

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

Dalam Bab ini akan dijelaskan tinjauan pustaka yang mendasari cara kerja alat *Electric Capasitan Volume Tomography* (ECVT) dan juga akan di paparkan penjelasan mengenai tomografi, permulaan hingga perkembangannya sampai saat ini.

2.1 Teori Medan Elektromagnet

Electrical Capasitan Volume Tomography (ECVT) adalah sebuah alat yang dapat melihat apa yang tidak dapat dilihat langsung oleh mata. Di dalamnya terdapat kaidah-kaidah tentang elektromagnetik dimana energi potensial berperan dalam penentuan kapasitan suatu sensor yang berperan sangat penting untuk mendapatkan citra. Berikut akan dijelaskan sebagian teori-teori dasar tentang medan elektromagnet yang mendasari kerja alat ini.

2.1.1 Teorema Gauss

Misalkan sebaran muatan terdiri dari N muatan titik q_1, q_2, \dots, q_N yang berturut-turut terletak di titik r_1, r_2, \dots, r_N , dan sebaran muatan volum yang dicirikan oleh rapat muatan $\rho(r')$ dalam volum V dan sebaran muatan permukaan yang dicirikan oleh rapat muatan permukaan $\sigma(r')$ pada permukaan S . Jika suatu muatan uji q diletakkan di titik r , maka muatan uji akan mengalami gaya \vec{F} yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} \vec{F} = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{r - r'}{|r - r'|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \rho(r') dv' \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{r - r'}{|r - r'|^3} \sigma(r') da' \end{aligned} \quad (2.1)$$

Yang disebabkan oleh sebaran muatan yang telah ditentukan. Medan listrik di r adalah limit dari perbandingan antara gaya ini terhadap muatan uji q . karena angka banding ini tidak tergantung pada q , maka medan listrik di titik r adalah

$$\begin{aligned}\vec{E}(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{r-r'}{|r-r'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{r-r'}{|r-r'|^3} \rho(r') dv' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{r-r'}{|r-r'|^3} \sigma(r') da'\end{aligned}\quad (2.2)$$

Persamaan diatas bersifat sangat umum, dalam banyak hal satu atau lebih sukunya tidak diperlukan.

Medan listrik dapat dihitung di setiap titik dalam ruang di sekitar sistem muatan atau sebaran muatan. Jadi $\vec{E} = \vec{E}(r)$ adalah fungsi titik vektor, atau medan vektor. Untuk dapat membantu membayangkan model medan listrik yang dikaitkan dengan sebaran muatan tertentu, Michael Faraday (1791-1867) memperkenalkan konsep garis gaya. Garis gaya adalah garis atau kurva rekaan yang digambarkan sedemikian rupa sehingga arahnya disebarkan titik merupakan arah medan listrik di titik itu.

Ada hubungan penting antara integral komponen normal medan listrik pada permukaan tertutup dengan muatan total yang dilingkupi permukaan itu. Hubungan ini, dikenal sebagai hukum gauss, dan sekarang akan dibahas secara lebih rinci. Medan listrik di titik r yang ditimbulkan oleh muatan titik q yang terletak di titik asal adalah

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}\quad (2.3)$$

Kita tinjau integral permukaan dari komponen normal medan listrik ini pada permukaan tertutup yang melingkupi titik asal, yang berarti juga melingkupi muatan q , integral ini adalah

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{r \cdot \mathbf{n}}{r^3} da\quad (2.4)$$

$(r/r) \cdot \mathbf{n} da$ adalah proyeksi da pada bidang yang tegak lurus r . bidang yang diproyeksikan dan dibagi oleh r^2 ini merupakan sudut ruang yang dilingkupi oleh da , yang ditulis sebagai $d\Omega$. Bagian luas permukaan pada bola S' yang pusatnya terdapat di titik asal dan jajarinya r' . selanjutnya dapat dituliskan

$$\oint_S \frac{r \cdot \mathbf{n}}{r^3} da = \oint_{S'} \frac{r' \cdot \mathbf{n}}{r'^3} da' = 4\pi,\quad (2.5)$$

Yang menunjukkan bahwa

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

Jika beberapa muatan titik q_1, q_2, \dots, q_N dilingkupi oleh permukaan tertutup S , maka medan listrik totalnya dapat dinyatakan dengan suku pertama persamaan (2.2). setiap muatan melingkupi suatu sudut ruang penuh (4π), sehingga persamaan (2.4) menjadi

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \quad (2.7)$$

Jika setiap bagian muatan $\rho \, dv$ dipandang sebagai muatan titik, maka bagian tersebut memberikan tambahan $\rho \, dv/\epsilon_0$ pada integral permukaan dari komponen garis normal medan listrik, asalkan terdapat didalam permukaan yang diintegrasikan. Oleh karena itu integral permukaan totalnya sama dengan jumlah semua unsur tambahan dalam bentuk itu yang disebabkan muatan yang terletak di dalam permukaan tersebut. Jadi jika S merupakan permukaan tertutup yang membatasi volum V , maka

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv \quad (2.8)$$

Persamaan (2.7) dan (2.8) dikenal sebagai hukum gauss. Ruas kiri persamaan tersebut, yaitu integral komponen garis normal listriknya pada permukaan S , kadang-kadang disebut fluks medan listrik pada permukaan S .

Hukum gauss dapat pula dinyatakan dalam bentuk lain dengan menggunakan teorema divergensi. Antara lain teorema divergensi yang menyatakan bahwa

$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \, dv \quad (2.9)$$

Jika teorema ini diterapkan pada integral permukaan dari komponen garis normal medan listrik E , maka diperoleh

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \vec{E} \, dv \quad (2.10)$$

Yang jika persamaan ini dimasukkan ke dalam persamaan (2.8), diperoleh

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) berlaku untuk semua jenis volum, yaitu untuk sebarang pilihan volum V . Hasil ini dapat dituliskan dalam bentuk lain yaitu

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.12)$$

Yang dapat dianggap sebagai bentuk diferensial dari hukum Gauss.

2.1.2 Koefisien Potensial, Koefisien Kapasitans dan Kapasitor

Sebagaimana kita ketahui bahwa jika curl suatu vektor sama dengan nol, maka vektor itu dapat dinyatakan sebagai gradient suatu skalar. Dengan demikian ada suatu fungsi skalar yang gradiennya merupakan medan listrik, sehingga tinggal mencari fungsi tersebut. Jadi, sekarang kita tahu bahwa ada suatu fungsi yang memenuhi

$$\vec{E}(r) = -\nabla\phi(r), \quad (2.13)$$

Namun kita masih harus mencari bentuk fungsi ϕ . Tanda minus lazim dimasukkan pada persamaan (2.13) sebagai konsekuensi dari persamaan tersebut untuk perhitungan selanjutnya. ϕ biasa disebut potensial listrik statik.

Energy potensial yang berkaitan dengan gaya konservatif sebarang dapat dituliskan sebagai

$$U(r) = - \int_{ref}^r F(r') \cdot dr' \quad (2.14)$$

Dengan $U(r)$ adalah energy potensial pada r . karena dalam listrik statik, $F = qE$, berarti bahwa jika dipilih titik acuan yang sama untuk potensial listrik-statik dan untuk energi potensial, maka potensial listrik statik sama saja dengan energi potensial per satuan muatan. Hal ini menekankan bahwa gagasan dengan menggunakan konsep persamaan (2.13) menekankan pentingnya potensial listrik statik dalam menentukan medan listrik statik.

Dalam sistem yang tersusun dari N penghantar, potensial salah satu penghantar itu diberikan oleh

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j, \quad (2.15)$$

Penurunan persamaan diatas dilakukan untuk N penghantar dalam ruang hampa udara. Meskipun demikian penurunan ini juga berlaku jika di dalam sistem itu terdapat dielektrik, selama dielektrik ini linier dan tidak mempunyai muatan luar. Koefisien p_{ij} merupakan potensial penghantar ke-i yang disebabkan oleh muatan satuan pada penghantar j. koefisien ini biasanya disebut *koefisien potensial*.

