Bab 2

Magnetohidrodinamika

Pada bab ini akan dibahas secara umum persamaan gerak dari plasma yang dinyatakan oleh persamaan momen dan secara singkat tentang quark dan plasma quark-gluon.

2.1 Persamaan Gerak Plasma

Plasma didefinisikan sebagai gas yang terdiri dari partikel-partikel bermuatan listrik yang bergerak bebas yaitu elektron dan ion. Plasma terbentuk pada temperatur tinggi ketika elektron-elektron terpisah dari atom netral. Plasma merupakan fase keempat dari materi karena memiliki sifat yang berbeda dengan zat padat, dan fluida (zat cair dan gas). Magnetohidrodinamika merupakan cabang ilmu fisika yang mempelajari interaksi antara plasma dengan medan elektromagnetik. Persamaan magnetohidrodinamika dinyatakan dengan persamaan momen yang diturunkan dari persamaan Boltzmann-Vlasov [10]. Untuk plasma yang terdiri dari satu spesies persamaan momennya didefinisikan :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} n) = 0 \tag{2.1}$$

dan

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right) = \rho_q \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.2}$$

dimana n, ρ, dan ρ_q adalah rapat partikel, rapat massa, dan rapat muatan. $\vec{u}$ adalah kecepatan fluida rata-rata dan $\vec{j}$ adalah rapat arus. $\vec{E}$ dan $\vec{B}$ adalah medan elektromagnetik total yaitu dari sumber luar dan dari sumber ρ_q dan

$\vec{j}$. Suku terakhir pada persamaan kedua adalah tensor gradien tekanan, dimana untuk kasus fluida homogen dan isotropik [9] berbentuk :

$$-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} = \frac{-\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{3}\frac{\partial \nabla \cdot \vec{u}}{\partial_i} + \eta \nabla^2 u_i \tag{2.3}$$

dimana p adalah tekanan skalar, $\vec{u}$ adalah kecepatan medan dan η adalah koefisien viskositas. Dengan menganggap fluida inkompresibel maka $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ sehingga persamaan gerak fluidanya menjadi :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \frac{1}{\rho}\left(\rho_q \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p - \eta \nabla^2 \vec{u}\right) \tag{2.4}$$

Untuk plasma yang terdiri dari dua spesies, misalkan ion dan elektron maka persamaan momen dinyatakan dengan :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{u_e}) = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial n_I}{\partial t} + \nabla \cdot (n_I \vec{u_I}) = 0 \tag{2.6}$$

yang merupakan persamaan kekekalan jumlah partikel, dimana elektron bermuatan -q bermassa m dan ion bermuatan q bermassa M. Dengan mengabaikan koefisien viskositas maka persamaan gerak masing-masing fluida dapat dituliskan :

$$\frac{\partial \vec{u_e}}{\partial t} + (\vec{u_e} \cdot \nabla)\vec{u_e} = \frac{1}{m n_e}\left(-q n_e \vec{E} - q n_e \vec{u_e} \times \vec{B} - \nabla p_e\right) \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \vec{u_I}}{\partial t} + (\vec{u_I} \cdot \nabla)\vec{u_I} = \frac{1}{M n_I}\left(q n_I \vec{E} + q n_I \vec{u_I} \times \vec{B} - \nabla p_I\right) \tag{2.8}$$

medan elektromagnetik $\vec{E}$ dan $\vec{B}$ ditentukan dari persamaan maxwell dengan rapat muatan ρ_q dan rapat arus $\vec{j}$ diyatakan dengan :

$$\rho_q = q(n_I - n_e) \tag{2.9}$$

$$\vec{j} = q(n_I \vec{u_I} - n_e \vec{u_e}) \tag{2.10}$$

2.2 Quark dan Plasma Quark-Gluon

Quark

Quark merupakan partikel fundamental penyusun materi. Di alam, quark tidak pernah teramati sebagai partikel bebas tetapi selalu terikat bersama dengan quark yang lain atau dengan antiquark melalui suatu potensial pengikat membentuk suatu materi yang disebut *Hadron.* Terdapat dua kombinasi quark yaitu *Baryon* dengan kombinasi 3 quark QQQ yaitu proton, netron dan *Meson* dengan kombinasi $Q\bar{Q}$ yaitu *meson.* Terdapat 6 jenis quark yaitu u (up), d (down), c (charm), s (strange), t (top), dan b (bottom). Untuk mematuhi larangan pauli [3], maka harus terdapat bilangan kuantum tambahan yaitu warna.

Muatan warna pada quark dibedakan menjadi 3 yaitu, r (*red*), g (*green*), dan b (*blue*), sedangkan anti-quark membawa anti-warna. Seperti halnya interaksi elektromagnetik, interaksi kuat antar quark juga dimediasi oleh suatu partikel boson, partikel ini disebut *gluon* yang masing-masing memiliki warna dan anti-warna. *State* yang mungkin dari gluon adalah :

$$r\bar{b}, r\bar{g}, b\bar{g}, b\bar{r}, g\bar{r}, g\bar{b}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b}), \tfrac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g}), \tfrac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$$

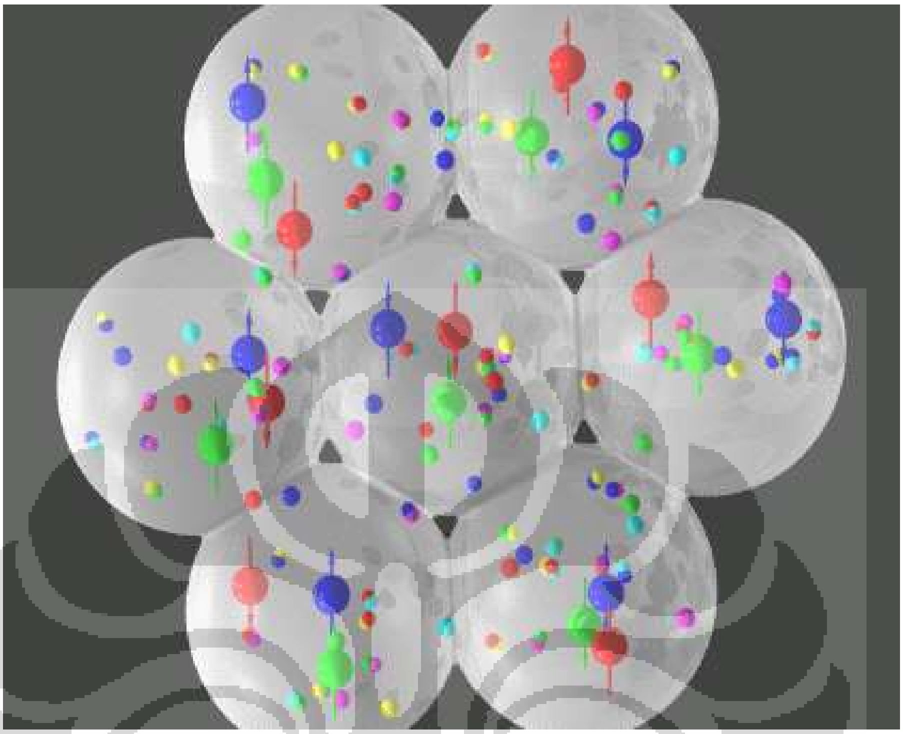
Berbeda dengan foton yang tidak memiliki muatan, gluon memiliki muatan warna sehingga dapat berinteraksi secara kuat dengan sesama gluon. Karena adanya interaksi kuat antar gluon ini maka seperti halnya kombinasi quark pada hadron, gluon dapat juga membentuk kombinasi *colour singlet*, GG dan GGG. Gluon dalam kondisi ini disebut *Glueball* .

