



UNIVERSITAS INDONESIA

**PENAKSIRAN PARAMETER SEMIVARIOGRAM
DENGAN METODE *LINEAR PROGRAMMING***

SKRIPSI

**YUNITA PANCA WARDHANI
0606067931**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010**



UNIVERSITAS INDONESIA

**PENAKSIRAN PARAMETER SEMIVARIOGRAM
DENGAN METODE *LINEAR PROGRAMMING***

SKRIPSI

**Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
sarjana sains**

**YUNITA PANCA WARDHANI
0 6 0 6 0 6 7 9 3 1**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2010**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya menyatakan dengan benar.

Nama : Yunita Panca Wardhani

NPM : 0606067931

Tanda Tangan : 

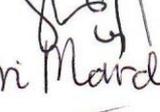
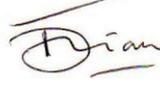
Tanggal : 14 Juli 2010

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Yunita Panca Wardhani
NPM : 0606067931
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Penaksiran Parameter
Semivariogram dengan
Metode *Linear Programming*

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dra. Siti Nurrohmah M.Si ()
Pembimbing : Sarini S.Si, M.Stats ()
Penguji : Dr. Sri Mardiyati, M. Kom ()
Penguji : Dhian Widya, S.Si, M.Kom ()

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 14 Juli 2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah swt. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sience Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Penulis menyadari bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

1. Bapak, ibu, dan kakak- kakakku. Terima kasih buat dukungan dan semangatnya sampai saya selesai mengerjakan skripsi ini.
2. Ibu Siti Nurrohmah selaku pembimbing I, dan Ibu Sarini selaku pembimbing II. Terima kasih untuk semua nasihat, bantuan, masukan dan dorongan semangat yang luar biasa yang telah diberikan kepada saya untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Ibu Kiki selaku pembimbing akademik saya selama menyelesaikan masa studi . Terima kasih atas semua bantuan dan nasihatnya.
4. Bapak Yudi Satria selaku ketua departemen, mba Rahmi Rusin, selaku sekretaris departemen, dan Ibu Dian Lestari selaku koordinator pendidikan yang telah membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.

5. Seluruh staf pengajar di Matematika UI atas ilmu pengetahuan yang telah kalian berikan.
6. Seluruh karyawan di departemen Matematika UI .Rifza, terima kasih sudah menyediakan waktu, tenaga, dan pikirannya. Terima kasih atas semua bantuannya selama proses pengerjaan skripsi ini mulai dari urusan pengetikan sampai pembuktian.
7. Farah , Reza, Widya, Sutisna, dan Oppie atas semua bantuan semangat dan dukungannya.
8. Tami , Nisa, Mella, Indah, terima kasih sudah membantu mengurus surat-surat kolokium.
9. Seluruh teman-teman angkatan 2006 yang telah memberikan pengalaman perkuliahan yang tak terlupakan.
10. Teman – teman kostan, Emi, Mei, Cisnul, Eli, Nope, Wiwit, Ka Yoes, terima kasih atas motivasinya.
11. Kepada semua teman-teman yang telah membantu pengerjaan skripsi ini, terutama teman-teman di Matematika UI, khususnya angkatan 2006. Kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan tugas akhir ini, yang namanya tidak bisa disebutkan satu-persatu, penulis ucapkan terima kasih. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi yang membacanya.

Penulis

2010

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yunita Panca Wardhani
NPM : 0606067931
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya : Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Penaksiran Parameter Semivariogram dengan Metode *Linear Programming* beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 1 Juli 2010
Yang menyatakan



(Yunita Panca Wardhani)

ABSTRAK

Nama : Yunita Panca Wardhani
Program Studi : Matematika
Judul : Penaksiran Parameter Semivariogram dengan Metode *Linear Programming*

Semivariogram adalah fungsi yang dapat menyatakan korelasi spasial pada data spasial. Semivariogram digunakan untuk mencari bobot pada *kriging*. Semivariogram mempunyai beberapa parameter diantaranya *sill* dan *range*. Parameter tersebut biasanya ditaksir berdasarkan plot semivariogram yang dihitung dari data sampel terhadap jaraknya. Metode ini biasa disebut metode klasik. Namun pada skripsi ini akan digunakan metode lain untuk menaksir parameternya. Metode yang digunakan adalah metode *linear programming*. Sesuai dengan cara kerja *linear programming* yang dapat menghasilkan solusi optimal, diharapkan parameter yang ditaksir dengan metode *linear programming* lebih baik dibandingkan dengan metode klasik. Dalam tugas akhir ini metode klasik dan metode *linear programming* diterapkan untuk kasus data tertentu dan hasilnya adalah metode *linear programming* menghasilkan taksiran parameter yang lebih baik dibandingkan metode klasik, berdasarkan uji statistik tertentu. Selain itu, metode *linear programming* juga lebih peka dalam mendeteksi model semivariogram yang cocok dengan data.

Kata kunci : data spasial, *kriging*, *linear programming*, semivariogram
vi+74 halaman; 5 gambar, 15 tabel
Daftar Pustaka: 10 (1997-2008)

ABSTRACT

Name : Yunita Panca Wardhani
Program Study : Mathematics
Title : Semivariogram Parameter Estimation with Linear Programming Method

Semivariogram is a function that can express the spatial correlation in spatial data. Semivariogram is used to find weights in kriging. Semivariogram has several parameters such as sill and range. The parameters are usually estimated based on the semivariogram plot calculated from the sample data against the distance. This method is usually called the classical method. However, this thesis will use another method for estimating parameters. The method used is linear programming method. In accordance with the methods of linear programming that can produce optimal solutions, it is hoped that the parameters fitted by linear programming method will be better than the classical method. In this thesis, classical method and linear programming method are applied to the case of certain data and the result is linear programming method produces better parameter estimates than classical methods, based on certain statistical tests. In addition, the linear programming method is also more sensitive in detecting semivariogram model that fits with the data.

Key words : kriging, linear programming, semivariogram

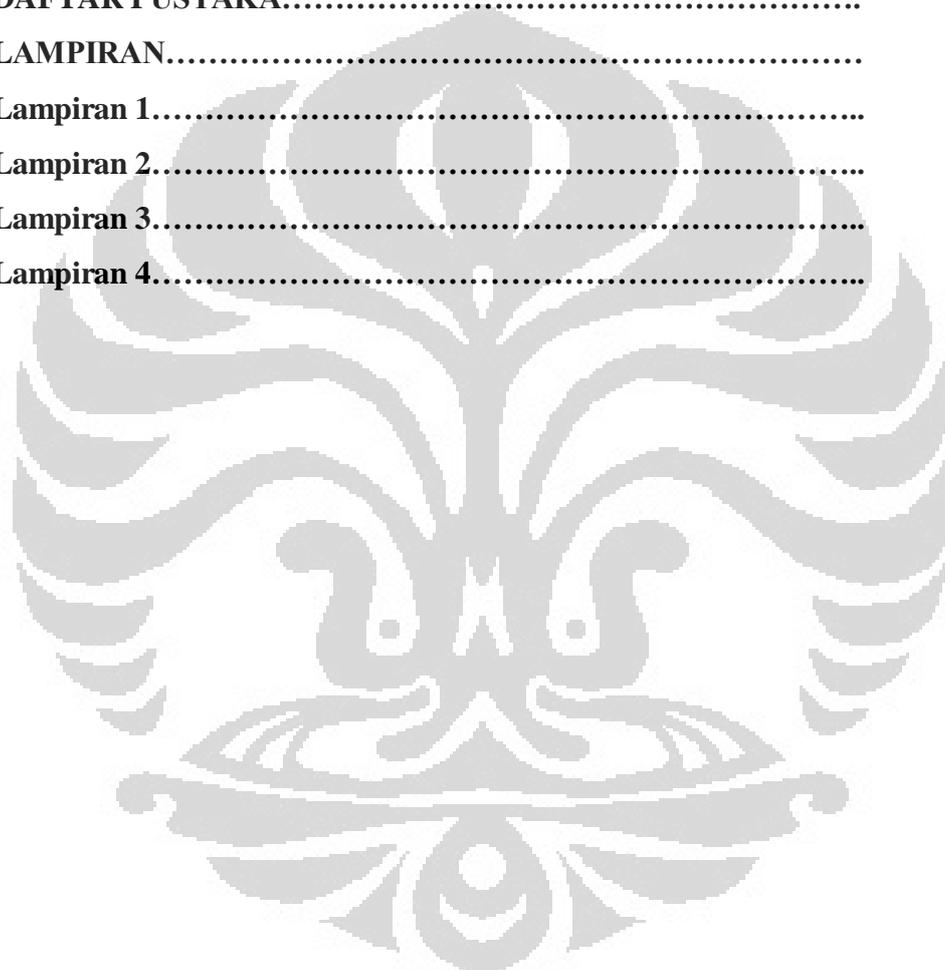
vi+74 pages ; 5 figures, 15 tables
bibliography : 10 (1997-2008)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	iii
LEMBAR PENGESAHAN	iv
KATA PENGANTAR.....	v
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI....	vii
ABSTRAK	viii
ABSTRACT.....	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL.....	xiv
1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penulisan	2
1.4 Pembatasan Masalah	2
1.5 Sistematika Penulisan.....	2
2. LANDASAN TEORI	4
2.1 Data Spasial	4
2.2 Asumsi Stasioner Orde Dua	4
2.3 Semivariogram.....	6
2.3.1 Semivariogram Teoritis.....	8
2.3.2 Semivariogram Eksperimental.....	12
2.4. Metode <i>Ordinary Kriging</i>	14
2.5 Validasi Silang.....	15
2.5.1 Prosedur Validasi Silang	16
2.5.2 Statistik Uji Q_1	18

2.5.3 Statistik Uji Q_2	19
2.5.4 Pemilihan Model yang Terbaik.....	20
2.5.4.1 Pemilihan Model yang Terbaik dengan Statistik Uji Q_1	20
2.5.4.2 Pemilihan Model yang Terbaik dengan Statistik Uji Q_2	21
2.6 Metode <i>Linear Programming</i>	21
3. PENAKSIRAN PARAMETER SEMIVARIOGRAM DENGAN METODE LINEAR PROGRAMMING.....	24
3.1 Transformasi Semivariogram Teoritis ke dalam Persamaan Linear	24
3.2 Pencarian Solusi dari Persamaan Linear dengan Metode <i>Linear Programming</i>	28
3.2.1 Semua Solusi Persamaan Linear Bernilai Nonnegatif.....	30
3.2.2 Satu atau Beberapa Solusi Persamaan Linear Bernilai Nonpositif.....	42
3.2.3 Jenis Solusi dan Persamaan Kendala untuk Model <i>Spherical</i> , Model <i>Eksponensial</i> , dan Model <i>Gaussian</i>	44
3.3 Menghitung Taksiran Parameter Semivariogram.....	49
4. STUDI KASUS.....	51
4.1 Sumber Data.....	51
4.2 Kasus.....	51
4.3 Asumsi.....	52
4.4 Permasalahan	52
4.5 Pengolahan Data	53
4.5.1 Menaksir Parameter dan Menentukan Model Semivariogram	

yang Cocok dengan Metode Klasik.....	54
4.5.2 Menaksir Parameter dan Menentukan Model Semivariogram yang Cocok dengan Metode <i>Linear Programming</i>	64
4.5.3 Perbandingan Model Semivariogram dengan Metode Klasik dan Metode <i>Linear Programming</i>	72
5. KESIMPULAN.....	74
DAFTAR PUSTAKA.....	75
LAMPIRAN.....	76
Lampiran 1.....	76
Lampiran 2.....	77
Lampiran 3.....	79
Lampiran 4.....	80



DAFTAR GAMBAR

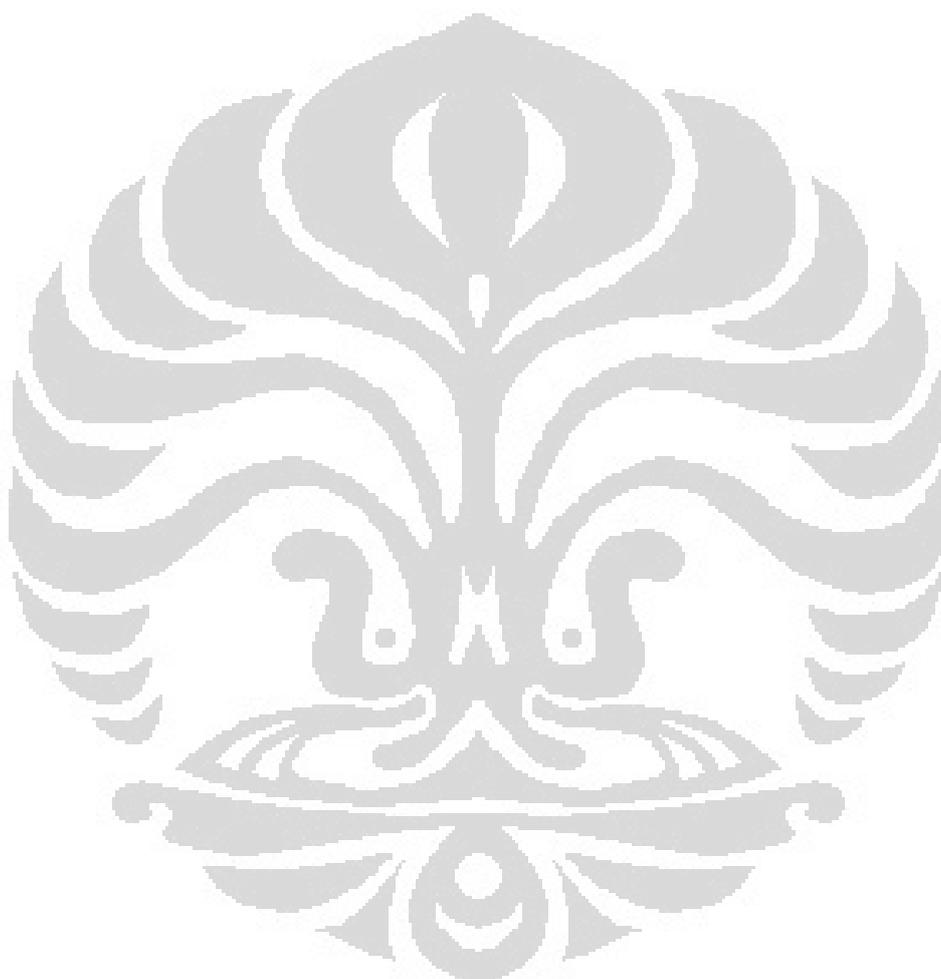
Gambar 2.1.	Grafik Semivariogram Model <i>Spherical</i>	9
Gambar 2.2.	Grafik Semivariogram Model <i>Eksponensia</i>	10
Gambar 2.3.	Grafik Semivariogram Model <i>Gaussian</i>	11
Gambar 2.4.	Grafik Semivariogram Model <i>Spherical</i> , Model <i>Eksponensial</i> , dan Model <i>Gaussian</i>	11
Gambar 4.1.	Grafik Semivariogram Eksperimental.....	56



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1.	Data koordinat lokasi titik sampel (meter) dan kandungan fosfor (ppm) di tepi danau Walker, Nevada, Amerika Serikat.....	52
Tabel 4.2	Statistik deskriptif data sampel kandungan fosfor di tepi danau Walker.....	53
Tabel 4.3	Tabel Jarak antar Sampel.....	55
Tabel 4.4	Hasil penghitungan semivariogram eksperimental.	55
Tabel 4.5	Tabel nilai residual dan residual terbaku untuk semivariogram dengan menggunakan model <i>Spherical</i>	58
Tabel 4.6	Tabel nilai residual dan residual terbaku untuk semivariogram dengan menggunakan model <i>Ekspensial</i>	59
Tabel 4.7	Tabel nilai residual dan residual terbaku untuk semivariogram dengan menggunakan model <i>Gaussian</i>	59
Tabel 4.8	Tabel pengujian asumsi kenormalan residual model <i>Spherical</i>	60
Tabel 4.9	Tabel pengujian asumsi kenormalan residual model <i>Ekspensial</i>	61
Tabel 4.10	Tabel pengujian asumsi kenormalan residual model <i>Gaussian</i>	61
Tabel 4.11	Tabel nilai residual dan residual terbaku untuk semivariogram dengan menggunakan model <i>Spherical</i>	70
Tabel 4.12	Tabel pengujian asumsi kenormalan residual model <i>Spherical</i> dengan metode <i>linear programming</i>	71

Tabel 4.13	Model <i>Spherical</i> untuk metode klasik dan metode <i>linear programming</i>	71
Tabel 4.14	Tabel perbandingan nilai $ Q_1 $ model <i>Spherical</i> dengan metode klasik dan metode <i>linear programming</i>	72
Tabel 4.15	Tabel perbandingan nilai Q_2 model <i>Spherical</i> dengan metode klasik dan metode <i>linear programming</i>	73



BAB 1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Geostatistika adalah ilmu yang merupakan gabungan antara geologi, teknik, matematika, dan statistika (Cressie, 1993). Geostatistika berhubungan dengan data yang berkorelasi secara spasial. Pada geostatistika terdapat beberapa komponen dasar, salah satunya adalah semivariogram.

Semivariogram merupakan fungsi yang dapat menyatakan korelasi spasial pada data spasial. Semivariogram dapat digunakan untuk mencari bobot *kriging*. *Kriging* banyak digunakan pada bidang pertambangan untuk mengestimasi nilai kandungan bahan tambang tertentu pada lokasi yang tidak terobservasi.

