

Efek Temperatur pada Materi Nuklir Asimetrik Berdasarkan Model Walecka Dengan Pendekatan Medan Rata-rata

Tugas Akhir

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk meraih gelar Sarjana Sains

Sandi Wibowo
0304020671



Departemen Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia
Depok
2008

Lembar Persetujuan

Judul Skripsi : Efek Temperatur pada Materi Nuklir Asimetrik
Berdasarkan Model Walecka Dengan
Pendekatan Medan Rata-rata

Nama : Sandi Wibowo

NPM : 0304020671

Skripsi ini telah diperiksa dan disetujui

Depok, Mei 2008

Mengesahkan

Pembimbing I

Dr. Anto Sulaksono

Penguji I

Dr. Agus Salam

Penguji II

Dr. Imam Fachruddin

Kata Pengantar

Penulis mengucapkan syukur alhamdulillah karena akhirnya dapat menyelesaikan skripsi ini walaupun banyak sekali kendala-kendala yang penulis temui ketika menyusun skripsi ini. Suka maupun duka dapat terlewati dengan baik sehingga skripsi ini bisa selesai. Banyak sekali pengalaman pahit maupun manis yang penulis dapatkan dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa selesainya skripsi ini bukanlah akhir dari karir kehidupan penulis. Namun ini hanyalah pengantar menuju gerbang "skripsi-skripsi" lain yang perlu disusun dan diselesaikan. Selesainya skripsi ini adalah awal dari karir kehidupan penulis yang baru.

Manusia itu adalah guru bagi manusia yang lain. Banyak sekali pihak yang membantu dan mengajari penulis dalam penyusunan skripsi ini. Penyelesaian skripsi ini akan terhambat jika tidak ada keterlibatan banyak pihak. Dengan demikian, penulis secara khusus mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penyelesaian tugas akhir ini baik secara langsung maupun tidak langsung, antara lain:

1. Dr. Anto Sulaksono selaku pembimbing yang telah membimbing penulis mulai dari awal diskusi hingga penyelesaian tugas akhir ini serta atas motivasi, pengarahan, dan pengalaman hidup yang sangat berharga bagi penulis yang masih harus banyak belajar.
2. Dr. L.T Handoko atas pinjaman ruangan beliau untuk dipergunakan dalam menyelesaikan skripsi ini. Dan juga atas pengalaman-pengalaman hidup yang selalu bisa diambil nilai positifnya.
3. Dr. Imam Fachruddin dan Dr. Agus Salam selaku penguji I dan II atas diskusi dalam penyelesaian tugas akhir ini.

4. Bapak Ngatman/Pak RT dan Ibu Sulasi/Bu RT selaku orang tua penulis yang telah berkorban sangat banyak dalam membiayai sekolah penulis sejak SD hingga tamat kuliah tanpa pamrih.
5. Puput Setiyawan atau ”’mas ketepuk”’ selaku kakak tunggal penulis atas pinjaman laptop dan komputer, dan juga ilmu tentang pemograman yang telah diajarkan pada penulis. Tentunya penyelesaian skripsi ini tidak akan lancar tanpa kehadiran beliau.
6. ”’Spesies-spesies langka”’ yang ”’bersarang”’ di lab teori, Andreas, Ryky, Hans (junior), Popo, Beriya, Tia (junior), dan Dewi terima kasih atas hiburan-hiburan yang disajikan sehingga mampu menghilangkan stress ketika penulis menghadapi kendala dalam penulisan skripsi.
7. Spesial thanks for my best friend Zamroni yang begitu sabar menghadapi sikap penulis yang aneh-aneh. Begitu banyak hal yang penulis pelajari dari sosok zamroni walaupun sebenarnya Zamroni tidak pintar fisika.
8. Semua temen fisika dari semua angkatan. Banyak sekali pelajaran yang saya ambil dari kalian.
9. Semua orang yang pernah berinteraksi kepada penulis, walaupun hanya sekedar *say hi*. Tentunya semua pelajaran hidup yang saya dapat dari kalian merupakan aset yang sangat berharga dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa karya tulis ini masih jauh dari sempurna, maka dari itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari para pembaca demi perkembangan riset di Fisika UI.

Depok, Mei 2008

Sandi Wibowo

Abstrak

Dipelajari efek temperatur pada persamaan keadaan materi nuklir asimetrik. Perhitungan dilakukan dengan menggunakan model nuklir Walecka nonlinier diperumum dengan pendekatan medan rata-rata. Penelitian difokuskan pada studi efek temperatur pada kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa. Dan juga membandingkan kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa menggunakan parameter set yang berbeda pada temperatur tertentu.

Kata kunci: Materi nuklir asimetrik, Model nuklir walecka nonlinier, Pendekatan medan rata-rata.

Abstract

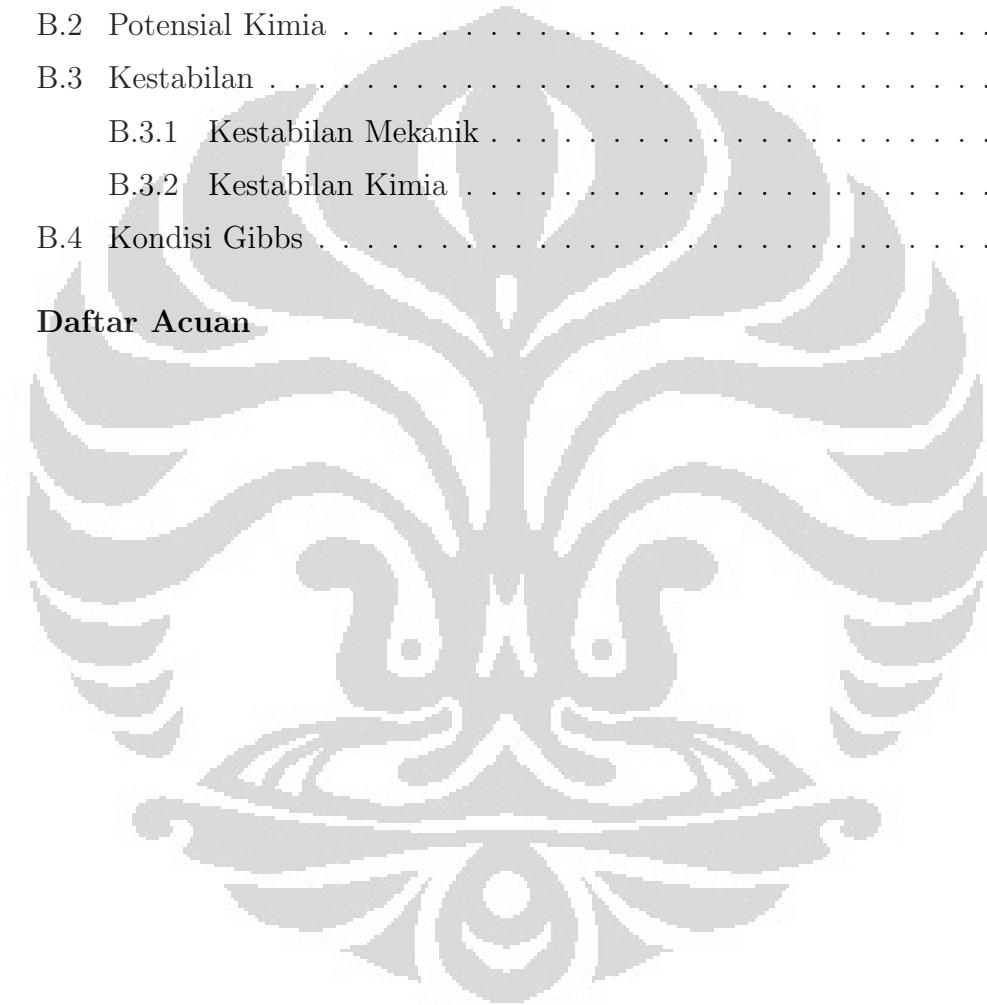
The temperatur effect in the equation of state of asymetrik nuclear matter are studied. The Calculation are done by using generalized nonlinear Walecka nuclear model within mean field approximation. The investigation focus is on the temperatur effect of mechanical stabilty, chemical stability, and phase coexistence. And then we compare the curves of mechanical stabilty, chemical stability, and phase coexistence reproduced by different parameter set at finite temperature.

Keywords: Asymetric nuclear matter, Nonlinear Walecka nuclear model, Mean field approximation

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Abstrak	v
Daftar Isi	vi
Daftar Gambar	viii
1 Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	2
2 Teori	3
2.1 Model Walecka	3
2.2 Pendekatan Medan Rata-rata	5
2.3 Parameter Set	7
2.4 Termodinamika	8
2.4.1 Kestabilan Mekanik	9
2.4.2 Kestabilan Kimia	9
2.4.3 Koeksistensi Fasa Cair-gas	10
3 Hasil dan Pembahasan	13
3.1 Kestabilan Mekanik dan Kimia	13
3.2 Koeksistensi dua fasa	15
3.3 Perbandingan Model Nuklir	18
4 Kesimpulan	23

A	24
A.1 Mendapatkan Hamiltonian	24
A.2 Kerapatan Energi	27
A.3 Tekanan	29
A.4 Entropi	30
B Termodinamika	32
B.1 Kestimbangan	32
B.2 Potensial Kimia	33
B.3 Kestabilan	33
B.3.1 Kestabilan Mekanik	34
B.3.2 Kestabilan Kimia	35
B.4 Kondisi Gibbs	36
Daftar Acuan	38



Daftar Gambar

2.1	Kurva tekanan terhadap kerapatan pada y konstan dan pada $T=10$ MeV	10
2.2	Kurva tekanan terhadap kerapatan pada y konstan, dan $T=10$ MeV.	11
3.1	Efek temperatur pada kestabilan mekanik menggunakan parameter set FSUZ00.	14
3.2	Efek temperatur pada kestabilan kimia menggunakan parameter set FSUZ00	15
3.3	Efek temperatur pada kurva binodal.	16
3.4	Efek temperatur pada kurva binodal.	17
3.5	Kurva Log P terhadap kerapatan menggunakan parameter set yang berbeda.	18
3.6	Kurva energi simetri $T = 10MeV$	19
3.7	Spinodal menggunakan parameter set yang berbeda.	19
3.8	Spinodal kimia menggunakan parameter set yang berbeda.	20
3.9	Spinodal mekanik menggunakan parameter set yang berbeda.	21
3.10	Kurva binodal menggunakan beberapa parameter set yang berbeda.	22

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Hasil eksperimen tumbukan ion berat [7] menunjukkan adanya kapasitas panas yang bernilai negatif. Kapasitas panas yang negatif menunjukkan tidak dipenuhinya syarat kestabilan mekanik dan kimia. Jika syarat tersebut tidak dipenuhi akan terjadi transisi fasa hingga sistem akan berada pada keadaan lain dimana terdapat kesetimbangan fasa.

Tanda-tanda atau bukti-bukti adanya fasa transisi dan koeksistensi fasa pada materi nuklir tidak hanya datang dari eksperimen tumbukan ion berat [7]. Philippe CHOMAZ mengumpulkan hasil-hasil penelitian yang memuat adanya bukti tersebut. Pada papernya terdapat 13 bukti-bukti adanya fasa transisi cair-gas. Masing-masing bukti tersebut didiskusikan pada Ref.[8]

Dengan adanya bukti-bukti tersebut, sangat beralasan untuk mempelajari sifat-sifat termodinamika materi nuklir secara teoritis. Belum ada eksperimen yang dapat mengekstrak kurva-kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa. Namun secara teoritis dapat diprediksi bentuk kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa.

Müller dan Serot [3] meneliti tentang kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa menggunakan model Walecka yang mengandung suku skalar nonlinier dan vektor *self-interaction*. Wang [2] mempelajari hal yang sama tetapi dengan menggunakan parameter set G1 dan G2. Suku yang terdapat pada parameter set G1 dan G2 tetapi tidak terdapat pada model Müller dan Serot[3] yaitu suku campuran antara ω dan ϕ sampai orde ke dua.