Sebagaimana kita ketahui energi listrik-statik suatu satuan sebaran muatan, dimana diluar suatu daerah batas rapat muatan berharga nol maka nilainya diperoleh dari persamaan

$$U = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_j \quad (2.16)$$

Dengan menggabungkan persamaan (2.14) dan (2.15) maka diperoleh persamaan

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_i Q_j. \quad (2.17)$$

Jika yang diubah hanya dQ_1 dan dengan memasukkan dQ_1 dari titik berpotensi nol, kita peroleh

$$dU = dW = \varphi_1 dQ_1 = \sum_{j=1}^N p_{1j} Q_j dQ_1. \quad (2.18)$$

Kegunaan koefisien p_{ij} dapat dilukiskan dengan contoh yang sederhana. Misalnya mencari potensial bola penghantar tak bermuatan dengan adanya muatan titik q pada jarak r dari pusat bola, dengan $r > R$, dan R adalah jejari bola penghantar. Muatan bola tersebut dianggap sebagai sistem dua penghantar, dan dalam hal ini kita gunakan kesamaan $p_{12} = p_{21}$. Jika bola diberi muatan (Q) dan 'titik'nya tidak bermuatan, maka potensial 'titik' itu adalah $Q/4\pi\epsilon_0 r$; dengan demikian

$$p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Jelas bahwa jika 'titik' mempunyai muatan q dan bola penghantar tidak bermuatan, maka potensial bola adalah $q/4\pi\epsilon_0 r$.

Persamaan (2.15) ini juga dapat digunakan untuk mencari Q_i , yaitu

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_j, \quad (2.19)$$

Dengan c_{ij} disebut koefisien kapasitans. Maksud sebenarnya dari persamaan (2.15), yang menyatakan setiap c dalam bentuk p_{ij} , dapat diperoleh misalnya dengan inverse matriks, dengan menggunakan determinan.

Dua penghantar yang dapat menyimpan muatan yang sama dan berlawanan tanda ($\pm Q$), dengan beda potensial diantaranya yang tidak bergantung apakah penghantar lain di dalam sistem itu bermuatan atau tidak membentuk sebuah *kapasitor*. Ketidaktergantungan pada muatan lain ini merupakan petunjuk bahwa salah satu pasangan penghantar itu terlindungi oleh yang lain, dengan kata lain, potensial tiap pasangan tersebut akibat adanya potensial lain, harus sama. Keadaan seperti itu dilukiskan seperti gambar (2.1) dibawah



Gambar 2.1 Asumsi model kapasitor

yang menunjukkan 1 dan 2 membentuk kapasitor. Umumnya, jika dua penghantar, yaitu 1 dan 2, membentuk suatu kapasitor, maka dapat kita tuliskan bahwa

$$\varphi_1 = p_{11}Q + p_{12}(-Q) + \varphi_x,$$

$$\varphi_2 = p_{12}Q + p_{22}(-Q) + \varphi_x, \quad (2.20)$$

Dengan $(\pm Q)$ adalah muatan yang disimpan dan φ_x potensial bersama yang diberikan oleh muatan lain.

Jika persamaan (2.20) dikurangkan, kita peroleh

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q \quad (2.21)$$

Jadi beda potensial diantara penghantar suatu kapasitor berbanding lurus dengan muatan yang disimpan, yaitu Q . nilai mutlak muatan pada salah satu penghantar disebut muatan pada kapasitor. Persamaan (2.21) dapat ditulis

$$Q = C \Delta\varphi \quad (2.22)$$

Dengan $C = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1}$ disebut kapasitans dari kapasitor. Dengan demikian jelaslah bahwa C adalah muatan yang disimpan persatuan beda potensial, dalam sistem *mks* C diukur dalam C/V , atau farad ($1F = 1 C/V$).

Dengan menggunakan hasil pada pasal sebelumnya dalam bab ini, energi kapasitor bermuatan dapat ditulis

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2}Q\Delta\varphi = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (2.23)$$

Medan listrik diantara lempeng sejajar adalah seragam kecuali untuk medan pada tepi lempeng (*fringing field*). Kapasitor lempeng sejajar yang ideal ialah yang jarak pisah lempengnya, yaitu d , jauh lebih kecil dibandingkan dengan ukuran lempeng, jadi dalam hal ini medan pada daerah tepi dapat diabaikan. Jika daerah diantara lempeng sejajar diisi dengan dielektrik yang permitifitasnya ϵ , maka persamaan untuk medan listrik diantara lempeng tersebut adalah sebagai berikut

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \sigma = \frac{Q}{\epsilon A} \quad (2.24)$$

dengan A adalah luas permukaan satu lempeng. Beda potensial $\Delta\varphi = Ed$. Oleh karena itu,

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon A}{d} \quad (2.25)$$

Adalah kapasitans kapasitor ini.

2.1.3 Persamaan Poisson

Semua hubungan dasar yang diperlukan disini telah dikembangkan pada pembahasan sebelumnya. Pertama, kita telah mengenal bentuk hukum Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Selanjutnya dalam medan statik murni, E dapat dinyatakan sebagai minus gradient dari potensial :

$$\vec{E}(r) = -\nabla\varphi(r)$$

Dengan menggabungkan dua persamaan diatas, maka kita peroleh

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.24)$$

Mudah bagi kita untuk menganggap divergensi dari gradient sebagai operator diferensial tunggal, $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$. Lambang yang terakhir ini disebut operator laplace:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.25)$$

Jelas bahwa operator Laplace merupakan operator diferensial skalar, dan persamaan (2.25) merupakan persamaan diferensial. Persamaan ini disebut *persamaan poisson*. Operator ∇^2 melibatkan pendiferensialan dalam hubungan dengan lebih satu peubah, oleh karena itu persamaan poisson merupakan persamaan diferensial parsial yang dapat diselesaikan setelah kita mengetahui kebergantungan fungsi $\rho(x, y, z)$ dan syarat-syarat batas yang sesuai.

Operator ∇^2 tidak mengacu pada sistem koordinat tertentu. Untuk menyelesaikan suatu persoalan yang khas, kita harus menuliskan ∇^2 dalam bentuk x, y, z atau r, θ, ϕ , dst. Bentuk-bentuk $\nabla^2\varphi$ dalam berbagai koordinat adalah sebagai berikut

Koordinat Cartesian:

$$\nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (2.26)$$

Koordinat bola :

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \quad (2.27)$$

Koordinat silinder

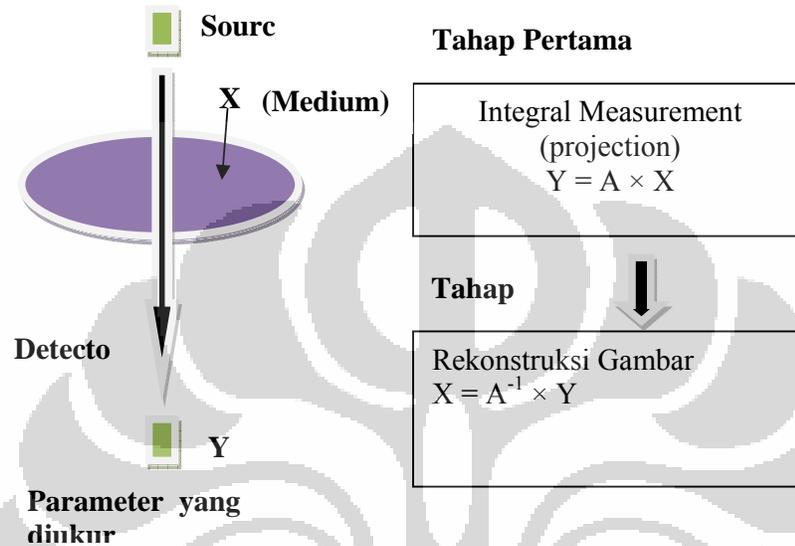
$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (2.28)$$

Perlu diperhatikan bahwa r dan θ dalam koordinat bola dengan r dan θ dalam koordinat silinder adalah berbeda. Dalam koordinat bola, r adalah harga vektor jejari dari titik asal dan θ adalah sudut polarnya. Dalam koordinat silinder, r adalah jarak tegak lurus dari sumbu silinder dan θ adalah sudut azimuth di sekitar sumbu silinder.