Sebelum digunakan dalam metode *kriging*, semivariogram perlu ditaksir parameter - parameter nya. Salah satu metode penaksiran yang biasa digunakan adalah metode klasik, yaitu dengan terlebih dahulu membuat plot semivariogram dari data sampel. Berdasarkan plot tersebut dipilih model yang sesuai. Ada beberapa fungsi yang dapat dijadikan sebagai model semivariogram, di antaranya *Model Pure Nugget*, *Model Spherical*, *Model Eksponensial*, *Model Gaussian*, dan *Model Power* (Hohn, 1988).

Setelah ditentukan model semivariogram yang sesuai, dilakukan penaksiran terhadap parameter- parameter nya melalui plot model semivariogram yang telah terpilih. Hal ini dilakukan dengan mencocokkan model semivariogram yang dipilih dengan grafik semivariogram sampelnya.

Namun, pada metode klasik penaksiran parameter semivariogram masih bersifat subjektif. Oleh karena itu pada tugas akhir ini akan digunakan metode lain untuk menaksir parameter-parameter semivariogram. Metode yang digunakan adalah metode *linear programming*. Berdasarkan metode *linear programming*, diharapkan akan diperoleh nilai taksiran yang optimal.

1.2 Perumusan Masalah

Perumusan masalah yang diajukan pada tugas akhir ini adalah:

- Bagaimana penaksiran parameter semivariogram dengan menggunakan metode *linear programming*.
- Bagaimana perbandingan nilai taksiran parameter semivariogram dengan metode klasik dan metode *linear programming* untuk kasus atau data tertentu.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah:

- Mencari taksiran parameter semivariogram dengan menggunakan metode *linear programming*.
- Membandingkan taksiran parameter semivariogram dengan metode klasik dan metode *linear programming*.

1.4 Pembatasan Masalah

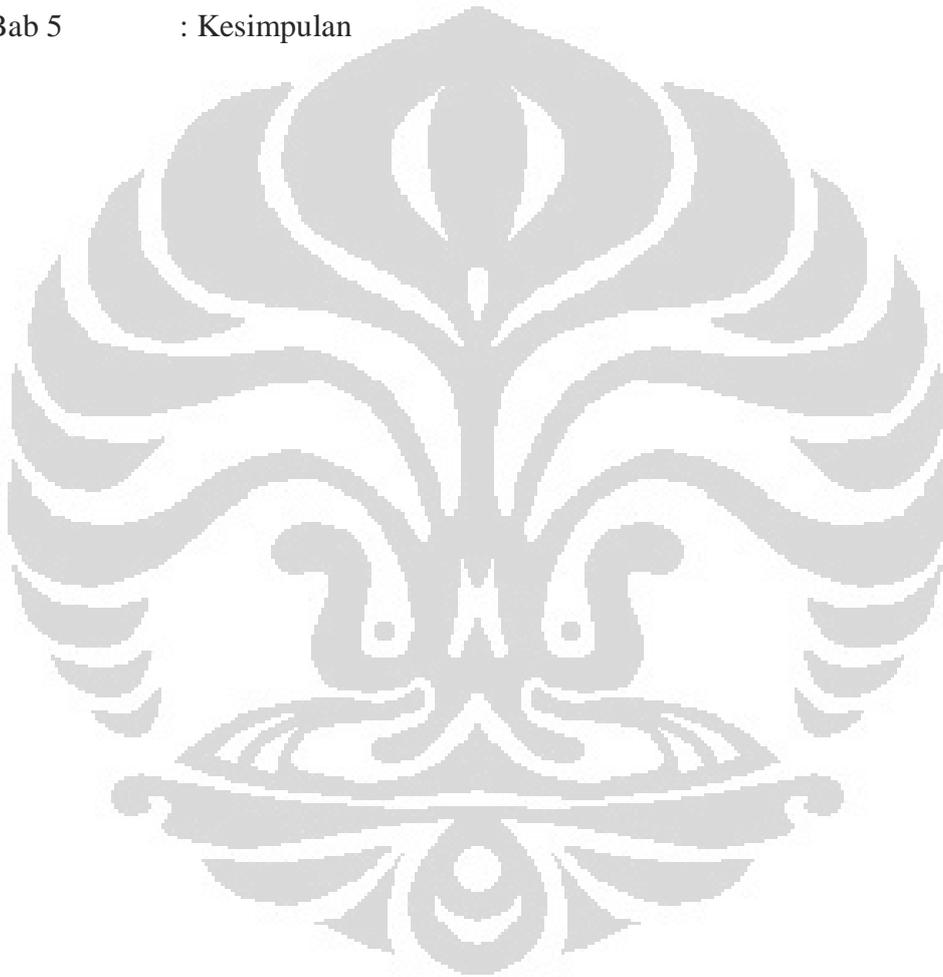
Pembahasan dalam tugas akhir ini terbatas pada hal sebagai berikut:

- Model semivariogram yang digunakan adalah *model Spherical*, *Eksponensial*, dan *Gaussian*.
- Pengujian semivariogram menggunakan validasi silang dengan metode *ordinary kriging*.

1.5 Sistematika Penulisan

- Bab 1 : Bab 1 berisi Pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.
- Bab 2 : Bab 2 berisi Landasan Teori yang terdiri dari data spasial, asumsi stasioner orde dua, semivariogram, *ordinary kriging*, validasi silang, dan *linear programming*.

- Bab 3 : Bab 3 menjelaskan proses penaksiran parameter semivariogram dengan metode *linear programming* yang meliputi transformasi fungsi semivariogram teoritis ke dalam persamaan linear, memecahkan persamaan linear dengan metode *linear programming*, dan menghitung parameternya.
- Bab 4 : Bab 4 berisi contoh kasus yang berisi sumber data, kasus, asumsi, permasalahan, pengolahan data.
- Bab 5 : Kesimpulan



BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dijelaskan tentang teori yang mendukung dalam penaksiran parameter semivariogram, khususnya dengan metode *linear programming*. Teori yang digunakan termasuk proses penaksiran parameter semivariogram dengan metode klasik dan uji validasi silang untuk menguji kecocokan model dengan terlebih dahulu menaksir nilai kandungan dengan menggunakan *ordinary kriging*.

2.1 Data Spasial

Data spasial merupakan data yang diperoleh dari hasil pengukuran yang memuat informasi mengenai lokasi dari pengukuran. Data spasial merupakan data dependen karena berasal dari lokasi spasial yang berbeda yang mengindikasikan ketergantungan antara nilai pengukuran dengan lokasi (Cressie, 1993).

Variabel random di lokasi \mathbf{s} dinotasikan dengan $Z(\mathbf{s})$, dengan nilai dari variabel random tersebut dinotasikan dengan $z(\mathbf{s})$. Himpunan dari variabel random $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D\}$ disebut proses spasial dimana D adalah himpunan lokasi di ruang yang berdimensi d .

2.2 Asumsi Stasioner Orde Dua

Himpunan variabel random $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D\}$ dikatakan memenuhi asumsi stasioner orde dua apabila memenuhi syarat- syarat sebagai berikut :

1. $E[Z(\mathbf{s})] = \mu(\mathbf{s}) = \mu, \forall \mathbf{s} \in D$

Persamaan di atas menunjukkan ekspektasi atau mean variabel random konstan untuk setiap lokasi \mathbf{s} .

$$\begin{aligned}
2. \quad & E\{[Z(\mathbf{s}) - E(Z(\mathbf{s}))][Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - E(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}))]\} \\
& = \text{cov}[Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] = C(\mathbf{h})
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dimana :

- \mathbf{s} menunjukkan lokasi yang dinyatakan dalam bentuk koordinat (dalam kasus ini $\mathbf{s} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$).
- $\mathbf{s} + \mathbf{h}$ menunjukkan lokasi yang berjarak \mathbf{h} dari lokasi \mathbf{s} , dimana $\mathbf{h} = (\Delta x, \Delta y)$. Jadi, $\mathbf{s} + \mathbf{h}$ dapat ditulis sebagai $\mathbf{s} + \mathbf{h} = \{(x + \Delta x, y + \Delta y) | x, y \in \mathbb{R}\}$.
- $Z(\mathbf{s})$ menunjukkan nilai sebenarnya pada lokasi \mathbf{s} .
- $Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})$ menunjukkan nilai sebenarnya pada lokasi $\mathbf{s} + \mathbf{h}$.

Selanjutnya, notasi- notasi di atas akan digunakan pada pembahasan berikutnya. Dari persamaan (2.1) diketahui bahwa kovariansi antara $Z(\mathbf{s})$ dan $Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})$ hanya bergantung pada jarak \mathbf{h} . $C(\mathbf{h})$ disebut sebagai kovariogram.

Ada beberapa metode kriging yang dapat digunakan antara lain metode *simple kriging* atau *ordinary kriging*. Metode tersebut dapat digunakan jika asumsi stasioner orde dua terpenuhi. Namun, ketika asumsi stasioner orde dua tidak terpenuhi digunakan metode *universal kriging* (Nia Budi Kurniati, 2007).

Untuk melihat apakah suatu data memenuhi asumsi stasioner orde dua atau tidak, beberapa langkah yang harus dilakukan adalah:

1. Buat plot 3 dimensi dari nilai pengamatan $Z(\mathbf{s}_i)$ pada lokasi pengamatan \mathbf{s}_i . Lokasi ini biasanya berupa koordinat. Pada plot tersebut, sumbu X merupakan absis dari lokasi, Y merupakan ordinat dari lokasi, dan Z merupakan nilai pengamatan. Apabila terbentuk pola atau tren pada plotnya, maka terdapat dugaan bahwa asumsi stasioner orde dua tidak terpenuhi.

2. Buat plot 2 dimensi nilai pengamatan $Z(\mathbf{s}_i)$ pada masing- masing koordinat lokasi. Jika terbentuk tren atau pola pada kedua plot ini, maka terdapat dugaan data tersebut tidak memenuhi asumsi stasioner orde dua.

Pada tugas akhir ini, untuk contoh ilustrasi penaksiran nilai z pada suatu lokasi baru akan digunakan metode *ordinary kriging*. Oleh karena itu, perlu dilakukan pengecekan terhadap data, apakah memenuhi asumsi stasioner orde dua atau tidak. Namun, pada tugas akhir ini digunakan data kandungan fosfor dari tepi Danau Walker di Nevada, Amerika Serikat. Data ini telah ditunjukkan (Nia Budi Kurniati, 2007) memenuhi asumsi stasioner orde dua.

2.3 Semivariogram

Semivariogram didefinisikan sebagai setengah variansi dari dua nilai pengamatan yang terpisah sejauh \mathbf{h} . Semivariogram dinotasikan dengan $\gamma(\mathbf{h})$. Semivariogram dapat ditulis dengan bentuk:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) \text{var}[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]. \quad (2.2)$$

Dengan mengasumsikan data memenuhi stasioner orde dua maka persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2 \quad (2.3)$$

Pembuktian persamaan (2.3) terdapat pada lampiran 1.

Sifat- sifat semivariogram adalah sebagai berikut:

1. Untuk dua data yang berjarak nol, nilainya sama dengan nol.

$$\gamma(\mathbf{0}) = 0$$

Bukti:

Dari persamaan (2.3) diperoleh persamaan:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2$$

Untuk $\mathbf{h}=(0,0)$ maka:

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{0}) &= \left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{0}) - Z(\mathbf{s}))]^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s}))]^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) E[0] \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Nilai semivariogram selalu nonnegatif.

$$\gamma(\mathbf{h}) \geq 0$$

Bukti:

Dari sifat diketahui:

$$E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2 \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2 \geq 0$$

$$\gamma(\mathbf{h}) \geq 0$$

3. Semivariogram adalah fungsi genap.

$$\gamma(-\mathbf{h}) = \gamma(\mathbf{h})$$

Bukti :

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2$$

$$\gamma(-\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{s} - \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2$$

Misalkan $\mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{h}$

Maka

$$\begin{aligned}\gamma(-\mathbf{h}) &= \left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{t}) - Z(\mathbf{t} + \mathbf{h}))]^2 \\ &= \gamma(\mathbf{h})\end{aligned}$$

Bentuk (2.2) adalah definisi dasar dari semivariogram. Adapun bentuk lain dari semivariogram dilihat dari model semivariogram yang dibentuk. Model semivariogram tersebut biasanya disebut semivariogram teoritis. Ada beberapa semivariogram teoritis antara lain: model *Spherical*, model *Eksponensial*, dan model *Gaussian* yang akan dibahas pada subbab berikut.

2.3.1 Semivariogram Teoritis

Untuk menyatakan semivariogram, terdapat beberapa model yang dapat dipilih, berdasarkan pola yang ditunjukkan oleh data sampel pada semivariogram eksperimental. Pada tugas akhir ini, akan diperhatikan tiga model, yaitu model *Spherical*, model *Eksponensial*, dan model *Gaussian*. Masing-masing model menggunakan jarak h , dimana h menunjukkan jarak antara lokasi \mathbf{s} dan $\mathbf{s} + \mathbf{h}$ dalam bentuk skalar.

$$h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \|\mathbf{h}\|$$

Adapun bentuk persamaan ketiga model dan bentuknya sebagai berikut:

1. Model *Spherical*

Bentuk fungsional semivariogram untuk model *Spherical* adalah sebagai berikut:

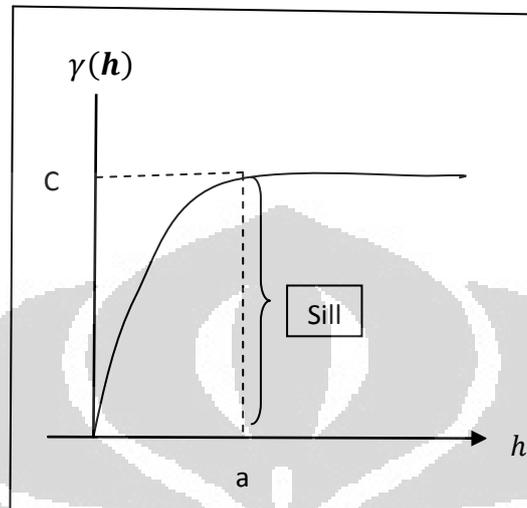
$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & , h = 0 \\ C \left(\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right) & , 0 < h \leq a \\ C & , h > a \end{cases}$$

Dengan :

- C adalah *sill*
- h adalah jarak dalam bentuk skalar

- a adalah *range*

Grafik semivariogram dengan model *Spherical* dapat dilihat pada gambar 2.1 di bawah ini



Gambar 2.1 Grafik semivariogram dengan model *Spherical*

2. Model *Ekspensial*

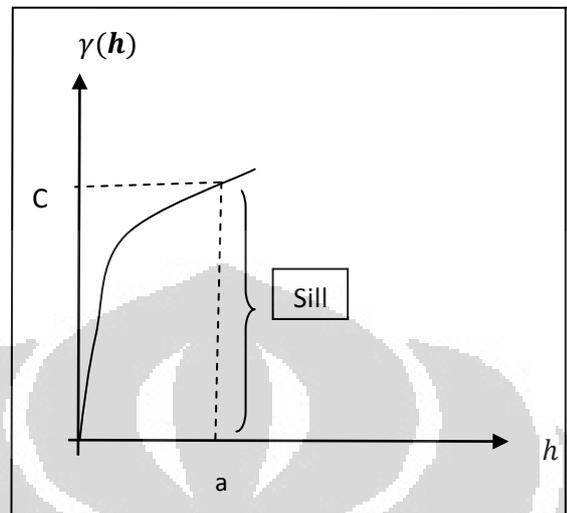
Bentuk fungsional semivariogram untuk model *Ekspensial* adalah:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , h = 0 \\ C \left(1 - \exp\left(\frac{-h}{a}\right) \right) & , 0 < h \leq a \\ C & , h > a \end{cases}$$

Dengan :

- C adalah *sill*
- h adalah jarak dalam bentuk skalar
- a adalah *range*

Grafik semivariogram dengan model *Ekspensial* dapat dilihat pada gambar 2.2 di bawah ini:



Gambar 2.2 Grafik semivariogram model *Ekspensial*

3. Model *Gaussian*

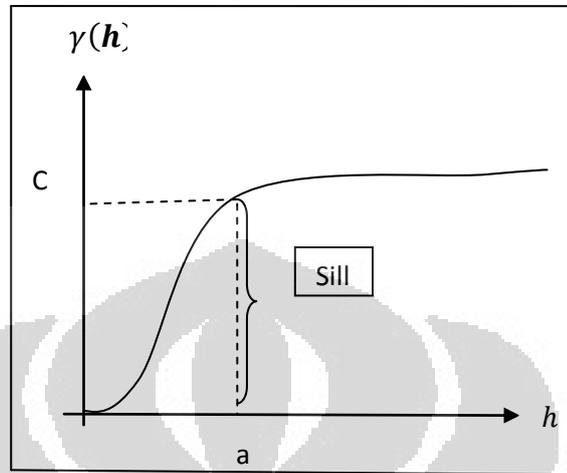
Bentuk fungsional semivariogram untuk model *Gaussian* adalah:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , h = 0 \\ c \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{h^2}{a^2}\right)\right) \right) & , 0 < h \leq a \\ c & , h > a \end{cases}$$

Dengan :

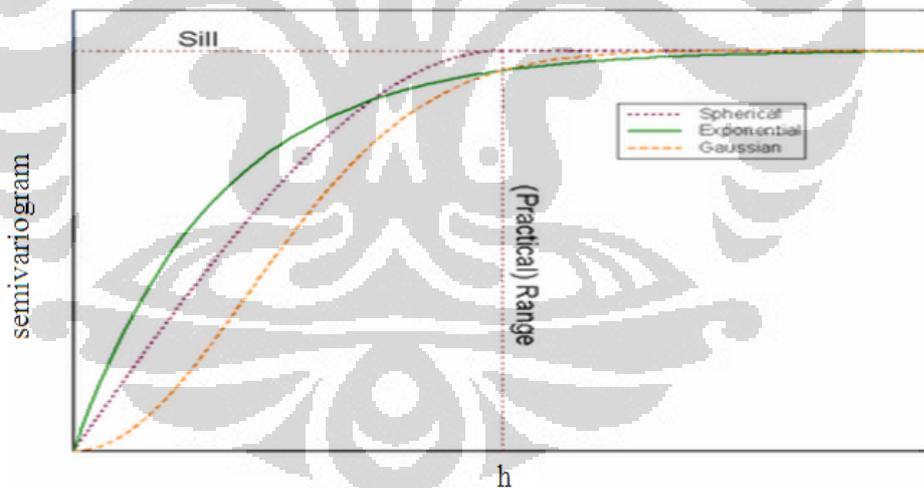
- C adalah *sill*
- h adalah jarak dalam bentuk skalar
- a adalah *range*

Bentuk grafik untuk model *Gaussian* dapat dilihat pada gambar 2.3 di bawah ini:



Gambar 2.3 Grafik semivariogram model *Gaussian*.