Plasma Quark-Gluon

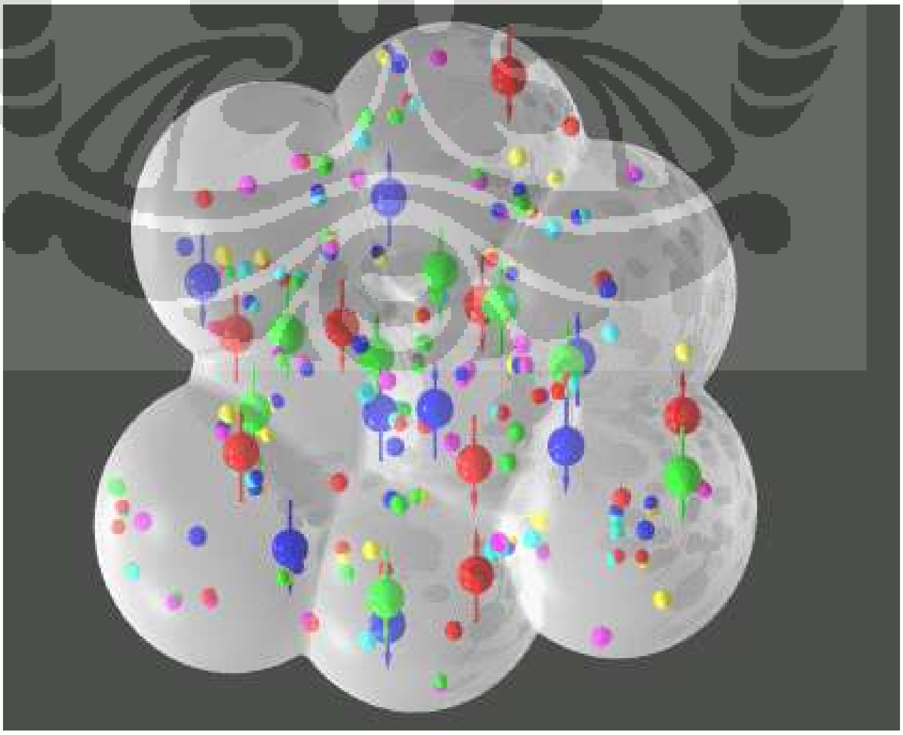
Plasma quark-gluon terbentuk pada tumbukan ultrarelativistik antar ion berat seperti ion Au atau ion Sn dalam *relativistic heavy ion collider* di *Brokhave national laboratory.* Plasma quark-gluon adalah fase dari *Quantum Cromodynamics* (QCD) yang muncul pada suhu dan kerapatan yang sangat tinggi (dalam orde $T_c = 170$ MeV, atau sekitar 10^{13} K). Plasma quark-gluon terdiri dari quark dan gluon seperti halnya pada hadron. Perbedaan kedua fase QCD ini adalah sebagai berikut : pada hadron setiap quark dalam keadaan terikat dengan quark lain atau dengan anti-quark (confined). Sedangkan pada plasma quark-gluon quark dan anti quark tidak terikat membentuk hadron (de-confined) dan bergerak bebas pada suatu volume bersuhu tinggi yang disebut *fireball.*

Kenapa disebut plasma ?

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa plasma adalah fluida yang terdiri dari partikel-partikel bermuatan listrik yang saling berinteraksi satu sama lain dan bergerak bebas di seluruh volume fluida. Pada plasma quark-gluon, quark dan gluon memiliki muatan yaitu warna, dan dapat bergerak bebas di seluruh volume fireball. Perbedaan keduanya adalah muatan quark merupakan muatan non-Abelian sedangkan muatan listrik merupakan muatan abelian.



Gambar 2.1: Quark dan Gluon pada Hadron. Quark terikat bersama dengan quark lainnya (confined) dengan kondisi *colour-netral* membentuk hadron



Gambar 2.2: Quark dan Gluon pada plasma Quark-Gluon. Quark tidak berikatan membentuk hadron tetapi bergerak bebas pada *fireball* (deconfined). *Fireball* terbentuk pada temperatur diatas 100 MeV, atau sekitar $10^{13}K$

Bab 3

Unifikasi Magnetofluida dengan prinsip *Gauge*

Pada bab ini dijelaskan unifikasi antara medan fluida dan elektromagnetik untuk kasus Abelian dan non-Abelian dengan menggunakan teori *gauge*. Dari unifikasi ini kita akan menurunkan persamaan gerak medan fluida yang berinteraksi dengan materi dan medan elektromagnetik dalam limit non-relativistik seperti persamaan gerak pada plasma. Unifikasi dilakukan pada medan fluida Abelian dan diperluas untuk medan fluida non-Abelian. Prosedur yang dilakukan untuk menyatukan kedua interaksi adalah dengan mengerjakan simetri grup $U(1)_{FD} \otimes U(1)_G$ dan $G(n)_{FD} \otimes G(n)_G$ pada medan materi (boson dan fermion).

3.1 Unifikasi Magnetofluida dengan Teori *Gauge* Abelian

Pada fisika partikel teori unifikasi dilakukan dengan menggunakan prinsip pertama (*first principle*) yaitu dengan menggunakan pendekatan Lagrangian. Prosedurnya adalah melakukan transformasi oleh grup tertentu pada medan materi. Lagrangian dari materi harus invarian terhadap transformasi ini, sebagai konsekuensinya maka pada lagrangian akan muncul suku-suku baru yang menunjukkan interaksi antara materi dengan medan gauge atau interaksi antara sesama medan gauge.

Lagrangian density Medan boson

Lagrangian density untuk medan boson dinyatakan dengan :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - m^2 \Phi^* \Phi \tag{3.1}$$

Untuk mengunifikasi medan materi dan medan gauge maka dikerjakan transformasi gauge lokal : $U(1)_{FD} \otimes U(1)_G$: pada medan materi. Lagrangian materi harus invarian terhadap transformasi ini :

$$\Phi(x) \rightarrow U(x)_F \Phi(x)$$

$$\Phi'(x) \rightarrow U(x)_{EM} \Phi'(x)$$

dimana :

$$U(x)_F = e^{-i\alpha(x)}$$

$$U(x)_{EM} = e^{-i\beta(x)}$$

dengan $\alpha(x)$ dan $\beta(x)$ merupakan sembarang fungsi real . Untuk kasus *infinitesimal transformation* $e^{-i\alpha(x)} \approx (1 - i\alpha(x))$. Pada kasus transformasi gauge global $\partial^\mu \Phi(x)$ ditransformasikan seperti $\Phi(x)$, tetapi bila dikerjakan transformasi gauge lokal maka akan terdapat suku-suku tambahan :

$$\delta\Phi = -i(\alpha + \beta)\Phi \tag{3.2}$$

$$\delta\Phi^* = i(\alpha + \beta)\Phi^* \tag{3.3}$$

$$\delta\partial^\mu\Phi = -i\partial^\mu\alpha\Phi - i\partial^\mu\beta\Phi - i(\alpha + \beta)\partial^\mu\Phi \tag{3.4}$$

$$\delta\partial^\mu\Phi^* = i\partial^\mu\alpha\Phi^* + i\partial^\mu\beta\Phi^* + i(\alpha + \beta)\partial^\mu\Phi^* \tag{3.5}$$

Karena terdapat suku tambahan pada bentuk derivatif maka lagrangian $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi)$ menjadi tidak invarian terhadap transformasi gauge lokal. Untuk mengatasi hal ini kita harus menyusun bentuk derivatif yang memiliki sifat transformasi seperti $\Phi(x)$.

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^*}\delta\Phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta(\partial_\mu\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Phi^*)}\delta(\partial^\mu\Phi^*) \tag{3.6}$$

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\alpha + \partial_\mu\beta)\, i(\Phi^*\partial^\mu\Phi - \Phi\partial^\mu\Phi^*) \tag{3.7}$$

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\alpha + \partial_\mu\beta) J^\mu \tag{3.8}$$

dimana J^{μ} adalah vektor arus empat materi.