Piekarewicz [9] menunjukkan persamaan keadaan menggunakan parameter set FSUGold lebih dekat dengan hasil eksperimen dibandingkan parameter set NL3. Namun sebaliknya pada kerapatan tinggi, hubungan massa bintang dengan radiusnya menggunakan parameter set NL3 mempunyai jangkauan yang lebih besar terhadap hasil observasi dibandingkan dengan FSUGold. Suku pada parameter set FSUGold yang tidak terdapat pada NL3 yaitu suku ω orde ke empat dan suku campuran ω dan b orde ke dua.

Raj Kumar [4] memperoleh parameter set¹ baru dengan memasukan efek ω *self coupling* pada *finite nuclei* dan *neutron stars*. Persamaan keadaan menggunakan parameter set tersebut menunjukkan hasil yang lebih *stiff* dari FSUGold dan lebih *soft* dari NL3. Pada kerapatan tinggi, hubungan massa bintang dengan radiusnya menggunakan parameter set dari Raj Kumar mempunyai jangkauan yang lebih besar terhadap hasil observasi dibandingkan dengan FSUGold. Jadi parameter set dari Raj Kumar cukup baik menjelaskan sifat-sifat *finite nuclei* dan *neutron star*.

Penelitian ini akan dipelajari tentang efek temperatur pada kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa pada materi nuklir seperti yang dilakukan oleh [3] dan [2], tetapi dengan menggunakan parameter set yang berasal dari Raj Kumar. Selain itu, kami juga membandingkan kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa dengan menggunakan parameter set diatas dan dengan parameter set G2.

1.2 Tujuan

Pada penelitian ini bertujuan mempelajari efek temperatur pada kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa menggunakan parameter set FSUZ00. Dan membandingkan kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi dua fasa menggunakan parameter set G2, FSUGold, FSUZ00, FSUZ03, FSUZ06. Nilai-nilai parameter dari tiap model dapat dilihat pada tabel 2.1.

¹lihat tabel 2.1

Bab 2

Teori

Pada bab ini dibahas secara singkat teori yang digunakan dalam penelitian ini.

2.1 Model Walecka

Walecka memperkenalkan model sederhana yang umumnya dikenal sebagai quantum hadrodynamik (QHD). Pada model ini, nukleon dianggap berinteraksi melalui pertukaran medan meson σ , meson ω , dan meson ρ . Dimana meson σ menggambarkan interaksi yang atraktif, meson ω menggambarkan interaksi yang repulsif, dan meson ρ terkait dengan interaksi karena isospin. Medan yang berkaitan dengan interaksi kuat, yaitu:

- Medan neutron dan proton.
- Medan meson skalar ϕ dari meson σ , dipasangkan dengan kerapatan skalar $\bar{\psi}\psi$ sebagai sumber interaksi atraktif dalam bentuk pertukaran meson σ .
- Medan vektor V_μ dari meson ω , dipasangkan dengan arus baryon terkonsentrasi $\psi\gamma^\mu\psi$ sebagai sumber interaksi repulsif dalam bentuk pertukaran meson ω .
- Medan vektor b_μ dari meson ρ karena perbedaan jumlah proton dan netron.

Kerapatan Lagrangian dalam model nonlinier ini ditulis :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{nonlinier}, \quad (2.1)$$

dimana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = & -\psi [\gamma_\mu \partial_\mu - i\gamma_\mu g_\nu V_\nu + M - g_\sigma \phi + ig_\rho \gamma_\mu \tau_3 b_\mu] \psi \\ & - \frac{1}{2} m_\omega^2 V_\mu^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m_\sigma^2 \phi^2] \\ & - \frac{1}{4} \Omega^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\rho^2 b_\mu^2,\end{aligned}\quad (2.2)$$

dengan,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad \text{dan} \quad \Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$$

dan suku nonliniernya adalah

$$\mathcal{L}_{nonlinear} = -\frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M} \Phi^3 - \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2} \Phi^4 + \frac{\zeta g_\omega^2}{24} V_\mu^4 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}& - \frac{\eta_1 g_\sigma m_\omega^2}{2M} \Phi V_\mu^2 - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M} \Phi^2 V_\mu^2 - \frac{\bar{\alpha}'_2}{2} \Phi^2 b_\mu^2 \\ & + \frac{\bar{\alpha}'_3 V_\mu^2}{2} b_\mu^2 - \frac{\eta_\rho g_\sigma m_\rho^2}{2M} \Phi b_\mu^2.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Untuk mendapatkan persamaan gerak maka perlu disubstitusi ke dalam persamaan Euler, yang hasilnya adalah:

$$\begin{aligned}-ig_\nu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = & -\partial_\mu F_{\mu\nu} - m_\omega^2 V_\mu + \frac{\zeta g_\omega^2}{6} V_\mu^3 - \frac{\eta_1 g_\sigma m_\omega^2}{M} \Phi V_\mu \\ & - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{2M} \Phi^2 V_\mu + \bar{\alpha}'_3 V_\mu b_\mu^2,\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}-g_\sigma \bar{\psi} \psi = & \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\sigma^2 \phi - \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{2M} \Phi^2 - \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{6M^2} \Phi^3 \\ & - \frac{\eta_1 g_\sigma m_\omega^2}{2M} V_\mu^2 - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{2M} \Phi V_\mu^2 - \frac{\eta_\rho g_\sigma m_\rho^2}{2M} b_\mu^2 - \bar{\alpha}'_2 \Phi b_\mu^2,\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$-\psi \left[\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\gamma_\mu g_\nu V_\nu + M - g(\phi + i\gamma_\mu \tau_3 b_\mu) \right] \psi = 0, \quad (2.7)$$

$$-ig_\rho \bar{\psi} \gamma_\mu \tau_3 \psi = \partial_\mu \Omega_{\mu\nu} - m_\rho^2 b_\mu - \frac{\eta_\rho g_\sigma m_\rho^2}{M} \Phi b_\mu + \bar{\alpha}'_3 V_\mu^2 b_\mu - \bar{\alpha}'_2 \Phi^2 b_\mu. \quad (2.8)$$

Persamaan 2.5 adalah persamaan Proca dengan arus barion ($i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$) sebagai sumber. Persamaan 2.6 adalah persamaan medan skalar Klein-Gordon dengan kerapatan Barion ($\bar{\psi}\psi$) sebagai sumber, sedangkan persamaan 2.7 merupakan persamaan Dirac.

2.2 Pendekatan Medan Rata-rata

Pendekatan medan rata-rata merupakan salah satu solusi untuk menyederhanakan dalam mencari solusi persamaan gerak sistem banyak barion. Bayangkan terdapat sebuah kotak yang besar dengan volume berisi baryon B . Jika jumlah baryon terkonservasi, demikian pula dengan kerapatan $\rho_B \equiv \frac{B}{V}$. Jika ukuran kotak diperkecil, maka kerapatan barion meningkat, demikian pula bagian sumber pada sisi kanan persamaan medan meson pada persamaan 2.5, 2.6, dan 2.8. Saat sumber bernilai besar dan timbul beberapa kuantum dapat dicoba untuk mengganti medan meson dengan medan klasik dan sumber dengan harga ekspektasinya. Maka pada limit ρ_B yang besar kita dapat melakukan pendekatan:

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &\rightarrow \langle \hat{\phi} \rangle = \phi_0, \\ \hat{V}_\mu &\rightarrow \langle \hat{V}_\mu \rangle = i\delta_{\mu 4}V_0, \\ \hat{b}_\mu &\rightarrow \langle \hat{b}_\mu \rangle = i\delta_{\mu 4}b_0.\end{aligned}$$

Untuk sistem uniform pada keadaan diam medan klasik ϕ_0 dan V_0 bernilai konstan tidak bergantung ruang dan waktu, sehingga suku yang mengandung operasi turunan kontribusinya nol.

Lagrangian setelah menggunakan pendekatan medan rata-rata menjadi lebih sederhana, yakni

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2\Phi^2 - \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M}\Phi^3 - \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2}\Phi^4 + \frac{\zeta g_\omega^2}{24}V_0^4 + \frac{\xi}{24}b^4 + \frac{m_\omega^2}{2}V_0^2 \\ & + \frac{\eta_1 g_\sigma m_\omega^2}{2M}\Phi V_0^2 + \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M}\Phi^2 V_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2}b^2 + \frac{\eta_\rho g_\sigma m_\rho^2}{2M}\Phi b^2 + \frac{\bar{\alpha}'_2}{2}\Phi^2 b^2 \\ & + \frac{\bar{\alpha}'_3}{2}V_0^2 b^2 + \bar{\psi} \left[i\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_0 g_\omega V_0 - M^* - \frac{1}{2}\tau_3 g_\rho b \right] \psi\end{aligned}\quad (2.9)$$

dimana $M^* = M - g_\sigma \phi$. Dari kerapatan Lagrangian tersebut diatas dapat dikonstruksi kerapatan Hamiltonian. Kemudian dapat dicari nilai energi dan tekanan

menggunakan fungsi partisi¹, nilai energi dan tekanan yang diperoleh adalah

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = & \left(\frac{1}{2}m_\sigma^2\Phi^2 + \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M}\Phi^3 + \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2}\Phi^4 - \frac{\zeta g_\omega^2}{24}V_0^4 - \frac{\xi}{24}b^4 - \right. \\
& \frac{m_\omega^2}{2}V_0^2 - \frac{\eta_1 g_\sigma}{2M}\Phi V_0^2 - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M}\Phi^2 V_0^2 - \frac{m_\rho^2}{2}b^2 - \frac{\eta_\rho g_\sigma}{2M}\Phi b^2 - \frac{\bar{\alpha}'_2}{2}\Phi^2 b^2 \\
& \left. - \frac{\bar{\alpha}'_3}{2}V_0^2 b^2 \right) + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^* (\bar{n}_p + n_p + n_n + \bar{n}_n) \\
& + g_\omega V_0 (\rho_p + \rho_n) + \frac{g_\rho b}{2} (\rho_p - \rho_n), \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p = & - \left(\frac{1}{2}m_\sigma^2\Phi^2 + \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M}\Phi^3 + \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2}\Phi^4 - \frac{\zeta g_\omega^2}{24}V_0^4 - \frac{\xi}{24}b^4 - \right. \\
& \frac{m_\omega^2}{2}V_0^2 - \frac{\eta_1 g_\sigma}{2M}\Phi V_0^2 - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M}\Phi^2 V_0^2 - \frac{m_\rho^2}{2}b^2 - \frac{\eta_\rho g_\sigma}{2M}\Phi b^2 - \frac{\bar{\alpha}'_2}{2}\Phi^2 b^2 \\
& \left. - \frac{\bar{\alpha}'_3}{2}V_0^2 b^2 \right) \\
& + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{3} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} (n_p + \bar{n}_p + n_n + \bar{n}_n),
\end{aligned}$$

dimana

$$\rho_p = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k (\bar{n}_p + n_p) \quad \text{dan} \quad \rho_n = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k (n_n + \bar{n}_n), \tag{2.11}$$

dengan

$$\begin{aligned}
n_p &= \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* - \mu_p^*)}}, & \bar{n}_p &= \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* + \mu_p^*)}}, \\
n_n &= \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* - \mu_p^*)}}, & \bar{n}_n &= \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* + \mu_p^*)}},
\end{aligned}$$

dan γ bernilai 2 untuk materi nuklir asimetrik dan bernilai 4 untuk materi nuklir simetrik.