Jika diplot pada satu grafik, maka perbandingan ketiga model di atas adalah sebagai berikut:



Gambar 2.4 Grafik semivariogram model *Spherical*, model *Ekspensial* dan model *Gaussian*.

Berdasarkan tiga model semivariogram teoritis tersebut dapat dilihat bahwa semivariogram mempunyai beberapa parameter, yaitu :

a. *Range* (a)

Range adalah jarak maksimum dimana masih terdapat korelasi antar data.

b. *Sill* (C)

Sill merupakan sebuah nilai tertentu yang konstan, yang dicapai oleh semivariogram untuk jarak tertentu sampai dengan jarak yang tidak terhingga atau nilai semivariogram yang menunjukkan antara dua variabel random mulai berjarak h sudah tidak berkorelasi lagi. Pada umumnya, nilai *Sill* akan mendekati nilai variansi dari populasi.

Untuk mendapatkan parameter – parameter dalam model semivariogram dilakukan tahap- tahap sebagai berikut:

1. Hitung semivariogram eksperimental kemudian plot terhadap jarak h .
2. Cocokkan semivariogram eksperimental dengan semivariogram teoritis.

Oleh karena itu, berikut ini akan dibahas mengenai semivariogram eksperimental.

2.3.2 Semivariogram Eksperimental

Semivariogram eksperimental adalah semivariogram yang dihitung dari data sampel. Semivariogram eksperimental dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - z(\mathbf{s}_i)]^2$$

Dimana

\mathbf{s}_i : lokasi titik sampel

$z(\mathbf{s}_i)$: nilai pengamatan pada lokasi \mathbf{s}_i

h : jarak antara dua titik sampel

$s_i, s_i + h$: pasangan titik sampel yang berjarak h

$N(h)$: banyaknya pasangan data berbeda yang memiliki jarak h

Setelah diperoleh semivariogram eksperimental, langkah selanjutnya adalah membuat plot semivariogram eksperimental tersebut terhadap jarak h . Setelah diperoleh plotnya, kemudian dicocokkan dengan plot fungsi semivariogram teoritis yang sesuai seperti yang telah dijelaskan pada subbab 3.2.1.

Setelah diperoleh model semivariogram teoritis yang sesuai dengan semivariogram eksperimentalnya, maka dapat ditaksir parameter – parameter dari model tersebut. Penaksiran dilakukan dengan cara menebak nilai parameter berdasarkan plot data dari semivariogram eksperimental.

Untuk menebak nilai parameternya dilakukan berdasarkan dari definisi parameter tersebut. Untuk menduga nilai *sill*, diambil nilai dimana plot semivariogram menunjukkan sudah mulai stabil, kemudian nilai *range* menyesuaikan dari nilai *sill*.

Proses penyelesaian di atas merupakan proses penaksiran parameter semivariogram dengan metode klasik. Karena pemilihannya sangat subjektif, maka hasil dari metode klasik kurang akurat. Oleh sebab itu, pada tugas akhir ini, penentuan nilai dari parameter model semivariogram dilakukan dengan metode *linear programming*.

Setelah diperoleh model semivariogram, selanjutnya akan diuji apakah model semivariogram yang dipilih cocok dengan data atau tidak. Untuk menguji kecocokan model ini dilakukan uji validasi silang. Untuk melakukan uji validasi silang diperlukan nilai taksiran untuk lokasi- lokasi yang telah diukur nilainya. Untuk menaksir nilai- nilai tersebut digunakan metode *ordinary kriging*. Oleh karena itu, terlebih dahulu akan dibahas mengenai metode *ordinary kriging*.

2.4 Metode *Ordinary Kriging*

Metode penaksiran *ordinary kriging* merupakan salah satu metode kriging dimana terdapat asumsi mean konstan dan tidak diketahui. Penaksiran *ordinary kriging* ini memberikan penaksiran linear tak bias yang terbaik (*BLUE = best linear unbiased estimator*) (Nia Budi Kurniati, 2007).

Untuk menaksir nilai semivariogram pada titik yang tidak tersampel dengan metode penaksiran *ordinary kriging*, diperoleh dengan kombinasi linear dari nilai-nilai sampel. Untuk menaksir titik yang tidak tersampel dengan menggunakan nilai-nilai tersampel di sekitar titik yang akan ditaksir tersebut terlebih dahulu dicari bobot untuk masing-masing titik di sekitar. Bobot tersebut diperoleh dengan terlebih dahulu mengetahui semivariogramnya. Bobot ini biasa ditulis dengan λ_i , dimana λ_i merupakan bobot dari $Z(\mathbf{s}_i)$. Misalkan \mathbf{s}_0 adalah suatu titik yang tidak tersampel, maka untuk menaksir nilai di titik \mathbf{s}_0 dilakukan tahap-tahap sebagai berikut:

1. Mencari bobot λ_i . Bobot λ_i diperoleh dari sistem persamaan dalam bentuk matriks di bawah ini (Nia Budi Kurniati, 2007):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{0}) & \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & \dots & \gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) & 1 \\ \gamma(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) & \gamma(\mathbf{0}) & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & \dots & \dots & \gamma(\mathbf{0}) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ -m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1) \\ \gamma(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_2) \\ \dots \\ \gamma(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_n) \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (2.4)$$

Dimana :

- $\gamma(\mathbf{0})$ adalah nilai semivariogram dengan jarak nol
- $\gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)$ adalah nilai semivariogram untuk pengukuran-pengukuran di lokasi dengan jarak $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|$.
- \mathbf{A} adalah matriks yang entri-entrinya berisi nilai semivariogram untuk jarak tertentu.
- $\boldsymbol{\lambda}$ adalah matriks yang entrinya berisi bobot *kriging*.
- \mathbf{b} adalah matriks kolom yang isinya menyatakan nilai semivariogram yang berjarak tertentu dari lokasi yang akan ditaksir.

2. Setelah diperoleh bobot λ_i , selanjutnya dilakukan penaksiran nilai pada lokasi \mathbf{s}_0 . $\hat{Z}(\mathbf{s}_0)$ diperoleh dari kombinasi linear dari variabel random $Z(\mathbf{s}_i)$, yaitu (Nia Budi Kurniati, 2007):

$$\hat{Z}(\mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i Z(\mathbf{s}_i)$$

3. Hitung variansi residual minimum. Dalam bentuk semivariogram, variansi residual minimum dinyatakan sebagai berikut (Nia Budi Kurniati, 2007):

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0} - m$$

Dengan :

- σ_R^2 adalah variansi residual minimum
- λ_i adalah bobot ke $Z(\mathbf{s}_i)$ pada semivariogram
- γ_{i0} adalah nilai semivariogram yang diukur dari lokasi \mathbf{s}_i dan lokasi tertentu yang akan diukur (lokasi \mathbf{s}_0).
- m adalah parameter *Lagrange* yang terkait dengan penurunan sistem persamaan *ordinary kriging*.

Variansi residual yang minimum ini disebut juga variansi *ordinary kriging* yang dinotasikan dengan σ_{OK}^2 .

2.5 Validasi Silang

Untuk mengetahui apakah model semivariogram yang dipilih dengan taksiran parameternya dapat digunakan, maka perlu dilakukan pengujian. Ide dasar dari pengujian ini adalah, jika model semivariogram tersebut sesuai, maka akan memberikan taksiran bobot ($\hat{\lambda}_i$) yang tepat, yaitu dengan menyelesaikan sistem persamaan (2.4) pada pembahasan 2.4.

Bobot – bobot inilah yang kemudian menjadi input dalam penaksiran $z(\mathbf{s}_0)$, dengan metode *ordinary kriging*. Telah ditunjukkan (Nia Budi Kurniati, 2007) bahwa metode *ordinary kriging* adalah metode yang cukup baik untuk prediksi pada data kandungan fosfor dari tepi Danau Walker di Nevada, Amerika Serikat. Sehingga, jika bobot yang diberikan sesuai, $\hat{\lambda}_i$, maka mestinya akan menghasilkan taksiran yang cukup akurat, $\hat{z}(\mathbf{s}_0)$. Karena itu dapat disimpulkan bahwa model semivariogram yang digunakan sesuai, akan memberikan taksiran bobot, $\hat{\lambda}_i$ yang sesuai, yang pada akhirnya akan memberikan taksiran $\hat{z}(\mathbf{s}_0)$ yang akurat pada *ordinary kriging*.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka akan dilakukan uji validasi silang, untuk mengetahui apakah model yang dipilih, dengan taksiran parameternya, sesuai atau tidak untuk suatu data tertentu.

Dalam uji validasi silang dilakukan penaksiran nilai $z(\mathbf{s}_i)$ yaitu $\hat{z}(\mathbf{s}_i)$ berdasarkan nilai $n - 1$ pengamatan lain selain pengamatan pada lokasi \mathbf{s}_i , dengan n adalah ukuran sampel. Setelah itu, nilai $\hat{z}(\mathbf{s}_i)$ dibandingkan dengan pengamatan sesungguhnya, yaitu $z(\mathbf{s}_i)$. Selisih antara kedua nilai $z(\mathbf{s}_i)$ dan $\hat{z}(\mathbf{s}_i)$ disebut residual, dinotasikan dengan r_i dan residual diasumsikan berdistribusi normal.

Dalam uji validasi silang ini, residual yang diperoleh dibentuk menjadi residual terbaku, dinotasikan dengan ε_i yaitu residual yang telah distandarisasi. Residual terbaku ini yang nantinya akan digunakan sebagai dasar untuk menguji apakah model semivariogram yang digunakan valid atau tidak.

2.5.1 Prosedur Validasi Silang

Berikut ini langkah- langkah yang dilakukan dalam pengujian validasi silang:

1. Misalkan $z(\mathbf{s}_1)$ menyatakan nilai dari variabel random $Z(\mathbf{s})$ pada lokasi \mathbf{s}_1 . Hitung nilai taksiran $\hat{z}(\mathbf{s}_2)$ dengan metode *ordinary kriging* hanya

dengan menggunakan nilai $z(\mathbf{s}_1)$ sehingga $\hat{z}(\mathbf{s}_2)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\hat{z}(\mathbf{s}_2) = \hat{\lambda}z(\mathbf{s}_1)$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan *ordinary kriging*:

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh :

$\hat{z}(\mathbf{s}_2) = z(\mathbf{s}_1)$ dan $\hat{\sigma}_2^2 = \lambda_1 \hat{\gamma}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) - m = 2\hat{\gamma}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1)$,sehingga diperoleh residual:

$$r(\mathbf{s}_2) = \hat{z}(\mathbf{s}_2) - z(\mathbf{s}_2).$$

Kemudian residual terbaku diperoleh dengan membagi residual dengan simpangan bakunya:

$$\varepsilon_2 = \frac{r(\mathbf{s}_2)}{\hat{\sigma}_2}$$

2. Selanjutnya hitung nilai taksiran $\hat{z}(\mathbf{s}_3)$ dengan metode *ordinary kriging* dengan menggunakan nilai $z(\mathbf{s}_1)$ dan $z(\mathbf{s}_2)$ sehingga $\hat{z}(\mathbf{s}_3)$ dapat dinyatakan sebagai :

$$\hat{z}(\mathbf{s}_3) = \hat{\lambda}_1 z(\mathbf{s}_1) + \hat{\lambda}_2 z(\mathbf{s}_2)$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan *ordinary kriging*:

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1) & \hat{\gamma}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & 1 \\ \hat{\gamma}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) & \hat{\gamma}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1) \\ \hat{\gamma}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh :

$\hat{z}(\mathbf{s}_3)$ dan $\hat{\sigma}_3^2$,sehingga diperoleh residual:

$$r(\mathbf{s}_3) = \hat{z}(\mathbf{s}_3) - z(\mathbf{s}_3).$$

Kemudian residual terbaku diperoleh dengan membagi residual dengan simpangan bakunya:

$$\varepsilon_3 = \frac{r(\mathbf{s}_3)}{\hat{\sigma}_3}$$

- Demikian seterusnya sampai diperoleh $\hat{z}(\mathbf{s}_n)$ dengan menggunakan $z(\mathbf{s}_1), z(\mathbf{s}_2), \dots, z(\mathbf{s}_{n-1})$ kemudian hitung residual dan residual terbakunya.

Setelah diperoleh residual terbakunya selanjutnya akan diuji kecocokan model dengan melihat residual terbakunya. Model yang cocok adalah model yang memiliki residual terbaku yang kecil untuk masing- masing nilai. Oleh karena itu akan diuji apakah model tersebut cocok atau tidak dengan melihat residual terbakunya. Statistik uji yang digunakan dalam uji validasi silang adalah uji statistik Q_1 dan Q_2 .

2.5.2 Statistik Uji Q_1

Untuk menentukan model semivariogram yang valid digunakan statistik uji Q_1 . Q_1 menyatakan rata- rata dari residual terbaku.

$$Q_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k$$

Dimana:

n : ukuran sampel

ε_k : residual terbaku pada lokasi \mathbf{s}_k

ε_k dalam uji validasi ini berdistribusi normal standar $\varepsilon_k \sim N(0,1)$

Q_1 dalam uji validasi ini berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $\frac{1}{n-1}$

atau dituliskan sebagai $Q_1 \sim N\left(0, \frac{1}{n-1}\right)$.

Perumusan di atas terdapat pada lampiran 2 dan 3.

Kemudian dilakukan pengujian hipotesis dengan:

- Hipotesis :

H_0 : Model semivariogram cocok dengan data (valid)

H_1 : Model semivariogram tidak cocok dengan data (tidak valid)

- Statistik uji :

$$Q_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k$$

- Aturan keputusan:

Dengan tingkat kepercayaan 95%, model semivariogram ditolak jika

$$|Q_1| > \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

2.5.3 Uji Statistik Q_2

Selain menggunakan Q_1 untuk menentukan model semivariogram yang valid dapat digunakan uji statistik Q_2 . Q_2 menyatakan rata-rata dari jumlah kuadrat residual terbaku.

$$Q_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2$$

Dimana :

n : ukuran sampel

ε_k : residual terbaku pada sampel ke k

ε_k dalam uji validasi ini berdistribusi normal standar $\varepsilon_k \sim N(0,1)$

Maka $\varepsilon_k^2 \sim \chi_1^2$, sehingga $(n-1)Q_2 \sim \chi_{n-1}^2$

Adapun pengujian hipotesis dengan menggunakan statistik uji Q_2 adalah sebagai berikut:

- Hipotesis :

H_0 : Model semivariogram cocok dengan data (valid)

H_1 : Model semivariogram tidak cocok dengan data (tidak valid)

- Statistik uji :

$$Q_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k^2$$

- Aturan keputusan :

Dengan tingkat kepercayaan 95%, model semivariogram ditolak jika $Q_2 > U$ atau $Q_2 < L$.

Dimana nilai U dan L merupakan batas atas dan batas bawah interval kepercayaan dengan tingkat kepercayaan 95% yang diperoleh dari Tabel χ^2 dan nilainya akan tergantung pada ukuran sampel. Nilai U dan L diperoleh dari tabel pada lampiran 4.

2.5.4 Pemilihan Model Semivariogram yang Terbaik

Setelah dilakukan uji validasi silang, dapat diperoleh lebih dari satu model semivariogram yang valid. Oleh karena itu perlu dicari model yang paling baik dari model- model yang valid tersebut.

2.5.4.1 Pemilihan Model Semivariogram yang Terbaik dengan Statistik Uji Q_1

Untuk mengetahui model mana yang paling baik dengan menggunakan statistik uji Q_1 , dilakukan dengan membandingkan nilai $|Q_1|$ dari masing-masing model. Nilai Q_1 dinyatakan sebagai berikut:

$$Q_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \left[\frac{(\hat{z}_k - z_k)}{\hat{\sigma}_k} \right]$$

Dimana :

n : ukuran sampel

\hat{z}_k : nilai taksiran pada lokasi ke k

z_k : nilai sebenarnya pada lokasi ke k

$\hat{\sigma}_k$: residual terbaik untuk lokasi ke k

Model yang paling baik yaitu model yang memiliki rata-rata residual terbaik yang paling kecil. Jadi, model yang terbaik yaitu model yang memiliki nilai $|Q_1|$ yang paling mendekati nol. Nilai 0 ini diperoleh dari $E[\varepsilon_k] = 0$.