Untuk membuat lagrangian invarian terhadap transformasi gauge, maka kita harus menambah beberapa suku pada *lagrangian density.*

- $\mathcal{L}_1 = -\left(eA_{\mu} + gB_{\mu}\right) J^{\mu}$

  dimana A_{μ} dan B_{μ} merupakan medan *gauge* (medan elektromagnetik dan medan fluida) yang ditransformasikan oleh transformasi gauge sebagai :

$$A_{\mu}(x) \longrightarrow A_{\mu}(x) + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha$$

$$B_{\mu}(x) \longrightarrow B_{\mu}(x) + \frac{1}{g}\partial_{\mu}\beta$$

  dengan e dan g merupakan konstanta kopling yang menentukan kekuatan interaksi antara medan materi dengan medan gauge. Dengan tambahan suku ini maka akan didapatkan :

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\left(\partial_{\mu}\alpha + \partial_{\mu}\beta\right) J^{\mu} - \left(eA_{\mu} + gB_{\mu}\right)\delta J^{\mu}$$

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -\left(eA_{\mu} + gB_{\mu}\right)\delta J^{\mu} \tag{3.9}$$

$$\delta J_{\mu} = 2\Phi^*\Phi\left(\partial^{\mu}\alpha + \partial^{\mu}\beta\right)$$

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2\Phi^*\Phi\left(eA_{\mu}\partial^{\mu}\alpha + eA_{\mu}\partial^{\mu}\beta + gB_{\mu}\partial^{\mu}\alpha + gB_{\mu}\partial^{\mu}\beta\right)$$

  Suku kedua yang harus ditambahkan adalah :

- $\mathcal{L}_2 = \left(e^2A_{\mu}A^{\mu} + g^2B_{\mu}B^{\mu} + 2egA_{\mu}B^{\mu}\right)\Phi^*\Phi$

$$\delta\mathcal{L}_2 = \left(2eA_{\mu}\partial^{\mu} + 2gB_{\mu}\partial^{\mu} + 2gB_{\mu}\partial^{\mu} + 2eA_{\mu}\partial^{\mu}\right)\Phi^*\Phi \tag{3.10}$$

  Jadi kita dapatkan : $\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_{\mu}\Phi\partial^{\mu}\Phi^* - m^2\Phi^*\Phi - \left(eA_{\mu} + gB_{\mu}\right)J^{\mu} \\ &\quad + \left(e^2A_{\mu}A^{\mu} + g^2B_{\mu}B^{\mu} + 2egA_{\mu}B^{\mu}\right)\Phi^*\Phi\end{aligned}$$

agar memiliki arti fisis maka harus ditambahkan bentuk yang mengandung kuadratik dari $\partial^{\nu}A^{\mu}$ dan $\partial^{\nu}B^{\mu}$ sebagai suku kinetik dari medan gauge. Bentuk skalar yang memenuhi dan invarian terhadap transformasi gauge ataupun Lorentz adalah sebanding dengan $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ dan $S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$. Dengan :

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{3.11}$$

$$S^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \tag{3.12}$$

merupakan tensor kuat medan (*field strength tensor*).
Kita telah mendapatkan Lagrangian density total yang invarian terhadap transformasi gauge lokal :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{total} = \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi^* - m^2\Phi^*\Phi - (eA_\mu + gB_\mu)J^\mu \\ + \left(e^2A_\mu A^\mu + g^2B_\mu B^\mu + 2egA_\mu B^\mu\right)\Phi^*\Phi \\ -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.13}$$

Suku-suku pada lagrangian ini menyatakan interaksi dari masing-masing medan. Untuk mendapatkan bentuk derivatif yang kovarian terhadap transformasi maka kita definisikan derivatif kovarian :

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + ieA_\mu\Phi + igB_\mu\Phi \tag{3.14}$$

sehingga : $D_\mu\Phi(x) \longrightarrow U(x)D_\mu\Phi(x)$ dengan derivatif kovarian maka Lagrangian density total dapat dituliskan :

$$\mathcal{L}_{total} = D_\mu\Phi D^\mu\Phi^* - m^2\Phi^*\Phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu} \tag{3.15}$$

Persamaan Gerak

Berdasarkan prinsip aksi minimum $\delta S = 0$, dengan $S = \int d^4x\mathcal{L}$ dapat diperoleh persamaan Euler - Lagrange :

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = 0 \tag{3.16}$$

dengan Φ adalah sembarang medan.

• Persamaan Gerak Medan Boson

dengan subtitusi Lagrangian density total ke persamaan (3.16) dan $\Phi = \Phi^*$ maka akan didapat persamaan gerak :

$$\begin{aligned}\left(\partial_\mu\partial^\mu + 2ieA^\mu\partial_\mu + 2igB^\mu\partial_\mu + ie\partial_\mu A^\mu + ig\partial_\mu B^\mu + m^2\right)\Phi \\ - \left(e^2A_\mu A^\mu + g^2B_\mu B^\mu + 2egA_\mu B^\mu\right)\Phi = 0\end{aligned} \tag{3.17}$$

• Persamaan Gerak Medan Elektromagnetik

Persamaan gerak Medan elektromagnetik didapatkan dengan mensubtitusi persamaan (3.13) ke dalam persamaan (3.16) dengan $\Phi = A_\nu$, maka akan didapatkan :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ie\left(\Phi^*\partial^\nu - \Phi\partial^\nu\Phi^*\right) - \left(2e^2A^\nu + 2egB^\nu\right)\Phi^*\Phi$$

Dengan menggunakan derivatif kovarian maka bentuk di atas dapat dituliskan :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\mathcal{J}^\nu \tag{3.18}$$

dengan : $\mathcal{J} = i\left(\Phi^* D^\nu \Phi - \Phi D^\nu \Phi^*\right)$

Persamaan di atas analog dengan persamaan Maxwell inhomogen pada elektrodinamika klasik. Persamaan diatas juga menjelaskan bahwa medan elektromagnetik digenerasi oleh interaksi kedua partikel yang memiliki muatan e, tanpa kehadiran partikel maka medan elektromagnetik tidak akan muncul. Karena sifat $F^{\mu\nu}$ yang antisimetrik maka akan diperoleh :

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 \tag{3.19}$$

yang berarti $\mathcal{J}$ merupakan besaran yang kekal bila terdapat medan elektromagnetik.

• Persamaan Gerak Medan Fluida

Dengan cara yang sama kita dapat menurunkan persamaan gerak fluida yang analog dengan persamaan skalar Maxwell.

$$\partial_\mu S^{\mu\nu} = g\mathcal{J}^\nu \tag{3.20}$$

dan $\mathcal{J} = (\rho, \mathbf{J})$ Vektor-vektor yang ekuivalen dengan medan listrik dan medan magnetik adalah vektor $\mathbf{R}$ dan vektor $\mathbf{Q}$.

$$S^{io} = Q^i \tag{3.21}$$

$$S^{ij} = -\varepsilon_{ijk}R^k \tag{3.22}$$

dan :

$$\mathbf{Q} = -\left(\frac{\vec{B}}{\partial t} + \nabla B^o\right) \tag{3.23}$$

$$\mathbf{R} = \nabla \times \vec{B} \tag{3.24}$$

***Lagrangian density* Medan Fermion**

Lagrangian untuk medan fermion adalah :

$$\mathcal{L} = -i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{3.25}$$

dimana ψ adalah vektor 4×1 γ^μ adalah matrix 4×4 , $\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha})$, matrix $\vec{\alpha}$ dan $\vec{\beta}$ didefinisikan :

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

I adalah matrix satuan 2×2 dan σ adalah matriks Pauli :

$$\vec{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \vec{\sigma_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Prosedur yang sama kita lakukan seperti pada materi boson yaitu mengerjakan transformasi gauge lokal pada lagrangian density, maka kita akan memperoleh:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -i(\alpha + \beta) \\ \delta\bar{\psi} &= i(\alpha + \beta) \\ \delta\partial_\mu\bar{\psi} &= i(\alpha + \beta)\partial_\mu\bar{\psi} + i(\partial_\mu\alpha + \partial_\mu\beta) \end{aligned}$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)} \tag{3.28}$$

Lagrangian ini tidak invarian terhadap transformasi gauge lokal karena ada tambahan suku $\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\alpha + \partial_\mu\beta) J^\mu$ dimana $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ merupakan vektor arus empat untuk medan fermion. Untuk itu harus ditambahkan suku :

- $\mathcal{L}_1 = -(eA_\mu + gB_\mu) J^\mu$

$$\delta\mathcal{L}_1 = -(\partial_\mu\alpha + \partial_\mu\beta) J^\mu - (eA_\mu + gB_\mu)\delta J^\mu$$

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -(eA_\mu + gB_\mu)\delta J^\mu \tag{3.29}$$

Karena pada vektor arus empatnya tidak mengandung bentuk derifatif maka vektor arus empat ini invarian terhadap transformasi gauge lokal, atau $\delta J^\mu = 0$.

Dengan penambahan suku kinetik dari kedua medan gauge maka akan didapatkan lagrangian density total untuk medan fermion :

$$\mathcal{L} = -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - (eA_\mu + gB_\mu)\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu} \tag{3.30}$$

Derifatif kovariannya dituliskan :

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu + igB_\mu)\,\psi \tag{3.31}$$

dalam bentuk derifatif kovarian lagrangian totalnya dapat dituliskan :

$$\mathcal{L} = -iD_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}S^{\mu\nu}S_{\mu\nu} \tag{3.32}$$

perbedaan utama dengan lagrangian density medan boson adalah tidak adanya suku interaksi antara medan elektromagnetik dengan medan fluida.