2.2 Tomografi

'Melihat tembus' keadaan dalam tubuh manusia tanpa harus melakukan operasi pertama kali berhasil setelah ditemukan Sinar-X oleh Rontgen pada tahun 1895. Dengan karakternya yang mampu menembus jaringan tubuh manusia Sinar-X membuat tubuh manusia yang tidak tembus cahaya menjadi 'transparan'. Film hasil Rontgen yang merupakan citra bayangan (proyeksi) dari objek yang dikenai Sinar-X pada prinsipnya sama dengan sebuah bayangan objek yang terbuat dari kaca pada pencahayaan dengan sinar matahari. Sifat ini dimanfaatkan di dunia kedokteran khususnya untuk melakukan visualisasi struktur tulang dan jaringan lainnya terhadap tubuh pasien untuk keperluan diagnosa. Diagnosa berdasarkan citra proyeksi langsung dengan Sinar-X dipakai di dunia kedokteran dan juga aplikasi lain untuk melakukan inspeksi tak merusak (*nondestructive testing*) selama hampir 100 tahun hingga ditemukannya teknologi pencitraan yang tidak hanya menghasilkan gambar bayangan, tetapi mampu melakukan rekonstruksi citra dalam obyek, seolah-olah seperti foto tembus ke dalam obyek. Teknologi ini disebut tomografi komputasi (*Xray Computed Tomography* (CT Scan)) yang ditemukan pertama oleh G.N. Hounsfield (Ingris) pada tahun 1972. Secara sederhana, pencitraan CT didasarkan pada formulasi matematis yang menyatakan bahwa apabila sebuah obyek 'dilihat' dari berbagai arah, gambar (citra) penampang dalam obyek tersebut bisa dihitung (atau "direkonstruksi"). Dengan demikian metode CT bisa dipisahkan menjadi dua proses: (1)

pengambilan data proyeksi melalui penyinaran dan pendeteksian Sinar-X dari berbagai penjuru, (2) proses rekonstruksi untuk memperoleh citra penampang obyek dari data proyeksi (Lihat Gambar 2.2).



Gambar 2.2 Proses tomography

CT merupakan metode untuk 'melihat tembus' kondisi dalam sebuah objek dengan melakukan pemetaan terhadap kerapatan jaringan berdasarkan intensitas penyerapannya terhadap energi Sinar-X. Citra yang dihasilkan oleh CT Sinar-X pada dasarnya adalah merupakan peta atenuasi (pelemahan) energi Sinar-X oleh jaringan. Struktur tulang mempunyai tingkat penyerapan energi yang lebih tinggi dibandingkan dengan struktur jaringan lain seperti daging atau otot, sehingga hasil CT sangat menonjolkan struktur tulang dibanding dengan struktur organ tubuh yang lain. Hampir bersamaan dengan ditemukannya CT Scan, berbagai teknologi pencitraan menggunakan mode lain juga dikembangkan untuk aplikasinya di dunia kedokteran seperti misalnya *Magnetic Resonance Imaging* (MRI), radiasi partikel nuklir (*positron emission tomography* (PET), dan juga pencitraan dengan gelombang akustik dan ultrasonic. Berbeda dengan CT Scan, pencitraan dengan MRI dilakukan dengan penerapan medan magnet yang sangat kuat (hingga 1.5 tesla, sekitar 30.000 kali kekuatan medan magnet bumi) terhadap tubuh pasien. Dengan medan magnet dari luar tersebut berbagai inti atom yang mempunyai sifat "magnetic moment" yang terdapat dalam tubuh pasien akan memancarkan signal frekuensi radio (rf). Signal rf ini kemudian dideteksi dengan

detektor rf dan direkonstruksi untuk mendapatkan peta konsentrasi atom tersebut. Sifat *magnetic moment* berbeda antara atom yang satu dengan yang lain, sehingga struktur jaringan tubuh pasien yang normal akan memberikan respon yang berbeda dengan jaringan yang terkena kanker. Sehingga sifat ini bisa digunakan untuk melakukan studi dan diagnosa terhadap kondisi fisiologi pasien. Prinsip PET adalah dengan melakukan pendeteksian terhadap photon yang dipancarkan pada peristiwa anihilasi antara positron dan elektron dari radionuklida yang diinjeksikan ke dalam tubuh pasien. Rekonstruksi terhadap data yang diperoleh dengan detektor sinar alpha akan menghasilkan peta 3 dimensi aktifitas anihilasi tersebut yang bisa dimanfaatkan untuk membedakan aktifitas fisiologi antara jaringan yang normal dan yang mengalami perubahan menjadi kanker.

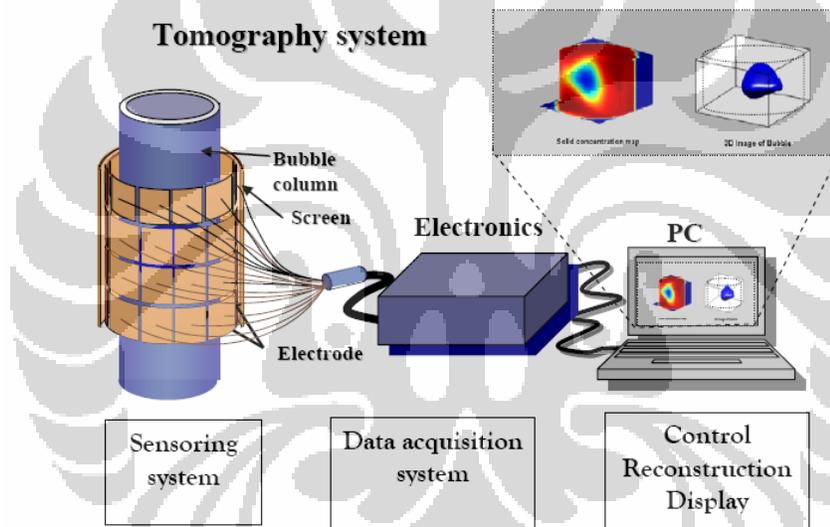
Tabel 2.1 menunjukkan beberapa mode tomografi yang dipakai dalam proses industri. Perbedaan teknik tomografi yang dipakai di proses industri dan kedokteran antara lain kalau di dunia kedokteran ketinggian resolusi menjadi sangat penting, maka pada proses kecepatan scanning menjadi sangat penting untuk bisa melakukan pencitraan objek yang umumnya mempunyai dinamika sangat tinggi. Dalam hal ini metode tomografi listrik (resistans maupun kapasitans) karena kecepatan scanningnya sangat tinggi (kapasitans bisa mencapai 0.1 ms, sedangkan resistans mampu mencapai kecepatan 1ms) mempunyai potensi yang sangat besar dan telah mengalami pertumbuhan yang cukup matur dalam aplikasinya di bidang industri.

Prinsip pencitraan	Resolusi (%)	Mode	Catatan
Radiasi Elektromagnetik	1	Optik	Cepat. Terbatas untuk benda transparan
		TeraHertz	Daya tembus yang cukup besar dibanding cahaya tampak
		Sinar-X, Sinar Gamma	Lambat. Mengandung radiasi
		Emisi positron MRI	Perlu label radiasi. Tidak on-line Cepat, Mahal
Akustik	3	Ultrasonik	Terbatasi oleh kecepatan suara. kompleks
Pengukuran Besaran Listrik	10	Kapasitans, konduktifitas, induksi	Cepat. Murah. Cocok untuk media kecil maupun besar.

Table 2.1 Mode tomografi untuk aplikasi diproses industri

2.2.1 Prinsip pencitraan tomografi

Pada prinsipnya sistem tomografi bisa dibagi menjadi tiga bagian seperti yang terlihat pada Gambar. 2.3 : (1) sensor yang mengelilingi obyek, (2) rangkaian listrik untuk melakukan akuisisi data proyeksi, dan (3) komputer untuk melakukan proses rekonstruksi dan penampilan hasil. Proses pengambilan data proyeksi adalah merupakan sebuah problem maju (*forward problem*), yang pada dasarnya merupakan pengukuran dari sebuah parameter fisika dari gelombang yang dipancarkan dari sensor transmitter dan berinteraksi dengan media dan diukur oleh sensor detector .