2.5.4.2 Pemilihan Model Semivariogram yang Terbaik dengan Statistik Uji Q_1

Berdasarkan uji Q_2 model yang terbaik yaitu model yang memiliki nilai Q_2 yang paling mendekati 1. Nilai 1 ini diperoleh dari $E[\varepsilon_k^2] = 1$.

2.5 Metode *Linear Programming*

Linear programming adalah teknik matematika untuk memilih kegiatan (program) terbaik dari sehimpunan alternatif yang mungkin, dengan menggunakan fungsi linear.

Tujuan dari *linear programming* adalah mengoptimalkan (memaksimumkan atau meminimumkan) fungsi tujuan terhadap sejumlah kendala (pembatasan) linear.

Setelah ditentukan fungsi tujuan dan kendala dari persamaan linear tersebut, dapat dicari solusi optimal dengan cara memasukkan sehimpunan nilai ke

variabel keputusan yang tidak berkendala dan membuat fungsi tujuan optimal (tidak harus unik) dan ke fungsi tujuan yang bersesuaian.

Berikut ini adalah bentuk umum dari *linear programming*:

Optimasi:

(Maksimum/ Minimum)

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$= \sum_{j=1}^n c_jx_j$$

Dengan kendala:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Atau

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Dimana:

- x_1, x_2, \dots, x_n : variabel keputusan
- f : fungsi tujuan
- c_1, c_2, \dots, c_n : koefisien dari variabel keputusan pada fungsi tujuan.
- $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$: koefisien variabel keputusan pada kendala ke i
- b_i : konstanta

Kendala pada masalah *linear programming* yang berbentuk pertidaksamaan dapat dirubah ke dalam bentuk persamaan.

- Untuk merubah bentuk " \leq " ke bentuk " $=$ " tambahkan *loose variabel* bertanda positif.
- Untuk merubah bentuk " \geq " ke bentuk " $=$ " tambahkan *loose variabel* bertanda negatif.

Koefisien *loose variabel* pada fungsi tujuan bernilai nol karena tidak merubah fungsi tujuan.



BAB 3

PENAKSIRAN PARAMETER SEMIVARIOGRAM DENGAN METODE *LINEAR PROGRAMMING*

Dalam bab ini akan dibahas bagaimana proses penaksiran parameter semivariogram dengan metode *linear programming*. Parameter yang akan ditaksir adalah *range* dan *sill*.

Proses yang harus dilakukan untuk memperoleh taksiran parameter semivariogram dengan metode *linear programming* yaitu:

1. Penghitungan semivariogram eksperimental.
2. Seleksi semivariogram teoritis yang sesuai.
3. Transformasi fungsi semivariogram teoritis ke dalam persamaan linear.
4. Penyelesaian persamaan linear tersebut menggunakan metode *linear programming*.
5. Hitung parameter dari model teoritisnya.

Untuk menghitung semivariogram eksperimental dan menyeleksi semivariogram teoritis yang sesuai, prosedurnya sama seperti pada metode klasik. Hal ini dapat dilihat pada subbab 2.3 yang telah dibahas mengenai metode klasik. Oleh karena itu dalam subbab berikut hanya dibahas proses transformasi fungsi semivariogram sampai diperoleh parameter dari model teoritisnya.

3.1 Transformasi Semivariogram Teoritis ke dalam Persamaan Linear

Berikut ini adalah bentuk transformasi ke dalam bentuk persamaan linear untuk model *Spherical*, model *Ekspensial* dan model *Gaussian* pada saat $0 < h < a$, dimana h adalah $\|h\|$

1. Model *Spherical*

Pada $0 < h < a$ semivariogram dengan model *Spherical* berbentuk:

$$\gamma(\mathbf{h}) = C \left(\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right) \quad (3.1)$$

Dari persamaan (3.1) model *Spherical* ini dapat ditulis ke dalam bentuk lain yaitu:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{3C}{2a} \right) h + \left(-\frac{C}{2a^3} \right) h^3 \quad (3.2)$$

Kemudian model pada persamaan (3.2) ditransformasi ke dalam bentuk baru menjadi:

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 \quad (3.3)$$

Dimana:

$$b_1 = \frac{3C}{2a}$$

$$b_2 = -\frac{C}{2a^3}$$

$$y = \gamma(\mathbf{h})$$

$$x_1 = h,$$

$$x_2 = h^3$$

Persamaan (3.3) inilah yang merupakan bentuk transformasi semivariogram teoritis ke dalam bentuk persamaan linear untuk model *Spherical*.

2. Model *Eksponensial*

Pada $0 < h < a$ semivariogram dengan model *Eksponensial* berbentuk:

$$\gamma(\mathbf{h}) = C \left(1 - \exp\left(\frac{-h}{a}\right) \right) \quad (3.4)$$

Pandang bentuk ekspansi Taylor untuk $e^{\frac{-h}{a}}$:

$$e^{\frac{-h}{a}} = 1 - \frac{h}{a} + \frac{h^2}{2!a^2} - \frac{h^3}{3!a^3} \dots \quad (3.5)$$

Dengan substitusi persamaan (3.5) ke persamaan (3.4) maka bentuk persamaan model *Ekspensial* menjadi:

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{h}) &= C \left(1 - \left(1 - \frac{h}{a} + \frac{h^2}{2!a^2} - \frac{h^3}{3!a^3} + \dots \right) \right) \\ &= C \left(\frac{h}{a} - \frac{h^2}{2!a^2} + \frac{h^3}{3!a^3} - \dots \right)\end{aligned}\quad (3.6)$$

Pada kasus ini akan diambil 11 suku pertama dari ekspansi *Taylor* untuk mengaproksimasi nilai semivariogramnya. Jika diambil 11 suku pertama maka persamaan (3.6) dapat diaproksimasi ke dalam persamaan:

$$\gamma(\mathbf{h}) \approx C \left(\frac{h}{a} - \frac{h^2}{2!a^2} + \dots + \frac{h^{11}}{11!a^{11}} \right)\quad (3.7)$$

Misalkan:

$$b_1 = \frac{C}{a}$$

$$b_2 = -\frac{C}{2!a^2}$$

⋮

$$b_{11} = \frac{C}{11!a^{11}}$$

$$y = \gamma(\mathbf{h})$$

$$x_1 = h$$

$$x_2 = h^2$$

⋮

$$x_{11} = h^{11}$$

Maka aproksimasi persamaan (3.7) menjadi :

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_{11}x_{11}\quad (3.8)$$

Persamaan (3.8) merupakan bentuk transformasi ke persamaan linear untuk model *Exponensial*.

3. Model *Gaussian*

Pada $0 < h < a$ semivariogram dengan model *Gaussian* berbentuk:

$$\gamma(\mathbf{h}) = C \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{h^2}{a^2} \right) \right) \right) \quad (3.9)$$

Dengan proses seperti pada model *Eksponensial*, diperoleh bentuk transformasi ke dalam persamaan linear dari persamaan (3.9) yaitu :

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{11} x_{11} \quad (3.10)$$

Dimana:

$$b_1 = \frac{C}{a^2}$$

$$b_2 = -\frac{C}{2! a^4}$$

$$b_{11} = \frac{C}{11! a^{22}}$$

$$y = \gamma(\mathbf{h})$$

$$x_1 = h^2$$

$$x_2 = h^4$$

⋮

$$x_{11} = h^{22}$$

Persamaan (3.10) merupakan transformasi ke dalam persamaan linear untuk model *Gaussian*.

Setelah diperoleh bentuk transformasi semivariogram teoritis dalam bentuk persamaan linear, dilakukan pencarian solusi dari persamaan – persamaan linear tersebut dengan menggunakan metode *linear programming*.

3.2 Pencarian Solusi dari Persamaan Linear dengan Metode *Linear Programming*

Pada subbab ini akan dibahas bagaimana proses untuk memperoleh solusi dari persamaan linear hasil transformasi. Metode yang digunakan untuk mencari solusi dari persamaan – persamaan tersebut yaitu dengan metode *linear programming*.

Misalkan terdapat m jarak yang berbeda h_1, h_2, \dots, h_m yang dihasilkan dari data observasi, dan $\hat{\gamma}(h_i)$ merupakan nilai semivariogram eksperimental pada jarak $h_i, i = 1, 2, \dots, m$. Setelah diperoleh model teoritis yang sesuai dengan semivariogram eksperimentalnya maka untuk mencari parameter semivariogram dengan menggunakan metode *linear programming*, model eksperimental tersebut ditransformasi ke bentuk persamaan linear.

Sesuai dengan prosedur transformasi ke dalam persamaan linear pada subbab sebelumnya, misalkan diperoleh bentuk transformasi untuk m jarak di atas yaitu:

$$\begin{aligned} x_{11}b_1 + x_{12}b_2 + \dots + x_{1n}b_n &= y_1 \\ x_{21}b_1 + x_{22}b_2 + \dots + x_{2n}b_n &= y_2 \\ \vdots & \\ x_{m1}b_1 + x_{m2}b_2 + \dots + x_{mn}b_n &= y_m \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dimana :

$$y_1, y_2, \dots, y_m \neq 0$$

n : banyaknya suku persamaan linear yang digunakan pada model.

- untuk model *Spherical*, $n = 2$
- untuk model *Eksponensial*, $n = 11$
- untuk model *Gaussian*, $n = 11$

Kemudian persamaan (3.11) dinotasikan ke dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{X}\mathbf{b} = \mathbf{Y} \quad (3.12)$$

Dengan:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Dimana :

X : matriks yang entri- entrinya merupakan fungsi dari jarak h .

b : matriks solusi, dimana masing- masing entri merupakan fungsi dari jarak a dan C .

Y : matriks yang masing- masing entrinya menyatakan nilai semivariogram pada jarak h tertentu.

Persamaan (3.12) mempunyai dua kemungkinan solusi yaitu:

- semua solusi **b** yang diharapkan nonnegatif.
- ada satu atau beberapa komponen dari **b** yang diharapkan nonpositif.

Untuk kasus semua solusi yang diharapkan nonnegatif akan dibahas pada subbab 3.2.1 dan untuk kasus ada satu atau beberapa komponen yang diharapkan nonpositif akan dibahas pada subbab 3.2.2.

3.2.1 Semua Solusi Persamaan Linear Bernilai Nonnegatif

Jika semua solusi yang diharapkan nonnegatif, maka $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ adalah vektor yang semua komponennya sama dengan 0).

Untuk memperoleh solusi nonnegatif, tahap pertama yang dilakukan

adalah menuliskan matriks $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$ ke dalam bentuk *row*

block:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{x}_m^T \end{pmatrix}.$$

dimana:

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{in} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, m.$$

Dengan mentranspose \mathbf{x}_i maka diperoleh:

$$\mathbf{x}_i^T = (x_{i1} \quad x_{i2} \quad \dots \quad x_{in}), i = 1, 2, \dots, m.$$

Sekarang misalkan \mathbf{X} ditulis ke dalam bentuk \mathbf{x}_i^T , maka dari persamaan (3.11)

berlaku:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{x}_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Penjabaran matriks pada persamaan (3.13) di atas yaitu:

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{b} = y_1$$

$$\mathbf{x}_2^T \mathbf{b} = y_2$$

$$(3.14)$$

⋮

$$\mathbf{x}_m^T \mathbf{b} = y_m$$

Atau secara umum, persamaan (3.14) dapat ditulis menjadi:

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{b} = y_i \quad (3.15)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, m$

Persamaan (3.15) dapat ditulis dalam bentuk:

$$y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b} = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, m \quad (3.16)$$

Atau

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{b} - y_i = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, m \quad (3.17)$$

Dalam kenyataannya terkait dengan data, sulit diperoleh kondisi $y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b} = 0$ atau $\mathbf{x}_i^T \mathbf{b} - y_i = 0$. Oleh karena itu hal yang dilakukan dalam metode ini adalah mencari nilai \mathbf{b} sedemikian sehingga selisih antara y_i dan $\mathbf{x}_i^T \mathbf{b}$ mendekati 0.

Secara umum seperti telah dijelaskan pada bab sebelumnya, untuk menyelesaikan masalah dengan metode *linear programming* diperlukan fungsi tujuan dan kendala.

➤ Fungsi Tujuan

Dalam persoalan ini, fungsi tujuan akan diperoleh dengan mengoptimalkan persamaan (3.16) dan persamaan (3.17).

Karena $i = 1, 2, \dots, m$ maka persamaan (3.16) dijabarkan menjadi:

$$y_1 - \mathbf{x}_1^T \mathbf{b} = 0$$

$$y_2 - \mathbf{x}_2^T \mathbf{b} = 0$$

⋮

$$y_m - \mathbf{x}_m^T \mathbf{b} = 0$$

Jika m persamaan di atas dijumlahkan dan ditulis ke dalam bentuk somasi menjadi:

$$\sum_{i=1}^m (y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}) = 0 \quad (3.18)$$

Dan persamaan (3.17) dapat dinyatakan dalam bentuk somasi seperti berikut:

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i^T \mathbf{b} - y_i) = 0 \quad (3.19)$$

Dari persamaan (3.18) dan (3.19) diperoleh dua persamaan yaitu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i^T \mathbf{b} - y_i) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Persamaan (3.20) inilah yang akan dioptimalkan yaitu mencari nilai seminimal mungkin untuk masing- masing $\sum_{i=1}^m (y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})$ dan $\sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i^T \mathbf{b} - y_i)$, dimana $i = 1, 2, \dots, m$ sehingga solusi yang didapat akan mendekati persamaan (3.1).

Pada saat selisih $\sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}$ dan $\sum_{i=1}^m y_i$ tidak sama dengan nol, maka nilai $\sum_{i=1}^m (y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b})$ dan $\sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i^T \mathbf{b} - y_i)$ akan berlawanan tanda. Padahal dua persamaan ini diperoleh dari satu persamaan, yaitu persamaan (3.11) jika selisihnya sama dengan nol. Agar kedua persamaan ini dapat digunakan untuk mewakili persamaan (3.11) sebagai fungsi tujuan maka diambil nilai mutlaknya, sehingga nilainya tidak akan berbeda tanda. Oleh karena itu, didapat fungsi tujuan sebagai berikut:

min

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^m |y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}| \quad (3.21)$$

Kemudian diambil selisih $y_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{b}$, $i = 1, 2, \dots, m$ dan misalkan selisihnya berturut- turut adalah t_1, t_2, \dots, t_m .

Dengan menggunakan fungsi t_1, t_2, \dots, t_m maka bentuk persamaan (3.21) dapat dinyatakan sebagai berikut :

min

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m t_i \quad (3.22)$$

Karena fungsi tujuan pada persamaan (3.21) bertanda mutlak maka hasilnya

$$t_1, t_2, \dots, t_m \geq 0.$$

Persamaan (3.22) inilah yang merupakan fungsi tujuan.

➤ Kendala

Setelah diperoleh fungsi tujuan proses selanjutnya yaitu menentukan kendala. Untuk memperoleh kendala, perhatikan bentuk awal transformasi linearnya.

Pada kasus ini, bentuk awal transformasi linearnya adalah persamaan (3.11) atau $\mathbf{Xb} = \mathbf{Y}$. Persamaan (3.11) sebenarnya dapat diperoleh dari persamaan $-\mathbf{Xb} = -\mathbf{Y}$. Oleh karena itu, untuk membentuk kendala pada kasus ini dilihat dari dua persamaan yang membentuk persamaan (3.11) yaitu

$$\mathbf{Xb} = \mathbf{Y} \text{ dan } -\mathbf{Xb} = -\mathbf{Y}.$$

- Untuk kasus $\mathbf{Xb} = \mathbf{Y}$

Jika matriks $\mathbf{Xb} = \mathbf{Y}$ dijabarkan maka bentuknya menjadi persamaan (3.11) yaitu:

$$x_{11}b_1 + x_{12}b_2 + \dots + x_{1n}b_n = y_1$$

$$x_{21}b_1 + x_{22}b_2 + \dots + x_{2n}b_n = y_2$$

⋮

$$x_{m1}b_1 + x_{m2}b_2 + \dots + x_{mn}b_n = y_m$$

Seperti telah dibahas sebelumnya terdapat t_1, t_2, \dots, t_m yang nilai-nilainya ≥ 0 . Jika t_1 ditambahkan pada sisi kiri persamaan pertama, maka nilai sisi kiri menjadi lebih besar atau sama dengan sisi kanan. Demikian juga untuk

persamaan kedua sampai ke m masing- masing ditambah dengan t_2, \dots, t_m . Oleh karena itu setelah ditambah t_1, t_2, \dots, t_m pada sisi kiri, persamaan (3.11) menjadi:

$$\begin{aligned} t_1 + x_{11}b_1 + x_{12}b_2 + \dots + x_{1n}b_n &\geq y_1 \\ t_2 + x_{21}b_1 + x_{22}b_2 + \dots + x_{2n}b_n &\geq y_2 \\ &\vdots \\ t_m + x_{m1}b_1 + x_{m2}b_2 + \dots + x_{mn}b_n &\geq y_m \end{aligned} \quad (3.23)$$

Kemudian persamaan (3.23) ditulis ke dalam bentuk matriks menjadi:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m \times m} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Atau dapat diringkas dalam bentuk:

$$\mathbf{It} + \mathbf{Xb} \geq \mathbf{Y} \quad (3.24)$$

Dimana :

\mathbf{I} : matriks identitas berukuran $m \times m$

\mathbf{t} : $m \times 1$

Persamaan (3.24) merupakan pertidaksamaan dalam bentuk matriks yang diperoleh dari persamaan $\mathbf{Xb} = \mathbf{Y}$ dengan menambah \mathbf{t} pada sisi kiri persamaan.

