BAB II

LANDASAN TEORI

Metode kompresi citra fraktal merupakan metode kompresi citra yang berawal dari suatu ide untuk menyimpan segitiga *Sierpinski* menggunakan *Iterated Function System* (IFS). Segitiga *Sierpinski* merupakan salah satu contoh citra fraktal dan setiap citra fraktal dapat dibentuk oleh kumpulan transformasi *affine* kontraktif yang disebut IFS. Pemahaman yang baik terhadap proses pembentukan citra fraktal menggunakan IFS, merupakan hal yang sangat penting untuk pengembangan metode kompresi citra fraktal. Oleh karena itu, pada bab II ini dibahas beberapa dasar teori yang mendukung, seperti pengertian citra fraktal, ruang citra, transformasi *affine* kontraktif serta IFS. Selain itu, diberikan pula pengenalan konsep dasar algoritma genetika.

Citra yang menjadi objek kompresi dalam skripsi ini adalah citra berskala keabuan (*gray-scale image*). Oleh karena itu, setiap penggunaan kata “citra” pada skripsi ini, mengacu pada citra berskala keabuan, kecuali bila disebutkan lain.

2.1 CITRA DIGITAL

Citra digital tersusun atas sejumlah tertentu *pixel*. Setiap *pixel* pada citra memiliki suatu nilai yang disebut nilai intensitas *pixel*. Nilai intensitas *pixel* merupakan nilai yang menentukan derajat keabuan *pixel* tersebut. Nilai intensitas *pixel* untuk citra merupakan bilangan bulat yang berkisar dari 0 sampai 255. Citra dengan karakter seperti ini disebut sebagai citra dengan $256 = 2^8$ skala keabuan atau citra 8 bit karena terdapat 256 (0 - 255) nilai intensitas *pixel* yang mungkin [12].

Nilai intensitas *pixel* 0 menunjukan intensitas hitam atau gelap dan nilai intensitas *pixel* 255 menunjukan intensitas putih atau terang, sedangkan nilai intensitas *pixel* antara 0 dan 255 menunjukan intensitas yang berkisar antara hitam dan putih. Gambar 3 menunjukan rentangan nilai intensitas *pixel* [12].

Gambar 3. Intensitas *pixel*

Citra digital berdimensi $M \times N$ *pixel* dapat direprensentasikan oleh sebuah matriks berukuran $M \times N$. Elemen (i, j) pada matriks merupakan *pixel* (i, j) pada citra. Nilai elemen matriks a_{ij} adalah nilai intensitas *pixel* (i, j) pada citra [9].

Jumlah bit (b) yang dibutuhkan untuk menyimpan citra digital berdimensi $M \times N$ *pixel* dengan 2^k skala keabuan adalah [9]

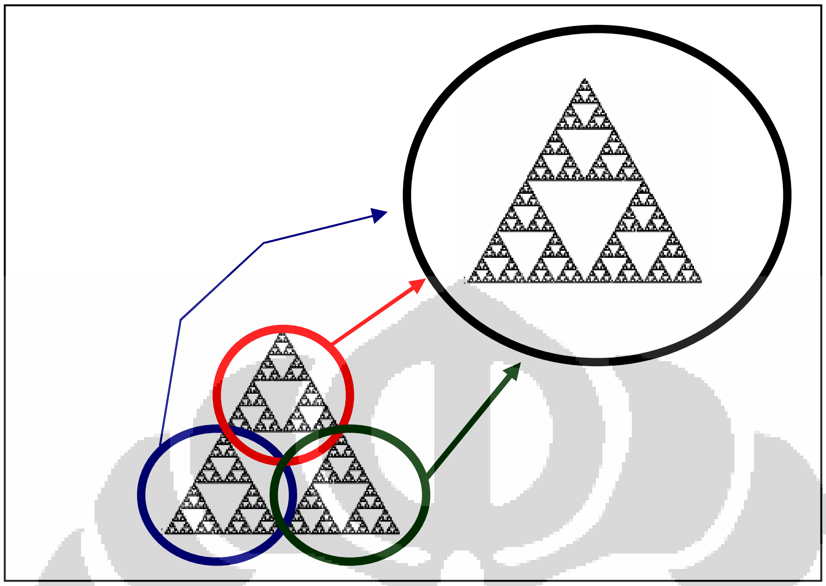
$$b = M \times N \times k \tag{2.1}$$

Sebagai contoh: sebuah citra 8 bit (2^8 = 256 skala keabuan) berdimensi 256×256 *pixel* membutuhkan memori penyimpanan sebesar $256 \times 256 \times 8 = 524.288$ bit atau 65.536 byte (1 byte = 8 bit).

