LAMPIRAN

Lampiran A

Mekanika Kuantum Relativistik

A.1 Aljabar Dirac

Dalam mekanika kuantum relativistik, ruang dan waktu dinyatakan dalam vektor empat sebagai berikut

$$x^{\mu} \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \mathbf{x}) \equiv (t, x, y, z), \tag{A.1}$$

disebut vektor empat kontravarian, dan vektor empat kovariannya berbentuk

$$\begin{aligned} x_{\mu} &\equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t, -\mathbf{x}) \equiv (t, -x, -y, -z). \\ &= g_{\mu\nu} x^{\nu}, \end{aligned} \tag{A.2}$$

dimana $g_{\mu\nu}$ adalah matriks transformasi

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Operator differensial

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \tag{A.4}$$

$$\partial^{\mu} = g^{\mu\nu} \partial_{\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \tag{A.5}$$

Vektor-4 energi-momentum

$$p^{\mu} \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, \mathbf{p}), \quad p^{\mu} \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, \mathbf{p}) \tag{A.6}$$

di mana berlaku relasi

$$p^\mu p_\mu \equiv p^2 = p^\mu g_{\mu\nu} p^\nu = E^2 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = m^2. \tag{A.7}$$

Matriks Dirac yang digunakan adalah:

$$\gamma^\mu \;\equiv\; (\gamma^0, \gamma^i), \quad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad \gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0. \tag{A.8}$$

memiliki representasi matriks

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

di mana ketiga matriks Pauli, σ^i dinyatakan oleh

$$\sigma^1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma^3 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

yang memenuhi hubungan antikomutatif

$$\left\{\sigma^i, \sigma^j\right\} \;\equiv\; \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i \;=\; 2\delta_{ij}\ , \tag{A.11}$$

dan hubungan komutatif

$$\left[\sigma^i, \sigma^j\right] \;\equiv\; \sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i \;=\; 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k\ , \tag{A.12}$$

di mana ϵ_{ijk} merupakan bentuk nonkovarian tensor antisimetrik Levi-Civita yang didefinisikan kemudian pada Pers. (A.18).

Matriks Dirac γ memenuhi hubungan antikomutatif berikut

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \;\equiv\; \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \;=\; 2g^{\mu\nu}\ , \tag{A.13}$$

dan hubungan komutatif

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \;\equiv\; \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu \;\equiv\; -2i\sigma^{\mu\nu}\ , \tag{A.14}$$

Pada hubungan ini

$$\sigma^{ij} \;=\; \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad \text{dan} \;\; \sigma^{0i} \;=\; i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.15}$$

Kombinasi lainnya yang berguna adalah

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 = \frac{1}{24} i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.16}$$

$$\gamma_5\gamma_\sigma = -\gamma_\sigma\gamma_5 = \frac{1}{6} i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho, \tag{A.17}$$

tensor antisimetrik Levi-Civita didefinisikan sebagai

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{untuk permutasi siklik} \\ -1 & \text{untuk permutasi anti} - \text{siklik} \\ 0 & \text{jika ada dua atau lebih indeks yang sama} \end{cases} . \tag{A.18}$$

Persamaan Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2)\Phi = 0, \quad \Box \equiv \partial^\mu\partial_\nu. \tag{A.19}$$

Persamaan Dirac:

$$(i\not{\partial} - m)\Psi = 0 \quad \text{dimana } \not{a} = a_\mu\gamma^\mu. \tag{A.20}$$