Pada volume dan jumlah Barion konstan, sistem akan meminimumkan energi $\left(\frac{\partial E}{\partial \phi_0}\right)_{B,V} = 0$. Nilai medan klasik ϕ_0 dapat dicari dari syarat tersebut. Dengan menurunkan persamaan 2.10, diperoleh

$$\begin{aligned}
g_\sigma \rho_s = & m_\sigma^2 \phi + \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{2M}\Phi^2 + \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{6M^2}\Phi^3 \\
& - \frac{\eta_1 g_\sigma m_\omega^2}{2M}V_0^2 - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{2M}\Phi V_0^2 - \frac{\eta_\rho g_\sigma m_\rho^2}{2M}b^2 - \bar{\alpha}'_2 \Phi b^2, \tag{2.12}
\end{aligned}$$

¹lihat lampiran A untuk penurunan yang lebih detail

dimana

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M_*^2}} (\bar{n}_p + n_p + n_n + \bar{n}_n).$$

Nilai medan klasik V_0 dan b_0 dapat dicari dengan memasukan persamaan 2.9 ke dalam persamaan Euler-Langrange. Persamaan 2.5 dan 2.8 menjadi

$$g_\nu (\rho_n + \rho_p) = m_\omega^2 V_0^2 + \frac{\zeta g_\omega^2}{6} V_0^3 + \frac{\eta_1 g_\sigma m_\omega^2}{M} \Phi V_0 + \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{2M} \Phi^2 V_0 + \bar{\alpha}'_3 V_0 b^2. \quad (2.13)$$

$$g_\rho (\rho_p - \rho_n) = \frac{\xi}{6} b^3 + m_\rho^2 b + \frac{\eta_\rho g_\sigma m_\rho^2}{M} \Phi b + \bar{\alpha}'_3 V_\mu^2 b + \bar{\alpha}'_2 \Phi^2 b. \quad (2.14)$$

Dengan menentukan nilai temperatur, kerapatan proton, dan kerapatan netron, persamaan 2.13, 2.14, 2.12, dan 2.11 bisa diselesaikan secara simultan dan didapatkan nilai ϕ_0 , V_0 , μ_n , dan μ_p . Besaran-besaran makroskopis termodinamik seperti energi dan tekanan dapat dicari dengan memasukan nilai solusi dari persamaan yang dipecahkan secara simultan tadi ke persamaan 2.10 dan 2.11.

Setelah menghitung besaran-besaran termodinamik makroskopis seperti energi dan tekanan, kemudian dapat dianalisis sifat-sifat termodinamika sistem. Sifat termodinamika yang dianalisis terdiri dari kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa cair-gas.

2.3 Parameter Set

Parameter set yang digunakan dapat dilihat pada tabel 2.1. Parameter set FSUGold, FSUZ00, FSUZ03, dan FSUZ06 didapat dari [4]. Dan G2 didapat dari [10]

Parameter set FSUZ00, FSUZ03, dan FSUZ06 masing-masing diperoleh dari fitting parameter-parameter terhadap energi ikat $^{16,24}\text{O}$, $^{40,48}\text{Ca}$, $^{56,78}\text{Ni}$, ^{88}Sr , ^{90}Zr , $^{100,116,132}\text{Sn}$, ^{208}Pb dan radius ^{16}O , $^{40,48}\text{Ca}$, ^{56}Ni , ^{88}Sr , ^{90}Zr , ^{116}Sn , ^{208}Pb . Tiga parameter yang terakhir memberikan prediksi yang lebih baik dibandingkan FSUGold untuk observabel-observabel bintang neutron [4].

Tabel 2.1: parameter Set yang digunakan pada penelitian ini.

Parameter	G2	FSUGold	FSUZ00	FSUZ03	FSUZ06
g_σ	10.4956841	10.59217	10.65616	10.76145	11.02412
g_ω	12.762406	14.30207	13.95799	14.11104	14.66595
g_ρ	9.48346291	11.76733	14.32687	14.67414	14.52185
κ_3	-3.2467	-0.61907	-2.5865	-1.33677	-0.622508
κ_4	0.63152	9.7305	-1.85106	3.97542	10.4384
ζ	2.6416	12.2729	0	5.9736	12.9054
η_1	-0.64992	0	-0.45596	-0.124248	-0.00585795
η_2	0.10975	0	0.43709	0.290749	0.0328313
$\bar{\alpha}'_2$	0	0	0.013501	0.011625	0.015688
$\bar{\alpha}'_3$	0	0.600000	0.014759	0.013598	0.015849
η_ρ	-0.390	0	-3.743	-4.12942	-3.40541
M	939	939	939	939	939
m_σ	495.763	491.500	495.763	500.511	501.370
m_ω	782.50	782.500	782.500	782.500	782.500
m_ρ	770.0	763.0	770.0	770.0	770.0

2.4 Termodinamika

Untuk mengetahui konsistensi model nuklir yang digunakan, maka dipelajari sifat termodinamika sistem berdasarkan model tersebut. Khususnya dipelajari kestabilan sistem dan transisi dari fase cair ke gas pada $T \neq 0$. Sistem dikatakan stabil bila ada sedikit gangguan pada sistem maka sistem masih dapat kembali ke keadaan semula. Kestabilan yang dibahas dalam penelitian ini, adalah kestabilan mekanik dan kimia.

Sistem nukleon yang dipelajari yaitu sistem banyak partikel yang terdiri dari proton dan neutron yang masing-masing diketahui kerapatannya pada temperatur tertentu ($T \neq 0$). Dengan menentukan temperatur, kerapatan proton dan neutron, maka besaran-besaran makroskopis seperti tekanan, energi ikat, bisa dihitung dengan memecahkan persamaan *self consistent* untuk medan nukleon dan meson. Nilai $\rho = \rho_p + \rho_n$ (kerapatan total) dan $y = \frac{\rho_p}{\rho_p + \rho_n}$ (fraksi proton) akan menspesifikasikan nilai kerapatan proton dan neutron secara unik.

2.4.1 Kestabilan Mekanik

Kestabilan mekanik² dikarakteristikan oleh

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{T,y} \geq 0, \quad (2.15)$$

bila kondisi diatas tidak dipenuhi maka sedikit penambahan densitas akan menyebabkan turunnya tekanan sistem. Dengan demikian lingkungan akan mempunyai tekanan yang lebih tinggi dan akan menekan sistem sehingga densitasnya bertambah besar. Hal ini menyebabkan sistem tidak bisa kembali ke keadaan semula, jadi sistem tidak stabil secara mekanik.

Gambar 2.1 adalah kurva tekanan terhadap kerapatan pada y konstan. Kurva tersebut didapat dengan memecahkan persamaan medan-medan meson dan mensubstitusi solusinya ke persamaan 2.11.

Titik-titik batas kestabilan mekanik merupakan puncak-puncak kurva 2.1. Dengan mengubah-ubah untuk semua y maka bisa didapat titik-titik batas kestabilan mekanik.

2.4.2 Kestabilan Kimia

Kestabilan kimia³ dikarakteristikan oleh

$$\left(\frac{\partial \mu_n}{\partial y}\right)_{T,P} \leq 0 \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial \mu_p}{\partial y}\right)_{T,P} \geq 0. \quad (2.16)$$

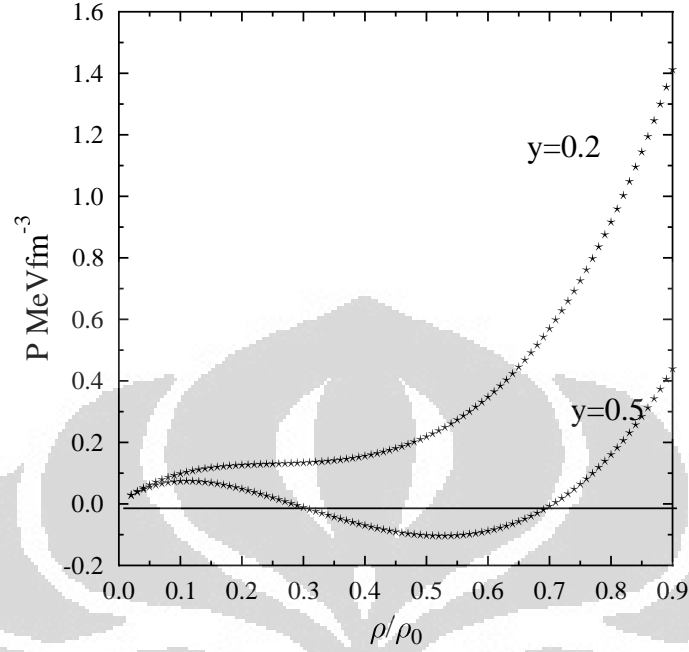
Materi akan mengalir dari potensial kimia lebih tinggi ke rendah. Bila kondisi diatas tidak dipenuhi, maka sedikit penambahan proton akan menyebabkan potensial kimia berkurang. Dengan demikian akan lebih banyak proton yang terbentuk. Hal ini menyebabkan sistem tidak bisa kembali ke keadaan semula, jadi sistem tidak stabil secara kimia.

Gambar 2.2 adalah kurva μ_n dan μ_p terhadap y pada tekanan konstan (kurva isobar). Kurva tersebut didapat dari pertemuan garis horizontal dengan kurva 2.1.

Dari gambar 2.1 terdapat garis horizontal dimana garis tersebut merupakan titik-titik dengan tekanan konstan. Dari titik-titik pertemuan antara kurva dan

²lihat lampiran B.3.1 untuk lebih jelas

³lihat lampiran B.3.2 untuk lebih jelas



Gambar 2.1: Kurva tekanan terhadap kerapatan pada y konstan dan pada $T=10$ MeV

garis dapat dicari nilai μ dan y pada tekanan konstan. Dengan mengubah-ubah y dan mencari titik-titik pertemuan dengan garis, maka dapat dikonstruksi kurva μ_n dan μ_p terhadap y pada tekanan konstan (kurva isobar) yaitu kurva 2.2.

2.4.3 Koeksistensi Fasa Cair-gas

Koeksistensi⁴ fasa cair dan gas pada materi nuklir asimetrik memenuhi persamaan

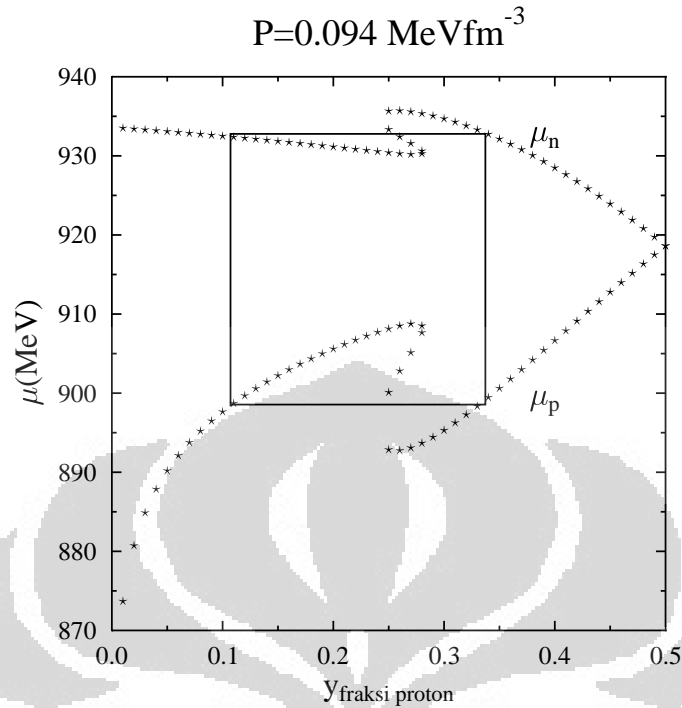
$$P^L(T, \rho^L, y^L) = P^G(T, \rho^G, y^G), \quad (2.17)$$

$$\mu_N^L(T, \rho^L, y^L) = \mu_N^G(T, \rho^G, y^G), \quad (2.18)$$

$$\mu_P^L(T, \rho^L, y^L) = \mu_P^G(T, \rho^G, y^G). \quad (2.19)$$

Dalam persamaan tersebut terdapat dua buah kerapatan dan dua buah y . Kerapatan yang kecil disebut fasa cair dan kerapatan yang besar disebut fasa gas.