2.2 CITRA FRAKTAL

Citra fraktal merupakan citra yang bersifat *self-similarity*, yaitu bagian-bagian citra sama dengan citra secara keseluruhan. Contoh citra fraktal adalah segitiga *Sierpinski* [12].

Segitiga *Sierpinski* dibentuk oleh tiga bagian. Ketiga bagian tersebut terlihat sama dengan segitiga *Sierpinski* secara keseluruhan. Ketiga bagian tersebut juga dibentuk oleh tiga bagian yang lebih kecil, yang juga terlihat sama dengan segitiga *Sierpinski* secara keseluruhan. Gambar 4 memperlihatkan segitiga *Sierpinski*.



Gambar 4. Segitiga *Sierpinski*

Gambar 4 menunjukan bahwa segitiga *Sierpinski* dibentuk oleh tiga bagian yang ditandai oleh lingkaran. Masing-masing dari bagian tersebut sama dengan segitiga *Sierpinski* secara keseluruhan. Kesamaan ini ditandai dengan tanda panah.

2.3 SIFAT CITRA

Langkah awal yang dilakukan dalam kompresi citra fraktal adalah melakukan partisi terhadap citra yang akan dikompresi. Mempartisi citra berarti membagi citra menjadi sejumlah blok (bagian) citra. Terdapat berbagai macam metode untuk mempartisi citra, akan tetapi pada skripsi ini, partisi citra yang digunakan dibatasi pada partisi reguler (*fixed size*). Mempartisi citra menggunakan partisi reguler maksudnya adalah setiap blok hasil partisi memiliki ukuran yang sama. Bagaimanakah sifat blok hasil partisi citra? Berikut ini adalah beberapa sifat citra yang berhubungan dengan partisi citra.

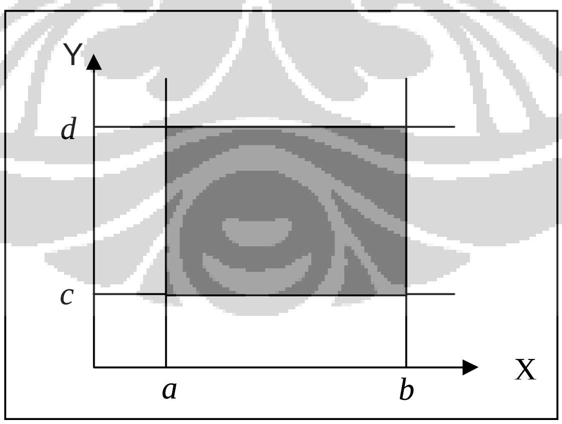
Misalkan $\Re$ merupakan himpunan citra, maka $\Re$ memiliki beberapa sifat, yaitu [3]:

1. Untuk setiap citra $I \in \Re$ memiliki sebuah pendukung dan dimensi.

Pendukung dari citra I merupakan himpunan $\square$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\square = \{(x,\ y) | a \le x \le b,\ c \le y \le d, \quad a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$$

Sebuah pendukung $\square$ dari citra I diilustrasikan sebagai media tempat citra tersebut berada. Gambar 5 mengilustrasikan sebuah pendukung dari citra I.



Gambar 5. Pendukung dari citra

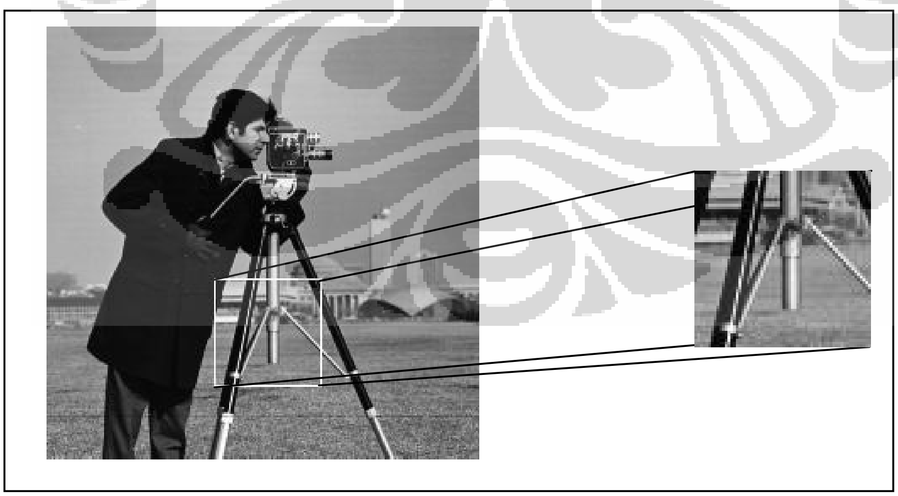
Dimensi dari citra I adalah $(b-a)$ satuan dan $(d-c)$ satuan. Dalam hal ini, ukuran satuan menunjukan satuan inci, meter, *pixel* atau satuan ukuran yang lainnya.