Di dalam ruang momentum

$$(\not{p} - m)u(p,s) = 0 \,, \tag{A.21}$$

$$(\not{p} + m)v(p,s) = 0 \,, \tag{A.22}$$

dimana $u(p,s)$ dan $v(p,s)$ adalah spinor-spinor Dirac. Hubungan kelengkapan spinor Dirac

$$\sum_{s=1,2} = u^{(s)}(p,s)\bar{u}^{(s)}(p,s) = (\not{p} + m) \tag{A.23}$$

$$\sum_{s=1,2} = v^{(s)}(p,s)\bar{v}^{(s)}(p,s) = (\not{p} - m) \tag{A.24}$$

A.2 *Natural Units*

Pada fisika partikel, untuk menyederhanakan perhitungan biasanya digunakan sistem satuan yang disebut *Natural Units*. Dimana pada sistem ini nilai konstanta c dan $\hbar$ diambil sama dengan satu :

$$\hbar = c = 1 \tag{A.25}$$

Hal ini memudahkan kita dalam perhitungan, sebab faktor $\hbar$ dan c sangat sering muncul pada perhitungan. Tetapi pada hasil akhir kita harus merubah besaran yang kita dapat dalam sistem satuan yang sebenarnya.

Sekarang kita akan melihat implikasi dari pemilihan nilai $\hbar$ dan c ini :

- $c = 1$

  Pada sistem satuan MKS, c memiliki nilai :

  $$c \simeq 3 \cdot 10^8 m/s \tag{A.26}$$

  dengan memilih nilai $c = 1$ sedangkan kecepatan memiliki dimensi :

  $$[c] = [L][T]^{-1} \tag{A.27}$$

  kita akan mendapatkan satuan panjang akan sama dengan satuan waktu. Jadi, panjang dan waktu akan memiliki dimensi yang sama :

  $$[L] = [T]$$

  dengan cara yang sama, dari hubungan energi- momentum pada relativitas khusus :

  $$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{A.28}$$

  kita dapat melihat bahwa pemilihan nilai $c = 1$ akan menyebabkan energi, massa, dan momentum memiliki dimensi yang sama. Satuan momentum yang biasa kita gunakan adalah Mev/c atau Gev/c dan massa yaitu Mev/c^2 atau Gev/c^2 akan menjadi Mev atau Gev ketika $c = 1$.

- $\hbar = 1$

  nilai dari konstanta Planck adalah :

  $$\hbar = 6,6 \cdot 10^{-22} Mevs \tag{A.29}$$

  dimensi dari $\hbar$ adalah energi-waktu, sehingga :

  $$[\hbar] = [M][L]^2[T]^{-1} \tag{A.30}$$

  dengan mengambil nilai $\hbar = 1$ maka kita akan mendapatkan hubungan antara [M], [L], dan [T]. Karena dimensi [L] dan [T] sama, maka :

  $$[M] = [L]^{-1} = [T]^{-1} \tag{A.31}$$

Lampiran B

Analisis Tensor

Hukum-hukum fisika haruslah tidak bergantung pada sistem koordinat yang dipergunakan untuk menyatakan dalam bentuk matematik, apabila hukum-hukum ini berlaku. Studi terhadap konsekuensi-konsekuensi dari persyaratan ini menjurus pada analisis tensor yang memainkan peranan penting dalam teori relativitas umum, mekanika, teori elektromagnetik, dan teori medan kuantum.

B.1 Transformasi Koordinat

Misalkan $(x^1, x^2, ...x^N)$ dan $(x'^1, x'^2, ...x'^N)$ adalah koordinat-koordinat sebuah titik dalam dua buah kerangka acuan yang berbeda. Maka, transformasi koordinat dari kerangka acuan yang satu ke yang lainnya dinyatakan dengan :

$$x'^k = x'^k(x^1, x^2, ...x^N) \tag{B.1}$$

$$x^k = x^k(x'^1, x'^2, ...x'^N) \tag{B.2}$$

B.2 Vektor-Vektor Kontravarian dan Kovarian

Jika N buah besaran $A^1, A^2, ...A^N$ dalam sebuah sistem koordinat $(x^1, x^2, ...x^N)$ berhubungan dengan N buah besaran-besaran lainnya $A'^1, A'^2, ...A'^N$ pada sistem koordinat yang lain $(x'^1, x'^2, ...x'^N)$ melalui persamaan transformasi :