Persamaan Gerak

Dengan mensubtitusi Lagrangian ke persamaan Euler-Lagrange maka kita akan memperoleh persamaan gerak untuk masing-masing medan adalah:

$$[i\partial\!\!\!/ - (eA\!\!\!/ + gB\!\!\!/) - m]\psi = 0 \tag{3.33}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = eJ^\nu \tag{3.34}$$

$$\partial_\mu S^{\mu\nu} = gJ^\nu \tag{3.35}$$

3.2 Persamaan Maxwell Magnetofluida

Dari persamaan (3.23) dan (3.24) didapatkan :

$$\nabla.\mathbf{R} = 0 \tag{3.36}$$

$$\nabla\times\mathbf{Q} = -\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} \tag{3.37}$$

dari persamaan arus kovarian, $j^\nu = g\mathcal{J}^\nu$ dan persamaan gerak magnetofluidanya ambil $\nu = 0$ akan didapatkan :

$$\partial_1 S^{10} + \partial_2 S^{20} + \partial_3 S^{30} = \rho$$

sehingga :

$$\nabla.\mathbf{Q} = \rho \tag{3.38}$$

bila kita ambil $\nu = 1$:

$$\partial_0 S^{01} + \partial_2 S^{21} + \partial_3 S^{31} = j^1$$
$$-\frac{\partial Q^1}{\partial t} + \frac{\partial R^3}{\partial x_2} - \frac{\partial R^2}{x_3} = j^1$$

Persamaan Maxwell yang keempat adalah :

$$\nabla \times \mathbf{R} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \mathbf{j} \tag{3.39}$$

3.3 Persamaan Gerak Magnetofluida untuk limit non-Relativistik

Dari persamaan gerak untuk magnetofluida $\partial_\mu S^{\mu\nu} = gJ^\nu$ dengan arus kovarian : $J^\nu = i\left(\Phi^* D^\nu \Phi - \Phi D^\nu \Phi^*\right)$ untuk materi boson dan $J^\nu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ untuk fermion, akan didapatkan :

$$\partial_o S^{o\nu} + \partial_i S^{i\nu} = gJ^\nu$$

untuk $\nu = j$ akan diperoleh :

$$\partial_o S^{oj} + \partial_i S^{ij} = gJ^j$$
$$\partial_o S^{oj} + \partial_i \left(\partial^i B^j - \partial^j B^i\right) = gJ^j$$

medan fluida yang digunakan berbentuk :

$$B^i = \phi U^i \tag{3.40}$$

ϕ adalah besaran pelengkap dimensi yang merepresentasikan distribusi fluida pada sistem dan hanya bergantung oleh temperature , $S^{oj} = -Q^j = \left(\frac{\partial \phi \vec{U}}{\partial t} + \nabla \phi \gamma\right)$ dan $U^i = \gamma v^i$. Dimana untuk plasma relativistik : $\phi \simeq 1 + \frac{5}{2}\frac{T}{m}$ [5]. Nilai γ : $\gamma \simeq 1 + \frac{v^2}{2}$. Dalam bentuk vektor persamaan diatas dapat dituliskan :

$$-\partial_o \vec{Q} - \nabla^2 \vec{B} + \nabla\left(\nabla.\vec{B}\right) = g\vec{J}$$

Dengan menggunakan identitas vektor : $\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla\left(\nabla.\vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B}$

$$\begin{aligned}
-\partial_o \vec{Q} + \nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) &= g\vec{J} \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \delta \vec{U}}{\partial t} + \nabla \phi \gamma\right) + \nabla \times \vec{R} &= g\vec{J} \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \phi \gamma\right) &= g\vec{J} - \nabla \times \vec{R}
\end{aligned}$$

Untuk kasus non-relativistik nilai $\gamma \to 1$ dan $\phi \to 1$, kecuali pada suku $\nabla\phi\gamma$., kita akan dapatkan :

$$\begin{aligned}
\nabla\phi\gamma &= \nabla\left[\frac{v^2}{2} + \frac{5}{2}\frac{T}{m}\right] \\
\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left[\frac{v^2}{2} + \frac{5}{2}\frac{T}{m}\right]\right] &= g\vec{J} - \nabla\times\vec{\omega}
\end{aligned}$$

dengan $\vec{\omega} = \nabla\times\vec{v}$ adalah vortisitas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\frac{v^2}{2} + \nabla\frac{5}{2}\frac{T}{m}\right] &= g\vec{J} - \nabla\times\vec{\omega} \\
\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\frac{v^2}{2} + \nabla\frac{5}{2}\frac{T}{m} &= \int\left(g\vec{J} - \nabla\times\vec{\omega}\right)dt
\end{aligned}$$

dengan menggunakan identitas vektor : $\frac{1}{2}\nabla v^2 = (\vec{v}.\nabla) + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})$ kita akan mendapatkan :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\,\vec{v} + \vec{v}\times\vec{\omega} + \nabla\frac{5}{2}\frac{T}{m} = \int\left(g\vec{J} - \nabla\times\vec{\omega}\right)dt \qquad (3.41)$$

untuk kasus fluida irotasional $\nabla\times\vec{v} = 0$ maka akan diperoleh :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\,\vec{v} + \nabla\frac{5}{2}\frac{T}{m} = g\vec{\mathcal{J}} \qquad (3.42)$$

dengan : $\vec{\mathcal{J}} = \int\vec{J}dt$

Bila dianggap T tetap, maka kita akan mendapatkan 2 persamaan gerak magnetofluida yang ekuivalen dengan persamaan gerak plasma pada persamaan (2.1) dan (2.2) :

$$\frac{\partial\mathcal{J}^o}{\partial t} + \nabla\vec{\mathcal{J}} = 0 \qquad (3.43)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\,\vec{v} = g\vec{\mathcal{J}} \qquad (3.44)$$

3.4 Model Magnetofluida dengan medan gauge non-Abelian

Secara umum lagrangian density dari materi dapat dinyatakan dengan :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\Phi)^\dagger\,\partial^\mu\Phi + \frac{1}{2}m_\Phi\Phi^\dagger\Phi + i\bar{\psi}\,(\gamma_\mu\partial^\mu - m_\psi)\,\psi + V(\Phi) \qquad (3.45)$$

dengan $V(\Phi)$ adalah potensial, misalkan pada teori Φ^4, $V(\Phi) = \frac{1}{4}\lambda\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2$ dan γ_μ adalah matriks Dirac.

Interaksi antara fluida non-Abelian dengan medan gauge non-Abelian dinyatakan dengan transformasi gauge lokal : $G(n)_F \otimes G(n)_G$. Maka medan materi akan ditransformasikan sebagai :

$$\Phi \to \Phi' = exp\left[-i(\alpha + \beta)\right]\Phi \tag{3.46}$$

$$\psi \to \psi' = exp\left[-i(\alpha + \beta)\right]\psi \tag{3.47}$$

dengan : $\alpha = \alpha_a T_a$ dan $\beta = \beta_a T_a$. Medan materi merupakan multiplet $n \times 1$ dengan jumlah elemen n untuk grup Lie dengan dimensi n seperti SU(n), O(n+1) dll. T_a adalah generator dari grup Lie yang merupakan matriks Hermitian dan *traceless* $T_a^\dagger = T_a$ dan $TrT_a = 0$. Generator-generator ini memenuhi relasi komutasi tertutup :

$$[T_a, T_b] = iC_{abc}T_c \tag{3.48}$$

dengan C_{abc} adalah konstanta struktur antisimetrik dengan $C_{abc} = -C_{bac}$. Jumlah generator dan medan gauge ditentukan oleh dimensi dari grup. Untuk grup SU(n) atau $O(n+1)$ memiliki generator sebanyak $n^2 - 1$ dan index $a = 1, 2, ...n^2 - 1$. *Lagrangian* yang invarian terhadap transformasi gauge lokal diatas dapat diperoleh dengan memasukkan suku yang mengandung medan gauge $A_{\mu a}$ dan medan fluida non-Abelian $B_{\mu a}$ dengan sifat transformasi :

$$A_{\mu a} \to A'_{\mu a} \equiv A_{\mu a} + \frac{1}{g_G}\partial_\mu \alpha_a + C_{abc}\alpha_b A_{\mu c} \tag{3.49}$$

$$B_{\mu a} \to B'_{\mu a} \equiv B_{\mu a} + \frac{1}{g_F}\partial_\mu \beta_a + C_{abc}\beta_b B_{\mu c} \tag{3.50}$$

dengan g_F adalah *muatan* untuk fluida dan g_G adalah muatan gauge. Secara umum lagrangian density materi yang invarian terhadap simetri gauge adalah :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{materi} + \mathcal{L}_{kinetik} + \mathcal{L}_{interaksi} \tag{3.51}$$

dengan :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kinetik} &= -\frac{1}{4}S_{\mu\nu a}S_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F_a^{\mu\nu} \\
S_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu + g_F C_{abc}B_b^\mu B_c^\nu \\
F_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g_G C_{abc}A_b^\mu A_c^\nu
\end{aligned}$$