Suatu titik pada citra merupakan titik pada pendukungnya, begitu juga sebaliknya. Metrik d dari titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) pada pendukung citra, dihitung menggunakan persamaan berikut:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.2}$$

2. Himpunan citra $\Re$ tertutup terhadap operasi pemotongan (*clipping*)

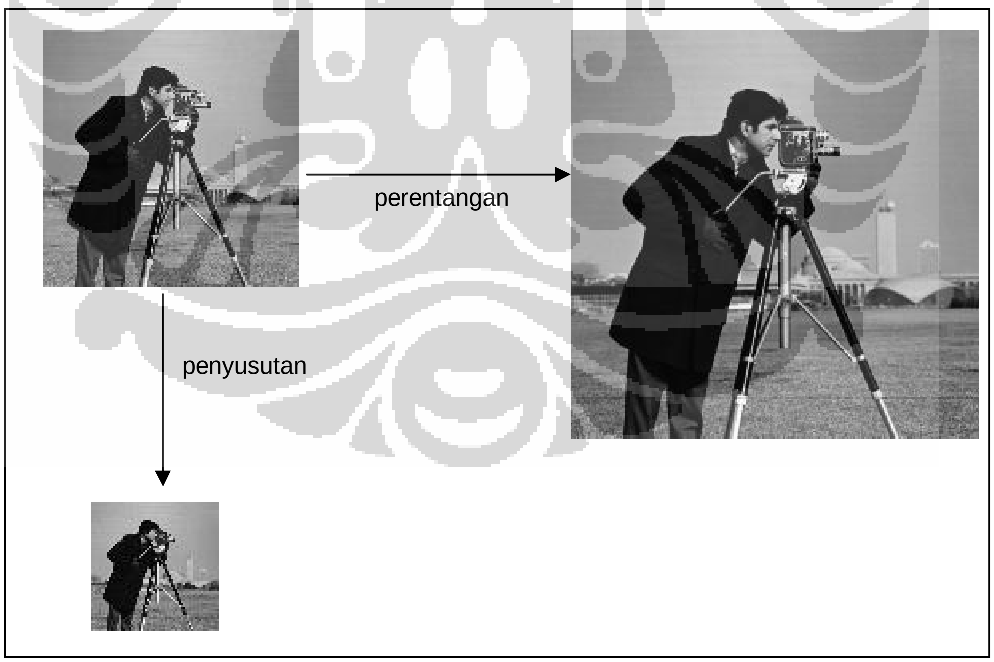
Diberikan suatu citra $I \in \Re$. Jika dilakukan operasi pemotongan terhadap I, dengan aturan setiap sisi citra hasil pemotongan pararel terhadap sisi dari I, maka citra hasil pemotongan, yaitu $\tilde{I}$, merupakan anggota dari $\Re$. Dari sini dapat disimpulkan bahwa hasil pemotongan suatu citra juga merupakan citra. Gambar 6 menunjukan operasi pemotongan pada citra.