- Untuk kasus $-\mathbf{Xb} = -\mathbf{Y}$

Seperti pada kasus pertama setelah $-\mathbf{Xb} = -\mathbf{Y}$ ditambah dengan \mathbf{t} pada sisi kiri maka persamaannya berubah menjadi:

$$\begin{aligned} t_1 - x_{11}b_1 - x_{12}b_2 - \dots - x_{1n}b_n &\geq -y_1 \\ t_2 - x_{21}b_1 - x_{22}b_2 - \dots - x_{2n}b_n &\geq -y_2 \\ &\vdots \\ t_m - x_{m1}b_1 - x_{m2}b_2 - \dots - x_{mn}b_n &\geq -y_m \end{aligned} \quad (3.25)$$

Jika persamaan (3.25) di bentuk ke dalam matriks menjadi:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m \times m} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \geq - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Atau dapat diringkas menjadi:

$$\mathbf{It} - \mathbf{Xb} \geq -\mathbf{Y} \quad (3.26)$$

Dari dua kasus di atas diperoleh dua pertidaksamaan yaitu (3.24) dan (3.26).

Kendala akan dibentuk dari dua pertidaksamaan ini.

Untuk meringkas kendala yang di bentuk dari kasus pertama dan kedua maka kedua pertidaksamaan (3.24) dan (3.26) ditulis ke dalam satu matriks gabungan menjadi:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ -\mathbf{Y} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\text{Dimana } \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.28)$$

Perhatikan bentuk kendala pada persamaan (3.27). Pada persamaan tersebut kendalanya berbentuk pertidaksamaan. Sesuai dengan metode yang

digunakan yaitu metode *linear programming*, untuk kendala yang berbentuk pertidaksamaan dapat dirubah ke dalam bentuk persamaan dengan menambahkan *loose variabel*.

Adapun proses merubah kendala dari bentuk pertidaksamaan ke dalam bentuk persamaan dijelaskan di bawah ini.

Jabarkan matriks kendala pada pertidaksamaan (3.27):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -x_{11} & -x_{12} & \dots & -x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -x_{21} & -x_{22} & \dots & -x_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -x_{m1} & -x_{m2} & \dots & -x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \\ -y_1 \\ -y_2 \\ \dots \\ -y_m \end{pmatrix}$$

$$(1) \Rightarrow t_1 + (b_1 x_{11} + b_2 x_{12} + \dots + b_n x_{1n}) \geq y_1$$

$$(2) \Rightarrow t_2 + (b_1 x_{21} + b_2 x_{22} + \dots + b_n x_{2n}) \geq y_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(m) \Rightarrow t_m + (b_1 x_{m1} + b_2 x_{m2} + \dots + b_n x_{mn}) \geq y_m$$

$$(m+1) \Rightarrow t_1 + (-b_1 x_{11} - b_2 x_{12} - \dots - b_n x_{1n}) \geq -y_1$$

$$(m+2) \Rightarrow t_2 + (-b_1 x_{21} - b_2 x_{22} - \dots - b_n x_{2n}) \geq -y_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(2m) \Rightarrow t_m + (-b_1 x_{m1} - b_2 x_{m2} - \dots - b_n x_{mn}) \geq -y_m$$

Berdasarkan teori *linear programming*, langkah – langkah untuk membuat pertidaksamaan di atas menjadi persamaan adalah sebagai berikut:

- (1) Karena ada $2m$ buah pertidaksamaan, maka dapat ditambah $2m$ *loose variabel* ke pertidaksamaan di atas. Tambahkan *loose variabel* sebanyak $2m$, yaitu t_{m+1} sampai t_{3m} .
- Persamaan 1 tambahkan *loose variabel* yaitu t_{m+1}

- Persamaan 2 dengan t_{m+2} .
seterusnya sampai persamaan $2m$ ditambah dengan *loose variabel* t_{3m} .
- (2) Untuk pertidaksamaan dengan tanda “ \geq ” ditambah dengan *loose variabel* bertanda negatif.
Untuk pertidaksamaan dengan tanda “ \leq ” ditambah dengan *loose variabel* bertanda positif.
Di sini, bentuk pertidaksamaannya \geq , maka ditambahkan *loose variabel* bertanda negatif.

Jadi , $2m$ persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned}
 (1) &\Rightarrow t_1 + (b_1x_{11} + b_2x_{12} + \dots + b_nx_{1n}) \geq y_1 \\
 &\Rightarrow t_1 + (b_1x_{11} + b_2x_{12} + \dots + b_nx_{1n}) - t_{m+1} = y_1 \\
 (2) &\Rightarrow t_2 + (b_1x_{21} + b_2x_{22} + \dots + b_nx_{2n}) \geq y_2 \\
 &\Rightarrow t_2 + (b_1x_{21} + b_2x_{22} + \dots + b_nx_{2n}) - t_{m+2} = y_2 \\
 &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \vdots \\
 (m) &\Rightarrow t_m + (b_1x_{m1} + b_2x_{m2} + \dots + b_nx_{mn}) \geq y_m \\
 &\Rightarrow t_m + (b_1x_{m1} + b_2x_{m2} + \dots + b_nx_{mn}) - t_{2m} = y_m \\
 (m+1) &\Rightarrow t_1 + (-b_1x_{11} - b_2x_{12} - \dots - b_nx_{1n}) \geq -y_1 \\
 &\Rightarrow t_1 + (-b_1x_{11} - b_2x_{12} - \dots - b_nx_{1n}) - t_{2m+1} = -y_1 \\
 (m+2) &\Rightarrow t_2 + (-b_1x_{21} - b_2x_{22} - \dots - b_nx_{2n}) \geq -y_2 \\
 &\Rightarrow t_2 + (-b_1x_{21} - b_2x_{22} - \dots - b_nx_{2n}) - t_{2m+2} = -y_2 \\
 &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \vdots \qquad \qquad \qquad \quad \vdots \\
 (2m) &\Rightarrow t_m + (-b_1x_{m1} - b_2x_{m2} - \dots - b_nx_{mn}) \geq -y_m \\
 &\Rightarrow t_m + (-b_1x_{m1} - b_2x_{m2} - \dots - b_nx_{mn}) - t_{3m} = -y_m
 \end{aligned}$$

Maka ,bentuk persamaan yang didapat adalah sebagai berikut:

$$t_1 + (b_1x_{11} + b_2x_{12} + \dots + b_nx_{1n}) - t_{m+1} = y_1$$

$$t_2 + (b_1x_{21} + b_2x_{22} + \dots + b_nx_{2n}) - t_{m+2} = y_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$t_m + (b_1x_{m1} + b_2x_{m2} + \dots + b_nx_{mn}) - t_{2m} = y_m$$

$$t_1 + (-b_1x_{11} - b_2x_{12} - \dots - b_nx_{1n}) - t_{2m+1} = -y_1$$

$$t_2 + (-b_1x_{21} - b_2x_{22} - \dots - b_nx_{2n}) - t_{2m+2} = -y_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$t_m + (-b_1x_{m1} - b_2x_{m2} - \dots - b_nx_{mn}) - t_{3m} = -y_m$$

Persamaan $m+1$ sampai $2m$ juga dapat diubah ke dalam bentuk lain sebagai berikut:

(m+1)

$$\Rightarrow t_1 + (-b_1x_{11} - b_2x_{12} - \dots - b_nx_{1n}) - t_{2m+1} = -y_1$$

$$\Rightarrow t_1 + (-b_1x_{11} - b_2x_{12} - \dots - b_nx_{1n}) - [t_1 + (b_1x_{11} + b_2x_{12} + \dots + b_nx_{1n}) - t_{m+1} - y_1] - t_{2m+1} = -y_1$$

$$\Rightarrow (t_1 - t_1) + [(-b_1x_{11} - b_2x_{12} - \dots - b_nx_{1n}) - (b_1x_{11} + b_2x_{12} + \dots + b_nx_{1n}) - (-t_{m+1}) - (-y_1) - t_{2m+1}] = -y_1$$

$$\Rightarrow -2(b_1x_{11} + b_2x_{12} + \dots + b_nx_{1n}) + t_{m+1} - t_{2m+1} = -2y_1$$

$$\Rightarrow 2(b_1x_{11} + b_2x_{12} + \dots + b_nx_{1n}) - t_{m+1} + t_{2m+1} = 2y_1$$

(m + 2)

$$\Rightarrow t_2 + (-b_1x_{21} - b_2x_{22} - \dots - b_nx_{2n}) - t_{2m+2} = -y_2$$

$$\Rightarrow t_2 + (-b_1x_{21} - b_2x_{22} - \dots - b_nx_{2n}) - [t_2 + (b_1x_{21} + b_2x_{22} + \dots + b_nx_{2n}) - t_{m+2} - y_2] - t_{2m+2} = -y_2$$

Kemudian dibentuk lagi ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2x_{11} & 2x_{12} & \dots & 2x_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2x_{21} & 2x_{22} & \dots & 2x_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2x_{m1} & 2x_{m2} & \dots & 2x_{mn} & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_m \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \\ t_{m+1} \\ t_{m+2} \\ \dots \\ t_{2m} \\ t_{2m+1} \\ t_{2m+2} \\ \dots \\ t_{3m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \\ 2y_1 \\ 2y_2 \\ \dots \\ 2y_m \end{pmatrix}$$

Atau secara sederhana dapat ditulis:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} & -\mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 2\mathbf{X} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Dimana:

\mathbf{I} : matriks identitas berukuran mxm

\mathbf{O} : matriks berukuran mxm yang semua komponennya adalah 0

$\mathbf{t}'' , \mathbf{t}''' = loose\ variabel$

$\mathbf{t}' : t_1, t_2, \dots, t_m$

$\mathbf{t}'' : t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_{2m}$

$$\mathbf{t}''' : t_{2m+1}, t_{2m+2}, \dots, t_{3m}$$

Jadi persamaan (3.29) merupakan bentuk lain dari pertidaksamaan (3.27) dan persamaan inilah yang digunakan sebagai kendala.

Jadi dengan metode *linear programming*, permasalahan ini dapat diselesaikan dengan:

Fungsi tujuan:

min

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m t_i$$

Kendala :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Dimana:

I : matriks identitas berukuran $m \times m$

O : matriks berukuran $m \times m$ yang semua komponennya adalah 0

$$\mathbf{t}' : t_1, t_2, \dots, t_m$$

$$\mathbf{t}'' : t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_{2m}$$

$$\mathbf{t}''' : t_{2m+1}, t_{2m+2}, \dots, t_{3m}$$

Setelah diketahui fungsi tujuan dan kendalanya, maka metode *linear programming* dapat dijalankan untuk mencari solusi yang optimal.

3.2.2 Satu atau Beberapa Solusi Persamaan Linear Bernilai Nonpositif

Kasus kedua yaitu jika beberapa komponen dari \mathbf{b} diinginkan nonpositif . Misalkan di sini b_1 nonpositif sedangkan b_2, b_3, \dots, b_n nonnegatif. Dari persamaan (3.11) :

$$\begin{aligned} x_{11}b_1 + x_{12}b_2 + \dots + x_{1n}b_n &= y_1 \\ x_{21}b_1 + x_{22}b_2 + \dots + x_{2n}b_n &= y_2 \\ \vdots & \\ x_{m1}b_1 + x_{m2}b_2 + \dots + x_{mn}b_n &= y_m \end{aligned}$$

Sekarang , nilai b_1 adalah nonpositif. Agar proses tetap dapat dilakukan seperti dalam kasus pertama yaitu pada kasus dimana semua solusinya nonnegatif, maka pada awal perhitungan, nilai b_1 tetap dianggap positif namun solusi yang dimaksud menjadi $-b_1, b_2, \dots, b_n$,sehingga persamaan yang memenuhi untuk kasus ini adalah:

$$\begin{aligned} x_{11}(-b_1) + x_{12}b_2 + \dots + x_{1n}b_n &= y_1 \Rightarrow -x_{11}b_1 + x_{12}b_2 + \dots + x_{1n}b_n = y_1 \\ x_{21}(-b_1) + x_{22}b_2 + \dots + x_{2n}b_n &= y_2 \Rightarrow -x_{21}b_1 + x_{22}b_2 + \dots + x_{2n}b_n = y_2 \\ \vdots & \\ x_{m1}(-b_1) + x_{m2}b_2 + \dots + x_{mn}b_n &= y_m \Rightarrow -x_{m1}b_1 + x_{m2}b_2 + \dots + x_{mn}b_n = y_m \end{aligned}$$

(3.30)

Jika persamaan (3.30) ditulis dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} -x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ -x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Misalkan matriks

$$\begin{pmatrix} -X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ -X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

dinotasikan dengan \mathbf{X}^* , maka untuk mencari b_1, b_2, \dots, b_n dengan metode *linear programming*, tetap dapat menggunakan proses seperti dalam kasus semua solusi nonnegatif, namun matriks \mathbf{X} diganti dengan matriks \mathbf{X}^* . Oleh karena itu, untuk menyelesaikan kasus dimana b_1 nonpositif dengan metode *linear programming*, fungsi tujuan dan kendalanya adalah sebagai berikut:

Fungsi tujuan

min

$$g(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m t_i$$

Kendala

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Dimana :

\mathbf{I} : matriks identitas berukuran $m \times m$

\mathbf{X}^* : matriks pada persamaan (3.32).

Misalkan diperoleh solusi b_1, b_2, \dots, b_n , maka solusi optimal yang dimaksud yaitu $-b_1, b_2, \dots, b_n$.

Secara umum, misalnya solusi ke i diharapkan nonpositif, maka semua entri pada kolom ke i matriks \mathbf{X} diberi tanda negatif kemudian dengan matriks \mathbf{X} baru ini (setelah ditambah tanda negatif pada kolom ke- i), dapat dicari solusinya

dengan *linear programming* dengan fungsi tujuan dan kendala seperti pada kasus semua solusi nonnegatif dengan menggunakan matriks kendala \mathbf{X} setelah ditambah tanda negatif pada kolom ke i . Setelah didapat b_1, b_2, \dots, b_n , maka solusi optimal yang dimaksud yaitu b_1, b_2, \dots, b_n dengan memberi tanda negatif pada solusi b_i .

Demikian juga untuk kasus lebih dari satu nilai \mathbf{b} yang diharapkan nonpositif, maka cukup memberikan tanda negatif pada entri matriks \mathbf{X} pada kolom dimana nilai \mathbf{b} nya diharapkan nonpositif. Setelah itu, dengan prosedur yang sama seperti pada kasus sebelumnya, yang menginginkan satu solusi yang nonpositif, setelah didapat nilai b_1, b_2, \dots, b_n maka solusi yang dimaksud adalah dengan menambahkan tanda negatif pada nilai-nilai \mathbf{b} yang awalnya diharapkan nonpositif.

Setelah diketahui bagaimana membentuk persamaan kendala untuk kasus semua solusi nonnegatif atau diinginkan beberapa solusi yang nonpositif, sekarang akan dibahas bagaimana menentukan jenis solusi untuk model *Spherical*, model *Eksponensial* dan model *Gaussian*.

3.2.3 Jenis Solusi dan Persamaan Kendala untuk Model *Spherical*, Model *Eksponensial*, dan Model *Gaussian*

Seperti telah dibahas sebelumnya terdapat dua kemungkinan solusi yaitu semua solusi nonnegatif dan ada satu atau beberapa solusi nonpositif. Jenis solusi yang digunakan sebagai kendala tergantung pada semivariogram teoritis yang digunakan. Untuk menentukan jenis solusi yang digunakan dilihat model teoritisnya dan bentuk transformasinya terlebih dahulu.

1. Model *Spherical*

Pada model *Spherical* dihasilkan bentuk transformasi ke persamaan linear

$$y = b_1x_1 + b_2x_2$$

Dimana :

$$b_1 = \frac{3C}{2a}$$

$$b_2 = -\frac{C}{2a^3}$$

$$y = \gamma(\mathbf{h})$$

$$x_1 = h$$

$$x_2 = h^3$$

Dari persamaan di atas diperoleh :

- $b_1 = \frac{3C}{2a}$

Dari persamaan ini diketahui bahwa solusi kedua pada model *Spherical* merupakan fungsi dari C dan *range* a dimana keduanya nilainya pasti ≥ 0 .

Oleh karena itu solusi pertama pada model ini nonnegatif.

- $b_2 = -\frac{C}{2a^3}$

Seperti pada solusi kedua ,persamaan $b_2 = -\frac{C}{2a^3}$ merupakan fungsi dari dari C dan *range* a dimana keduanya nilainya pasti ≥ 0 .

Namun pada solusi kedua ini, nilai dari solusinya adalah negatif dari pembagian C dan a^3 dimana keduanya pasti nonnegatif. Karena nilai b_2 merupakan negatif dari suatu nilai yang nonnegatif maka b_2 itu sendiri bernilai nonpositif. Jadi, solusi kedua untuk model *Spherical* ini bernilai nonpositif.