Gambar 2.3 Sistem tomography

Besaran fisika terukur merupakan hasil konvolusi antara kekuatan medan (*field strenght*) dan distribusi sifat fisika (*property distribution*). Pada tomografi sinar-X, besaran fisika yang terukur berupa intensitas photon yang diterima oleh detektor yang telah mengalami atenuasi energi sepanjang jalur transmisi. Dengan demikian data proyeksi merupakan integral dari koefisien atenuasi sepanjang jalur transmisi yang diekspresikan dengan persamaan:

$$Y(s, \theta) = \int_{L(s, \theta)} X(x, y) dl \quad (2.29)$$

di mana $L(s, \theta)$ adalah garis proyeksi sebagai fungsi dari jarak dari titik pusat, s dan sudut θ . Dalam formulasi matrix, persamaan ini bisa ditulis dengan:

$$Y = A \cdot X \quad (2.30)$$

di mana Y adalah besaran yang terukur berdimensi M (jumlah pengukuran), X adalah vektor citra dari medium mempunyai dimensi N (jumlah piksel dalam medium), dan A adalah matrik pemberat (*weighting matrix*) yang merupakan besaran yang tergantung pada jenis gelombang yang dipakai, disebut juga matrik proyeksi (*projection matrix*), berdimensi $M \times N$. Secara fisika, besaran yang terukur oleh sensor dektektor merupakan hasil interaksi antara medium dan gelombang yang dipakai, misalnya atenuasi energi pada Sinar-X atau Gamma, atenuasi energi dan waktu tempuh (*time-of-flight*) untuk ultrasonik, atau konduktifitas atau kapasitansi untuk listrik. Secara matematis Y merupakan hasil konvolusi antara matrik proyeksi dan citra.

Dalam tomografi *non-linear* seperti tomografi berbasis kapasitansi listrik (Lihat Gambar. 2.3), distribusi sifat fisika berkoresponden dengan sifat permitifitas, $\varepsilon(x,y)$, sedangkan besaran fisika terukur adalah kapasitansi listrik yang mengacu pada persamaan Poisson sbb:

$$\nabla \cdot \varepsilon(x,y) \nabla \varphi(x,y) = \rho \quad (2.31)$$

di mana $\varphi(x,y)$ adalah distribusi permitifitas, $\varphi(x,y)$ adalah distribusi kekuatan medan listrik. Persamaan diferensial ini berorder dua dan bertipe elips, dengan kondisi batas bertipe Dirichlet atau Neumann. Kapasitansi listrik $C(s,\theta)$ didapat dari integrasi persamaan (2.31) sbb:

$$C(s,\theta) = -\frac{1}{\Delta V(s,\theta)} \oint_{r(s,\theta)} \varepsilon(x,y) \nabla \varphi(x,y) dl \quad (2.32)$$

di mana $\Delta V(s,\theta)$ adalah beda tegangan antara elektroda sumber dan detektor. $r(s,\theta)$ adalah kurva yang menutupi elektroda detektor. Persamaan (2.32) adalah non-linear, karena medan listrik \mathbf{E} juga dipengaruhi oleh distribusi permitifitas. Fenomena ini disebut efek 'soft field' (efek medan lunak), di mana transmisi gelombang interogator dipengaruhi oleh medium yang dilalui. Ini merupakan problem *inherent* pada tomografi berdasarkan pengukuran sifat kelistrikan.

Sifat non-linear pada tomografi listrik ini menyulitkan proses rekonstruksi citra. Beberapa metode dengan linearisasi dan iterasi dengan finite elemen method (FEM) ditempuh untuk menyelesaikan problem

rekonstruksi pada tomografi kapasitansi listrik. Dengan linearisasi dengan menggunakan model sensitifitas, persamaan (2.32) bisa ditulis dalam formulasi matrik menjadi seperti persamaan (2.30) dengan Y sebagai kapasitansi, X sebagai distribusi permitifitas dan matriks pemberat A diganti dengan matriks sensitifitas listrik. Sensitifitas listrik adalah besaran perubahan kapasitansi antara dua elektroda pada saat sebuah titik (piksel) di dalam domain sensor (ruangan antara dua elektroda) diisi dengan material yang mempunyai koefisien permitifitas tinggi. Setelah proses linearisasi dilakukan, selanjutnya perlakuan yang sama bisa diterapkan seperti pada tomografi linear.

2.2.2 Proses Rekonstruksi Citra Tomography

Proses rekonstruksi adalah sebuah proses matematis untuk melakukan estimasi terhadap distribusi sifat fisika yang merupakan bentuk peta yang ingin diketahui dari data proyeksi. Dengan demikian proses rekonstruksi citra adalah sebuah upaya untuk mengkonversi distribusi kekuatan medan yang berubah karena objek di dalamnya menjadi bentuk objek tersebut. Proses rekonstruksi citra merupakan problem balik (*inverse problem*) untuk melakukan estimasi terhadap distribusi sifat medan X dari parameter terukur Y dengan menggunakan algoritma matematika tertentu. Seberapa akurat pendekatan \hat{X} terhadap X sangat tergantung pada kelengkapan data proyeksi dan algoritma matematika yang digunakan untuk melakukan rekonstruksi.

Pada tomografi berdasarkan radiasi Sinar-X atau Gamma yang banyak digunakan di dunia kedokteran, algoritma proyeksi balik dengan filter (*filtered back projection technique*) sangat umum dipakai (Herman, 1980). Berdasarkan algoritma ini, fungsi fisik citra X bisa diprediksi dengan melakukan proyeksi balik (penjumlahan memutar seluruh hasil proyeksi) sbb:

$$(x, y) = \hat{X}(r, \phi) = \int_0^{\pi} Y^*(s(r, \phi), \theta) d\theta \quad (2.33)$$

$Y^*(s, \theta)$ merupakan hasil konvolusi antara data proyeksi $Y(s, \theta)$ dengan fungsi filter. Berbagai macam filter dikembangkan untuk meningkatkan kualitas hasil rekonstruksi citra, seperti yang banyak dipakai adalah filter

Ramachandran-Lakshiminarayanan (Filter Ram-Lak), filter Shepp-Logan dan filter Hamming *window*. Permasalahan algoritma ini, untuk mencapai kualitas citra yang tinggi menuntut jumlah proyeksi yang besar. Persamaan (2.33) menunjukkan bahwa perbedaan sudut proyeksi antara proyeksi yang satu dengan yang lain harus mendekati nol. Hal ini tidak mungkin direalisasi pada aplikasi dalam proses industri karena obyek yang biasanya bergerak menuntut kecepatan scanning yang tinggi, konsekuensinya jumlah proyeksi harus direduksi sebesar mungkin sampai tingkat kualitas citra yang diperbolehkan untuk meningkatkan kecepatan scanning.

Dengan demikian, dalam proses industri biasanya data proyeksi yang ada jumlahnya jauh lebih kecil dibanding dengan jumlah piksel ($M \ll N$). Kondisi ini disebut *illconditioned*. Untuk meningkatkan kualitas citra pada kondisi data proyeksi yang terbatas dengan algoritma proyeksi balik dengan filter biasanya proses iterasi dilakukan sbb:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha \varphi(\Delta Y_{s,\theta}^{(k)}) \quad (2.34)$$

di mana $X(k)$ adalah hasil perhitungan citra pada iterasi ke- k , α adalah factor penalti, dan $\alpha \varphi(\Delta Y_{s,\theta}^{(k)})$ menunjukkan hasil operasi proyeksi balik dengan filter pada iterasi ke- k yang dihitung sbb:

$$\Delta Y^{(k)}(s, \theta) = Y(s, \theta) - \sum_{i=1}^n A_{(s,\theta)}^i X_i^{(k)} \quad (2.35)$$

$A_{(s,\theta)}^i$ adalah elemen dari matrik pemberat A .