Gambar 6. Operasi pemotongan

3. Himpunan citra $\Re$ tertutup terhadap operasi perentangan (*strecthing*) dan operasi penyusutan (*shringking*)

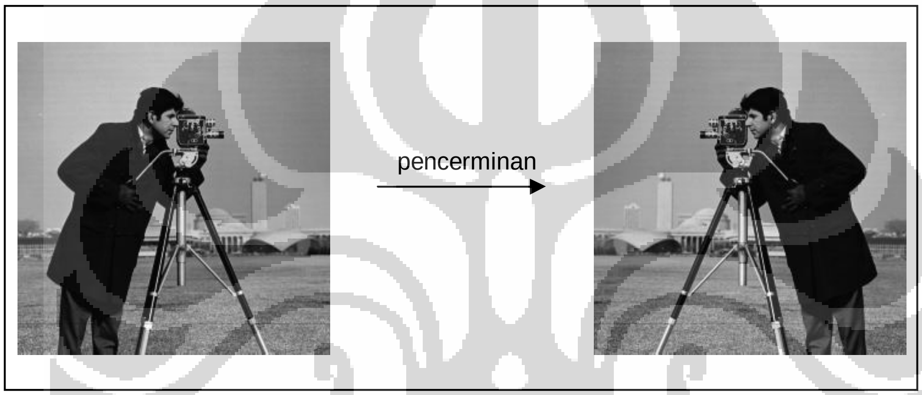
Diberikan suatu citra $I \in \Re$. Jika $\tilde{I}$ merupakan citra hasil operasi perentangan dan penyusutan I, maka $\tilde{I} \in \Re$. Dari sini dapat disimpulkan bahwa hasil perentangan dan penyusutan citra juga merupakan citra. Operasi perentangan merupakan operasi yang memperbesar dimensi citra dari dimensi citra asal dengan faktor skala tertentu, sedangkan operasi penyusutan merupakan operasi yang memperkecil dimensi citra dari dimensi citra asal juga dengan faktor skala tertentu. Gambar 7 menunjukan operasi perentangan dan penyusutan pada citra.



Gambar 7. Operasi perentangan dan penyusutan

4. Himpunan citra $\Re$ tertutup terhadap operasi pencerminan

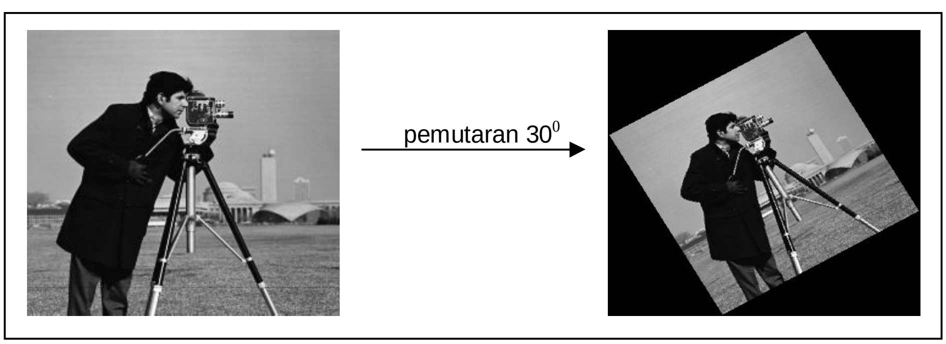
Diberikan suatu citra $I \in \Re$. Jika $\tilde{I}$ merupakan citra hasil pencerminan I terhadap suatu garis yang pararel terhadap salah satu sisi dari pendukungnya, maka $\tilde{I} \in \Re$, sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil pencerminan citra juga merupakan citra. Perhatikan Gambar 8.



Gambar 8. Operasi pencerminan

5. Himpunan citra $\Re$ tertutup terhadap operasi pemutaran (*rotation*).

Diberikan suatu citra $I \in \Re$. Jika $\tilde{I}$ merupakan citra hasil pemutaran I sebesar sudut tertentu, maka $\tilde{I} \in \Re$, sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil pemutaran citra sebesar sudut tertentu juga merupakan citra.



Gambar 9. Operasi pemutaran

2.4 RUANG METRIK DAN TRANSFORMASI *AFFINE* KONTRAKTIF

Prinsip dari kompresi citra fraktal adalah mencari kumpulan transformasi *affine* kontraktif W. Jika diberikan suatu citra $A \in \Re$ yang akan dikompresi, maka kompresi terhadap citra A dilakukan dengan mencari kumpulan transformasi *affine* kontraktif W sedemikian sehingga titik tetap (*fixed point*) dari W adalah A dan $A = W(A)$ serta $A = \lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(B)$ untuk setiap $B \in \Re$.

Agar terjamin bahwa $\lim_{n\to\infty} W^{\circ n}$ ada, maka citra haruslah merupakan anggota dari suatu ruang metrik yang lengkap. Berikut adalah beberapa definisi yang berhubungan dengan ruang metrik yang lengkap dan transformasi *affine* kontraktif.