⁴lihat lampiran B.4 untuk lebih jelas



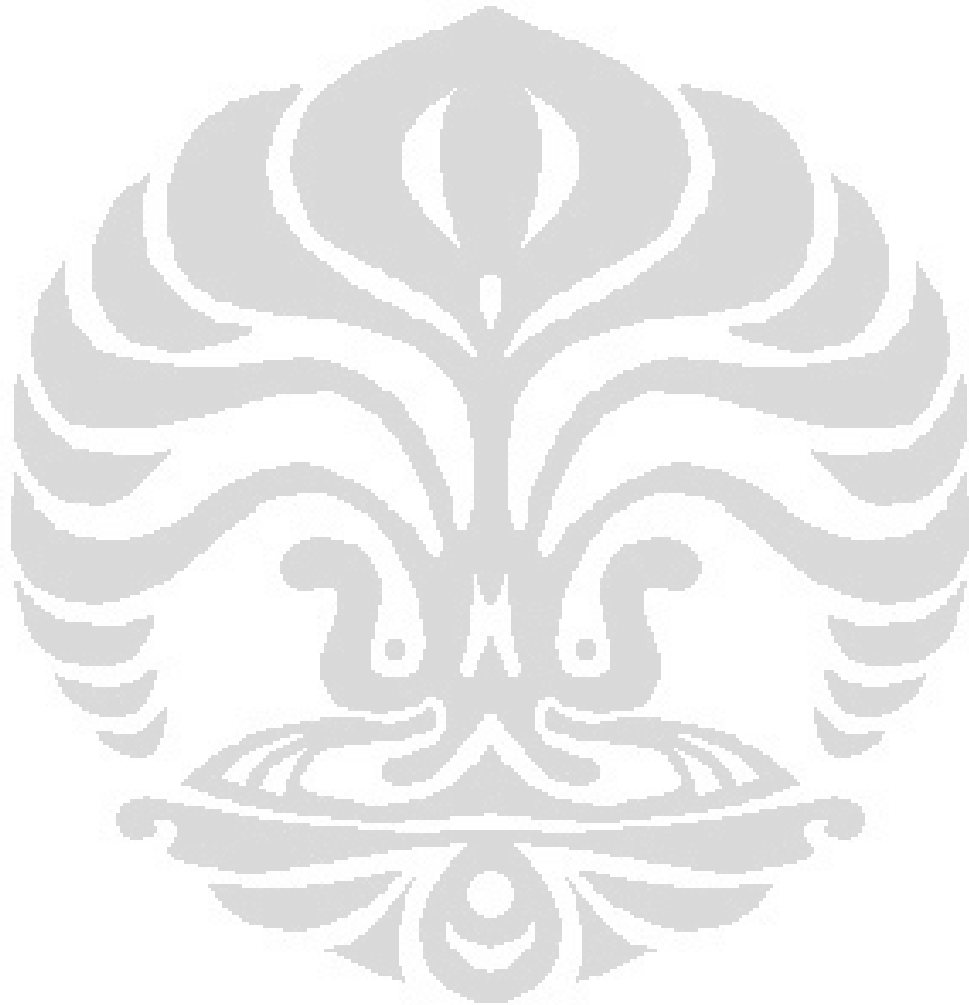
Gambar 2.2: Kurva tekanan terhadap kerapatan pada y konstan, dan $T=10 \text{ MeV}$.

Syarat 2.17, 2.18, dan 2.19 bisa dikonstruksi dari kurva 2.2. Kurva 2.2 adalah kurva μ terhadap y pada tekanan konstan. Jadi syarat 2.17 sudah terpenuhi.

Jika pada kurva 2.2 dibuat garis horizontal yang memotong kurva di dua titik, maka garis horizontal tersebut merupakan titik-titik dengan μ yang sama. Syarat 2.18 yaitu $\mu_N^L = \mu_N^G$ didapat dengan membentuk garis horizontal yang memotong μ_N di dua titik. Juga syarat 2.19 yaitu $\mu_p^L = \mu_p^G$ didapat dengan membentuk garis horizontal yang memotong μ_p di dua titik. Tidak semua garis horizontal μ_N dan garis horizontal μ_p memenuhi syarat 2.18 dan 2.19. Keduanya harus memotong kurva μ_n dan μ_p di y yang sama. Satu-satunya yang mungkin adalah jika dibentuk kotak dengan tiap-tiap titik sudutnya memotong kurva μ .

Dari gambar 2.2 terlihat kotak yang dibentuk, garis horizontalnya memotong kurva μ yang bernilai sama dan garis vertikalnya memotong μ_n dan μ_p pada y yang sama. Jadi syarat 2.18 dan 2.19 terpenuhi apabila dapat dibuat kotak dengan tiap-tiap titik sudutnya memotong kurva μ .

Jika prosedur diatas dilakukan untuk kurva dengan tekanan yang berbeda-beda. Maka bisa dibentuk kurva koeksistensi dan fasa atau kurva binodal. Metode ini disebut konstruksi geometris.



Bab 3

Hasil dan Pembahasan

Dalam bab ini akan ditampilkan hasil penelitian dan analisis dari tiap-tiap hasil. Hasil penelitian yaitu berupa grafik kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa.

Pada hasil ini kerapatan materi nuklir dinyatakan dalam $\frac{\rho}{\rho_0}$. Dimana ρ_0 adalah kerapatan pada saat rapat energi materi nuklir minimum ($y=0.5$). Dalam penelitian ini $\rho_0=0.155 \text{ fm}^{-3}$.

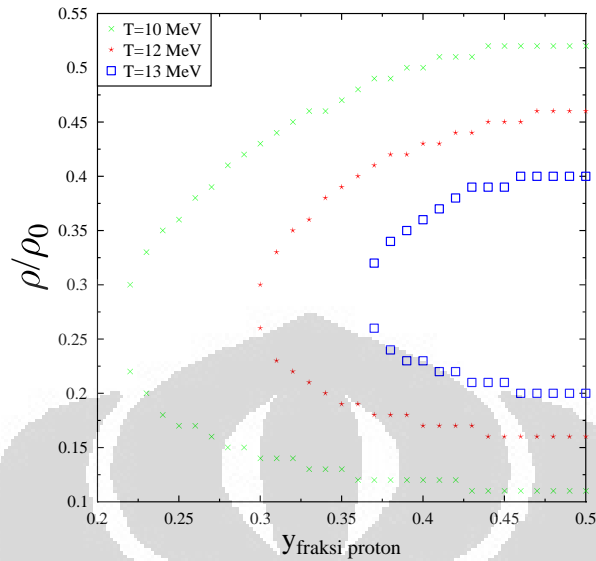
Pertama akan didiskusikan efek temperatur pada kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa. Kemudian didiskusikan perbandingan model nuklir untuk kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa pada temperatur tertentu.

3.1 Kestabilan Mekanik dan Kimia

Efek temperatur pada kestabilan mekanik dapat dilihat pada grafik 3.1. Kurva tersebut adalah kurva batas-batas kestabilan mekanik pada temperatur yang berbeda. Daerah di luar titik-titik gambar merupakan daerah stabil dan daerah di dalam titik-titik merupakan daerah tidak stabil.

Dengan meningkatnya temperatur, titik-titik kurva menjadi bergeser ke kanan. Daerah luar kurva menjadi lebih besar dan daerah didalam kurva menjadi lebih kecil. Jadi meningkatnya temperatur menyebabkan daerah stabil menjadi lebih besar dan daerah tidak stabil menjadi lebih kecil.

Perhatikan gambar 3.1, misalkan terdapat sistem dengan $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.3$ pada $T = 10 \text{ MeV}$, maka sistem dengan fraksi proton lebih besar dari 0.22 merupakan sis-

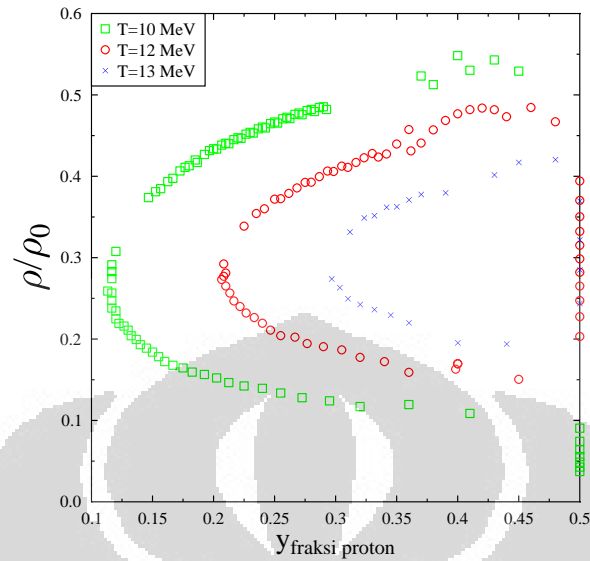


Gambar 3.1: Efek temperatur pada kestabilan mekanik menggunakan parameter set FSUZ00.

tem yang tidak stabil. Namun bila temperatur sistem menjadi 12 MeV, sistem dengan $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.3$ menjadi tidak stabil jika fraksi proton lebih besar dari 0.3. Jadi dengan meningkatnya temperatur memungkinkan sistem dengan fraksi proton relatif besar berada pada kesetimbangan mekanik.

Efek temperatur pada kestabilan kimia dapat dilihat pada grafik 3.2. Kurva tersebut memperlihatkan perilaku yang sama dengan kurva kestabilan mekanik. Jadi sama seperti analisis kurva kestabilan mekanik, dengan meningkatnya temperatur memungkinkan sistem dengan fraksi proton yang lebih besar menjadi stabil secara kimia.

Hasil ini sebelumnya pernah dihitung oleh Jun Xu [1] menggunakan model yang berbeda yaitu *momentum-dependent interaction (MDI)*, *momentum-independent interaction (MID)*, dan *isoscalar momentum-dependent interaction (eMDYI)*. Hasilnya menunjukkan bahwa dengan meningkatnya temperatur daerah kestabilan mekanik menjadi lebih besar dan daerah tidak stabil secara mekanik menjadi kecil. Untuk kestabilan kimia, hasil Jun Xu menunjukkan bahwa dengan meningkatnya temper-



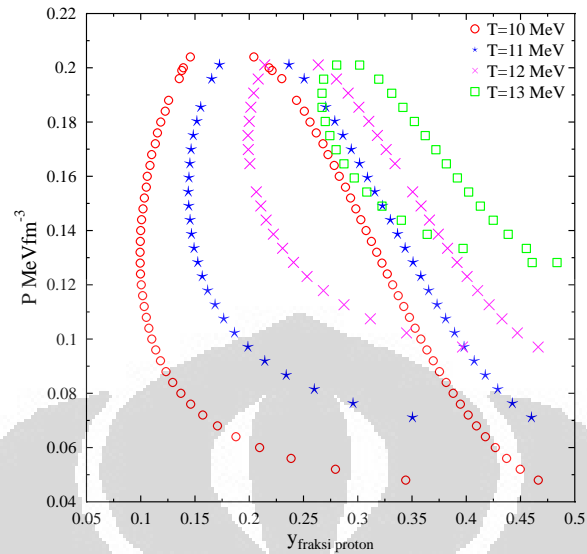
Gambar 3.2: Efek temperatur pada kestabilan kimia menggunakan parameter set FSUZ00

atur daerah kestabilan kimia menjadi lebih besar dan tidak stabil secara kimia menjadi kecil. Jadi perubahan temperatur pada kurva kestabilan mekanik dan kimia mempunyai efek yang sama menggunakan model FSUZ00, MDI, MID, dan eMDYL.

3.2 Koeksistensi dua fasa

Efek temperatur pada kurva koeksistensi fasa (binodal) dapat dilihat pada gambar 3.4 dan gambar 3.3. Gambar 3.4 adalah kurva 3 dimensi kurva binodal terhadap temperatur. Gambar 3.3 adalah kurva kontur binodal terhadap temperatur. Pada gambar 3.4 dan 3.3 terdapat 4 variasi temperatur.