Metode iterasi berdasarkan algoritma proyeksi balik dengan filter sampai batas tertentu bisa meningkatkan kualitas citra hasil rekonstruksi, tetapi tetap tidak mampu mencapai kualitas citra yang tinggi pada kondisi data proyeksi yang terbatas. Untuk ini maka metode optimisasi dengan regularisasi seperti metode regulasi Tikhonov banyak dikembangkan. Metode optimisasi pada dasarnya adalah sebuah proses untuk melakukan estimasi terhadap citra X dimana hasil proyeksi yang dikalkulasi dari estimasi citra ini mendekati hasil proyeksi dari pengukuran. Secara matematis hal ini bisa dirumuskan sbb:

$$AX \leq Y \quad (2.36)$$

Dengan demikian, proses optimisasi adalah proses minimisasi harga $1/2\|AX - Y\|^2$ yang menghasilkan persamaan:

$$A^T AX = A^T Y \quad (2.37)$$

Apabila perkalian matrik $A^T A$ mempunyai invers, maka proses rekonstruksi secara sederhana bisa dirumuskan sbb:

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (2.38)$$

Akan tetapi persamaan diatas dalam prakteknya tidak mempunyai solusi karena hampir pada semua kasus matrik A tidak mempunyai invers akibat keterbatasan jumlah data proyeksi dibanding dengan jumlah variable yang tidak diketahui di dalam vektor citra X . Prosedur regularisasi Tikhonov untuk menyelesaikan persamaan diatas adalah dengan memasukan regulator sbb:

$$\hat{X} = (A^T A + \mu I)^{-1} A^T Y \quad (2.39)$$

di sini I adalah matrik identitas, μ adalah parameter regularisasi yang mempunyai harga positif antara 0 dan 1. Persamaan (2.39) merupakan bentuk modifikasi dari persamaan (2.38), di mana dengan pemasukan μI matrik $A^T A$ menjadi mempunyai invers. Metode Tikhonov memberikan hasil yang lebih baik dari algoritma proyeksi balik dengan filter untuk kondisi ill-conditioned.

2.2.3 Perkembangan Metode Elemen Hingga

FEM berawal pada kebutuhan untuk menyelesaikan permasalahan kompleks dibidang Teknik Sipil dan Teknik Aeronautika terutama pada permasalahan elastisitas dan analisa struktur. Perkembangan FEM diawali atas jerih payah **Alexander Hrennikoff** (1941) dan Richard Courant (1942). Pendekatan yang dilakukan oleh para pioneer ini benar-benar berbeda, namun mereka mempopulerkan satu nilai yang esensial, yaitu: Diskretisasi Jaringan / Pembagian Jaringan pada sebuah bidang pengaruh (*domain*) yang menerus menjadi kumpulan *sub-domain* yang berbeda. Hrennikoff membagi-bagi *domain* dengan menggunakan analogi kisi-kisi, sedangkan pendekatan yang dilakukan Courant adalah mengubah *domain* menjadi *sub-region* dengan bentuk segitiga-segitiga terbatas (eng: *finite triangular subregions*) sebagai solusi untuk permasalahan lanjutan yaitu Persamaan Differensial Parsial Elips (eng: *Elliptic Partial Differential Equations / PDEs*) yang muncul pada

permasalahan dibidang torsi pada sebuah silinder. Kontribusi Courant berevolusi, penggambaran hasil awal PDEs dibuat oleh Rayleigh, Ritz dan Galerkin. Perkembangan FEM secara sungguh-sungguh diawali pada pertengahan sampai dengan akhir dekade 1950an untuk bidang airframe dan analisa struktur dan meraih banyak energi tambahan untuk berkembang pada University of California, Berkeley pada dekade 1960an dibidang teknik sipil. Di tahun 1973, Strang dan Fix melalui tulisannya "*An Analysis of The Finite Element Methode*" mengatakan bahwa FEM menawarkan solusi matematis yang setepat-tepatnya. Dan pada kelanjutannya FEM digunakan pula pada bidang aplikasi matematika untuk bidang modeling numerik pada sistem fisik (*physical system*) untuk berbagai bidang *engineering*, seperti pada elektromagnetik dan mekanika fluida.

2.3 Electrical Capacitance Volume Tomography ECVT



Gambar 2.4 Alat ECVT

Tomografi kapasitansi listrik memungkinkan untuk melakukan rekonstruksi volumetrik, sehingga citra yang dihasilkan adalah merupakan citra volumetrik (3D) secara real time. Rekonstruksi volumetrik dari sebuah obyek yang bergerak akan menghasilkan sebuah citra 4 dimensi (3 dimensi ruang dan 1 dimensi waktu). Sistem ini disebut Electrical Capacitance Volume Tomography (ECVT). Rekonstruksi volumetric dimungkinkan dengan menggunakan matrik

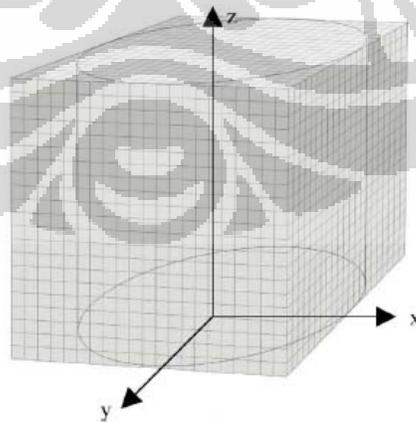
sensitifitas yang di rekonstruksi berdasarkan medan listrik tiga dimensi dengan memanfaatkan sifat 'lunak' dari medan listrik dan melakukan pengukuran kapasitansi listrik antara elektroda yang tidak koplanar. Teknik ini terutama sangat bermanfaat untuk studi sistem fluida dalam berbagai proses *engineering* dan juga di dunia kedokteran khususnya pencitraan tubuh manusia.

2.3.1 Prinsip ECVT

Prinsip pada *Electrical Capacitance Tomography* (ECT) merupakan dasar dari ECVT, yang terbagi menjadi dua masalah. Pekerjaan mendapatkan data kapasitansi dari pelat elektroda disekitar dinding pengukuran adalah masalah forward, sementara merekonstruksi citra dari data kapasitansi yang dikur merupakan masalah invers.

2.3.2 Desain Sensor Pada ECVT

Pada sensor ECT dua dimensi, sensitivitas matriks memiliki variasi axial (arah x dan y), jika diasumsikan panjang elektroda adalah pada arah pada arah z (gambar 2.5), maka akan terlihat seperti 3 dimensi (3D). Pencitraan objek 3D membutuhkan sensitivitas matriks dalam 3D pula, khususnya pada arah radial (z) untuk membedakan kedalaman sepanjang sensor.



Gambar 2.5 Sistem gambar koordinat

Dalam membuat desain sensor, hal-hal yang harus diperhatikan:

1. Memilih bentuk geometri poligon (misal persegi, segitiga, pentagon dll) sebagai bentuk elektroda - jika memungkinkan - untuk menutup

permukaan yang menjadi tempat daerah pengukuran. Bentuk geometri poligon elektroda regular (bentuk biasa) memberikan kekuatan sensitivitas yang seragam secara relatif terhadap semua arah.

2. Bentuk dan ukuran elektroda dilakukan berdasarkan dengan jumlah data yang berlaku dari banyaknya channel pada sistem data akuisisi dan ukuran serta bentuk dari vessel. Perbedaan ukuran dan bentuk dari elektroda digunakan untuk vessel dengan bentuk berbeda pula, misal menggunakan elektroda berukuran kecil untuk mengukur area dengan ukuran kecil.
3. Menggunakan elektroda secara tersusun, digunakan bentuk multi-plane (tingkat) segitiga dan sensor persegi untuk menghindari ketidakseimbangan distribusi sensitivitas, misal terlalu kuat dan terlalu lemahnya distribusi sensitivitas dalam bidang pada pasangan elektroda.

2.3.3 Sensitivitas Matriks

Definisi : Seberapa besar suatu benda dengan ukuran mendekati nol dan memiliki permitivitas yang lebih tinggi dibandingkan dengan sekitarnya mempengaruhi perubahan kapasitansi yang diukur, apabila benda tersebut diletakkan di ruang medan listrik yang dibentuk oleh dua plat sensor elektroda.