Definisi 1 [3]. Ruang metrik $(X,\ d)$ merupakan himpunan X bersama dengan fungsi bernilai riil $d : X \times X \to \mathbb{R}$ yang mengukur jarak antara titik $x,\ y \in X$. Anggap d memenuhi sifat berikut:

a. $d(x,\ y) \geq 0, \quad \forall x,\ y \in X$

b. $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c. $d(x,\ y) = d(y,\ x), \quad \forall x,\ y \in X$

d. $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y), \quad \forall x,\ y,\ z \in X$

maka d disebut metrik pada himpunan X.

Definisi 2 [2]. Misalkan $(X,\ d)$ merupakan ruang metrik. Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pada himpunan X merupakan barisan *cauchy,* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n,\ x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n,\ m \geq n_0$

Definisi 3 [2]. Ruang metrik $(X,\ d)$ dikatakan lengkap jika setiap barisan *cauchy* pada himpunan X konvergen ke suatu titik pada himpunan X.

Definisi 4 [3]. Suatu transformasi $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang berbentuk

$$w(x,\ y) = (ax + by + e,\ cx + dy + f) \tag{2.4}$$

dengan $a,\ b,\ c,\ d,\ e \text{ dan } f$ adalah bilangan riil $(\mathbb{R})$ disebut transformasi *affine* pada $\mathbb{R}^2$. w juga dapat juga ditulis dalam bentuk

$$w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + T \tag{2.5}$$

Definisi 5 [3]. Misalkan $f : X \to X$ sebuah transformasi pada himpunan X. Suatu titik $x_f \in X$, sedemikian sehingga $f(x_f) = x_f$, disebut titik tetap (*fixed point*) dari transformasi tersebut.

Definisi 6 [3]. Suatu transformasi $f : X \to X$ pada ruang metrik $(X,\ d)$ disebut pemetaan kontraktif jika terdapat suatu konstanta $0 \leq s < 1$ sedemikian sehingga

$$d(f(x),\ f(y)) \leq s.d(x,\ y), \qquad \forall x,\ y \in X \tag{2.6}$$

Konstanta s disebut faktor kontraksi dari f.

Teorema 1 (Teorema Transformasi Kontraktif) [3]. Misalkan $f : X \to X$ merupakan transformasi kontraktif pada ruang metrik lengkap $(X,\ d)$, maka f memiliki tepat satu titik tetap $x_f \in X$ sedemikian sehingga $f\left(x_f\right) = x_f$ dan untuk sembarang titik $x \in X$, barisan $\left\{ f^{\circ n}(x) : n = 1,\ 2,\ ...\right\}$ konvergen ke x_f atau

$$\lim_{n \to \infty} f^{\circ n}(x) = x_f$$

dengan $f^{\circ n}(x) = f\left(f^{\circ(n-1)}(x)\right)$ dan $f^{\circ 0}(x) = x$.

Bukti : Lihat [3] halaman 72.

Transformasi *affine* kontraktif merupakan transformasi *affine* yang bersifat kontraktif.

2.5 RUANG CITRA

Ruang citra merupakan himpunan yang anggotanya adalah citra. Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya bahwa suatu citra haruslah merupakan anggota dari suatu ruang metrik yang lengkap. Oleh karena itu, ruang citra haruslah suatu ruang metrik yang lengkap. Ruang citra dinotasikan dengan $\mathrm{H}(X)$.

Berikut adalah beberapa definisi dan lema yang berhubungan dengan ruang citra.

Definisi 7 [3]. Misalkan $S \subset X$ merupakan sub himpunan dari ruang metrik $(X,\, d)$. Suatu titik $x \in X$ disebut titik limit dari S jika ada sebuah barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Definisi 8 [3]. Misalkan $S \subset X$ merupakan sub himpunan dari ruang metrik $(X,\, d)$. *Closure* dari S, dinotasikan dengan $\overline{S}$, didefinisikan sebagai $\overline{S} = S \cup \{\text{titik limit dari } S\}$.

Definisi 9 [3]. S adalah tertutup jika S mengandung semua titik limitnya, yaitu $S = \overline{S}$.

Definisi 10 [3]. Misalkan $S \subset X$ merupakan sub himpunan dari ruang metrik $(X,\, d)$. S dikatakan terbatas jika terdapat sebuah titik $a \in X$ dan suatu bilangan $R > 0$ sedemikian sehingga $d(a,\, x) < R, \quad \forall x \in X$.

Lema 1 [2]. Sub himpunan A dari ruang metrik $(X,\ d)$ kompak jika dan hanya jika A tertutup dan terbatas.

Bukti : Lihat [2] halaman 321.