Dari gambar 3.3 dan 3.4 terlihat bahwa dengan meningkatnya temperatur, luas kurva binodal menjadi lebih kecil. Efek tersebut juga diperlihatkan pada kurva kestabilan mekanik dan kimia. Jika temperatur terus dinaikan maka luas kurva binodal akan makin kecil pada suatu saat, yaitu pada temperatur kritis, tidak terbentuk lagi kurva binodal.

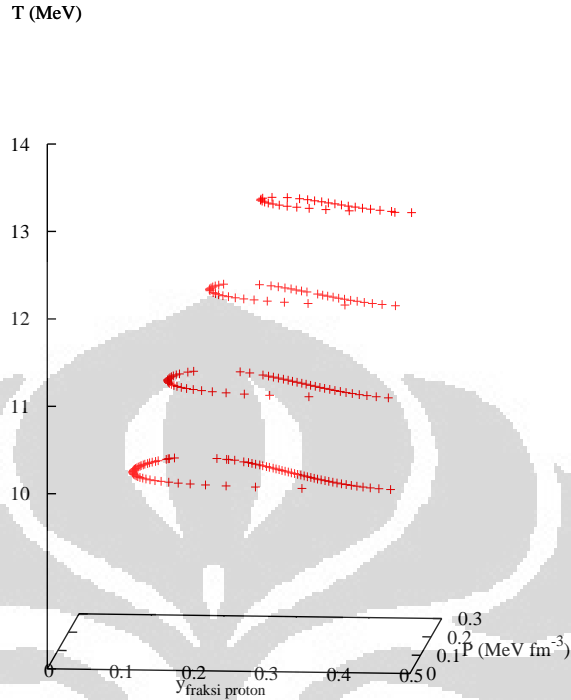


Gambar 3.3: Efek temperatur pada kurva binodal.

Efek dari luas kurva binodal menjadi lebih kecil mengakibatkan nilai kerapatan fasa cair dan fasa gas menjadi lebih dekat. Jika temperatur terus dinaikan maka nilai kerapatan fasa cair dan gas akan makin dekat hingga suatu saat kerapatannya bernilai sama. Dengan kata lain hanya terdapat satu kerapatan saja atau tidak terjadi koeksistensi fasa karena sistem sudah stabil.

Dari gambar 3.3 terlihat bahwa dengan meningkatnya temperatur kurva binodal bergeser ke kanan. Efek ini berasal dari kurva kestabilan mekanik dan kimia. Pada kurva kestabilan meningkatnya temperatur membuat kurva batas kestabilan bergeser ke kanan atau dengan kata lain daerah tidak stabil makin kecil. Jika binodal bergeser ke kanan maka fraksi proton untuk tiap-tiap fase menjadi lebih besar. Efek ini sama seperti efek temperatur pada kestabilan, yaitu memungkinkan fraksi proton yang lebih besar menjadi stabil dengan meningkatnya temperatur.

Hasil ini konsisten dengan hasil yang dihitung menggunakan model Jun Xu [1]. Hasil Jun Xu [1] menunjukkan kurva binodal bergeser ke arah fraksi proton yang lebih besar. Kurva binodal yang dihitung menggunakan model yang dihitung Jun



Gambar 3.4: Efek temperatur pada kurva binodal.

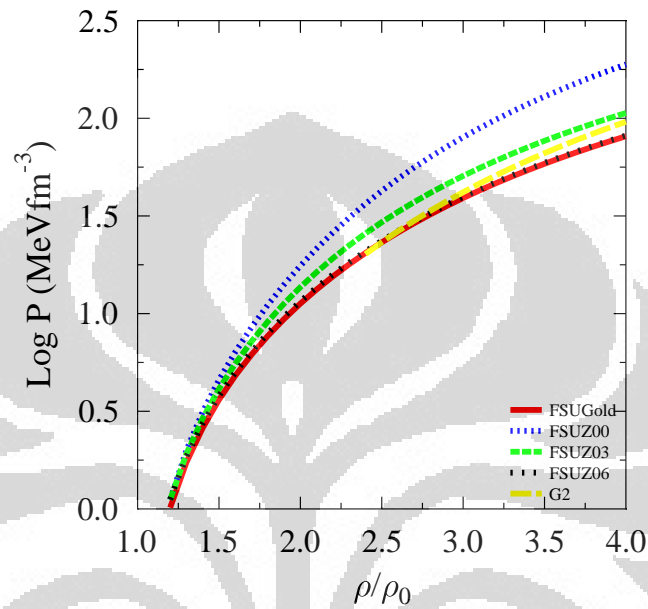
Xu [1] menunjukkan luas yang makin kecil dengan meningkatnya temperatur.

Selain itu, hasil penelitian ini konsisten dengan model yang dihitung Muller dan Serot [3]. Hasil [3] menunjukkan kurva binodal bergeser ke arah fraksi proton yang lebih besar dan luas kurva yang makin kecil jika temperatur meningkat.

Hasil dari penelitian ini konsisten dengan penelitian lain [1] [3] yang menggunakan model yang berbeda. Jadi perubahan temperatur pada kurva binodal mempunyai efek yang sama menggunakan model yang dihitung oleh Jun Xu[1], Muller dan Serot [3].

3.3 Perbandingan Model Nuklir

Pada subbab ini akan diselidiki perbedaan prediksi akibat perbedaan suku non-linear yang digunakan. Caranya dengan membandingkan prediksi tiap parameter set yang ada pada tabel 2.1.

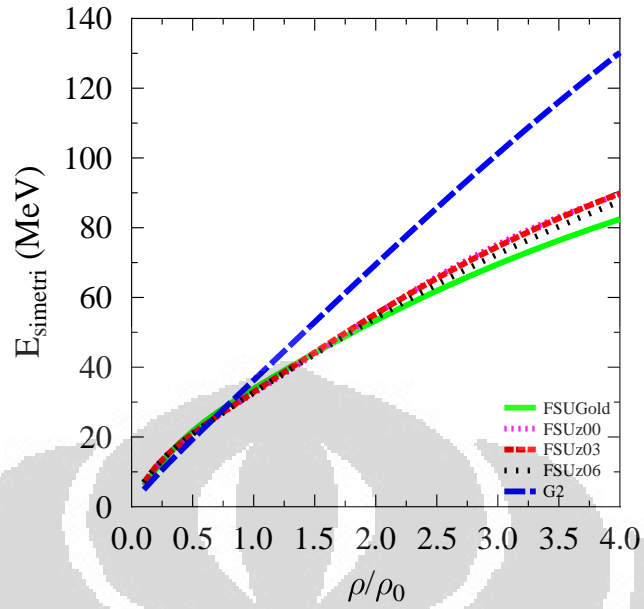


Gambar 3.5: Kurva Log P terhadap kerapatan menggunakan parameter set yang berbeda.

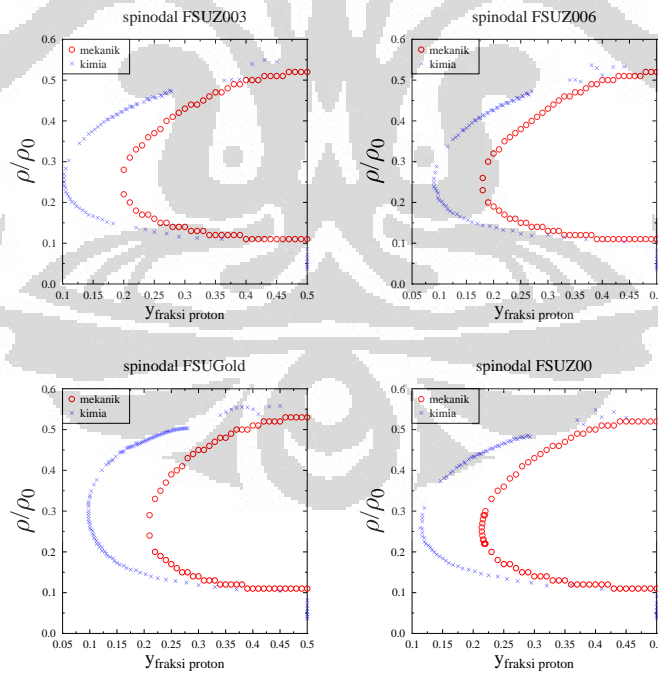
Gambar 3.5 adalah grafik antara tekanan terhadap kerapatan pada $T = 0$. Dari grafik tersebut terlihat bahwa FSUZ00 paling stiff dan FSUGold paling soft.

Gambar 3.6 adalah kurva energi simetri terhadap kerapatan pada $T = 0$ dengan menggunakan parameter set yang disebut di atas. Pada kerapatan rendah, kurva energi simetri tidak terlalu berbeda. Pada kerapatan tinggi perbedaan masing-masing model mulai terlihat jelas. Kurva dari parameter set FSUZ00, FSUZ03, dan FSUZ06 tidak terlihat perbedaan yang terlalu jauh. Kurva dari parameter set FSUGold paling *soft* dibandingkan parameter set lainnya. Kurva dari parameter set G2 paling *stiff* diantara parameter set lainnya.

Gambar 3.7 adalah kurva kestabilan mekanik dan kimia menggunakan param-

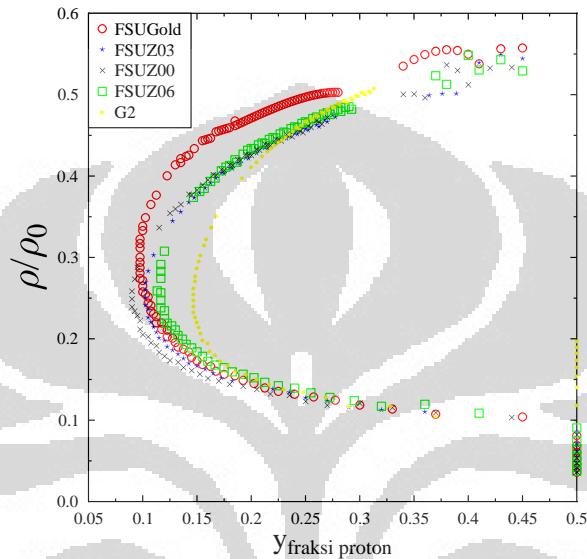


Gambar 3.6: Kurva energi simetri $T = 10\text{MeV}$.



Gambar 3.7: Spinodal menggunakan parameter set yang berbeda.

eter set yang berbeda pada $T = 10$ MeV. Dari gambar 3.7 terlihat bahwa untuk semua parameter set daerah ketidakstabilan kimia lebih besar dibandingkan daerah ketidakstabilan mekanik. Daerah yang stabil secara kimia stabil juga secara mekanik, tapi tidak sebaliknya.

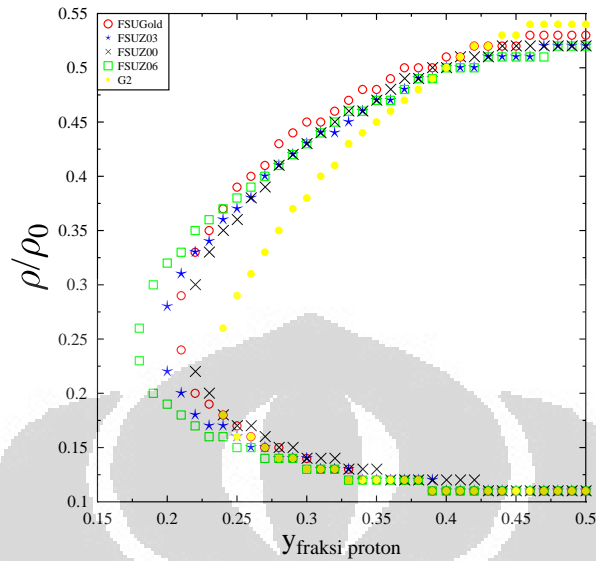


Gambar 3.8: Spinodal kimia menggunakan parameter set yang berbeda.

Gambar 3.8 adalah kurva batas kestabilan kimia menggunakan parameter set yang berbeda. Dari gambar tersebut parameter set FSUZ00, FSUZ03, FSUZ06, dan FSUGold tidak terlihat perbedaan yang terlalu besar. Perbedaan terlihat pada parameter set G2.