Setelah diperoleh jenis solusi untuk model *Spherical* ini, langkah selanjutnya yaitu menentukan kendala jika model ini digunakan. Pada kasus model *Spherical* solusi yang digunakan yaitu nonnegatif untuk suku pertama kemudian nonpositif untuk suku kedua. Sesuai prosedur pada kasus terdapat solusi yang nonnegatif , kendala yang digunakan pada model ini adalah:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Dimana :

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{12} \\ X_{21} & -X_{22} \end{pmatrix}$$

Setelah diperoleh solusi yang optimal dengan kendala di atas misalnya $[b'_1, b'_2]$ maka solusi yang dimaksud adalah $[b'_1, -b'_2]$.

2. Model Eksponensial

Seperti pada model *Spherical*, untuk menentukan jenis solusi pada model *Eksponensial* prosesnya mengikuti model *Spherical*. Pada model *Eksponensial* diperoleh bentuk transformasi ke persamaan linear:

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{11} x_{11}$$

Dimana :

$$b_1 = \frac{C}{a}$$

$$b_2 = -\frac{C}{2!a^2}$$

⋮

$$b_{11} = \frac{C}{11!a^{11}}$$

$$y = \gamma(\mathbf{h})$$

$$x_1 = h$$

$$x_2 = h^2$$

⋮

$$x_{11} = h^{11}$$

Dari bentuk di atas diketahui bahwa :

- pada suku ganjil, nilai \mathbf{b} nya akan nonnegatif , namun
- pada suku genap, nilai \mathbf{b} nya akan nonpositif.

Sehingga bentuk kendala untuk model *Eksponensial* adalah:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 2\mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Dimana :

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & x_{13} & -x_{14} & \dots & x_{111} \\ x_{21} & -x_{22} & x_{23} & -x_{24} & \dots & x_{211} \\ x_{31} & -x_{32} & x_{33} & -x_{34} & \dots & x_{311} \\ x_{41} & -x_{42} & x_{43} & -x_{44} & \dots & x_{411} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{111} & -x_{112} & x_{113} & -x_{114} & \dots & x_{1111} \end{pmatrix}$$

Misalkan diperoleh solusi $[b'_1, b'_2, \dots, b'_{11}]$ dengan kendala di atas maka solusi yang dimaksud adalah dengan mengalikan solusi suku- suku genapnya dengan -1 sehingga solusinya menjadi $[b'_1, -b'_2, \dots, b'_{11}]$.

3. Model *Gaussian*

Bentuk transformasi ke dalam bentuk linear untuk model *Gaussian* adalah:

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{11} x_{11}$$

Dimana:

$$b_1 = \frac{C}{a^2}$$

$$b_2 = -\frac{C}{2! a^4}$$

⋮

$$b_{11} = \frac{c}{11!a^{22}}$$

$$y = \gamma(\mathbf{h})$$

$$x_1 = h^2$$

$$x_2 = h^4$$

⋮

$$x_{11} = h^{22}$$

Dari persamaan di atas, seperti pada model *Eksponensial* pada suku ganjil solusinya bernilai nonnegatif dan pada suku genap akan bernilai nonpositif sehingga bentuk kendalanya menjadi:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Dimana :

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & x_{13} & -x_{14} & \dots & x_{111} \\ x_{21} & -x_{22} & x_{23} & -x_{24} & \dots & x_{211} \\ x_{31} & -x_{32} & x_{33} & -x_{34} & \dots & x_{311} \\ x_{41} & -x_{42} & x_{43} & -x_{44} & \dots & x_{411} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{111} & -x_{112} & x_{113} & -x_{114} & \dots & x_{1111} \end{pmatrix}$$

Setelah diperoleh solusi $[b'_1, b'_2, \dots, b'_{11}]$ dengan kendala di atas maka solusi yang dimaksud adalah dengan mengalikan solusi suku- suku genapnya dengan -1 sehingga solusinya menjadi $[b'_1, -b'_2, \dots, b'_{11}]$.

3.3 Menghitung Taksiran Parameter Semivariogram

Pada bagian ini akan dibahas bagaimana memperoleh taksiran parameter semivariogram setelah diperoleh solusi-solusi yang optimal dengan metode *linear programming*.

Untuk memperoleh taksiran parameter semivariogram yang meliputi *sill* dan *range* dilakukan dengan cara mentransformasi balik ke model teoritisnya. Pada kasus ini dibahas tiga model teoritis yaitu model *Spherical*, model *Eksponensial* dan model *Gaussian*.

Pada model *Spherical* diketahui bentuk transformasi ke persamaan linear dari model teoritisnya yaitu :

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Misalnya dari pencarian solusi dengan metode *linear programming* diperoleh solusi b'_1, b'_2 yang merupakan solusi optimal untuk model *Spherical* ini. Untuk memperoleh taksiran parameternya, dilakukan dengan cara mentransformasi balik ke dalam model teoritisnya. Dari persamaan (3.2) dan (3.3) diketahui bahwa:

$$b_1 = \frac{3C}{2a}$$

$$b_2 = -\frac{C}{2a^3}$$

$$y = \gamma(\mathbf{h})$$

$$x_1 = h$$

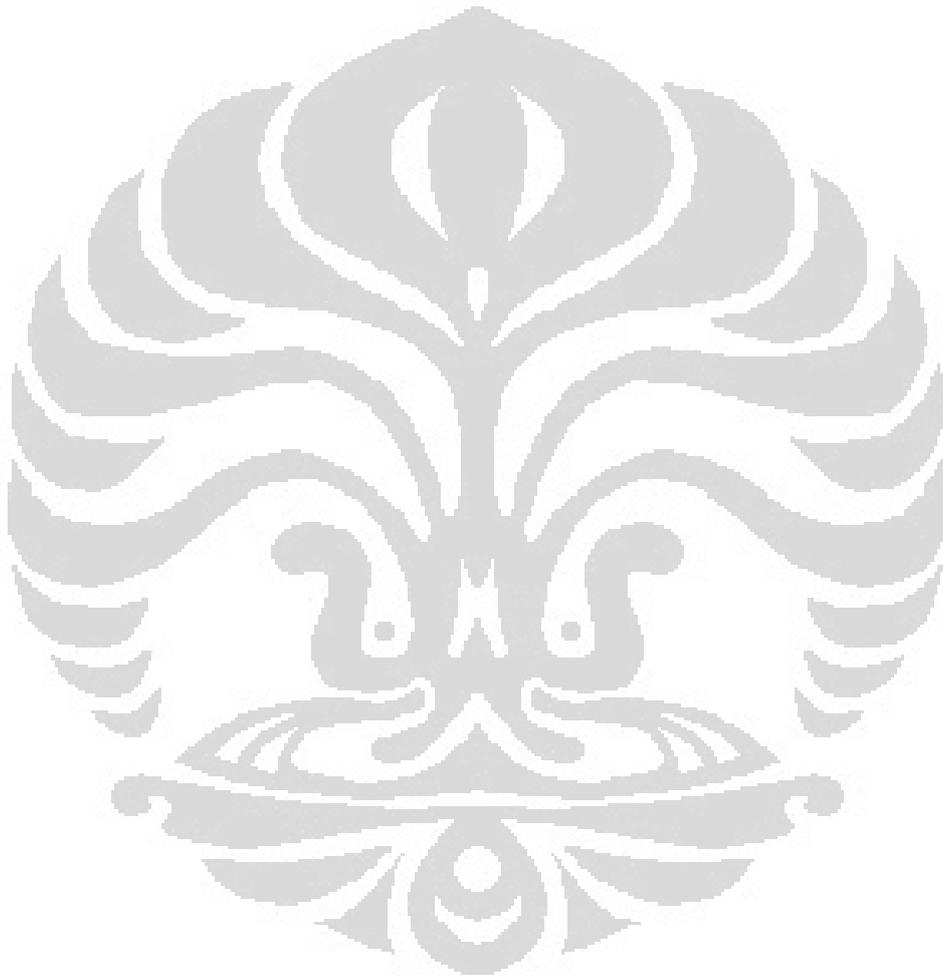
$$x_2 = h^3.$$

Jadi, pertama-tama dihitung taksiran parameter C dan a untuk model *spherical* yaitu dengan mencari nilai C dan a yang memenuhi atau mendekati dua persamaan di bawah ini

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{3C}{2a} \\ b_2 &= -\frac{C}{2a^3} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Dari dua persamaan (3.33) diperoleh C dan a . Jadi untuk model *Spherical*, telah diperoleh proses penaksiran parameter yang meliputi *sill* dan *range*.

Untuk model *Ekspensial* dan model *Gaussian* proses pencarian parameternya similar seperti pada model *Spherical*.



BAB 4

STUDI KASUS

Sebagai gambaran penaksiran parameter semivariogram dengan metode *linear programming* dan pengujian validasinya dengan metode *ordinary kriging* maka diberikan contoh kasus seperti di bawah ini. Namun sebelum menggunakan metode *linear programming* untuk menyelesaikan kasus ini, terlebih dahulu digunakan metode klasik. Setelah dilakukan penaksiran parameter dan uji validasi kemudian membandingkan hasilnya antara metode klasik dengan metode *linear programming*.

4.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam bab ini diambil dari skripsi sebelumnya (Nia Budi Kurniati, 2007) yang bersumber pada:

Isaaks, Edward, and Mohan, Srivastava. 1989. *Applied Geostatistiks*. Oxford University Press, New York.

4.2 Kasus

Diketahui 470 data kandungan fosfor dari tepi Danau Walker di Nevada, Amerika Serikat. Kemudian dipilih sampel berukuran 9 secara acak. Sampel yang terpilih ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 4.1 Data koordinat lokasi titik sampel (meter) dan kandungan fosfor (ppm) di tepi danau Walker, Nevada, Amerika Serikat.

Nomor sampel	X (meter)	Y (meter)	Kandungan fosfor (ppm)
1	50	150	121.6
2	150	350	118.3
3	250	50	122.8
4	250	250	122.3
5	350	150	120.1
6	450	350	119.2
7	550	50	117.2
8	650	250	119.8
9	650	350	118.9

4.3 Asumsi

Karena digunakan metode *ordinary kriging*, diperlukan asumsi stasioner orde dua. Pada data ini, asumsi tersebut terpenuhi (Nia Budi Kurniati, 2007).

4.4 Permasalahan

Permasalahan yang ingin diselesaikan pada kasus ini adalah :

- mencari parameter semivariogram yang sesuai untuk menggambarkan sampel pada kasus di atas dengan menggunakan metode klasik dan metode *linear programming* .
- menentukan model semivariogram yang cocok untuk masing- masing metode
- membandingkan model semivariogram dengan metode klasik dan metode *linear programming*.

4.5 Pengolahan Data

Untuk memperoleh taksiran parameter semivariogram pada data kandungan fosfor, dalam kasus ini akan menggunakan *software Microsot Excell* dan *software statistik tertentu*.

Untuk mengetahui gambaran data sampel secara umum disajikan statistik deskriptif dari data kandungan fosfor. Statistik deskriptif ini terdiri dari nilai rata-rata, variansi, standar deviasi, median, nilai minimum, nilai maksimum, dan range daripada sampel tersebut. Dengan menggunakan *software Microsoft Excel* diperoleh statistik deskriptif yang ditunjukkan pada Tabel 4.2 berikut:

Tabel 4.2 Statistik deskriptif data sampel kandungan fosfor di tepi danau Walker

Banyaknya data	9
Mean	120.10
Variansi	3.54
Standar Deviasi	1.88
Median	119.80
Range	5.60
Minimum	117.20
Maksimum	122.80

Dari tabel di atas diketahui bahwa:

- Banyaknya data sampel kandungan fosfor adalah 9 pengukuran.
- Rata-rata kandungan fosfor pada sampel tersebut sebesar 120.10 ppm.
- Variansi kandungan fosfor pada sampel sebesar 3.54
- Nilai tengah kandungan fosfor pada sampel sebesar 119.8
- Selisih antara nilai kandungan fosfor yang terbesar dan terkecil sebesar 5.6
- Nilai kandungan fosfor terkecil pada sampel adalah 117.20

- Nilai kandungan fosfor terasar pada sampel adalah 117.20

Setelah diketahui gambaran data sampel dari statistik deskriptif hal- hal yang akan dibahas pada subbab ini adalah :

1. Menentukan parameter dan model semivariogram yang cocok pada data kandungan fosfor dengan metode klasik.
2. Menentukan parameter dan model semivariogram yang cocok pada data kandungan fosfor dengan metode *linear programming* .
3. Membandingkan model semivariogram dari metode klasik dan metode *linear programming*.

4.5.1 Menaksir Parameter dan Menentukan Model Semivariogram yang Cocok dengan Metode Klasik

Untuk menaksir parameter semivariogram khususnya pada data sampel kandungan fosfor dilakukan tahap- tahap sebagai berikut:

Tahap 1. Menghitung Semivariogram Eksperimental

Untuk dapat menghitung semivariogram eksperimental diperlukan jarak antara dua pengamatan. Untuk memperoleh jarak antara dua pengamatan ini digunakan *software Microsoft Excell*. Dengan *software Microsoft Excell* diperoleh jarak antar data pengamatan yang disajikan dalam Tabel 4.3 berikut:

Tabel 4.3 Tabel Jarak antar Sampel

data	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	223.6	223.6	223.6	300	447.21	509.9	608.28	632.46
2	223.6	0	316.23	141.42	282.84	300	500	509.9	500
3	223.6	316.23	0	200	141.42	360.56	300	447.21	500
4	223.6	141.42	200	0	141.42	223.6	360.56	400	412.31
5	300	282.84	141.42	141.42	0	223.6	223.6	316.23	360.56
6	447.21	300	360.56	223.6	223.6	0	316.23	223.6	200
7	509.9	500	300	360.56	223.6	316.23	0	223.6	316.23
8	608.28	509.9	447.21	400	316.23	223.6	223.6	0	100
9	632.46	500	500	412.31	360.56	200	316.23	100	0

Kemudian semivariogram eksperimental dapat dihitung. Dengan menggunakan definisi semivariogram eksperimental:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h}) - z(\mathbf{s}_i)]^2$$

Hasil perhitungan semivariogram eksperimental dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

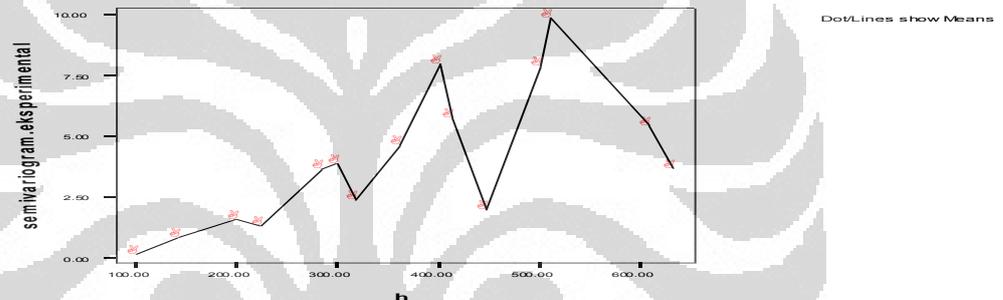
Tabel 4.4 Hasil penghitungan semivariogram eksperimental

Kelas jarak	Jarak (h)	Semivariogram eksperimental	Banyak Pasangan Data
1	100	0.18	1
2	141.42	0.87	3
3	200	1.59	2
4	223.6	1.35	8
5	282.84	3.65	1
6	300	3.87	3
7	316.23	2.39	4
8	360.56	4.64	3
9	400	8	1
10	412.31	5.78	1

11	447.21	2	2
12	500	7.9	3
13	509.9	9.9	2
14	608.28	5.45	1
15	632.46	3.65	1

Tahap 2. Plot Semivariogram Eksperimental terhadap Jarak h

Setelah diperoleh nilai- nilai semivariogram eksperimental kemudian nilai semivariogram ini di plot terhadap jarak h . Hasil plotnya dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



Gambar 4.1 Grafik Semivariogram Eksperimental

Tahap 3. Menentukan Model Semivariogram

Pada tahap ini dipilih fungsi yang akan dijadikan model semivariogram. Biasanya untuk menentukan fungsi yang digunakan, dipilih fungsi yang bentuk plotnya mendekati plot semivariogram eksperimental. Fungsi- fungsi tersebut antara lain :

1. Model *Spherical*
2. Model *Ekspensial*
3. Model *Gaussian*

Tahap 4. Menaksir Parameter Semivariogram

Tahap selanjutnya menentukan parameter- parameter untuk masing- masing model. Sesuai dengan prinsip kerja pada metode klasik, untuk menentukan kedua parameter yaitu *sill* dan *range* dilakukan dengan menduga dari

plot semivariogram eksperimental terhadap jarak h . Dengan pendugaan ditaksir nilai- nilai parameter sebagai berikut:

- $Sill (C) = 3.54$

Dari definisi *sill* dapat diambil nilai *sill* yang hampir sama dengan variansi data sampel. Dari tabel statistik deskriptif diperoleh bahwa variansi kandungan fosfor pada data sampel adalah 3.54.