Sensitivitas matriks diukur pada setiap sensor. Metode untuk menghitung koefisien sensitivitas S dari pixel pada pasangan elektroda (i-j) adalah

$$S = - \int_A E_i \cdot E_j dA \quad (2.40)$$

Dimana E_i adalah medan listrik dalam sensor ketika elektroda dari pasangan i dinyatakan sebagai elektroda sumber, E_j adalah medan listrik ketika elektroda j dinyatakan sebagai elektroda sumber dan dot produk dari kedua medan listrik tersebut E_i dan E_j diintegrasikan sepanjang daerah A pada pixel.

Set dari koefisien sensitivitas pada setiap pasangan elektroda diketahui sebagai sensitivitas matriks. Untuk sensor sirkular dengan elektroda berpasangan, sangat mungkin untuk menurunkan ekspresi secara analitik untuk medan listrik dan pada kasus ini, koefisien sensitivitas (dan juga kapasitansi elektroda) dapat dihitung secara akurat. Sebenarnya, dalam

penghitungan koefisien sensitivitas hanya dibutuhkan sedikit pencarian primer map sensitivitas dengan elektroda berpasangan karena bisa diturunkan dengan refleksi maupun rotasi.

2.3.4 Masalah Forward

Kapasitans dalam ECVT diukur dengan pengukuran berbasis persamaan poisson yang ditulis dalam ruang 3 dimensi sebagai :

$$\nabla\varepsilon(x,y,z)\nabla\varphi(x,y,z) = -\rho(x,y,z) \quad (2.41)$$

dimana $\varepsilon(x,y,z)$ adalah distribusi permitivitas, $\varphi(x,y,z)$ adalah distribusi potensial dalam medan listrik, dan $\rho(x,y,z)$ adalah densitas muatan. Pengukuran kapasitans C_i dari pasangan ke- i antara sumber dan elektroda detektor didapat dengan mengintegalkan :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = -\frac{1}{\Delta V_i} \iint_r \varepsilon(x,y,z)\nabla\varphi(x,y,z)dA_i \quad (2.42)$$

dimana ΔV_i adalah beda potensial antara pasangan elektroda dan A_i adalah area permukaan yang menutup elektroda detektor. Persamaan diatas menghubungkan distribusi konstanta dielektrik (permitivitas) dengan kapasitansi C_i yang diukur.

Masalah forward memiliki tiga buah solusi dalam pemecahannya, yaitu teknik linear, *brute force numerical methods* dan *pseudo-analytical methods*. Pada metode numerik, solusi yang dihasilkan akurat dalam distribusinya namun tampak seperti sebuah solusi kebetulan. Metode analitik menghasilkan solusi cepat namun terbatas pada bentuk geometri yang simpel dan tidak bisa pada struktur yang kompleks. Keduanya membutuhkan waktu komputasi yang lama. Dalam keadaan ini, metode linearisasi menghasilkan solusi yang cepat dan sederhana, meskipun pada citra yang dihasilkan terdapat efek *smoothing*. Efek *smoothing* ini kemudian dapat diperbaiki dengan teknik iterasi.

2.3.5 Masalah Invers

Proses rekonstruksi citra merupakan masalah invers yang menyertakan estimasi dari distribusi permitivitas dari data kapasitansi yang diukur.

2.3.6 Kapasitansi Dalam ECVT

Didapat hubungan antara kapasitansi dan distribusi permitivitas dengan persamaan berikut :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = -\frac{1}{\Delta V} \iint_r \varepsilon(x, y, z) \nabla \varphi(x, y, z) dA \quad (2.43)$$

dimana $\varepsilon(x, y, z)$ adalah distribusi permitivitas pada daerah sensing, V adalah potensial antara dua elektroda yang dibentuk dari kapasitansi, $\varphi(x, y, z)$ adalah distribusi potensial dan dA adalah permukaan elektroda.

Untuk sensor plat paralel ideal dengan distribusi permitivitas yang homogen :

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \quad (2.44)$$

dimana ε_0 adalah permitivitas vakum, ε_r adalah permitivitas relatif material didalam sensor, A adalah area plat dan d adalah jarak antara dua plat.

Persamaan (2.44) memiliki hubungan bahwa kapasitansi proporsional terhadap permitivitas. Dalam kasus ini, persamaan (2.43) tidak bisa disederhanakan. Pada persamaan (2.43), distribusi potensial $\varphi(x, y, z)$ bergantung pada distribusi permitivitas $\varepsilon(x, y, z)$.

Oleh karena itu kapasitansi antara kombinasi elektroda dapat dipertimbangkan sebagai fungsi distribusi permitivitas

$$C = \xi(\varepsilon)$$

Perubahan pada kapasitansi dalam respons terhadap kesalahan distribusi permitivitas diberikan oleh

$$\Delta C = \frac{d\xi}{d\varepsilon} (\Delta\varepsilon) + O((\Delta\varepsilon)^2)$$

dengan $\frac{d\xi}{d\varepsilon}$ adalah sensitivitas dari kapasitansi terhadap distribusi permitivitas dan $O((\Delta\varepsilon)^2)$ merepresentasikan $(\Delta\varepsilon)$ dan istilah orde tinggi.

Dalam aplikasi ECVT, nilai $\Delta\epsilon$ biasanya kecil. Dengan mengabaikan $O((\Delta\epsilon)^2)$, maka persamaan di atas menjadi sederhana dalam bentuk linier

$$\Delta C = s\Delta\epsilon$$

dengan $s = \frac{d\xi}{d\epsilon}$ adalah sensitivitas dari kapasitansi terhadap perubahan dalam permitivitas

Persamaan diatas harus dideskritkan untuk mendapatkan implementasinya. Agar dapat memvisualisasikan distribusi permitivitas, sensing area dibagi menjadi N element atau pixel, biasanya dengan orde 1000. Misal, 32 x 32 grid menghasilkan 1024 pixel pada area citra pada sensor kotak (*square* sensor) dan sekitar 800 pixel untuk *circular* sensor.

Selanjutnya bentuk linier dan diskrit pada masalah forward dapat diekspresikan sebagai berikut :

$$\Delta C = J \cdot \Delta G \quad (2.45)$$

dengan J adalah matriks Jacobian (i.e distribusi sensitivitas matriks, memberikan sensitivitas map untuk setiap pasangan elektroda) dan kemudian secara umum didenotasikan dengan :

$$C = S \cdot G \quad (2.46)$$

dengan C adalah matriks distribusi kapasitansi, S adalah sensitivitas matriks dan G adalah matriks distribusi permitivitas.

Dengan pendekatan ini, masalah forward non-linier telah disederhanakan kepada pendekatan linier. Hal ini memuaskan banyak aplikasi dengan kontras permitivitas rendah dan perturbasi (kesalahan).

Permasalahan dari rekonstruksi citra ECVT adalah menyelesaikan distribusi permitivitas $\epsilon(x,y,z)$ dari vektor kapasitansi C yang diukur. Dalam bentuk diskrit adalah mencari G yang tidak diketahui dari C menggunakan persamaan diatas, dimana S adalah matriks konstan untuk sederhananya dan S akan berubah sesuai dengan distribusi permitivitas.

2.3.7 Rekonstruksi Citra ECVT

Dalam pencitraan, tidak mudah untuk mendapatkan solusi agar performa pixel pada citra yang dihasilkan bagus (terbatasnya pada hubungan banyaknya pengukuran sebanding dengan jumlah pixel yang didapat) karena umumnya jumlah pixel pada citra akan melebihi jumlah pengukuran kapasitansi.

Selain itu, distorsi pada citra dapat terjadi karena ECVT merupakan metode *soft-field imaging* (medan listrik didistorsikan oleh distribusi material dalam sensor). Namun, karena nilai permitivitas dalam sensor kecil maka distorsi yang terjadi cukup kecil. Hal ini membolehkan adanya algoritma pendekatan linier yang digunakan untuk menghubungkan pengukuran kapasitansi C dengan nilai pixel pada citra.

