124,00	15413,10
2001	2941,99	56320,90	15043,90
2002	3074,37	57158,80	9744,10
2003	3221,33	61058,20	13207,20
2004	3383,40	71584,60	10277,30
2005	3576,00	85660,00	13597,30
2006	3772,71	100798,60	15623,90
2007	4012,09	114100,90	40145,80

Lampiran 4 : Hasil Uji Order Integrasi dengan *Augmented Dickey Fuller Test*

- Produk Domestik Bruto pada Level

Null Hypothesis: PDB has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic based on AIC, MAXLAG=9)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.977779	0.5933
Test critical values:	1% level	-4.234972	
	5% level	-3.540328	
	10% level	-3.202445	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PDB)
Method: Least Squares
Date: 06/14/10 Time: 09:42
Sample(adjusted): 1972 2007
Included observations: 36 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PDB(-1)	-0.208267	0.105304	-1.977779	0.0566
D(PDB(-1))	0.342790	0.173799	1.972331	0.0573
C	64.42863	39.20930	1.643198	0.1101
@TREND(1970)	20.71735	9.398410	2.204346	0.0348

R-squared	0.233428	Mean dependent var	94.47474
Adjusted R-squared	0.161562	S.D. dependent var	103.9283
S.E. of regression	95.16325	Akaike info criterion	12.05350
Sum squared resid	289793.4	Schwarz criterion	12.22945
Log likelihood	-212.9631	F-statistic	3.248101
Durbin-Watson stat	1.936287	Prob(F-statistic)	0.034563

- Produk Domestik Bruto pada *first difference*

Null Hypothesis: D(PDB) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=9)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.462929	0.0056
Test critical values:	1% level	-4.234972	
	5% level	-3.540328	
	10% level	-3.202445	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PDB,2)
Method: Least Squares
Date: 06/14/10 Time: 09:43

Sample(adjusted): 1972 2007
Included observations: 36 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(PDB(-1))	-0.766869	0.171831	-4.462929	0.0001
C	27.03801	35.83386	0.754538	0.4559
@TREND(1970)	2.394989	1.651541	1.450154	0.1565

R-squared	0.377309	Mean dependent var	5.535538
Adjusted R-squared	0.339571	S.D. dependent var	122.1565
S.E. of regression	99.27268	Akaike info criterion	12.11327
Sum squared resid	325217.1	Schwarz criterion	12.24523
Log likelihood	-215.0389	F-statistic	9.997915
Durbin-Watson stat	1.912474	Prob(F-statistic)	0.000403

- Ekspor pada Level

Null Hypothesis: EKSPOR has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=9)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		3.487910	1.0000
Test critical values:	1% level	-3.621023	
	5% level	-2.943427	
	10% level	-2.610263	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(EKSPOR)
cMethod: Least Squares
Date: 06/14/10 Time: 09:45
Sample(adjusted): 1971 2007
Included observations: 37 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
EKSPOR(-1)	0.104364	0.029922	3.487910	0.0013
C	-278.5470	1199.576	-0.232205	0.8177

R-squared	0.257932	Mean dependent var	3053.859
Adjusted R-squared	0.236730	S.D. dependent var	5050.348
S.E. of regression	4412.252	Akaike info criterion	19.67470
Sum squared resid	6.81E+08	Schwarz criterion	19.76177
Log likelihood	-361.9819	F-statistic	12.16551
Durbin-Watson stat	1.553571	Prob(F-statistic)	0.001333

- Ekspor pada *first difference*

Null Hypothesis: D(EKSPOR) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=9)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.259613	0.0245
Test critical values:	1% level	-3.626784	

	5% level	-2.945842
	10% level	-2.611531

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(EKSPOR,2)
Method: Least Squares
Date: 06/14/10 Time: 09:45
Sample(adjusted): 1972 2007
Included observations: 36 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(EKSPOR(-1))	-0.531048	0.162917	-3.259613	0.0025
C	1836.590	894.9470	2.052177	0.0479

R-squared	0.238097	Mean dependent var	366.0222
Adjusted R-squared	0.215688	S.D. dependent var	5236.459
S.E. of regression	4637.482	Akaike info criterion	19.77568
Sum squared resid	7.31E+08	Schwarz criterion	19.86366
Log likelihood	-353.9623	F-statistic	10.62508
Durbin-Watson stat	2.022328	Prob(F-statistic)	0.002537

- Investasi pada Level

Null Hypothesis: INVESTASI has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=9)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-0.985979	0.7482
Test critical values:	1% level	-3.621023	
	5% level	-2.943427	
	10% level	-2.610263	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(INVESTASI)
Method: Least Squares
Date: 06/14/10 Time: 09:46
Sample(adjusted): 1971 2007
Included observations: 37 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INVESTASI(-1)	-0.113901	0.115521	-0.985979	0.3309
C	2025.559	1490.769	1.358734	0.1829

R-squared	0.027025	Mean dependent var	1075.486
Adjusted R-squared	-0.000774	S.D. dependent var	6916.452
S.E. of regression	6919.128	Akaike info criterion	20.57451
Sum squared resid	1.68E+09	Schwarz criterion	20.66158
Log likelihood	-378.6283	F-statistic	0.972155
Durbin-Watson stat	1.601308	Prob(F-statistic)	0.330911