Sedangkan suku-suku interaksi pada *Lagrangian density* nya adalah :

- untuk Boson :

$$\mathcal{L}_{int} = -g_F B_{\mu a} J^{\mu}_{aF} - g_G A_{\mu a} J^{\mu}_{aG} + g_G^2 A^{\mu}_a A_{\mu b} \Phi^\dagger T_{aG} T_{bG} \Phi +$$
$$g_F^2 B^{\mu}_a B_{\mu b} \Phi^\dagger T_{aF} T_{bF} \Phi + g_F g_G A^{\mu}_a B_{\mu b} \Phi^\dagger \left(T_{aG} T_{bF} + T_{bF} T_{aG}\right) \Phi$$

- untuk fermion :

$$\mathcal{L}_{int} = -g_F B_{\mu a} J^{\mu}_{aF} - g_G A_{\mu a} J^{\mu}_{aG} \tag{3.52}$$

dengan J^{μ}_a adalah arus materi untuk materi boson dan fermion.
dimana untuk boson dan fermion :

$$\begin{aligned} J^{\mu}_{aboson} &= -i\left(\partial_\mu \Phi^\dagger T_{aX} \Phi - \Phi^\dagger T_{aX} \partial_\mu \Phi\right) \\ J^{\mu}_{afermion} &= \bar{\psi} \gamma_\mu T_{aX} \psi \end{aligned}$$

dengan : $X = F, G$ dan $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_o$. Untuk kasus simetri $SU_F(n) \otimes SU_G(n)$ atau $O_F(n+1) \otimes O_G(n+1)$, maka $T_{Fa} = T_{Ga}$ contohnya untuk kasus $SU(2) \otimes SU(2)$ maka : $T_{Fa} = T_{Ga} = \frac{\tau_a}{2}$ dimana τ_a adalah matriks pauli, untuk kasus $SU(n)_F \otimes U(1)_G$ generator kedua grup adalah : $T_{aG} = 1, T_{aF} = \frac{\tau_a}{2}$ dengan τ_a adalah matriks pauli dan $a = 1, 2, 3$ untuk $n = 2$ atau untuk $n = 3$, $T_{aF} = \frac{\lambda_a}{2}$ dengan λ_a adalah matriks Gellman dan $a = 1, 2....8$. *Lagrangian density* untuk materi dapat juga ditulis dalam bentuk derifatif kovarian sebagai :

$$\mathcal{L} = \left(D^\mu \Phi\right)^\dagger D_\mu \Phi + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi - \frac{1}{4} S_{\mu\nu a} S^{\mu\nu}_a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu}_a + V(\Phi) \tag{3.53}$$

derifatif kovariannya adalah :

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + i g_G A_{\mu b} T_{bG} \Phi + i g_F B_{\mu b} T_{bF} \Phi \tag{3.54}$$

Dengan *Lagrangian density* total ini maka kita akan dapat mempelajari dinamika fluida non-Abelian beserta interaksinya dengan medan gauge non-Abelian.

Persamaan Gerak Magnetofluida

Persamaan gerak medan magnetofluida dapat diperoleh dari persamaan Euler-Lagrange dalam bentuk medan $B_{\nu a}$:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu B_{\nu a}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{\nu a}} = 0$$

Dengan mensubtitusi *Lagrangian density* total ke persamaan Euler-Lagrange di atas maka akan didapatkan persamaan gerak :

$$D_\mu S^{\mu\nu} = g_F \mathcal{J}_F^\nu \tag{3.55}$$

dengan : $S^{\mu\nu} = S_a^{\mu\nu} T_a$ dan $\mathcal{J}_F^\nu = \mathcal{J}_F^\nu T_a$

D_μ adalah derifatif kovarian non-Abelian diperumum yang dapat dinyatakan dengan representasi adjoint :

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_G \left[A_\mu, ..\right] + i g_F \left[B_\mu, ..\right] \tag{3.56}$$

Arus kovarian dari materi boson dan fermion didefinisikan sebagai :

$$\mathcal{J}_a^\nu = -i[(D^\nu \Phi)^\dagger T_{aF} \Phi - \Phi^\dagger T_{aF} D^\nu \Phi] \tag{3.57}$$

$$\mathcal{J}_a^\nu = \bar{\psi} \gamma^\nu T_{aF} \psi \tag{3.58}$$

3.5 Persamaan Gerak Magnetofluida non-Abelian untuk limit non-Relatisvistik

Dari persamaan (3.55) dan dengan menggunakan kovarian derifatif (3.56), dan untuk $\nu = j$ maka akan didapatkan :

$$\partial_\mu S_a^{\mu\nu} - g_G C_{abc} A_{\mu b} S_c^{\mu\nu} - g_F C_{abc} B_{\mu b} S_c^{\mu\nu} = g_F \mathcal{J}_a^\nu \tag{3.59}$$

$$\partial_o S_a^{oj} + \partial_i S_a^{ij} = g_F \left(\mathcal{J}_a^j + C_{abc} B_{ob} S_c^{oj} + C_{abc} B_{ib} S_a^{ij} + \frac{g_G}{g_F} C_{abc} A_{ob} S_c^{oj} + \frac{g_G}{g_F} C_{abc} A_{ib} S_c^{ij} \right)$$

didefinisikan medan $\vec{Q}_a$ dan $\vec{R}_a$:

$$Q^k = S^{ko} \tag{3.60}$$

$$R^k = -\frac{1}{2} \varepsilon^{kij} S^{ij} \tag{3.61}$$

$$S^{ij} = \varepsilon^{ijk} R^k \tag{3.62}$$

dalam bentuk $B^\mu = \left(B^o, \vec{B}\right)$:

$$\vec{Q}_a = -\nabla B_a^o - \frac{\partial \vec{B}_a}{\partial t} - g_F C_{abc} \vec{B}_b B_c^o \tag{3.63}$$

$$\vec{R}_a = \nabla \times \vec{B}_a + \frac{1}{2} g_F C_{abc} \vec{B}_b \times \vec{B}_c \tag{3.64}$$

medan fluida didefinisikan sebagai :

$$B_a^\mu = \left(\phi\gamma_a, \phi\vec{U}_a\right) \tag{3.65}$$

U_a^i adalah kecepatan relativistik dari medan fluida ($U_a^i = \gamma_a v_a^i$) dan $\gamma_a \equiv (1 - v_a^2)^{-\frac{1}{2}}$ adalah faktor relativistik, sedangkan $\vec{v}_a$ adalah kecepatan spasial. Besaran ϕ adalah medan tambahan berdimensi 1 yang ditambahkan untuk melengkapi dimensi dan merepresentasikan distribusi dari fluida pada sistem, dan hanya bergantung pada temperatur [5]. Indeks a,b,c menunjukkan aliran fluida pada ruang internal. Model fluida yang dibuat dinyatakan oleh suku kinematik dan fungsi distribusi yang terpisah.