Definisi 11 [3]. Misalkan $(X,\ d)$ adalah ruang metrik lengkap. Maka ruang citra $\mathrm{H}(X)$ merupakan himpunan yang anggotanya adalah sub himpunan kompak dari X selain himpunan kosong.

$\mathrm{H}(X)$ merupakan himpunan dimana titik-titik pada himpunan $\mathrm{H}(X)$ merupakan citra, yang dalam hal ini merupakan sub himpunan yang kompak dari X.

Agar $\mathrm{H}(X)$ merupakan ruang metrik, suatu metrik harus didefinisikan pada $\mathrm{H}(X)$. Berikut beberapa definisi yang dibutuhkan untuk mendefinisikan metrik pada himpunan $\mathrm{H}(X)$.

Definisi 12 [3]. Misalkan $(X,\ d)$ merupakan ruang metrik lengkap, $x \in X$ dan $B \in \mathrm{H}(X)$, definisikan

$$d(x,\ B) = \min\{d(x,\ y) \mid y \in B\} \tag{2.7}$$

$d(x,\ B)$ merupakan jarak dari titik x ke himpunan B.

Definisi 13 [10]. Misalkan $(X,\ d)$ merupakan ruang metrik lengkap dan $A,\ B \in \mathrm{H}(X)$, definisikan

$$d(A,\ B) = \max\{d(x,\ B) \mid x \in A\} \tag{2.8}$$

$d(A, B)$ merupakan jarak antara himpunan $A \in \mathrm{H}(X)$ dengan himpunan $B \in \mathrm{H}(X)$.

d tidak dapat dijadikan sebagai metrik pada himpunan $\mathrm{H}(X)$ karena $d(A, B)$ belum tentu sama dengan $d(B, A)$. Misalkan $A = [-1, 0] \subset \mathbb{R}$ dan $B = [0, 2] \subset \mathbb{R}$. A dan B merupakan sub himpunan kompak dari ruang metrik lengkap $\mathbb{R}$, sehingga $A, B \in \mathrm{H}(\mathbb{R})$. $d(A, B) = 1$, sementara $d(B, A) = 2$, sehingga d tidak dapat dijadikan metrik pada himpunan $\mathrm{H}(X)$.

Definisi 14 [10]. Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik lengkap, maka metrik *Haussdorf* pada himpunan $\mathrm{H}(X)$ didefinisikan sebagai:

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) \tag{2.9}$$

$A, B \in \mathrm{H}(X)$. $d(A, B) \vee d(B, A)$ menyatakan nilai maksimum dari $d(A, B)$ dan $d(B, A)$.

Berdasarkan Definisi 14, $h(A, B)$ merupakan maksimum dari jarak A ke B dan jarak B ke A dengan $A, B \in \mathrm{H}(X)$.

Lema 2 [10]. h merupakan metrik pada $\mathrm{H}(X)$

Bukti: Lihat [10] halaman 5.

Berdasarkan Lema 2, metrik pada ruang $\mathrm{H}(X)$ adalah h yang didefinisikan oleh persamaan (2.9).

Kelengkapan dari ruang metrik $\left(\mathrm{H}(X),\ h\right)$ terangkum dalam teorema berikut:

Teorema 2 [13]. Misalkan $(X,\ d)$ merupakan ruang metrik lengkap. Maka $\left(\mathrm{H}(X),\ h\right)$ merupakan ruang metrik lengkap, dan jika $\left\{A_n \in \mathrm{H}(X) \mid n = 1,\ 2, \ldots\right\}$ merupakan barisan *cauchy* di $\mathrm{H}(X)$, maka barisan tersebut konvergen ke satu titik tetap $A \in \mathrm{H}(X)$, yaitu

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n \in \mathrm{H}(X)$$

dimana A dapat ditulis sebagai

$$A = \left\{x \in X \mid \exists \text{ barisan cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ yang konvergen ke } x\right\}$$

Bukti: Lihat [13] halaman 19.

2.6 PEMETAAN KONTRAKTIF PADA RUANG CITRA

Setelah mendefinisikan ruang citra, maka harus didefinisikan pemetaan kontraktif pada ruang citra. Sub bab ini menjelaskan tentang definisi dari pemetaan kontraktif pada ruang citra $\mathrm{H}(X)$. Berikut adalah beberapa lema yang diperlukan untuk mendefinisikan pemetaan kontraktif pada ruang citra.

Lema 3 [3]. Misalkan $w: X \to X$ merupakan pemetaan kontraktif pada ruang metrik $(X,\ d)$. Maka w kontinyu.