- Investasi pada *first difference*

Null Hypothesis: D(INVESTASI) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on AIC, MAXLAG=9)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.861862	0.0003
Test critical values:	1% level	-3.626784	
	5% level	-2.945842	
	10% level	-2.611531	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(INVESTASI,2)
Method: Least Squares
Date: 06/14/10 Time: 09:47
Sample(adjusted): 1972 2007
Included observations: 36 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(INVESTASI(-1))	-1.016796	0.209137	-4.861862	0.0000
C	1110.450	1189.008	0.933930	0.3569

R-squared	0.410108	Mean dependent var	679.1278
Adjusted R-squared	0.392759	S.D. dependent var	9129.417
S.E. of regression	7114.162	Akaike info criterion	20.63152
Sum squared resid	1.72E+09	Schwarz criterion	20.71949
Log likelihood	-369.3673	F-statistic	23.63770
Durbin-Watson stat	1.679703	Prob(F-statistic)	0.000026

Lampiran 5 : Hasil Pengujian Panjang *Lag* Optimal

VAR Lag Order Selection Criteria
Endogenous variables: EKSPOR PDB INVESTASI
Exogenous variables: C
Date: 06/14/10 Time: 09:48
Sample: 1970 2007
Included observations: 31

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-900.4797	NA	4.14E+21	58.28901	58.42779	58.33425
1	-796.0559	181.8996	8.82E+18	52.13264	52.68773	52.31358
2	-793.1660	4.474603	1.33E+19	52.52684	53.49825	52.84350
3	-768.6177	33.25904	5.13E+18	51.52372	52.91145	51.97609
4	-746.0365	26.22332	2.35E+18	50.64752	52.45156	51.23559
5	-726.3445	19.05678	1.39E+18	49.95771	52.17808	50.68149
6	-717.9997	6.460525	1.90E+18	49.99998	52.63666	50.85947
7	-683.7201	19.90425*	5.89E+17*	48.36904*	51.42204*	49.36424*

* indicates lag order selected by the criterion
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
FPE: Final prediction error
AIC: Akaike information criterion
SC: Schwarz information criterion
HQ: Hannan-Quinn information criterion

Lampiran 6 : Hasil Pengujian Kointegrasi Johansen

Date: 06/14/10 Time: 09:52
Sample(adjusted): 1978 2007
Included observations: 30 after adjusting endpoints
Trend assumption: Linear deterministic trend (restricted)
Series: EKSPOR PDB INVESTASI
Lags interval (in first differences): 1 to 7

Unrestricted Cointegration Rank Test

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	5 Percent Critical Value	1 Percent Critical Value
None **	0.954569	171.0366	42.44	48.45
At most 1 **	0.829542	78.28950	25.32	30.45
At most 2 **	0.568456	25.21155	12.25	16.26

*(**) denotes rejection of the hypothesis at the 5%(1%) level
Trace test indicates 3 cointegrating equation(s) at both 5% and 1% levels

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	5 Percent Critical Value	1 Percent Critical Value
None **	0.954569	92.74711	25.54	30.34
At most 1 **	0.829542	53.07795	18.96	23.65
At most 2 **	0.568456	25.21155	12.25	16.26

*(**) denotes rejection of the hypothesis at the 5%(1%) level
Max-eigenvalue test indicates 3 cointegrating equation(s) at both 5% and 1% levels

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b'*S11*b=I):

EKSPOR	PDB	INVESTASI	@TREND(71)
0.000597	-0.026693	0.001549	-0.640173
0.000525	-0.030038	-0.000222	2.520419
0.000390	-0.066127	0.000994	4.299212

Unrestricted Adjustment Coefficients (alpha):

D(EKSPOR)	-341.4778	229.2744	-1060.745
D(PDB)	-31.75580	-10.58343	-2.767591
D(INVESTASI)	-1571.553	-2279.311	-302.1065

1 Cointegrating Equation(s): Log likelihood -630.2352

Normalized cointegrating coefficients (std.err. in parentheses)

EKSPOR	PDB	INVESTASI	@TREND(71)
1.000000	-44.68298	2.593186	-1071.639
	(7.12269)	(0.27931)	(576.620)

Adjustment coefficients (std.err. in parentheses)

D(EKSPOR)	-0.203991
	(0.32314)
D(PDB)	-0.018970
	(0.00316)
D(INVESTASI)	-0.938810

	(0.57746)		

2 Cointegrating Equation(s): Log likelihood -603.6962

Normalized cointegrating coefficients (std.err. in parentheses)

EKSPOR	PDB	INVESTASI	@TREND(71)
1.000000	0.000000	13.38364	-22067.93
		(2.20199)	(3050.33)
0.000000	1.000000	0.241489	-469.8946
		(0.04706)	(65.1837)

Adjustment coefficients (std.err. in parentheses)

D(EKSPOR)	-0.083533	2.228022
	(0.42478)	(21.4563)
D(PDB)	-0.024531	1.165548
	(0.00276)	(0.13960)
D(INVESTAS)	-2.136329	110.4144
	(0.34880)	(17.6186)