Masalah forward adalah persamaan yang menghubungkan seperangkat pengukuran inter-elektroda kapasitansi C dengan set nilai pixel permitivitas G . Transformasi ini mengasumsikan bahwa diukurnya inter-elektroda C dihasilkan dari distribusi permitivitas G dalam sensor yang identik dengan yang didapat dari penjumlahan komponen C yang meningkat dan terjadi ketika setiap pixel memiliki nilai permitivitasnya. Dirumuskan dalam persamaan x sebagai berikut :

$$C = S \cdot G$$

dengan:

C adalah matriks $M \times 1$ (tipikal 66 untuk 12 sensor dan 28 untuk 8 sensor), G adalah matriks $N \times 1$ (bernilai 1024 untuk 32x32 grid atau 1061 untuk 41x41 grid). S adalah transformasi maju atau lebih dikenal dengan sensitivitas matriks yang berupa matriks $M \times N$, terdiri dari seperangkat M (atau map) dari N (nilai tipikal 1024) koefisien (1 map untuk setiap pasang M pencitraan), dimana koefisien merepresentasikan perubahan relatif pada kapasitansi C di setiap pasang kapasitans ketika perubahan identik terjadi pada setiap permitivitas dari $N(1024)$ pixel.

Selanjutnya, masalah invers adalah bagaimana mendapatkan hasil rekonstruksi citra nilai G dari invers matriks S pada persamaan (2.46) sementara invers matriks S tidak terdapat.

2.3.7.1 Metode *Neural Network Multicreation Optimization Image Reconstruction Technique*

Metode neural network (jaringan sel otak) adalah metode membuat sistem jaringan buatan yang memiliki kinerja menyerupai jaringan sel otak manusia yang sebenarnya, dimana jaringan sel otak buatan tersebut memiliki dua unsur yaitu kecerdasan buatan dan kognitif modeling agar dapat mensimulasikan beberapa properti dari jaringan saraf itu sendiri. Kecerdasan buatan memiliki tujuan agar sistem dapat menyelesaikan tugas tertentu, sedangkan yang kognitif modeling bertujuan untuk membangun model matematika biologi pada sistem sel otak.

Sebuah jaringan sel otak buatan melibatkan jaringan sederhana pengolahan elemen (neuron buatan) yang dapat memperlihatkan perilaku kompleks global, yang ditentukan oleh sambungan antara unsur-unsur dan elemen pengolahan parameter. Salah satu jenis klasik buatan jaringan sel otak adalah jaringan Hopfield (Wikipedia, 2008). Metode neural network berbasis model Hopfield telah terbukti berhasil dalam menyelesaikan masalah optimisasi dengan tingkat kesulitan tinggi (Hopfield dan Tank, 1985) yaitu restorasi citra (Paik dan Katsaggelos 1992, Sun dkk 1995, Hou dkk, 1988) dan rekonstruksi citra (Wang, 1998). Prinsip kerja jaringan Hopfield juga diimplementasi oleh Warsito dkk (Warsito, 2001) untuk menyelesaikan masalah optimisasi di dalam problema inversi rekonstruksi citra dengan tomografi kapasitansi.

2.3.7.1.1 Multi-criterion

Dengan menggunakan pendekatan eror, maka persamaan 2.46 dapat dituliskan kembali menjadi persamaan 2.47

$$S \cdot G = C + e \quad (2.47)$$

dimana e merupakan M-dimensi vektor eror. Masalah rekonstruksi adalah menemukan metode untuk mengestimasi vector image (distribusi

permitivitas) G dari kapasitans C dan meminimasi nilai e . Karena kita tidak tahu e , masalah kemudian adalah mencari ‘solusi’ dari sistem dibawah keadaan tersebut, misalkan

$$S \cdot G \leq C \quad (2.48)$$

Kriteria yang digunakan untuk masalah rekonstruksi citra adalah dari memilih bentuk solusi dari persamaan di atas, dimana mencari nilai G yang ketika dikalikan dengan S nilainya sama dengan atau lebih kecil daripada C . Sebuah vektor citra G untuk sebuah fungsi nilai $f_1(G)$ minimal, dan jika ada lebih dari satu G yang meminimasi, $f_1(G)$ dipilih diantara metode itu untuk nilai fungsi minimal $f_i(G)$ lainnya.

Metode solusi Multi-criterion merupakan metode mencari image dengan criteria sebagai berikut :

- (a) Memiliki entropi tinggi
- (b) Memiliki nilai *error* kecil
- (c) Memiliki filter tinggi.

Fungsi pertama adalah mencari nilai entropi maksimum. Entropi merupakan jumlah informasi, dimana bila dalam suatu keadaan memiliki nilai entropi maksimum maka jumlah informasinya minimum. Sementara informasi tersebut memiliki nilai perbandingan terbalik dengan nilai probabilitas (peluang). Semakin minimum informasi maka probabilitas akan semakin besar. Pada keadaan tersebutlah nilai entropi adalah maksimum.

Jika nilai probabilitas p diasosiasikan dengan nilai G , maka fungsi entropi yaitu :

$$f_1(G) = \gamma_1 \delta_1 G \ln G, \delta_1 \begin{cases} 1 & \text{jika } G_i > 0 \\ 0 & \text{jika } G_i = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

$$f_1(G) = \gamma_1 \sum_{i=1}^N G_i \ln G_i \quad (2.50)$$

dimana γ_1 adalah konstanta normalisasi antara 0 dan 1. Fungsi ini mengukur tingkat kehalusan pada rekonstruksi citra. Penggunaan kriteria entropi dilakukan dengan pernyataan bahwa semua image yang ditampilkan memiliki hasil kriteria utama, yaitu yang memiliki entropi maksimum.

Fungsi kedua adalah mencari nilai factor eror minimum, yaitu mendapatkan nilai eror S.G-C yang dikuadratkan, perhitungannya adalah

$$f_2(G) = \frac{1}{2} \gamma_2 \|S \cdot G - C\|^2 \quad (2.51)$$

$$f_2(G) = \frac{1}{2} \gamma_2 \sum_{i=1}^M (\sum_{j=1}^N S_{ij} G_i - C_i)^2 \quad (2.52)$$

dimana γ_2 adalah konstanta normalisasi antara 0 dan 1. Fungsi ini harus diminimalisir untuk memastikan bahwa nilai kapasitas yang dihitung dari nilai pixel memiliki nilai sedekat mungkin dengan data yang diukur. Nilai eror tersebut dikuadratkan agar mendapatkan hasil yang lebih kecil dan positif (karena hasilnya bisa positif dan negatif). Nilai setengah digunakan sebagai bentuk fungsi energi.

Fungsi ketiga adalah filter image, merupakan bentuk dari fungsi non-uniform dan peakedness (Herman 1980).

$$f_3(G) = \frac{1}{2} \gamma_3 (G^T X G + G^T G) \quad (2.53)$$

dimana X merupakan matriks N non-uniform dengan konstanta γ_3 yang nilainya antara 0 dan 1. Matriks non-uniform adalah matriks yang memiliki pengaruh efek smoothing dan peak pada hasil rekonstruksi citra.

Selanjutnya optimisasi multikriteria untuk rekonstruksi adalah memilih image vektor untuk nilai fungsi multi objektif $F(G)=[f_1(G),f_2(G),f_3(G)]^T$ menjadi minimal secara simultan.