Bukti: Lihat [3] halaman 78.

Lema 4 [3]. Misalkan $w: X \to X$ merupakan pemetaan yang kontinyu pada ruang metrik (X, d). Maka w memetakan $\mathrm{H}(X)$ ke $\mathrm{H}(X)$.

Bukti: Lihat [3] halaman 78.

Pemetaan kontraktif pada $\mathrm{H}(X)$ dapat dibentuk dengan menggunakan pemetaan kontraktif pada X. Hal tersebut dirangkum dalam Lema 5 berikut:

Lema 5 [3]. Misalkan $w: X \to X$ merupakan pemetaan kontraktif pada ruang metrik (X, d) dengan faktor kontraksi s. Maka $w: \mathrm{H}(X) \to \mathrm{H}(X)$ yang didefinisikan oleh

$$w(B) = \{w(x) \mid x \in B\}, \quad \forall B \in \mathrm{H}(X) \qquad (2.10)$$

merupakan pemetaan kontraktif pada $(\mathrm{H}(X), h(d))$ dengan faktor kontraksi s yaitu;

$$h(w(A), w(B)) \le s \cdot h(A, B), \quad \forall A, B \in \mathrm{H}(X) \qquad (2.11)$$

Bukti: Lihat [3] halaman 79.

Berdasarkan Lema 5, pemetaan kontraktif pada X juga merupakan pemetaan kontraktif pada $\mathrm{H}(X)$. Selain itu, gabungan pemetaan kontraktif pada $\mathrm{H}(X)$ juga merupakan suatu pemetaan kontraktif pada $\mathrm{H}(X)$. Hal tersebut dijelaskan pada lema berikut:

Lema 6 [13]. Misalkan $(X,\ d)$ merupakan ruang metrik lengkap. Misalkan $\{w_n : n = 1,\ 2,\ ...,\ N\}$ merupakan himpunan pemetaan kontraktif pada $(\mathrm{H}(X),\ h)$. Misalkan s_n merupakan faktor kontraksi untuk w_n. Definisikan $W : \mathrm{H}(X) \to \mathrm{H}(X)$ sebagai

$$\begin{aligned} W(B) &= w_1(B) \cup w_2(B) \cup ... \cup w_N(B) \\ &= \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B), \quad \forall B \in \mathrm{H}(X) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Maka W merupakan pemetaan kontraktif pada $\mathrm{H}(X)$ dengan faktor kontraksi $s = \max\{s_n \mid n = 1,\ 2,\ ...,\ N\}$.

Bukti: Lihat [13] halaman 24

Dari penjelasan diatas dapat disimpulkan bahwa pemetaan kontraktif pada ruang citra $\mathrm{H}(X)$ dibentuk dari pemetaan kontraktif pada ruang metrik X. Selain itu, gabungan dari pemetaan kontraktif pada ruang citra merupakan pemetaan yang kontraktif pada ruang citra.

2.7 *ITERATED FUNCTION SYSTEM* (IFS)

Sebagaimana telah disebutkan bahwa prinsip kompresi citra fraktal ialah jika diberikan suatu citra $A \in \mathrm{H}(X)$, maka akan dicari suatu proses W yang merupakan kumpulan pemetaan kontraktif pada $\mathrm{H}(X)$ sedemikian sehingga $A = W(A)$ dan jika $A_n = W(A_{n-1})$ maka $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ [10]. Berdasarkan Lema 6, W merupakan pemetaan kontraktif pada $\mathrm{H}(X)$. Kumpulan dari pemetaan kontraktif (W) pada $\mathrm{H}(X)$ disebut *Iterated Function System* disingkat IFS.

W merupakan pemetaan yang kontraktif pada $\mathrm{H}(X)$ dan $\mathrm{H}(X)$ merupakan ruang metrik lengkap, berdasarkan Teorema 1, W memiliki satu titik tetap $A \in \mathrm{H}(X)$ sedemikian sehingga $W(A) = A$ dan untuk sembarang $B \in \mathrm{H}(X)$, barisan $\left\{W^{\circ n}(B)\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke titik tetap A. A disebut juga *attractor* dari W.