Gambar 3.9 adalah kurva batas kestabilan mekanik menggunakan parameter set yang berbeda. Dari gambar 3.9 terlihat bahwa, dengan menggunakan parameter set FSUZ06, FSUZ03 dan FSUZ00 berturut-turut daerah kestabilan mekanik makin besar. Hal ini berarti efek konstanta kopling ω orde ke empat berdampak cukup signifikan pada kestabilan mekanik.

Gambar 3.10 adalah kurva binodal dengan menggunakan parameter set yang berbeda. Dari gambar terlihat bahwa kurva binodal menggunakan parameter set FSUZ00, FSUZ03, dan FSUZ06 tidak terlihat perbedaan yang besar. Kur-

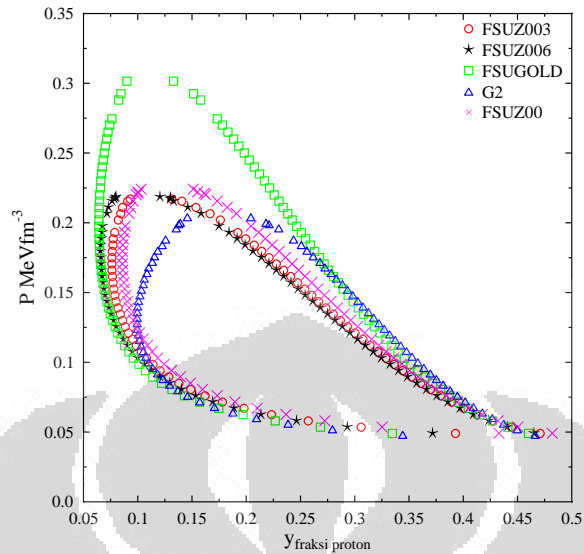


Gambar 3.9: Spinodal mekanik menggunakan parameter set yang berbeda.

va menggunakan parameter set FSUGold mempunyai titik tekanan kritis yang paling besar dibandingkan parameter set lainnya. Kurva menggunakan parameter set G2 mempunyai titik tekanan kritis yang paling rendah. Fraksi proton pada tekanan kritis tidak terlalu beda untuk parameter set FSUGold, FSUZ00, FSUZ03 FSUZ06. Sedangkan pada parameter set G2 fraksi proton pada tekanan kritis bergeser nilainya menjadi lebih besar. Perbedaan tersebut berhubungan erat dengan suku isospin nonlinear yang berbeda pada tiap-tiap model.

Informasi tentang efek isospin pada tiap-tiap model didapat pada kurva energi asimetri. Dari gambar 3.6 terlihat bahwa kurva dengan parameter set FSUZ00, FSUZ03, dan FSUZ06 tidak terlalu berbeda dan kurva binodalnya tidak juga menunjukkan perbedaan yang jauh. Kurva energi asimetri dengan menggunakan parameter set FSUGold paling *soft* diantara parameter set lainnya dan kurva binodalnya pun mempunyai tekanan kritis yang paling tinggi. Kurva energi asimetri dengan menggunakan parameter set G2 paling *stiff* diantara parameter set lainnya dan kurva binodalnya pun mempunyai tekanan kritis yang paling rendah.

Hasil seperti ini sudah dihitung pada penelitian sebelumnya menggunakan



Gambar 3.10: Kurva binodal menggunakan beberapa parameter set yang berbeda.

model yang berbeda. Jun Xu[1] membandingkan kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan kurva binodal dengan menggunakan model MID, MDI, dan eMIDY. Dutra [12] membandingkan kurva binodal dengan menggunakan parameter set NL3, TM1, TW, SIII, SLy230a, dan PRC45.

Kurva kestabilan mekanik dan kimia menggunakan model yang dihitung Jun Xu[1] pada $T=10$ MeV tidak mempunyai perbedaan signifikan. Hal ini konsisten dengan hasil penelitian ini yaitu kurva kestabilan mekanik dan kimia tidak mempunyai perbedaan jauh dengan menggunakan parameter set dari tabel 2.1.

Perbedaan kurva binodal menggunakan parameter set Dutra[12] berhubungan dengan perbedaan pada kurva energi simetri. Hal ini juga ditunjukkan pada penelitian ini bahwa perbedaan kurva-kurva binodal menggunakan parameter set dari tabel 2.1 terkait dengan kurva energi simetri yang berbeda.

Bab 4

Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan bab 3, beberapa hal yang penting dari efek temperatur pada kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa yang disimpulkan sebagai berikut:

- Daerah kestabilan mekanik dan kimia makin besar dengan meningkatnya temperatur.
- Meningkatnya temperatur memungkinkan sistem dengan fraksi proton yang lebih besar menjadi stabil.
- Meningkatnya temperatur menggeser kurva binodal ke arah fraksi proton membesar dan menyebabkan luasnya mengecil.

Penelitian ini membandingkan kurva kestabilan mekanik, kestabilan kimia, dan koeksistensi fasa pada temperatur tertentu menggunakan parameter set G2, FSUGold, FSUZ00, FSUZ03, dan FSUZ06. Hal-hal yang penting dari hasil pada bab 3 yang dapat disimpulkan adalah

- Dari beberapa model yang dicoba, tidak terdapat perbedaan yang signifikan pada kurva kestabilan mekanik dan kimia.
- Perbedaan kurva binodal pada model yang digunakan berhubungan dengan efek isospin pada tiap model.

Lampiran A

A.1 Mendapatkan Hamiltonian

Persamaan keadaan pada $T \neq 0$ dengan menggunakan model Walecka diperumum. Untuk mendapatkan Hamiltonian, kita mulai dari kerapatan langragian sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}m_\sigma^2\Phi^2 - \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M}\Phi^3 - \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2}\Phi^4 + \frac{\zeta g_\omega^2}{24}V_0^4 + \frac{\xi}{24}b^4 + \frac{m_\omega^2}{2}V_0^2 \\ & + \frac{\eta_1 g_\sigma m_\omega^2}{2M}\Phi V_0^2 + \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M}\Phi^2 V_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2}b^2 + \frac{\eta_\rho g_\sigma m_\rho^2}{2M}\Phi b^2 + \frac{\bar{\alpha}'_2}{2}\Phi^2 b^2 \\ & + \frac{\bar{\alpha}'_3}{2}V_0^2 b^2 + \bar{\psi} \left[i\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_0 g_\omega V_0 - M^* - \frac{1}{2}\tau_3 g_\rho b \right] \psi. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Dengan menggunakan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\bar{\psi} \gamma_0,$$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - \mathcal{L},$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & 0 - i\bar{\psi} \gamma_0 \dot{\psi} + i\bar{\psi} \gamma_0 \dot{\psi} + \bar{\psi} \left[-i\gamma_0 \alpha \cdot \nabla + \gamma_0 g_\omega V_0 + M^* + \frac{1}{2}\tau_3 g_\rho b \right] \psi \\ & - \left(-\frac{1}{2}m_\sigma^2\Phi^2 - \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M}\Phi^3 - \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2}\Phi^4 + \frac{\zeta g_\omega^2}{24}V_0^4 + \frac{\xi}{24}b^4 \right. \\ & + \frac{m_\omega^2}{2}V_0^2 + \frac{\eta_1 g_\sigma}{2M}\Phi V_0^2 + \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M}\Phi^2 V_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2}b^2 + \frac{\eta_\rho g_\sigma}{2M}\Phi b^2 + \\ & \left. \frac{\bar{\alpha}'_2}{2}\Phi^2 b^2 + \frac{\bar{\alpha}'_3}{2}V_0^2 b^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dimana ψ adalah dublet dalam ruang isospin

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{bmatrix},$$

untuk pengkuantisasian, dilakukan pendekatan medan rata-rata sebagai

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \hat{\psi}, \\ V_0 &\rightarrow \langle \hat{V}_0 \rangle = V_0, \\ \Phi_0 &\rightarrow \langle \hat{\Phi}_0 \rangle = \Phi_0, \\ b_0 &\rightarrow \langle \hat{b}_0 \rangle = b_0, \end{aligned}$$

dimana ekspansi $\hat{\psi}$ dalam operator anihilasi dan kreasi sebagai

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_p &= \sum_{k\lambda} \left[U(k\lambda) \hat{A}_p - V(k\lambda) \hat{B}_p^\dagger \right], \\ \hat{\psi}_n &= \sum_{k\lambda} \left[U(k\lambda) \hat{A}_n - V(k\lambda) \hat{B}_n^\dagger \right]. \end{aligned}$$

Dari sifat spinor Dirac,

$$U^\dagger(k_1 \lambda_1) U(k_2 \lambda_2) = \delta_{k_1 k_2} \delta_{\lambda_1 \lambda_2},$$

$$V^\dagger(k_1 \lambda_1) V(k_2 \lambda_2) = -\delta_{k_1 k_2} \delta_{\lambda_1 \lambda_2},$$

dan persamaannya

$$[-i\alpha \cdot \nabla + M^*] U(k\lambda) = (k^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} U(k\lambda),$$

$$[-i\alpha \cdot \nabla + M^*] V(k\lambda) = -(k^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} V(k\lambda),$$

maka diperoleh:

$$\hat{\psi} \hat{\psi} = \hat{\rho}_p + \hat{\rho}_n,$$

dan

$$\hat{\psi}\tau_3\hat{\psi} = \hat{\rho}_p - \hat{\rho}_n,$$

dimana untuk proton

$$\hat{\rho} = \sum_k \left[\hat{A}_p^\dagger \hat{A}_p - \hat{B}_p^\dagger \hat{B}_p \right],$$

dan untuk netron analog, hanya indeks p diganti menjadi indeks n, juga

$$\begin{aligned} \hat{\psi} [-i\beta\alpha \cdot \nabla + M^*] \hat{\psi} &= \frac{1}{V} \sum_k (k^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} \left[\hat{A}_p^\dagger \hat{A}_p - \hat{B}_p^\dagger \hat{B}_p \right] + \\ &\quad \frac{1}{V} \sum_k (k^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} \left[\hat{A}_n^\dagger \hat{A}_n - \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n \right], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

dengan mensubstitusi pers A.3 kedalam hamiltonian

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \left(\frac{1}{2} m_\sigma^2 \Phi^2 + \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M} \Phi^3 + \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2} \Phi^4 - \frac{\zeta g_\omega^2}{24} V_0^4 - \right. \\ &\quad \left. \frac{\xi}{24} b^4 - \frac{m_\omega^2}{2} V_0^2 - \frac{\eta_1 g_\sigma}{2M} \Phi V_0^2 - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M} \Phi^2 V_0^2 - \frac{m_\rho^2}{2} b^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta_\rho g_\sigma}{2M} \Phi b^2 - \frac{\bar{\alpha}'_2}{2} \Phi^2 b^2 - \frac{\bar{\alpha}'_3}{2} V_0^2 b^2 \right) + \\ &\quad g_\omega V_0 (\hat{\rho}_p + \hat{\rho}_n) + \frac{1}{2} g_\rho b (\hat{\rho}_p - \hat{\rho}_n) \\ &\quad + \frac{1}{V} \sum_k (k^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} \left[\hat{A}_p^\dagger \hat{A}_p - \hat{B}_p^\dagger \hat{B}_p \right] + \\ &\quad + \frac{1}{V} \sum_k (k^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} \left[\hat{A}_n^\dagger \hat{A}_n - \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n \right]. \end{aligned}$$