dalam bentuk vektor persamaan geraknya dapat dituliskan :

$$-\frac{\partial\vec{Q}_a}{\partial t} + \nabla\times\vec{R}_a = g_F(\vec{\mathcal{J}}_a - C_{abc}B_{ob}\vec{Q}_c + C_{abc}\vec{B}_b\times\vec{R}_c - \frac{g_G}{g_F}C_{abc}A_{ob}\vec{Q}_c + \frac{g_G}{g_F}C_{abc}\vec{A}_b\times\vec{R}_c)$$

dengan mensubtitusi medan $\vec{Q}$ dan $\vec{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\vec{B}_a}{\partial t} + \nabla B_a^o + g_F C_{abc}\vec{B}_b B_c^o) + \nabla\times(\nabla\times\vec{B}_a + \frac{1}{2}g_F C_{abc}\vec{B}_b\times\vec{B}_c) = \\ g_F(\vec{\mathcal{J}}_a + C_{abc}B_{ob}(\nabla B_c^o + \frac{\partial\vec{B}_c}{\partial t} + g_F C_{clm}\vec{B}_l B_m^o) + \\ C_{abc}\vec{B}_b\times(\nabla\times\vec{B}_c + \frac{1}{2}g_F C_{clm}\vec{B}_l\times\vec{B}_m) + \frac{g_G}{g_F}C_{abc}A_{ob}(\nabla B_c^o + \\ \frac{\partial\vec{B}_c}{\partial t} + g_F C_{clm}\vec{B}_l B_m^o) + \frac{g_G}{g_F}C_{abc}\vec{A}_b\times(\nabla\times\vec{B}_c + \frac{1}{2}g_F C_{clm}\vec{B}_l\times\vec{B}_m))\end{aligned} \tag{3.66}$$

Dengan mensubtitusi medan fluida pada (3.65) dan pada limit non-relativistik nilai $\gamma\to 1$, $\phi\to 1$, kecuali pada suku :$\nabla\phi\gamma_a = \nabla\left[\frac{v_a^2}{2} + \phi\right]$ maka kita akan dapatkan bentuk vektor dari persamaan gerak non-relativistik Magnetofluida non-Abelian :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{v}_a}{\partial t} + \frac{\nabla v_a^2}{2} + \nabla\phi + g_F C_{abc}\vec{v}_b\right) + \nabla\times(\nabla\times\vec{v}_a + \frac{1}{2}g_F C_{abc}\vec{v}_b\times\vec{v}_c) = \\ g_F(\vec{\mathcal{J}}_a + C_{abc}(\frac{\nabla v_c^2}{2} + \nabla\phi + \frac{\partial\vec{v}_c}{\partial t} + g_F C_{clm}\vec{v}_l) + \\ C_{abc}\vec{v}_b\times(\nabla\times\vec{v}_c + \frac{1}{2}g_F C_{clm}\vec{v}_l\times\vec{v}_m) + \frac{g_G}{g_F}C_{abc}A_{ob}(\frac{\nabla v_c^2}{2} + \nabla\phi + \\ \frac{\partial\vec{v}_c}{\partial t} + g_F C_{clm}\vec{v}_l) + \frac{g_G}{g_F}C_{abc}\vec{A}_b\times(\nabla\times\vec{v}_c + \frac{1}{2}g_F C_{clm}\vec{v}_l\times\vec{v}_m))\end{aligned}$$

dengan identitas vector : $\frac{1}{2}\nabla v_a^2 = (\vec{v}_a.\nabla)\,\vec{v}_a + \vec{v}_a \times (\nabla \times \vec{v}_a)$ kita akan dapatkan :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + (\vec{v}_a \cdot \nabla)\vec{v}_a + \vec{v}_a \times \vec{\omega}_a + \nabla\phi + g_F C_{abc}\vec{v}_b\right) + \nabla \times \vec{\omega}_a = g_F\left[\vec{\mathcal{J}}_a + \vec{F}_a\right] \tag{3.67}$$

dengan vektor $\vec{F}_a$ adalah :

$$\vec{F}_a = C_{abc}[((\vec{v}_c \cdot \nabla)\vec{v}_c + \vec{v}_c \times \omega_c + \nabla\phi + \frac{\partial \vec{v}_c}{\partial t} g_F C_{clm}\vec{v}_l) + \vec{v}_b \times (\vec{\omega}_c + \frac{1}{2} g_F C_{clm}\vec{v}_l \times \vec{v}_m) + \frac{g_G}{g_F} A_{ob}((\vec{v}_c \cdot \nabla)\vec{v}_c + \vec{v}_c \times \omega_c + \nabla\phi + \frac{\partial \vec{v}_c}{\partial t} + g_F C_{clm}\vec{v}_l) + \frac{g_G}{g_F}\vec{A}_b \times (\vec{\omega}_c + \frac{1}{2} g_F C_{clm}\vec{v}_l \times \vec{v}_m - \frac{1}{2}\nabla \times (\vec{v}_b \times \vec{v}c))]$$

dimana : $\vec{\omega}_a = \nabla \times \vec{v}_a$ adalah vortisitas. Untuk fluida irotasional $\vec{\omega}_a = 0, \vec{\omega}_c = 0$, sehingga persamaan gerak magnetofluida non-Abelian menjadi :

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + (\vec{v}_a \cdot \nabla)\vec{v}_a + \nabla\phi + g_F C_{abc}\vec{v}_b = g_F \int dt \left[\vec{\mathcal{J}} + \vec{F}_a|_{irotasional}\right] \tag{3.68}$$

Persamaan (3.68) yang telah kita dapatkan adalah persamaan umum untuk fluida relativistik tak berotasi. Arus $\vec{J}_a$ muncul akibat adanya materi yang dikelilingi dan berinteraksi dengan fluida, sedangkan $\vec{F}_a$ merupakan kontribusi dari interaksi antar medan fluida atau interaksi medan fluida dengan medan gauge ($A_{\mu a}$). Jadi lagrangian pada persamaan (3.53) dengan medan fluida yang memiliki bentuk seperti persamaan (3.65) dapat mendeskripsikan sistem umum yang terdiri dari fluida relativistik yang berinteraksi dengan medan gauge dan materi.

Untuk kasus non-Abelian maka semua konstanta struktur bernilai nol, dan indeks internal a,b,c dapat dihilangkan. Sehingga untuk kasus non-Abelian nilai $\vec{F}_a = 0$ dan persamaan geraknya menjadi :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\,\vec{v} + \nabla\phi = g_F \int dt\vec{\mathcal{J}} \tag{3.69}$$

seperti pada persamaan (3.42) yang telah kita dapatkan.

3.6 Aplikasi Unifikasi Magnetofluida non-Abelian pada Plasma Quark-Gluon

Plasma quark-gluon terdiri dari quark-dan anti quark yang berinteraksi dengan gluon-gluon dan medan elektromagnetik. Lagrangian sistem ini dinyatakan dengan simetri gauge $SU(3)_F \otimes U(1)_G$:

$$\mathcal{L} = i\bar{Q}_f \partial\!\!\!/ Q_f - m_f \bar{Q}_f Q_f - \frac{1}{4} S_a^{\mu\nu} S_{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - g_F J_{\mu a Q} B_a^{\mu} - q j_{\mu} A^{\mu} \quad (3.70)$$

dimana g_G diganti dengan q yang merupakan muatan quark. indeks f menunjukkan index *flavor* dari quark yaitu u,d,c,s,t,b. Generator T_{Fa} merupakan matriks Gell-Mann yang dinyatakan dengan representasi fundamental $\frac{\lambda_a}{2}$ $(a = 1, 2, 3.....8)$ dengan normalisasi :

$$Tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (3.71)$$

Persamaan gerak yang diperoleh dari lagrangian QCD di atas adalah :

$$D_\mu F^{\mu\nu} = g_F J_Q^{\mu} \quad (3.72)$$

atau dapat dituliskan :

$$\partial \mu F_a^{\mu\nu} = g_F J_{aQ}^{\mu} + g_F J_{aG}^{\mu} \quad (3.73)$$

dengan $J_{aQ}^{\mu} = \bar{Q}\gamma^{\mu}\frac{\lambda_a}{2}Q$ merupakan matrix arus dari materi quark, sedangkan J_{aG}^{μ} adalah arus dari gluon.

$$J_{aG}^{\mu} = C_{abc} B_{\mu b} S_c^{\mu\nu} \quad (3.74)$$

dengan $J_{Fa}^{\mu} = \bar{Q}\gamma^{\mu}\frac{\lambda_a}{2}Q$ dan $J_G^{\mu} = \bar{Q}\gamma^{\mu}Q$.

Bentuk non-linier pada (3.74) dalam persamaan (3.73) menunjukkan bahwa medan gluon bertindak sebagai sumber, atau dengan kata lain quanta dari medan gluon membawa muatan warna tersendiri sehingga tanpa adanya materi dapat menjadi sumber bagi medannya sendiri.