- $Range (a) = 350$

Range diperoleh setelah ditentukan nilai taksiran untuk *sill*. Dengan menggunakan plot semivariogram eksperimental terhadap jarak h , setelah ditentukan taksiran nilai untuk *sill* pada sumbu ordinat, tarik garis horizontal dari nilai *sill* tersebut menuju grafik semivariogram eksperimental tadi. Dari grafik ini kemudian tarik garis vertikal ke bawah sampai memotong sumbu absis. Nilai sumbu absis tersebut yang digunakan sebagai taksiran *range* pada metode klasik. Pada kasus ini dengan taksiran nilai *sill* sebesar 3.54 diperoleh taksiran *range* sebesar 350.

Setelah diperoleh taksiran parameter dengan metode klasik tadi selanjutnya mensubstitusi nilai- nilai parameter ke masing-masing persamaan. Dengan menggunakan nilai:

- $Sill = 3.54$
- $Range = 350$

Maka model- model yang digunakan pada kasus ini menjadi:

1. Model *Spherical*

$$\hat{\gamma}(h) = 3.54 \left(\frac{3h}{700} - \frac{h^3}{2(350)^3} \right)$$

2. Model *Eksponensial*

$$\hat{\gamma}(h) = 3.54 \left(1 - \exp\left(\frac{-h}{350}\right) \right)$$

3. Model *Gaussian*

$$\hat{\gamma}(h) = 3.54 \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{h^2}{350^2}\right)\right) \right)$$

Tahap 5. Uji validasi silang

Untuk menguji model semivariogram dilakukan validasi silang. Perhitungan residual terbaku dan hasil uji validasi silang untuk masing-masing model dapat dilihat dalam tabel berikut:

Tabel 4.5 Tabel nilai residual dan residual terbaku untuk semivariogram dengan menggunakan model *Spherical*.

No	Sampel	Kandungan Fosfor		Residual $Z(s_i) - \hat{z}(s_i)$	Residual Terbaku σ_{s_i}
		Nilai Sebenarnya $z(s_i)$	Nilai Taksiran $\hat{z}(s_i)$		
1	$\hat{z}(s_2 s_1)$	122.8	121.6	-1.2	-0.49564625
2	$\hat{z}(s_3 \{s_1, s_2\})$	119.2	120.19922	0.999216	2.72589114
3	$\hat{z}(s_4 \{s_1, \dots, s_3\})$	122.3	120.71082	-1.58918	-0.67241657
4	$\hat{z}(s_5 \{s_1, \dots, s_4\})$	120.1	120.67335	0.57335	0.32726242
5	$\hat{z}(s_6 \{s_1, \dots, s_5\})$	117.2	121.10666	3.906664	1.8428922
6	$\hat{z}(s_7 \{s_1, \dots, s_6\})$	118.3	121.10204	2.80204	1.17322745
7	$\hat{z}(s_8 \{s_1, \dots, s_7\})$	119.8	120.0394	0.239397	0.09236552
8	$\hat{z}(s_9 \{s_1, \dots, s_8\})$	118.9	119.48094	0.580936	0.19727604
Jumlah				6.312421	5.19085196
Rata-rata					

Tabel 4.6 Tabel nilai residual dan residual terbaku untuk semivariogram dengan menggunakan model *Eksponensial*.

No	Sampel	Kandungan Fosfor		Residual $Z(s_i) - \hat{z}(s_i)$	Residual Terbaku σ_{s_i}
		Nilai Sebenarnya $z(s_i)$	Nilai Taksiran $\hat{z}(s_i)$		
1	$\hat{z}(s_2 s_1)$	122.8	121.6	-1.2	0.65636519
2	$\hat{z}(s_3 \{s_1, s_2\})$	119.8	122.33063	2.530632	1.18046874
3	$\hat{z}(s_4 \{s_1, \dots, s_3\})$	122.3	121.65174	-0.64826	0.44550777
4	$\hat{z}(s_5 \{s_1, \dots, s_4\})$	120.1	122.0524	1.952432	1.6294579
5	$\hat{z}(s_6 \{s_1, \dots, s_5\})$	119.2	120.67141	1.47141	1.03221626
6	$\hat{z}(s_7 \{s_1, \dots, s_6\})$	117.2	120.37273	3.172729	2.14579155
7	$\hat{z}(s_8 \{s_1, \dots, s_7\})$	118.3	121.52631	3.22631	2.37774501
8	$\hat{z}(s_9 \{s_1, \dots, s_8\})$	118.9	119.63136	0.73136	0.60941948
Jumlah				11.23661	7.87322599
Rata-rata					

Tabel 4.7 Tabel nilai residual dan residual terbaku untuk semivariogram dengan menggunakan model *Gaussian*.

No	Sampel	Kandungan Fosfor		Residual $Z(s_i) - \hat{z}(s_i)$	Residual Terbaku σ_{s_i}
		Nilai Sebenarnya $z(s_i)$	Nilai Taksiran $\hat{z}(s_i)$		
1	$\hat{z}(s_2 s_1)$	122.8	121.6	-1.2	-0.77905622
2	$\hat{z}(s_3 \{s_1, s_2\})$	119.2	122.46255	3.262548	1.39004067
3	$\hat{z}(s_4 \{s_1, \dots, s_3\})$	122.3	121.82953	-0.47047	-0.39911633
4	$\hat{z}(s_5 \{s_1, \dots, s_4\})$	120.1	122.43044	2.33044	4.72334357
5	$\hat{z}(s_6 \{s_1, \dots, s_5\})$	117.2	120.60679	3.406795	3.71146913
6	$\hat{z}(s_7 \{s_1, \dots, s_6\})$	118.3	118.56381	0.263811	0.26628281
7	$\hat{z}(s_8 \{s_1, \dots, s_7\})$	119.8	122.98646	3.18646	5.14258057
8	$\hat{z}(s_9 \{s_1, \dots, s_8\})$	118.9	120.11699	1.216995	2.54128379
Jumlah				11.99658	16.596828
Rata-rata					

Tahap 6. Pengujian Asumsi Kenormalan Residual

Pada tahap ini akan diuji apakah residual antara nilai taksiran dan nilai sebenarnya dari kandungan fosfor pada data di atas memenuhi asumsi kenormalan.

1. Model *Spherical*

H_0 : Residual dari data dengan model *Spherical* berdistribusi normal

H_1 : Residual dari data dengan model *Spherical* tidak berdistribusi normal

Aturan keputusan H_0 ditolak jika $\hat{\alpha} < \alpha=0.05$

Dengan menggunakan *software* statistika diperoleh output yang berupa tabel di bawah ini:

Tabel 4.8 Tabel pengujian asumsi kenormalan residual model *Spherical*

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistik	Df	Sig.	Statistik	df	Sig.
residual model spherical	.205	8	.200(*)	.937	8	.583

* This is a lower bound of the true significance.
a Lilliefors Significance Correction

Dari tabel di atas diperoleh $\hat{\alpha} = 0.583$. karena $\hat{\alpha} > 0.05$ maka H_0 tidak ditolak. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa residual dari data dengan model *Spherical* berdistribusi normal.

2. Model *Eksponensial*

H_0 : Residual dari data dengan model *Eksponensial* berdistribusi normal

H_1 : Residual dari data dengan model *Eksponensial* tidak berdistribusi normal

Aturan keputusan H_0 ditolak jika $\hat{\alpha} < \alpha=0.05$

Dengan menggunakan *software* tertentu diperoleh output yang berupa tabel di bawah ini:

Tabel 4.9 Tabel pengujian asumsi kenormalan residual model
Eksponensial

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistik	df	Sig.	Statistik	df	Sig.
residual model eksponensial	.141	8	.200(*)	.919	8	.419

* This is a lower bound of the true significance.
a. Lilliefors Significance Correction

Dari tabel di atas diperoleh $\hat{\alpha} = 0.419$. Karena $\hat{\alpha} > 0.05$ maka H_0 tidak ditolak. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa residual dari data dengan menggunakan model *eksponensial* berdistribusi normal.

3. Model *Gaussian*

H_0 : Residual dari data dengan menggunakan model *Gaussian* berdistribusi normal

H_1 : Residual dari data dengan menggunakan model *Gaussian* tidak berdistribusi normal

Aturan keputusan H_0 ditolak jika $\hat{\alpha} < \alpha=0.05$

Dengan menggunakan *software* tertentu diperoleh output yang berupa tabel di bawah ini:

Tabel 4.10 Tabel pengujian asumsi kenormalan residual model
Gaussian

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistik	Df	Sig.	Statistik	df	Sig.
residual model gaussian	.199	8	.200(*)	.895	8	.261

* This is a lower bound of the true significance.
a. Lilliefors Significance Correction

Dari tabel di atas diperoleh $\hat{\alpha} = 0.261$. karena $\hat{\alpha} > 0.05$ maka H_0 tidak ditolak. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa residual dari data dengan menggunakan model *Gaussian* berdistribusi normal.

Tahap 7. Uji kecocokan model

Pada tahap ini akan dilakukan pengujian hipotesis apakah masing- masing model semivariogram cocok dengan keadaan data spasial. Dengan menggunakan statistik uji Q_1 diperoleh hasil pengujian sebagai berikut:

1. Model *Spherical*

Uji hipotesis:

H_0 : Model semivariogram cocok

H_1 : Model semivariogram tidak cocok

Tingkat kepercayaan 95%

Aturan keputusan:

H_0 ditolak jika $|Q_1| > \frac{2}{\sqrt{8}} = 0.71$

$$|Q_1| = 0.64885649$$

Karena $|Q_1| > 0.71$ maka H_0 tidak ditolak.

Dengan menggunakan statistik uji Q_2 :

H_0 ditolak jika $Q_2 > 2.19$ atau $Q_2 < 0.273$

Karena $Q_2 = 1.631944$ maka H_0 tidak ditolak

Kesimpulan:

Model *Spherical* cocok digunakan untuk menaksir kandungan fosfor di tepi Danau Walker, Nevada.

2. Model *Ekspensial*

Uji hipotesis:

H_0 : Model semivariogram cocok

H_1 : Model semivariogram tidak cocok

Tingkat kepercayaan 95%

Aturan keputusan:

H_0 ditolak jika $|Q_1| > \frac{2}{\sqrt{8}} = 0.71$

$$|Q_1|=0.98415325$$

Karena $|Q_1| > 0.71$ maka H_0 ditolak.

Dengan menggunakan statistik uji Q_2 :

H_0 ditolak jika $Q_2 > 2.19$ atau $Q_2 < 0.273$

Karena $Q_2=2.046611$ maka H_0 ditolak.

Kesimpulan:

Model *Eksponensial* tidak cocok digunakan untuk menaksir kandungan fosfor di tepi Danau Walker, Nevada.

3. Model *Gaussian*

Uji hipotesis:

H_0 : Model semivariogram cocok

H_1 : Model semivariogram tidak cocok

Tingkat kepercayaan 95%

Aturan keputusan:

H_0 ditolak jika $|Q_1| > \frac{2}{\sqrt{8}} = 0.71$

$$|Q_1|=2.0746035$$

Karena $|Q_1| > 0.71$ maka H_0 ditolak.

Dengan menggunakan statistik uji Q_2 :

H_0 ditolak jika $Q_2 > 2.19$ atau $Q_2 < 0.273$

Karena $Q_2= 8.969822$ maka H_0 ditolak.

Kesimpulan:

Model *Gaussian* tidak digunakan untuk menaksir kandungan fosfor di tepi Danau Walker, Nevada.

Dari tiga taksiran model semivariogram metode klasik yaitu model *Spherical*, model *Eksponensial* dan model *Gaussian* hanya model *Spherical* yang cocok untuk menaksir kandungan fosfor di tepi Danau Walker .

Pada subbab selanjutnya akan dilakukan penaksiran dan menentukan model semivariogram yang cocok dengan metode *Linear Programming*.

4.5.2 Menaksir Parameter dan Menentukan Model Semivariogram yang Cocok dengan Metode *Linear Programming*

Untuk menggunakan metode *linear programming* sebagai metode penaksiran parameter semivariogram , tahap – tahap yang harus dilakukan adalah:

Tahap 1. Menghitung semivariogram eksperimental

Tahap 2. Plot semivariogram eksperimental terhadap jarak h

Tahap 3. Menentukan model semivariogram

Tahap 1, Tahap 2, dan Tahap 3 pada metode *linear programming* sama seperti pada metode klasik. Oleh karena itu tidak akan dibahas lebih rinci lagi. Namun tahap selanjutnya akan berbeda dengan metode klasik.

Tahap 4. Transformasi Model Semivariogram ke dalam Persamaan Linear

Dari pembahasan pada bab sebelumnya diketahui bentuk transformasi untuk masing- masing model sebagai berikut:

1. Model *Spherical*

$$y = b_1x_1 + b_2x_2$$

2. Model *Eksponensial*

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_{11}x_{11}$$

3. Model *Gaussian*

$$y = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_{11}x_{11}$$

Tahap 5. Pencarian Solusi dari Persamaan Linear

Sesuai dengan prosedur *linear programming* untuk menyelesaikan persamaan- persamaannya terlebih dahulu dibentuk fungsi tujuan dan kendala

untuk masing- masing model berdasarkan Tahap 4. Adapun fungsi tujuan dan kendala untuk ketiga model semivariogram adalah:

1. Model *Spherical*

Fungsi tujuan:

min

$$g(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m t_i$$

Kendala :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Dimana :

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{12} \\ X_{21} & -X_{22} \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusi jarak h ke dalam tiap- tiap entri matriks \mathbf{X}^* diperoleh bentuk matriks untuk kendala sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 100 & -100^3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 141.42 & -141.42^3 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 632.46 & -632.46^3 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(100) & -2(100)^3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(141.42) & -2(141.42)^3 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(632.46) & -2(632.46)^3 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{14} \\ b_1 \\ b_2 \\ t_{15} \\ t_{16} \\ \vdots \\ t_{28} \\ t_{29} \\ t_{30} \\ \vdots \\ t_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.87 \\ \vdots \\ 3.65 \\ 2(0.18) \\ 2(0.87) \\ \vdots \\ 2(3.65) \end{pmatrix}$$

2. Model Eksponensial

Fungsi tujuan:

min

$$g(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m t_i$$

Kendala :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{\theta} \end{array} \right.$$

Dimana

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & x_{13} & -x_{14} & \dots & x_{111} \\ x_{21} & -x_{22} & x_{23} & -x_{24} & \dots & x_{211} \\ x_{31} & -x_{32} & x_{33} & -x_{34} & \dots & x_{311} \\ x_{41} & -x_{42} & x_{43} & -x_{44} & \dots & x_{411} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{111} & -x_{112} & x_{113} & -x_{114} & \dots & x_{1111} \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusi jarak h ke dalam tiap- tiap entri matriks \mathbf{X}^* diperoleh bentuk matriks untuk kendala sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 100 & -100^3 & \dots & 100^{11} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 141.42 & -141.42^3 & \dots & 141.42^{11} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 632.46 & -632.46^3 & \dots & 632.46^{11} & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(100) & -2(100)^3 & \dots & 2(100)^{11} & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(141.42) & -2(141.42)^3 & \dots & 2(141.42)^{11} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(632.46) & -2(632.46)^3 & \dots & 2(632.46)^{11} & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{16} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ t_{17} \\ t_{18} \\ \vdots \\ t_{32} \\ t_{33} \\ t_{34} \\ \vdots \\ t_{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.87 \\ \vdots \\ 3.65 \\ 2(0.18) \\ 2(0.87) \\ \vdots \\ 2(3.65) \end{pmatrix}$$

3. Model Gaussian

Fungsi tujuan:

min

$$g(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^m t_i$$

Kendala:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{X}^* & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 2\mathbf{Y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{t}'' \\ \mathbf{t}''' \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Dimana

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & x_{13} & -x_{14} & \dots & x_{111} \\ x_{21} & -x_{22} & x_{23} & -x_{24} & \dots & x_{211} \\ x_{31} & -x_{32} & x_{33} & -x_{34} & \dots & x_{311} \\ x_{41} & -x_{42} & x_{43} & -x_{44} & \dots & x_{411} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{111} & -x_{112} & x_{113} & -x_{114} & \dots & x_{1111} \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusi jarak h ke dalam tiap- tiap entri matriks \mathbf{X}^* diperoleh bentuk matriks untuk kendala sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 100^2 & -100^4 & \dots & 100^{22} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 141.42^2 & -141.42^4 & \dots & 141.42^{22} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 632.46^2 & -632.46^4 & \dots & 632.46^{22} & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(100)^2 & -2(100)^4 & \dots & 2(100)^{22} & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(141.42)^2 & -2(141.42)^4 & \dots & 2(141.42)^{22} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(632.46)^2 & -2(632.46)^4 & \dots & 2(632.46)^{22} & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{16} \\ b_1 \\ b_2 \\ t_{17} \\ t_{18} \\ \vdots \\ t_{32} \\ t_{33} \\ t_{34} \\ \vdots \\ t_{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.87 \\ \vdots \\ 3.65 \\ 2(0.18) \\ 2(0.87) \\ \vdots \\ 2(3.65) \end{pmatrix}$$

Tahap 6. Menghitung Taksiran Parameter Semivariogram

Setelah diperoleh fungsi tujuan dan kendala langkah selanjutnya yaitu mencari solusi yang memenuhi fungsi tujuan dan kendala tersebut. Untuk mencari solusinya dibantu dengan menggunakan *software* tertentu. Dengan menggunakan *software* ini diperoleh solusi sebagai berikut:

1. Model *Spherical*

Solusi yang diperoleh dari persamaan ini adalah:

$$b_1 = 0.1416651 * 10^{-1}$$

$$b_2 = -0.1407231 * 10^{-7}$$

Dengan mentransformasi balik diperoleh taksiran parameter untuk model ini yaitu:

$$a = 579.2794$$

$$C = 5.470912$$

Maka diperoleh persamaan model *Spherical*:

$$\hat{y}(h) = 5.470912 \left(\frac{3h}{2(579.2794)} - \frac{h^3}{2(579.2794)^3} \right)$$

2. Model *Eksponensial*

Dengan menggunakan model *Eksponensial* ke dalam *software*, diperoleh solusi yang tidak layak. Oleh karena itu tidak ada solusi yang memenuhi jika menggunakan model *eksponensial*.