$$A'^p = \frac{\partial x^p}{\partial x'^q} A^q \tag{B.3}$$

$$p = 1, 2, ...N$$

dengan indeks berulang adalah penjumlahan indeks tersebut dari $1, 2, ...N$, maka besaran-besaran ini disebut komponen dari vektor kontravarian atau tensor kontravarian rank satu.
jika N buah besaran $A_1, A_2, ..., A_N$ dalam sebuah sistem koordinat $(x^1, x^2, ...x^N)$ berhubungan dengan N buah besaran lainnya $A'_1, A'_2, ..., A'_N$ dalam sistem koordinat $(x'^1, x'^2, ...x'^N)$ melalui persamaan transformasi :

$$A'_p = \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} A_q \tag{B.4}$$

maka besaran-besaran ini disebut komponen-komponen dari vektor kovarian atau tensor kovarian rank dua.

B.3 Tensor-Tensor Kontravarian, Kovarian dan Tensor campuran

Jika N^2 buah besaran-besaran A^{qs} dalam sebuah sistem koordinat $(x^1, x^2, ...x^N)$ berhubungan dengan N^2 buah besaran-besaran yang lainnya A'^{pr} dalam sistem koordinat $(x'^1, x'^2, ...x'^N)$ melalui persamaan transformasi :

$$A'^{pr} = \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} \frac{\partial x'^r}{\partial x^s} A^{qs} \tag{B.5}$$

maka besaran-besaran ini disebut komponen-komponen kontravarian dari sebuah tensor rank dua.
N^2 buah besaran A_{qs} disebut komponen-komponen kovarian dari sebuah tensor rank dua jika :

$$A'_{pr} = \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} A_{qs} \tag{B.6}$$

begitu pula N^2 buah besaran A^q_s disebut komponen-komponen dari sebuah tensor campuran rank dua jika :

$$A'^p_r = \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} A^q_s \tag{B.7}$$

contoh yang biasa kita temui adalah delta kronecker δ^j_k.

B.4 Tensor Simetrik dan Asimetrik

Sebuah tensor dikatakan simetrik terhadap kedua indeks kontravarian atau kovariannya jika komponen-komponennya tetap tidak berubah dalam mempertukarkan kedua indeks tersebut. Jadi jika $A^{mpr}_{qs} = A^{pmr}_{qs}$ maka tensornya simetrik dalam m dan p. Sebuah tensor disebut antisimetrik terhadap kedua indeks kontravarian atau kovariannya jika komponen-komponennya berubah tanda dalam mempertukarkan kedua indeks tersebut. Jadi jika $A^{mpr}_{qs} = -A^{pmr}_{qs}$ maka tensornya anti simetrik dalam m dan p.

Daftar Acuan

[1] A. Fajarudin, A. Sulaiman, T.P. Djun, and L.T. Handoko. **Magnetofluid Unification in the Yang-Mills Lagrangian**. arXiv:physics.0508219v3.(2008).

[2] B.A. Bambah, S.M. Mahajan and C. Mukku. **Yang-Mills magnetofluid unification**. Phys.Rev. Lett. 97, 072301 (2006).

[3] Donald. H.Perkins. **Introduction to High Energy physics**. World Scientific. 1992.

[4] Ryder, L.H. **Quantum Field Theory**. Cambridge University Press. (1996).

[5] S.M. Mahajan. **Temperature-Transformed "Minimal coupling": Magnetofluid unification**.90,0335001 (2003)

[6] T.Muta. **Foundation of Quantum Chromodynamics**. World scientific, singapore.1987

[7] Markus. H.Thoma.**The Quark-Gluon Plasma Liquid**. arXiv:Physics,hep-ph/040921v2.2004

[8] Halzen and Martin.**Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics**.1984

[9] Horace, Lamb. **Hydrodynamics**. Dover Publication,Inc.1945

[10] Solomon Gartenhaus. **Element of Plasma Physics**. Holt,Rinehart and Wiston.1964

[11] Letessier, J and Rafel,J. **Hadron and Quark Gluon Plasma**. Cambridge University Press. 2002.