Secara makroskopik model ini menggambarkan sistem yang terdiri dari fluida non-Abelian yang disusun oleh sekumpulan gluon (gluon cloud) dengan kerapatan yang besar dan mengelilingi materi (quark dan anti-quark) dalam medan elektromagnetik. Model ini menjelaskan hasil eksperimen dari PHENIX collaboration pada BNL menggunakan RHIC yang menyatakan quark-gluon pada *fireball* bersifat seperti fluida. Model ini sangat berbeda dengan model *hybridmagnetofluid* [2, 5] yang memodelkan QGP sebagai aliran fluida yang disusun oleh quark dan anti-quark yang berinteraksi dengan medan gluon.

Komponen spasial arus fermion adalah : $\vec{\mathcal{J}}_a = \bar{Q}\vec{\gamma}\frac{\lambda_a}{2}Q$. Dengan persamaan (3.73) persamaan gerak relativistik QGP adalah :

$$\frac{\partial(\phi\gamma_a\vec{v}_a)}{\partial t} + \nabla(\phi\gamma_a) + g_F C_{abc}\phi^2\gamma_b\gamma_c\vec{v}_b = g_F \int dt[\vec{\mathcal{J}} + \vec{F}_a] \quad (3.75)$$

Nilai g_F ditentukan oleh nilai *fine structure* dari interaksi kuat $g_F^2 = 4\pi\alpha_s$, dimana nilai α_s bergantung dengan skala energi yang dipakai, contohnya pada T= 200 MeV maka nilai α_s diantara 0,2 dan 0,5 dengan $g_F = 1,5 - 2,5$. Berdasarkan hasil eksperimen QGP memiliki kerapatan besar dan viskositas kecil seperti fluida ideal ($\omega_a = 0$). Jika kita lihat pada lagrangian QGP, fluida yang disusun oleh gluon tidak berinteraksi dengan medan elektromagnetik, tetapi quark dan antiquark berinteraksi dengan medan elektromagnetik dinyatakan oleh suku terakhir pada lagrangian.

Pada persamaan gerak (3.75), kontribusi medan elektromagnetik terdapat pada $\vec{F}_a$ yang dinyatakan dengan faktor $\frac{q}{g_F} \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_s}} \approx O(10^{-1})$, dimana nilai muatan quark ekuivalen dengan muatan listrik $e = \sqrt{\frac{\alpha}{4\pi}}$. Jadi dapat disimpulkan kontribusi gaya elektromagnetik sangat kecil sehingga dapat diabaikan.

Bab 4

Perhitungan Energi Magnetofluida berbasis Teori Gauge

Pada bab ini kita akan menurunkan tensor energi-momentum untuk kasus umum yaitu dari lagrangian dengan medan non-Abelian. Dengan tensor energi-momentum tersebut kita dapat memperoleh energi total dan momentum dari sistem magnetofluida.

Tensor energi-momentum dapat diperoleh dari prinsip variasi, yaitu dari variasi aksi :

$$\begin{aligned}\delta S = \int_R [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}]]\delta\Phi d^4x + \int_{\partial R} [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}[\delta\Phi + [\partial_\nu]\delta x^v] \\ -[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\partial_\nu - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\delta x^\nu]]\end{aligned}$$

Suku pertama pada suku integral permukaan merupakan variasi total dari Φ $(\delta\Phi)$, sedangkan suku kedua didefinisikan sebagai tensor energi-momentum θ^μ_ν :

$$\theta^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \Phi\right)}\partial_\nu \Phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{4.1}$$

atau :

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \Phi\right)}\partial^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{4.2}$$

4.1 Energi Plasma non-Abelian

Materi boson

Lagrangian umum dari materi boson dengan interaksi medan gauge dan medan fluida non-Abelian adalah :

$$\mathcal{L} = (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi - \frac{1}{4} S_{\alpha\beta a} S_a^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta a} F_a^{\alpha\beta} - V(\Phi) \tag{4.3}$$

dengan mensubtitusi lagrangian ini ke (4.2) akan didapatkan :

$$\begin{aligned} \theta^{\mu\nu} = (\partial^\mu \Phi)^\dagger \partial^\nu \Phi + (\partial^\nu \Phi)^\dagger \partial^\mu \Phi - g_F B_a^\mu J_{aF}^\nu - \\ g_G A_a^\mu J_{aG}^\mu - S_{ak}^o \partial^o B_a^k - F_{ak}^\mu \partial^\nu A_a^k - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Energi dari sistem adalah komponen ke-00 :

$$\begin{aligned} \theta^{oo} = (\partial^o \Phi)^\dagger \partial^o \Phi + (\partial^o \Phi)^\dagger \partial^o \Phi - g_F B_a^o J_{aF}^o - g_G A_a^o J_{aG}^o - \\ S_{ak}^o \partial^o B_a^k - F_{ak}^o \partial^o A_a^k - \mathcal{L} \end{aligned}$$

sehingga :

$$\begin{aligned} \theta^{oo} = (\partial^o \Phi)^\dagger \partial^o \Phi + i g_F B_a^o (\partial^o \Phi^\dagger T_a \Phi - \Phi^\dagger T_a \partial^o \Phi) + i g_G A_a^o (\partial^o \Phi^\dagger T_a \Phi - \\ \Phi^\dagger T_a \partial^o \Phi) + g_G A_{oa} J_a^o + g_F B_{oa} J_a^o - g_G^2 A_a^o A_{ob} \Phi^\dagger T_a T_b \Phi - g_F^2 B_a^o B_{ob} \Phi^\dagger \\ T_a T_b \Phi - g_F g_G A a^o B_{ob} \Phi^\dagger (T_a T_b + T_b T_a) \Phi + (D_i \Phi)^\dagger (D_i \Phi) + V(\Phi) \\ - F_i^o \partial^o A_a^i - S_i^o \partial^o B_a^i + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta a} F_a^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} S_{\alpha\beta a} S_a^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

dengan :

$$D_i = \partial_i - i g_G A_a^i T_{aG} - i g_F B_a^i T_{aF} \tag{4.5}$$

bila suku-sukunya dipisahkan :

$$\begin{aligned} \theta_{materi+interaksi}^{oo} = (\partial^o \Phi)^\dagger \partial^o \Phi + i g_G A_a^o \partial_o \Phi^\dagger T_a \Phi - i g_G A_a^o \Phi^\dagger T_a \partial_o \Phi - \\ i g_G A_{oa} \partial_o \Phi^\dagger T_a \Phi + i g_G A_{oa} \Phi^\dagger T_a \partial_o \Phi + i g_F B_a^o \partial_o \Phi^\dagger T_a \Phi - i g_F B_a^o \Phi^\dagger T_a \partial_o \Phi - \\ i g_F B_{oa} \partial_o \Phi^\dagger T_a \Phi + i g_F B_{oa} \Phi^\dagger T_a \partial_o \Phi - g_G^2 A_a^o A_{ob} \Phi^\dagger T_a T_b \Phi - g_F^2 B_a^o B_{ob} \\ \Phi^\dagger T_a T_b \Phi - g_F g_G A_a^o B_{ob} \Phi^\dagger (T_a T_b + T_b T_a) \Phi + (D_i \Phi)^\dagger (D_i \Phi) + V(\Phi) \end{aligned}$$

dengan menambahkan suku-suku berikut pada persamaan diatas maka bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk kovarian derifatif :

$$\begin{aligned} g_G^2 A_a^o A_{ob} \Phi^\dagger T_a T_b \Phi - g_G^2 A_a^o A_{ob} \Phi^\dagger T_a T_b \Phi + g_F^2 B_a^o B_{ob} \Phi^\dagger T_a T_b \Phi - g_F^2 B_a^o B_{ob} \Phi^\dagger T_a T_b \Phi + \\ g_F g_G A_a^o B_{ob} \Phi^\dagger (T_a T_b + T_b T_a) \Phi - g_F g_G A_a^o B_{ob} \Phi^\dagger (T_a T_b + T_b T_a) \Phi \end{aligned}$$

maka suku $\theta^{oo}_{materi+interaksi}$ dapat dituliskan sebagai :

$$\theta^{oo}_{materi+interaksi} = D^o\Phi^\dagger D^o\Phi + ig_G A_{oa}\left(\Phi^\dagger T_a D^o\Phi - D^o\Phi^\dagger T_a\Phi\right) + ig_F B_{oa}\left(\Phi^\dagger T_a D^o\Phi - D^o\Phi^\dagger T_a\Phi\right) + (D_i\Phi)^\dagger (D_i\Phi)$$