Jika kita definisikan

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv \left(\frac{1}{2} m_\sigma^2 \Phi^2 + \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M} \Phi^3 + \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2} \Phi^4 - \frac{\zeta g_\omega^2}{24} V_0^4 - \right. \\ &\quad \left. \frac{\xi}{24} R^4 - \frac{m_\omega^2}{2} V_0^2 - \frac{\eta_1 g_\sigma}{2M} \Phi V_0^2 - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M} \Phi^2 V_0^2 - \frac{m_\rho^2}{2} b^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta_\rho g_\sigma}{2M} \Phi b^2 - \frac{\bar{\alpha}'_2}{2} \Phi^2 b^2 - \frac{\bar{\alpha}'_3}{2} V_0^2 b^2 \right) \end{aligned}$$

maka operator Hamiltonian dapat ditulis secara ringkas sebagai

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \mathcal{D} + \frac{1}{V} \sum_k (k^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} \left[\hat{A}_p^\dagger \hat{A}_p - \hat{B}_p^\dagger \hat{B}_p \right] + \\ &\frac{1}{V} \sum_k (k^2 + M^{*2})^{\frac{1}{2}} \left[\hat{A}_n^\dagger \hat{A}_n - \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n \right] + \\ &g_\omega V_0 (\hat{\rho}_p + \hat{\rho}_n) + \frac{1}{2} g_\rho b (\hat{\rho}_p - \hat{\rho}_n).\end{aligned}$$

A.2 Kerapatan Energi

kemudian kerapatan Hamiltonian digunakan untuk menghitung fungsi partisi *grand canonic* sebagai berikut

$$\begin{aligned}Z_g &= \sum_{n_1 \dots n_\infty} \langle n_i \bar{n}_i | e^{-\beta(H - \mu_p B_p - \mu_n B_n)} | n_i \bar{n}_i \rangle \sum_{\bar{n}_1 \dots \bar{n}_\infty} \langle \bar{p}_i \bar{p}_i | e^{-\beta(H - \mu_p B_p - \mu_n B_n)} | \bar{p}_i \bar{p}_i \rangle \\ &= \exp\{-\beta V \mathcal{D}\} \times \\ &\prod_i \sum_{p_i} \langle p_i | e^{-\beta(E^* + g_\omega V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b - \mu_p) n_p} | p_i \rangle \times \\ &\prod_i \sum_{\bar{p}_i} \langle \bar{p}_i | e^{-\beta(E^* + g_\omega V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b + \mu_p) n_p} | \bar{p}_i \rangle \times \\ &\prod_i \sum_{n_i} \langle n_i | e^{-\beta(E^* + g_\omega V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b - \mu_n) n_n} | n_i \rangle \times \\ &\prod_i \sum_{\bar{n}_i} \langle \bar{n}_i | e^{-\beta(E^* + g_\omega V_0 + \frac{1}{2} g_\rho b + \mu_n) n_n} | \bar{n}_i \rangle ,\end{aligned}$$

dimana V volume sistem, μ_p/μ_n adalah potensial kimia proton/netron. $n_i/p_i, \bar{n}_i/\bar{p}_i$ bilangan okupansi neutron/proton dan antineutron/proton ke i .

Karena tingkat-tingkat energi dari Fermion hanya mungkin terisi 1 atau 0, maka Z_g dapat disederhankan menjadi :

$$\begin{aligned}Z_g &= \exp\{-\beta V \mathcal{D}\} \times \\ &\prod \{1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}\} \prod \{1 + e^{-\beta(E^* + \mu_p^*)}\} \times \\ &\prod \{1 + e^{-\beta(E^* - \mu_n^*)}\} \prod \{1 + e^{-\beta(E^* + \mu_n^*)}\},\end{aligned}$$

dimana efektif potensial kimia μ_p^* dan neutron μ_n^* didefinisikan sebagai :

$$\mu_p^* = \mu_p - g_\omega V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b \quad \mu_n^* = \mu_n - g_\omega V_0 - \frac{1}{2} g_\rho b,$$

Dari sini kita peroleh potensial termodinamika sebagai

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \frac{-1}{\beta} \ln Z_g \\
 &= V\mathcal{D} + \frac{-1}{\beta} \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}) + \frac{-1}{\beta} \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_p^*)}) \\
 &\quad \frac{-1}{\beta} \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_n^*)}) + \frac{-1}{\beta} \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_n^*)}). \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

Sehingga kerapatan energi dapat dihitung sebagai berikut:

$$\mathcal{E} = \frac{\partial(\beta\Omega)}{V\partial\beta} + \mu_p\rho_p + \mu_n\rho_n,$$

sedangkan

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\beta\Omega)}{\partial\beta} &= V\mathcal{D} + \sum n_p(E^* - \mu_p^*) + \sum \bar{n}_p(E^* + \mu_p^*) + \\
 &\quad \sum n_n(E^* - \mu_n^*) + \sum \bar{n}_n(E^* + \mu_n^*).
 \end{aligned}$$

dimana $\rho_p = \frac{1}{V} \sum (n_p - \bar{n}_p)$ dan $\rho_n = \frac{1}{V} \sum (n_n - \bar{n}_n)$ sedangkan distribusi fermi untu p,n dan antipartikelnya adalah:

$$\begin{aligned}
 n_p &= \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* - \mu_p^*)}} & \bar{n}_p &= \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* + \mu_p^*)}}, \\
 n_n &= \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* - \mu_n^*)}} & \bar{n}_n &= \frac{1}{1 + e^{\beta(E^* + \mu_n^*)}}.
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh kerapatan energi \mathcal{E} sebagai

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \mathcal{D} + \frac{1}{V} \sum n_p(E^* - \mu_p^* + \mu_p) + \frac{1}{V} \sum \bar{n}_p(E^* - \mu_p^* - \mu_p) + \\
&\quad \frac{1}{V} \sum n_n(E^* - \mu_n^* + \mu_n) + \frac{1}{V} \sum \bar{n}_n(E^* - \mu_n^* - \mu_n) \\
&= \mathcal{D} + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^* (\bar{n}_p + n_p + n_n + \bar{n}_n) + \\
&\quad \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{g_\rho b}{2} \left((n_p - \bar{n}_p) - (n_n - \bar{n}_n) \right) + \\
&\quad \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k g_\omega V_0 \left((n_p - \bar{n}_p) + (n_n - \bar{n}_n) \right) \\
&= \mathcal{D} + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^* (\bar{n}_p + n_p + n_n + \bar{n}_n) \\
&\quad + g_\omega V_0 (\rho_p + \rho_n) + \frac{g_\rho b}{2} (\rho_p - \rho_n) \\
&= \left(\frac{1}{2} m_\sigma^2 \Phi^2 + \frac{\kappa_3 g_\sigma m_\sigma^2}{6M} \Phi^3 + \frac{g_\sigma^2 \kappa_4 m_\sigma^2}{24M^2} \Phi^4 - \frac{\zeta g_\omega^2 V_0^4}{24} - \frac{\xi}{24} b^4 - \right. \\
&\quad \left. \frac{m_\omega^2}{2} V_0^2 - \frac{\eta_1 g_\sigma}{2M} \Phi V_0^2 - \frac{\eta_2 g_\sigma^2}{4M} \Phi^2 V_0^2 - \frac{m_\rho^2}{2} b^2 - \frac{\eta_\rho g_\sigma}{2M} \Phi b^2 - \frac{\bar{\alpha}'_2}{2} \Phi^2 b^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{\alpha}'_3}{2} V_0^2 b^2 \right) + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^* (\bar{n}_p + n_p + n_n + \bar{n}_n) \\
&\quad + g_\omega V_0 (\rho_p + \rho_n) + \frac{g_\rho b}{2} (\rho_p - \rho_n). \tag{A.5}
\end{aligned}$$

A.3 Tekanan

Tekanan dapat dihitung melalui relasi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{\Omega}{V} \\
&= -\mathcal{D} + \frac{1}{\beta V} \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}) + \frac{1}{\beta V} \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_p^*)}) + \tag{A.6} \\
&\quad \frac{1}{\beta V} \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_n^*)}) + \frac{1}{\beta V} \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_n^*)}) \\
&= -\mathcal{D} + \frac{\gamma}{\beta (2\pi)^3} \int d^3k \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}) + \\
&\quad \frac{\gamma}{\beta (2\pi)^3} \int d^3k \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_p^*)}) + \\
&\quad \frac{\gamma}{\beta (2\pi)^3} \int d^3k \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_n^*)}) + \\
&\quad \frac{\gamma}{\beta (2\pi)^3} \int d^3k \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_n^*)}). \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Dengan menyederhanakan integrasi $I = \int k^2 dk d\Omega \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)})$ dengan integrasi partial

$$\begin{aligned} dV &= k^2 dk, \\ V &= \frac{1}{3} k^3, \\ U &= \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}), \\ dU &= \frac{e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}}{1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}} \frac{\beta k}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} dk \\ &= -n_p \frac{\beta k}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} dk, \end{aligned}$$

dan

$$I = \left[\frac{1}{3} k^3 \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}) \right]_0^\infty + \int \frac{1}{3} k^3 n_p \frac{\beta k}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} dk d\Omega,$$

juga bisa dibuktikan bahwa $\left[\frac{1}{3} k^3 \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}) \right]_0^\infty = 0$, maka

$$I = \int \frac{1}{3} k^2 n_p \frac{\beta}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} d^3 k.$$

Sehingga tekanan p dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} p &= -\mathcal{D} + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{3} k^2 n_p \frac{1}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} d^3 k + \\ &\quad \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{3} k^2 \bar{n}_p \frac{1}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} d^3 k + \\ &\quad \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{3} k^2 n_n \frac{1}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} d^3 k + \\ &\quad \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{3} k^2 \bar{n}_n \frac{1}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} d^3 k \\ &= -\mathcal{D} + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{1}{3} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} (n_p + \bar{n}_p + n_n + \bar{n}_n). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.4 Entropi

Entropi density didapat dari $\mathcal{S} = \frac{S}{V} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial T} &= 0 + \\
&-k_b \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}) - k_b \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_p^*)}) \\
&-k_b \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_n^*)}) - k_b \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_n^*)}) \\
&-\frac{1}{\beta} \sum \frac{e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}}{1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}} (E^* - \mu_p^*) \frac{1}{k_b T^2} \\
&-\frac{1}{\beta} \sum \frac{e^{-\beta(E^* + \mu_p^*)}}{1 + e^{-\beta(E^* + \mu_p^*)}} (E^* + \mu_p^*) \frac{1}{k_b T^2} \\
&-\frac{1}{\beta} \sum \frac{e^{-\beta(E^* - \mu_n^*)}}{1 + e^{-\beta(E^* - \mu_n^*)}} (E^* - \mu_n^*) \frac{1}{k_b T^2} - \frac{1}{\beta} \sum \frac{e^{-\beta(E^* + \mu_n^*)}}{1 + e^{-\beta(E^* + \mu_n^*)}} (E^* + \mu_n^*) \frac{1}{k_b T^2} \\
&= -k_b \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_p^*)}) - k_b \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_p^*)}) \\
&-k_b \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* - \mu_n^*)}) - k_b \sum \ln(1 + e^{-\beta(E^* + \mu_n^*)}) \\
&-\sum n_p (E^* - \mu_p^*) k_b \beta - \sum \bar{n}_p (E^* + \mu_p^*) k_b \beta \\
&-\sum n_n (E^* - \mu_n^*) k_b \beta - \sum \bar{n}_n (E^* + \mu_n^*) k_b \beta
\end{aligned}$$

4 suku pertama terdapat pada persamaan A.6 dan 4 suku lainnya terdapat pada persamaan A.5. Maka persamaan di atas dapat disederhanakan menggunakan cara penyederhanaan persamaan A.6 dan A.5

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial T} &= -k_b \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{1}{3} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} (n_p + \bar{n}_p + n_n + \bar{n}_n) \\
&-\frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3 k n_p (E^* - \mu_p^*) k_b \beta - \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \bar{n}_p (E^* + \mu_p^*) k_b \beta \\
&-\frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3 k n_n (E^* - \mu_n^*) k_b \beta - \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \bar{n}_n (E^* + \mu_n^*) k_b \beta,
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial T} \\
&= k_b \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{1}{3} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} (n_p + \bar{n}_p + n_n + \bar{n}_n) \\
&+\frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k n_p (E^* - \mu_p^*) k_b \beta + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \bar{n}_p (E^* + \mu_p^*) k_b \beta \\
&+\frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k n_n (E^* - \mu_n^*) k_b \beta + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3 k \bar{n}_n (E^* + \mu_n^*) k_b \beta.
\end{aligned}$$