3. Model *Gaussian*

Sama seperti pada kasus model *Eksponensial*, pada model *Gaussian* juga tidak dapat diperoleh solusi yang layak.

Dari ketiga model di atas hanya model *Spherical* yang dapat diperoleh solusinya sehingga dapat diperoleh pula parameternya. Pada pembahasan dengan metode klasik sebelumnya diketahui model yang cocok untuk menaksir kandungan fosfor adalah model *Spherical*. Dari sini terlihat bahwa metode *linear programming* dapat mendeteksi lebih dini model mana yang nantinya cocok pada suatu data jika data tersebut harus diuji dengan beberapa model. Dengan menghilangkan model yang tidak menghasilkan solusi, maka untuk menyeleksi model yang dapat digunakan menjadi lebih mudah.

Karena telah diperoleh satu model yaitu model *Spherical* maka untuk pembahasan selanjutnya model *Eksponensial* dan model *Gaussian* tidak dilibatkan lagi.

Setelah diperoleh bentuk model *Spherical* langkah selanjutnya yaitu melakukan uji kecocokan model dengan validasi silang .

Tahap 7. Uji Validasi Silang

Untuk melakukan prosedur pengujian dengan validasi silang diperlukan hasil perhitungan residual terbaku dan hasil uji validasi silang. Hasil perhitungan untuk masing- masing model dilihat dalam tabel berikut:

Tabel 4.11 Tabel nilai residual dan residual terbakus untuk semivariogram dengan menggunakan model *Spherical*.

No	Sampel	Kandungan Fosfor		Residual $Z(s_i) - \hat{z}(s_i)$	Residual Terbakus σ_{si}
		Nilai Sebenarnya $z(s_i)$	Nilai Taksiran $\hat{z}(s_i)$		
1	$\hat{z}(s_2 s_1)$	122.8	121.6	-1.2	-0.48905806
2	$\hat{z}(s_3 \{s_1, s_2\})$	119.2	122.27439	3.074388	0.65334896
3	$\hat{z}(s_4 \{s_1, \dots, s_3\})$	122.3	121.75181	-0.54819	-0.25335886
4	$\hat{z}(s_5 \{s_1, \dots, s_4\})$	120.1	122.13031	2.030314	0.99565359
5	$\hat{z}(s_6 \{s_1, \dots, s_5\})$	117.2	120.59996	3.399959	1.44299837
6	$\hat{z}(s_7 \{s_1, \dots, s_6\})$	118.3	120.26827	1.968273	0.71093122
7	$\hat{z}(s_8 \{s_1, \dots, s_7\})$	119.8	121.22533	1.425335	0.52266117
8	$\hat{z}(s_9 \{s_1, \dots, s_8\})$	118.9	119.78992	0.889923	0.33261696
Jumlah				11.04	3.91579336

Tahap 8. Pengujian Asumsi Kenormalan Residual

Pada langkah ini akan diuji apakah residual antara nilai taksiran dan nilai sebenarnya dari kandungan fosfor pada data di atas untuk model semivariogram berdistribusi normal. Pengujian asumsi kenormalan akan dilakukan dengan menggunakan uji *Shapiro Wilk*.

Model *Spherical*:

H_0 : Residual dari data dengan menggunakan model *Spherical* berdistribusi normal

H_1 : Residual dari data dengan menggunakan model *Spherical* tidak berdistribusi normal

Aturan keputusan:

H_0 ditolak jika $\hat{\alpha} < \alpha = 0.05$

Dengan menggunakan *software* tertentu diperoleh output yang berupa tabel di bawah ini:

Tabel 4.12 Tabel pengujian asumsi kenormalan residual model *Spherical* dengan metode *linear programming*

Tests of Normality						
	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistik	Df	Sig.	Statistik	df	Sig.
residual model spherical	.142	8	.200(*)	.944	8	.646

* This is a lower bound of the true significance.
a. Lilliefors Significance Correction

Dari tabel di atas diperoleh $\hat{\alpha} = 0.646$. karena $\hat{\alpha} > 0.05$ maka H_0 tidak ditolak. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa residual dari data dengan menggunakan model *Spherical* berdistribusi normal.

Tahap 9. Uji Kecocokan Model

Untuk mengetahui apakah model *Spherical* dengan metode *Linear Programming* cocok digunakan untuk menaksir kandungan nilai fosfor pada data di atas maka dilakukan uji kecocokan model.

Uji hipotesis:

H_0 : Model semivariogram cocok

H_1 : Model semivariogram tidak cocok

Tingkat kepercayaan 95%

Aturan keputusan:

H_0 ditolak jika $|Q_1| > \frac{2}{\sqrt{8}} = 0.71$

$|Q_1| = 0.489474$

Karena $|Q_1| < 0.71$ maka H_0 tidak ditolak

Dengan menggunakan statistik uji Q_2 :

H_0 ditolak jika $Q_2 > 2.19$ atau $Q_2 < 0.273$

Karena $Q_2 = 0.586629$ maka H_0 tidak ditolak

Kesimpulan:

Model *Spherical* cocok digunakan untuk menaksir kandungan fosfor di tepi Danau Walker, Nevada.

4.5.3 Perbandingan Model Semivariogram dengan Metode Klasik dan Metode *Linear Programming*

Dari subbab sebelumnya dengan metode klasik diperoleh model semivariogram yang cocok dengan data yaitu model *Spherical*. Dengan metode *linear programming* juga diperoleh model yang cocok yaitu model *Spherical*. Jadi dapat disimpulkan model semivariogram yang cocok untuk menaksir kandungan fosfor di tepi Danau Walker yaitu model *Spherical*.

Adapun model *Spherical* untuk menaksir kandungan fosfor di tepi Danau Walker dengan model klasik dan model *linear programming* disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.13 Model *Spherical* untuk metode klasik dan metode *linear programming*

Model <i>Spherical</i>	
Metode Klasik	Metode <i>Linear Programming</i>
$\hat{\gamma}(h) = 3.54 \left(\frac{3h}{700} - \frac{h^3}{2(350)^3} \right)$	$\hat{\gamma}(h) = 5.470912 \left(\frac{3h}{2(579.2794)} - \frac{h^3}{2(579.2794)^3} \right)$

Dari model dengan kedua metode tersebut akan dibandingkan model *Spherical* dengan metode mana yang dapat menaksir nilai kandungan fosfor di tepi Danau Walker dengan lebih baik. Untuk mengetahui metode yang terbaik untuk kasus ini digunakan nilai $|Q_1|$ dan Q_2 dari model *Spherical* untuk metode klasik dan metode *linear programming*.

Hasil perbandingannya dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel 4.14 Tabel perbandingan nilai $|Q_1|$ model *Spherical* dengan metode klasik dan metode *linear programming*

$ Q_1 $ pada <i>Spherical</i>	
Metode klasik	Metode <i>linear programming</i>
0.64885649	0.489474

Tabel 4.15 Tabel perbandingan nilai Q_2 model *Spherical* dengan metode klasik dan metode *linear programming*

Q_2 pada model <i>Spherical</i>	
Metode klasik	Metode <i>linear programming</i>
1.631944	0.586629

Berdasarkan model di atas dapat dilihat bahwa :

- Model *Spherical* dengan metode *linear programming* mempunyai nilai $|Q_1|$ yang lebih kecil dibandingkan pada metode klasik.
- Model *Spherical* dengan metode *linear programming* mempunyai nilai Q_2 yang lebih kecil dibandingkan pada metode klasik.

BAB 5

KESIMPULAN

1. Pada metode klasik penaksiran parameter semivariogram dilakukan dengan cara pendugaan berdasarkan plot semivariogram yang dihitung dari data. Sedangkan pada metode *linear programming* penaksiran parameternya dilakukan dengan cara terlebih dahulu mentransformasi model semivariogram ke dalam persamaan linear, kemudian dengan prosedur *linear programming*, dicari solusi optimal dari persamaan-persamaan tersebut. Setelah diperoleh solusi, maka solusi tersebut ditransformasi ke dalam bentuk awal dari model semivariogram agar diperoleh taksiran parameter yang diinginkan.
2. Berdasarkan contoh kasus pada tugas akhir ini diperoleh hasil semivariogram dengan metode *linear programming* lebih peka untuk mendeteksi model semivariogram yang cocok.

DAFTAR PUSTAKA

- Armstrong, M., 1998. *Basic Linear Geostatistic*. New York: Springer.
- Bachmaier, M., 2008. *Variogram or semivariogram? Understanding the variances in a variogram*. *Precision Agric* 9.173–175.
- Castle, R., 2006. *Teaching spatial statistical techniques and concepts*. United Kingdom: The University of Brighton.
- Darmanto dan Soepraptini. *Robust Kriging Untuk Interpolasi Spasial Pada Data Spasial Berpencilan (Outlier)*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
- Gribov, Alexander, Konstantin Krivoruchko, and Jay M. Ver Hoef. *Modified Weighted Least Squares Semivariogram and Covariance Model Fitting Algorithm*. AAPG Computer Applications in Geology, volume 2.
- Jiao, X., Yongliang Chen. 1999. *Semivariogram fitting with linear programming*. *Computer & Geosciences* 27.71 – 76.
- Kitanidis, P.K. *Introduction To Geostatistics: Application to Hydrogeology*. Cambridge University Press: 1997.
- Setyadji B., *Statistik Spasial*. November 2005.
- , *Statistik Spasial*. September 2006.
- , *Statistik Spasial*. November 2006.

LAMPIRAN

Lampiran 1

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) \text{var}[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]$$

Jika diasumsikan memenuhi stasioner orde dua maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{h}) &= \left(\frac{1}{2}\right) \text{var}[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \{E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2 - [E(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2\} \dots (1) \end{aligned}$$

Karena memenuhi asumsi stasioner maka

$$E[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] = E[Z(\mathbf{s})] = \mu$$

Sehingga persamaan (1) menjadi:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) \{E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2 - [\mu - \mu]^2\}$$

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) \{E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2 - 0\}$$

$$\gamma(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{2}\right) \{E[(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{s}))]^2\}$$

Terbukti

Lampiran 2

$$\varepsilon_i \sim N(0,1)$$

Bukti:

Ingin dibuktikan ε_k berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Diasumsikan bahwa residual, $r(s_k) = \hat{z}(s_k) - z(s_k)$ berdistribusi normal, sehingga

$$\varepsilon_k = \frac{\hat{z}(s_k) - z(s_k)}{\hat{\sigma}_k} = \frac{r(s_k)}{\hat{\sigma}_k}, \text{ juga berdistribusi normal.}$$

$$E[\varepsilon_k] = 0, \quad k = 2, \dots, n$$

Bukti:

$E[\varepsilon_k] = 0$ jelas merupakan sifat ketidakbiasan dari kriging.

$$E[\varepsilon_k \varepsilon_l] = 1 \text{ jika } k=l, \quad k,l=1,2,3,\dots,n$$

$$= 0 \text{ jika } k \neq l, \quad k,l=1,2,3,\dots,n$$

Bukti:

$E[\varepsilon_k \varepsilon_l] = 1$, merupakan konsekuensi dari normalisasi
asumsikan $k > l$ dan kovariansi C didefinisikan, maka

$$E[\varepsilon_k \varepsilon_l] = \frac{1}{\hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_l} E \left[\left(z(s_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} z(s_i) \right) \left(z(s_l) - \sum_{j=1}^{l-1} \lambda_{lj} z(s_j) \right) \right]$$

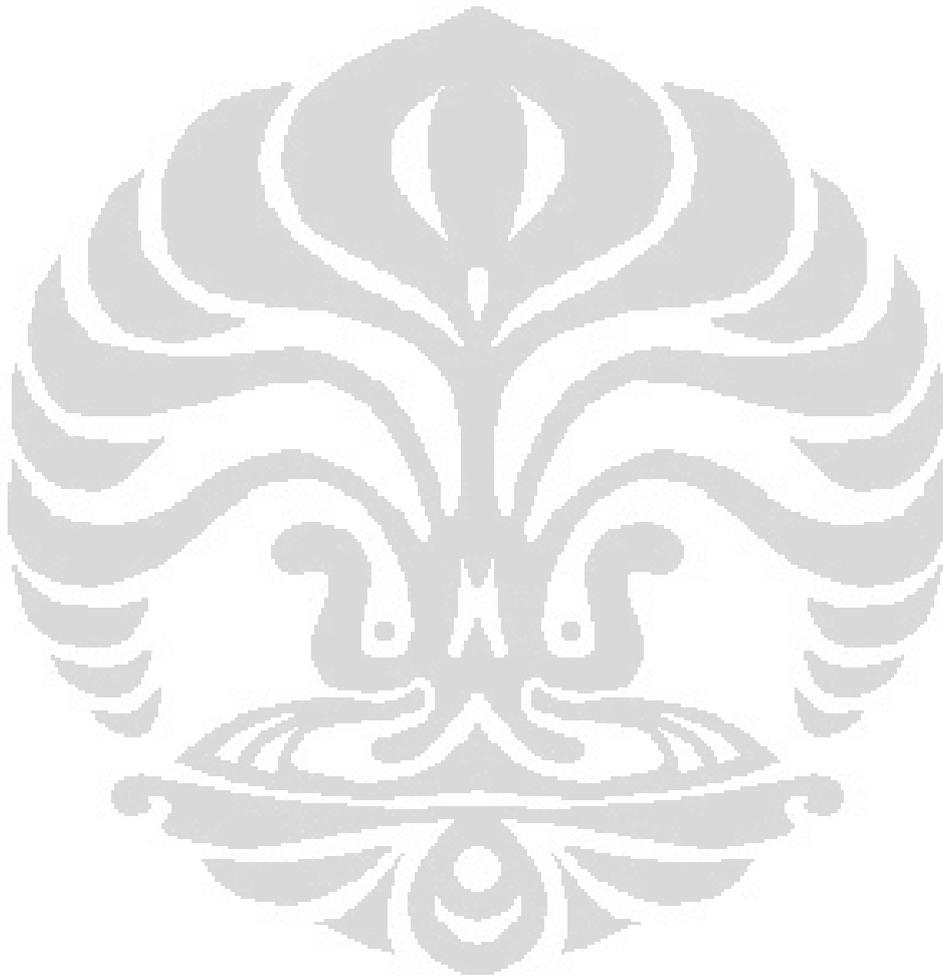
$$= \frac{1}{\hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_l} E \left[\left(C(z(s_k), z(s_l)) - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{kj} C(z(s_k), z(s_j)) \right) \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} \left(C(z(s_i), z(s_l)) - \sum_{j=1}^{l-1} \lambda_{lj} C(z(s_i), z(s_j)) \right) \right]$$

Misalkan untuk sembarang $l, i < l$, terdapat hubungan

$$\sum_{j=1}^{l-1} \lambda_{lj} C(z(s_i), z(s_j)) + v_l = C(z(s_i), z(s_l))$$

maka,

$$E[\varepsilon_k \varepsilon_l] = \frac{1}{\hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_l} \left(v_l - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} v_i \right) = 0$$



Lampiran 3

$$Q_1 \sim N\left(0, \frac{1}{n-1}\right)$$

Bukti:

$$E[Q_1] = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k\right] = \frac{1}{n-1} E[\varepsilon_k] = 0$$

$$\begin{aligned} E[Q_1^2] &= E\left[\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 \sum_{k=2}^n \sum_{l=2}^n \varepsilon_k \varepsilon_l\right] \\ &= \left[\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\right] \sum_{k=2}^n \sum_{l=2}^n E(\varepsilon_k \varepsilon_l) = \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 (n-1) = \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Q_1] &= E[Q_1^2] - [E[Q_1]]^2 \\ &= \frac{1}{n-1} - 0 = \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$Q_1 \sim N\left(0, \frac{1}{n-1}\right)$$

Lampiran 4

Tabel *percentile* ke 0.025 dan 0.975 dari distribusi Q_2

n-1	L	U	n-1	L	U
1	0.001	5.02	21	0.490	1.69
2	0.025	3.69	22	0.500	1.67
3	0.072	3.12	23	0.509	1.66
4	0.121	2.78	24	0.517	1.64
5	0.166	2.56	25	0.524	1.62
6	0.207	2.40	26	0.531	1.61
7	0.241	2.29	27	0.541	1.60
8	0.273	2.19	28	0.546	1.59
9	0.300	2.11	29	0.552	1.58
10	0.325	2.05	30	0.560	1.57
11	0.347	1.99	35	0.589	1.52
12	0.367	1.94	40	0.610	1.48
13	0.385	1.90	45	0.631	1.45
14	0.402	1.86	50	0.648	1.43
15	0.417	1.83	75	0.705	1.34
16	0.432	1.80	100	0.742	1.30
17	0.445	1.78			
18	0.457	1.75			
19	0.469	1.73			
20	0.479	1.71			