atau :

$$\theta^{oo}_{materi+interaksi} = D^o\Phi^\dagger D^o\Phi + g_G A_{oa}\mathcal{J}^o_a + g_F B_{oa}\mathcal{J}^o_a + (D_i\Phi)^\dagger (D_i\Phi) \tag{4.6}$$

suku untuk medan gauge dan fluidanya adalah :

$$\theta_{gauge+fluida} = -F^o_i\partial^o A^i_a + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta a}F^{\alpha\beta}_a - S^o_i\partial^o B^i_a + \frac{1}{4}S_{\alpha\beta a}S^{\alpha\beta}_a$$
$$= -\vec{E}_a\cdot\frac{\partial\vec{A}_a}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\mathcal{B}_a\cdot\mathcal{B}_a - \vec{E}_a\cdot\vec{E}_a\right) - \vec{Q}_a\cdot\frac{\partial\vec{B}_a}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(R_a\cdot R_a - \vec{Q}_a\cdot\vec{Q}_a\right)$$

dengan $\mathcal{B}_a$ adalah medan magnet non-Abelian.
dari persamaan (3.63) :

$$-\vec{Q}_a\cdot\frac{\partial\vec{B}_a}{\partial t} = \vec{Q}_a\cdot\left(Q_a + \nabla B^o_a + g_F C_{abc}\vec{B}_b B^o_c\right)$$
$$= \vec{Q}_a\cdot\vec{Q}_a + \nabla\cdot\left(\vec{Q}_a B^o_a\right) - \left(\nabla\cdot\vec{Q}_a\right)B^o_a + g_F C_{abc}\left(\vec{Q}_a\cdot\vec{B}_b\right)B^o_c$$

komponen-00 dari tensor energi-momentum dapat dinyatakan :

$$\theta^{oo} = (D^o\Phi)^\dagger D^o\Phi + \left(\vec{D}\Phi\right)^\dagger\cdot\left(\vec{D}\Phi\right) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{B}_a\cdot\mathcal{B}_a + \vec{E}_a\cdot\vec{E}_a\right) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{R}_a\cdot\mathcal{R}_a + \vec{Q}_a\cdot\vec{Q}_a\right) + V(\Phi) + X \tag{4.7}$$

dengan :

$$X = \nabla\cdot(\vec{E}_a A^o_a) - (\nabla\cdot\vec{E}_a)A^o_a + g_G C_{abc}(\vec{E}_a\cdot\vec{A}_b)A^o_c + \nabla\cdot(\vec{Q}_a B^o_a) - (\nabla\cdot\vec{Q}_a)B^o_a + g_F C_{abc}(\vec{Q}_a\cdot\vec{B}_b)B^o_c + g_G A_{oa}\mathcal{J}^o_a + g_F B_{oa}\mathcal{J}^o_a$$

dari persamaan gerak :

$$\nabla\cdot\vec{E}_a + g_G C_{abc}\vec{A}_b\cdot\vec{E}_c = g_G\mathcal{J}^o_a \tag{4.8}$$

$$\nabla\cdot\vec{Q}_a + g_F C_{abc}\vec{B}_b\cdot\vec{Q}_c = g_F\mathcal{J}^o_a \tag{4.9}$$

bila kita subtitusi ke dalam X maka suku-sukunya saling meniadakan kecuali suku berikut :

$$X = \nabla\cdot\left(\vec{E}_a A^o_a\right) + \nabla\cdot\left(\vec{Q}_a B^o_a\right)$$

Dengan memilih gauge yang menyatakan $A_a^o = 0$ dan $B_a^o = 0$ ketika tidak ada medan materi, maka integral X terhadap seluruh ruang dapat diabaikan, sehingga kita akan mendapatkan hamiltonian density yang invarian terhadap transformasi gauge lokal :

$$H = \int dV \mathcal{H}$$

dimana :

$$\mathcal{H} = (D^o\Phi)^\dagger D^o\Phi + (\vec{D}\Phi)^\dagger \cdot (\vec{D}\Phi) + \frac{1}{2}(\mathcal{B}_a \cdot \mathcal{B}_a + \vec{E}_a \cdot \vec{E}_a) + \frac{1}{2}(\vec{R}_a \cdot \vec{R}_a + \vec{Q}_a \cdot \vec{Q}_a) + V(\Phi) \tag{4.10}$$

Dengan : $\vec{D} = \nabla - ig_G\vec{A}_a T_{aG} - ig_F\vec{B}_a T_{aF}$

Materi Fermion

Lagrangian density untuk fermion yang berinteraksi dengan medan fluida dan medan gauge non-Abelian secara umum dapat dinyatakan sebagai :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_a^{\alpha\beta}F_{a\alpha\beta} - \frac{1}{4}S_{\alpha\beta a}S_a^{\alpha\beta} \tag{4.11}$$

Energi-momentum tensornya berbentuk :

$$\theta^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - F_{ak}^\mu\partial^\nu A_a^k - S_{ak}^\mu\partial^\nu B_a^k - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{4.12}$$

komponen ke-00 merupakan Hamiltonian dari sistem dapat dihitung dengan cara yang sama seperti kasus pada boson, kita akan dapatkan :

$$\mathcal{H} = -i\bar{\psi}\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{D}\psi + m\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}(\mathcal{B}_a \cdot \mathcal{B}_a + \vec{E}_a \cdot \vec{E}_a) + \frac{1}{2}(\vec{R}_a \cdot \vec{R}_a + \vec{Q}_a \cdot \vec{Q}_a) \tag{4.13}$$

4.2 Energi density QGP

Sistem magnetofluida quark-gluon terdiri dari quark dan anti-quark yang berinteraksi dengan gluon. Secara umum rapat energinya dinyatakan dengan :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{quark} + \mathcal{H}_{interaksi} + \mathcal{H}_{gluon} \tag{4.14}$$

dimana energi quark dinyatakan dengan :

$$\mathcal{H}_{quark} = -i\bar{Q}\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{\partial}Q + m_Q\bar{Q}Q$$

Suku energi interaksi dan energi gluon tergantung oleh kecepatan gluon. Pada kecepatan gluon yang tinggi suku energi quark memiliki kontribusi yang kecil pada energi sistem sehingga dapat diabaikan. Pada kecepatan gluon yang tinggi akan terbentuk QGP, sehingga rapat energi sistem QGP adalah :

$$\mathcal{H} = g_F J_a^\mu B_{\mu a} + \frac{1}{2}(\vec{R}_a \cdot \vec{R}_a + \vec{Q}_a \cdot \vec{Q}_a) \tag{4.15}$$

Energi total QGP adalah $H = \int dV \mathcal{H}$, dimana V adalah volume dari fireball. dengan kondisi $\vec{\omega}_a = 0$, maka $\vec{R}_a$ dan $\vec{Q}_a$ didefinisikan :

$$\begin{aligned} \vec{R}_a &= \frac{1}{2} g_F C_{abc} \phi^2 \gamma_b \gamma_c \vec{v}_b \times \vec{v}_c \\ \vec{Q}_a &= -\nabla(\phi\gamma_a) - \phi\gamma_a \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} - g_F C_{abc} \phi^2 \gamma_b \gamma_c \vec{v}_b \end{aligned}$$

suku pertama merupakan energi interaksi antara quark dan gluon sedangkan suku kedua merupakan energi dari gluon. J_a^μ adalah arus empat non-Abelian materi yang dapat dinyatakan dengan :

$$J_a^\mu = \bar{Q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} Q \tag{4.16}$$

sehingga :

$$\mathcal{H} = g_F \phi(\rho_q - \vec{v}_a \cdot \vec{J}_a) + \frac{1}{2}(\vec{R}_a \cdot \vec{R}_a + \vec{Q}_a \cdot \vec{Q}_a) \tag{4.17}$$

dengan $a = 1, ...8$. Kita asumsikan quark dan gluon mengalir hanya pada sumbu z dengan kecepatan konstan pada *fireball*, $\vec{v}_a = (0, 0, v_a)$ dan $\vec{J}_a = (0, 0, J_a)$. Dengan asumsi ini, nilai $\vec{R}_a$, suku pertama, dan suku kedua dari $\vec{Q}_a$ pada suku energi gluon dapat diabaikan.