Lampiran B

Termodinamika

B.1 Kesetimbangan

Misalkan ada sistem tertutup yang terdiri dari 2 buah subsistem. Tiap subsistem dapat terjadi perpindahan panas, perubahan volume, dan aliran partikel dari subsistem 1 ke subsistem 2. Entropi sistemnya adalah.

$$dS = \frac{1}{T^{(1)}}dU^{(1)} + \frac{P^{(1)}}{T^{(1)}}dV^{(1)} - \frac{\mu^{(1)}}{T^{(1)}}dN^{(1)} + \frac{1}{T^{(2)}}dU^{(2)} + \frac{P^{(2)}}{T^{(2)}}dV^{(2)} - \frac{\mu^{(2)}}{T^{(2)}}dN^{(2)}, \quad (\text{B.1})$$

apabila jumlah energi, volume dan jumlah partikel dalam kedua sistem konstan, maka

$$dU^{(2)} = -dU^{(1)},$$

$$dN^{(2)} = -dN^{(1)},$$

$$dV^{(2)} = -dV^{(1)},$$

Sehingga,

$$dS = \left(\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} \right) dU^{(1)} + \left(\frac{P^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{P^{(2)}}{T^{(2)}} \right) dV^{(1)} - \left(\frac{\mu^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{\mu^{(2)}}{T^{(2)}} \right) dN^{(1)}, \quad (\text{B.2})$$

keadaan setimbang dipenuhi jika $dS = 0$, dan karena dU , dV , dan dN adalah

variabel saling bebas, maka keadaan setimbang akan dipenuhi jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}\frac{1}{T^1} &= \frac{1}{T^2}, \\ \frac{P^1}{T^1} &= \frac{P^2}{T^2}, \\ \frac{\mu^1}{T^1} &= \frac{\mu^2}{T^2}.\end{aligned}$$

Jadi keadaan setimbang tercapai bila potensial kimia, tekanan, temperatur kedua sistem bernilai sama.

B.2 Potensial Kimia

Arah aliran materi bisa dianalisis dengan melihat persamaan B.2 . Pada T dan P yang konstan dengan persamaan sebagai

$$dS = \frac{\mu^{(2)} - \mu^{(1)}}{T} dN^{(1)}, \quad (\text{B.3})$$

jika $\mu^{(2)}$ lebih besar dari $\mu^{(1)}$, $dN^{(1)}$ akan positif karena dS harus selalu positif. $dN^{(1)}$ positif menyatakan materi sistem 1 bertambah atau lebih besar. Jadi materi akan bergerak dari potensial kimia lebih besar ke lebih rendah.

B.3 Kestabilan

Proses termodinamika selalu diikuti oleh bertambahnya entropi. Maka suatu sistem yang dikarakteristikan oleh persamaan fundamental entropi akan berada pada titik stabil bila nilai entropi total setelah terjadi proses lebih kecil daripada sebelum proses.

Misal ada suatu sistem terdiri dari 2 subsistem yang masing-masing mempunyai nilai entropi S . Misalkan terjadi proses subsistem 1 mengembang dan subsistem 2 menyusut. Maka sistem akan stabil bila total entropi subsistem 1 yang mengembang ditambah subsistem 2 yang menyusut lebih kecil nilainya dibandingkan total entropi tiap subsistem sebelum terjadi proses. Secara matematis hal

ini dapat dinyatakan sebagai [6]

$$\begin{aligned}
 S_1(U, V + \Delta V, N_i) + S_2(U, V - \Delta V, N_i) &\leq 2S(U, V, N_i), \\
 \text{untuk } \Delta V &\rightarrow 0, \\
 \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} &\leq 0.
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Dengan kata lain, sistem stabil bila entropi sistem merupakan fungsi konkaf (cekung ke bawah) atau fungsi mempunyai gradien dengan nilai negatif. Untuk proses dengan melibatkan 2 variabel, misalkan sistem 2 jenis partikel dimana terjadi aliran partikel. Kriteria entropi sebagai fungsi konkaf (cekung ke bawah), secara matematis disyaratkan,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 S}{\partial N_1^2} \leq 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial N_2^2} \leq 0, \\
 \frac{\partial^2 S}{\partial N_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial N_2^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial N_1 N_2} \frac{\partial^2 S}{\partial N_2 N_1} > 0.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

B.3.1 Kestabilan Mekanik

Sistem dikatakan stabil secara **mekanik**, jika terjadi perubahan **volume** sistem maka sistem akan kembali ke keadaan awal. Untuk mengetahui kestabilan mekanik, maka hanya perlu diketahui fluktuasi perubahan entropi terhadap perubahan **volume** saja. Dari persamaan fundamental entropi

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu_1}{T}dN_1 - \frac{\mu_2}{T}dN_2 \tag{B.6}$$

Berdasarkan syarat stabil persamaan B.4, Maka untuk mengetahui kondisi stabilitas mekanik perlu dievaluasi turunan kedua entropi terhadap volume.

$$d^2S = \frac{\partial P}{\partial V} \Big|_{T, N} \leq 0$$

jika dinyatakan dalam densitas, dimana densitas berbanding terbalik terhadap volume, maka kriterianya dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{T, N} \geq 0. \tag{B.7}$$

B.3.2 Kestabilan Kimia

Sistem dikatakan stabil secara **kimia**, jika tidak terjadi lagi perubahan **jumlah partikel** pada sistem. Untuk mengetahui kestabilan kimia, maka perlu diketahui hanya fluktuasi atau perubahan entropi terhadap perubahan **jumlah partikelnya**. Dari persamaan fundamental entropi B.6, perlu dievaluasi turunan kedua entropi terhadap jumlah partikel. Untuk sistem dengan 2 jenis partikel maka syarat entropi konkaf dipenuhi jika :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial N_1^2} < 0, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial N_2^2} < 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial N_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial N_2^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial N_1 N_2} \frac{\partial^2 S}{\partial N_2 N_1} > 0,$$

sehingga dengan menggunakan persamaan B.6 didapat,

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial N_1} > 0, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial N_2} > 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial N_1} \frac{\partial \mu_2}{\partial N_2} - \frac{\partial \mu_1}{\partial N_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial N_1} > 0. \quad (\text{B.10})$$

Untuk kasus khusus dimana,

$$N_1 + N_2 = \text{konstan},$$

$$dN_1 = -dN_2 \quad \text{dan} \quad dN_2 = -dN_1.$$

Dengan mensubstitusi dN_1 ke persamaan B.6 maka diperoleh

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \left(-\frac{\mu_1}{T} + \frac{\mu_2}{T} \right) dN_2,$$

kemudian dengan mensubstitusikan syarat B.7 didapat

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial N_2^2} &= \frac{\partial \mu_1}{\partial N_2} - \frac{\partial \mu_2}{\partial N_2} < 0, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial N_2} &< \frac{\partial \mu_2}{\partial N_2}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Begitu juga bila kita mensubstitusi dN_2 ke persamaan B.6,

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \left(\frac{\mu_1}{T} - \frac{\mu_2}{T} \right) dN_1,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial N_1^2} &= -\frac{\partial \mu_1}{\partial N_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial N_1} < 0, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial N_1} &< \frac{\partial \mu_1}{\partial N_1}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Bila kondisi B.10 dan B.11 terpenuhi, maka kondisi B.9 juga terpenuhi . Dengan demikian untuk kasus khusus dimana $N_1 + N_2 = \text{konstan}$, kondisi B.9 secara otomatis terpenuhi. Jadi syarat kestabilan kimia adalah

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial N_1} > 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial N_2} > 0$$

atau

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho_1} > 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} > 0.$$

B.4 Kondisi Gibbs

Syarat dimana fasa dapat exist bersama-sama dapat dikarakteristikan berdasarkan fungsi Gibbs. Misal suatu sistem terdiri dari 2 partikel dan masing-masing mempunyai fase cair dan gas, maka fungsi Gibbs bisa ditulis

$$G = N_1^L g_1^L + N_1^G g_1^G + N_2^L g_2^L + N_2^G g_2^G, \quad (\text{B.13})$$

$$N_1^L + N_1^G = \text{konstant}, \quad \text{dan} \quad N_2^L + N_2^G = \text{konstant}, \quad (\text{B.14})$$

dimana N adalah jumlah molekul dan g adalah fungsi Gibbs per molekul. Syarat sistem stabil berdasarkan fungsi Gibbs adalah fungsi Gibbs harus **minimum**.

$$\begin{aligned} dG &= g_1^L dN_1^L + g_1^G dN_1^G + g_2^L dN_2^L + g_2^G dN_2^G = 0, \\ (g_1^L - g_1^G) dN_1^L &= 0, \\ (g_2^L - g_2^G) dN_2^L &= 0, \end{aligned}$$

karena $dN_1^L = -dN_1^G$ dan $dN_2^L = -dN_2^G$. Jadi kondisi yang dibutuhkan untuk fasa dapat exist bersama sama yaitu $g_1^L = g_1^G$ dan $g_2^L = g_2^G$

Misalkan $g_1^L < g_1^G$ dan $g_2^L < g_2^G$, maka fungsi Gibbs menjadi

$$G = N_1^L g_1^L + N_2^L g_2^L, \quad (\text{B.15})$$

karena sistem stabil jika fungsi Gibbs minimum. Dalam kasus ini tidak terjadi fase yang exist bersama-sama, karena fungsi Gibbs minimum bila semua partikel yang berfase gas berubah menjadi fasa liquid. Jadi syarat terjadinya sistem dengan beda fase yaitu $g_1^L = g_1^G$ dan $g_2^L = g_2^G$.

Dari relasi fungsi Gibbs yaitu

$$dG = -SdT + VdP + \sum_i \mu_i N_i$$

maka dapat kita simpulkan

$$\begin{aligned}\mu_i &= \left(\frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,P}, \\ \mu_i &= g_i.\end{aligned}$$

Jadi syarat sistem 2 jenis partikel dengan pada fasa yang berbeda berada dalam kesetimbangan adalah

$$\begin{aligned}\mu_1^L &= \mu_1^G, \\ \mu_2^L &= \mu_2^G, \\ T_1 &= T_2, \\ P_1 &= P_2.\end{aligned}$$

Daftar Acuan

- [1] Jun Xu, Lie-Wen, Bao-An Li, Hong-Ru Ma, Phys. Rev. C 70 (2008) 014302
- [2] P. WANG, Phys. Rev. C 61 (2000) 034904
- [3] Horst Muller, Brian D. Serot, Phys. Rev. C 52 (1995) 4
- [4] Raj Kumar, B. K. Agrawal, and Shashi K. Dhiman, Phys. Rev. C 74 (2006) 034323
- [5] J.D. Walecka, **Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics**. Oxford University Press. (1995).
- [6] Herbert B. Callen, **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. John Wiley & Son. (1985).
- [7] M. F. Rivet, B. Borderie, R. Bougault, P. Desesquelles, E. Galichet, B. Guiot, N. Le Neindre, M. Parlog, G. Tabacaru, and J.P. Wieleczko, arXiv:nucl-ex/0501008 (2004)
- [8] Philippe CHOMAZ, arXiv:nucl-ex/0410024v1 (2004).
- [9] J. Piekarewicz, PHYSICAL REVIEW C 76 (2007) 064310
- [10] Brian D. Serot and John Dirk Walecka, International Journal of Modern Physics E, vol. 6, No. 4 (1997)
- [11] Federick Reif, **Fundamental of Statistical and Thermal Physics**, McGraw-Hill, (1965)
- [12] M. Dutra, O. Lourenco, A. Delfino, J.S. Sa Martins, C. Providencia, S.S. Avancini, and D.P. Menezes, Phys. Rev. C 77 (2008) 035201