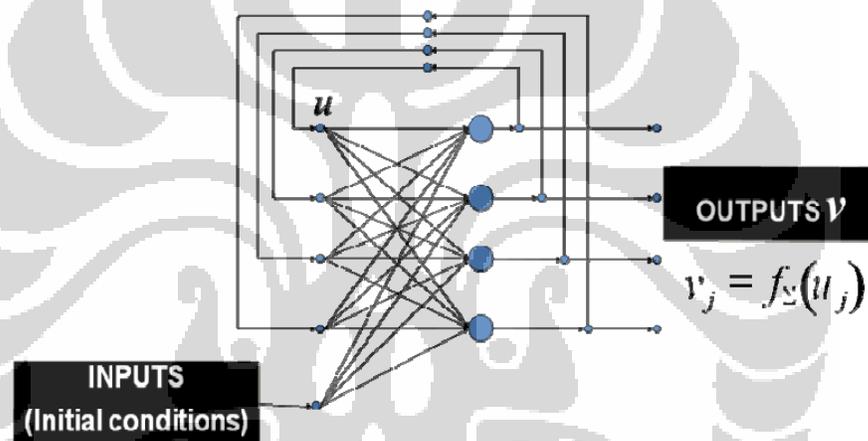
hal ini dapat terjadi dengan teknik penjumlahan pemberat secara matematis :

$$\begin{cases} \min \Phi(G) = \sum_i w_i f_i(G), & (i = 1,2,3) \\ \text{sehingga } SG - C \leq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

dimana w_i adalah operasi pemberat pada fungsi objektif $f_i(G)$ dan dapat diinterpretasikan sebagai ‘berat relatif’ dari objek dibandingkan dengan objek lain. Misal :

$$\sum_{i=1}^3 w_i = 1 \quad (2.55)$$

2.3.7.1.2 Solusi dengan Hopfield Dynamic



Gambar 2.6 Metode Hopfield Network Evolution

Sebagai contoh adalah dalam melakukan permisalan bahwa nilai image voxel G yang direkonstruksi dan dipetakan menjadi output neuron v_j pada jaringan Hopfield

$$G_j = v_j = f_{\Sigma}(u_j) \quad (2.56)$$

dimana f_{Σ} adalah fungsi sigmoid dengan bentuk

$$f_{\Sigma}(u_j) = [1 + \exp(-\beta u_j)]^{-1} \quad (2.57)$$

β adalah faktor gain yang menjelaskan slop-vertikal dan persebaran horiozontal fungsi bentuk sigmoid. Dengan menggunakan fungsi aktivasi bentuk sigmoid, maka output neuron akan berada pada kekonvergenan denan nilai antara 0 dan 1.

Pola dari neuron pada jaringan Hopfield dikarakterisasi dengan waktu pada keadaan neuron u_j yang diatur dalam persamaan

$$C_{oj} \frac{du_j}{dt} = - \frac{\partial E(G)}{\partial G_j} \quad (2.58)$$

dimana C adalah kapasitans pada neuron ke- j , dan $E(G)$ adalah total energi dari jaringan Hopfield. Fungsi keseluruhan energi pada jaringan merupakan penjumlahan dari fungsi objektif terhadap faktor penalti dan pembatas, yang persamaannya :

$$E(G) = \sum_l w_l f_l + \sum_{k=1}^2 \Psi(z_k) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j} \int_0^{G_j} f_{\Sigma^{-1}}(G) dG \quad (2.59)$$

pada kolom pertama menjelaskan energi interaktif antara neuron berbasis fungsi objektif yang telah dijabarkan di atas. Persamaan kedua berhubungan dengan faktor penalti pada fungsi error yang harus diminimalisasi. Persamaan ketiga adalah persamaan yang membuat jaringan beroperasi pada daerah interior N dimensi unit ruang ($0 \leq G_j \leq 1$) yang membentuk keadaan ruang sistem. N adalah jumlah neuron pada jaringan Hopfield yang nilainya sama dengan jumlah voxel pada volum image yang dihitung. Fungsi pembatas $\psi(\alpha_k z_k) = \{ \psi(\alpha_k z_{k,i}) \}$ yang diidentifikasi sebagai

$$\frac{d\psi}{dz_{k,i}} = \delta(\alpha_k z_{k,i}) = \begin{cases} 0 & \text{bila } z_{k,i} \leq 0 \\ \alpha_k z_{k,i} & \text{bila } z_{k,i} \geq 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

dimana $k=1,2$ $i=1,2,3,\dots,M$ $z_i = SG-C$, α adalah parameter faktor penalti. Dengan memperkenalkan fungsi penalti, maka perputaran dibolehkan agar mencapai nilai minimum.

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \xi \exp(-\eta t) \quad (2.61)$$

Substitusikan semua fungsi objek pada 2.49 hingga 2.53 maka keseluruhan fungsi energi didapat

$$E(\mathbf{G}) = \gamma_1 \delta_1 G \ln G + \frac{1}{2} \gamma_2 \|\mathbf{S} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{C}\|^2 + \frac{1}{2} \gamma_3 (\mathbf{G}^T \mathbf{X} \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{G}) + \frac{1}{R_f} \int_0^{G_f} f \Sigma^{-1}(\mathbf{G}) d\mathbf{G}$$

(2.62)

untuk mempermudah memilih maka dipilih $R_{0j} = R_0$ dan $C_{0j} = C_0$, dan mendefinisikan ulang $R_0 C_0$, γ_1/C_0 , γ_2/C_0 sebagai γ_3/C_0 , τ , γ_1 , γ_2 dan γ_3 , evolusi internal dari variable keadaan neuron di jaringan menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(t) &= -\frac{1}{C_0} \nabla E(\mathbf{G}) \\ &= -\frac{\mathbf{u}(t)}{\tau} - \left[\frac{w_1 \gamma_1}{C_0} \{ \mathbf{1} + \ln \mathbf{G}(t) \} + \frac{w_2 \gamma_2}{C_0} \mathbf{S}^T \{ \mathbf{S} \mathbf{G}(t) - \mathbf{C} \} + \frac{w_3 \gamma_3}{C_0} \{ \mathbf{X} \mathbf{G}(t) + \mathbf{G}(t) \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{w_4 \gamma_4}{C_0} (\mathbf{H}^{1T} \{ \mathbf{H}^1 \mathbf{G}(t) - \mathbf{G}_{1D} \} + \mathbf{H}^{2T} \{ \mathbf{H}^2 \mathbf{G}(t) - \mathbf{G}_{2D} \}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{S}^{1T} \delta [\mathbf{S} \mathbf{G}(t) - \mathbf{C}^1] + \mathbf{H}^{1T} \delta [\mathbf{H}^1 \mathbf{G}(t) - \mathbf{G}_{1D}] + \mathbf{H}^{2T} \delta [\mathbf{H}^2 \mathbf{G}(t) - \mathbf{G}_{2D}] \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

dimana

$$\nabla E(\mathbf{G}) = \left[\frac{\partial E(\mathbf{G})}{\partial G_1}, \frac{\partial E(\mathbf{G})}{\partial G_2}, \dots, \frac{\partial E(\mathbf{G})}{\partial G_N} \right]^T$$

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T$$

$$\mathbf{G}(t) = [G_1(t), G_2(t), \dots, G_N(t)]^T$$

$$\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t)]^T$$

Gambar vektor (permittivitas) G_j menjadi output dari j neuron dan dihitung dari fungsi sigmoid menjadi

$$G_j(t) = f \Sigma(u_j(t)) \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.64)$$

Namun, tidak seperti dalam kasus MLF parameter jaringan saraf u_j , di sini, dihitung dengan memecahkan sistem persamaan 2.63

Perulangan yang proses internal keadaan dari variabel j neuron dan sesuai nilai piksel gambar adalah, masing-masing, diberikan oleh

$$u_j(t + \Delta t) = u_j(t) + u'_j(t) \Delta t \quad (2.65)$$

persamaan 2.65 berasal dari fungsi matematis, selanjutnya dengan cara seperti persamaan 2.65, didapat nilai G menjadi

$$G_j(t + \Delta T) = f \Sigma(u_j(t + \Delta t)) = G_j(t) + f' \Sigma(u) u'_j(t) \Delta t \quad (2.66)$$

dimana $f' \Sigma(u) = df \Sigma(u_j) / du_j$ dan $u'_j(t) = du_j(t) / dt$.

persamaan (2.66) dapat ditulis kembali sebagai

$$G_j(t + \Delta T) = G_j(t) + \beta G_j(t) [1 - G_j(t)] u'_j(t) \Delta t \quad (2.67)$$

atau disederhanakan menjadi

$$G_j(t + \Delta T) = G_j(t) + \beta u'_j(t) \Delta t \quad (2.68)$$