Berikut adalah definisi IFS secara formal:

Definisi 15 [3]. Sebuah IFS terdiri atas ruang metrik lengkap (X, d) bersama dengan himpunan terhingga pemetaan kontraktif $w_n : X \to X$ dengan faktor kontraksi s_n untuk setiap $n = 1, 2, ..., N$. Notasi untuk IFS adalah $\{X; w_n, \ n = 1, 2, ..., N\}$ dan faktor kontraksinya adalah $s = \max\{s_n \mid n = 1, 2, ..., N\}$.

Berikut adalah teorema yang berhubungan dengan IFS:

Teorema 3 (Teorema IFS) [13]. Misalkan $\{X; w_n, \quad n = 1, 2, ..., N\}$ merupakan sebuah IFS dengan faktor kontraksi s. Maka transformasi $W : \mathrm{H}(X) \to \mathrm{H}(X)$ yang didefinisikan oleh

$$W(B)=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(B) \tag{2.13}$$

untuk setiap $B \in \mathrm{H}(X)$, merupakan pemetaan kontraktif pada ruang metrik

$$\left(\mathrm{H}(X),\ h(d)\right)$$

dengan faktor kontraksi s sehingga

$$h\left(W(B),\ W(C)\right) \le s.h(B,\ C) \tag{2.14}$$

untuk setiap $B,\ C \in \mathrm{H}(X)$. Transformasi tersebut mempunyai titik tetap, $A \in \mathrm{H}(X)$ yang memenuhi

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A) \tag{2.15}$$

dan $A = \lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(B)$ untuk setiap $B \in \mathrm{H}(X)$.

Bukti: Lihat [13] halaman 26.

2.8 MODEL MATEMATIS DARI CITRA

Secara matematis, citra dimodelkan sebagai suatu fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{I}$, dengan I adalah skala keabuan citra dan $\mathrm{I} = [0,\ 255]$. Setiap *pixel* $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ memiliki nilai intensitas *pixel* $f(x,\ y)$ [5] [6].

Metrik $\delta(f,\ g)$ antara dua citra $f,\ g : A \to \mathrm{I}$, dengan $A \subset \mathbb{R}^2$, didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$\delta(f, g) = \sup_{(x, y)\in A} \left| f(x, y) - g(x, y) \right| \quad (2.3)$$

Berdasarkan definisi $\delta(f, g)$, metrik antara citra f dan citra g merupakan perbedaan intensitas *pixel* terbesar pada *pixel* (x, y).

2.9 ALGORITMA GENETIKA

Algoritma genetika merupakan algoritma pencarian berdasarkan mekanisme seleksi alamiah dan genetika alamiah. Algoritma genetika diperkenalkan pertama kali oleh John Holland pada tahun 1960-an. Kini algoritma genetika telah dipelajari, diteliti dan diaplikasikan secara luas pada berbagai bidang [14].

Algoritma genetika banyak digunakan untuk mencari solusi dari suatu permasalahan yang memiliki ruang solusi cukup luas [14]. Setiap solusi yang mungkin bagi permasalahan tersebut dimodelkan sebagai sebuah kromosom. Dalam satu waktu, kromosom-kromosom membentuk satu populasi. Kromosom terdiri atas beberapa informasi dengan spesifikasi informasi tergantung pada permasalahan yang akan diselesaikan.

Algoritma genetika dapat digunakan untuk mencari solusi yang optimal dari suatu masalah. Pada algoritma genetika, pencarian solusi yang optimal dimulai dengan inisialisasi beberapa kromosom yang mungkin secara acak.

Setiap kromosom diberikan nilai *fitness*. Nilai *fitness* merupakan ukuran yang digunakan untuk menilai baik atau tidak suatu kromosom untuk tetap tinggal dalam suatu populasi. Semakin tinggi nilai *fitness* kromosom, maka kemungkinan kromosom tetap tinggal dalam populasi akan semakin besar. Semakin tinggi nilai *fitness* juga berarti semakin baik kromosom digunakan sebagai solusi terhadap masalah yang ingin diselesaikan.

Beberapa kromosom yang memiliki nilai *fitness* paling tinggi dipilih dan kemudian dilakukan proses pindah silang (*crossover*). Dari proses tersebut diperoleh kromosom anak (*offspring*) yang memiliki informasi hasil persilangan informasi orangtuanya. Proses mutasi dilakukan terhadap beberapa kromosom dengan menukarkan informasi dari dari suatu kromosom secara acak. Pindah silang dan mutasi dilakukan dengan harapan terbentuk kromosom baru dengan nilai *fitness* yang lebih tinggi dari nilai *fitness* orangtuanya.

Algoritma genetika standar terdiri atas beberapa komponen berikut :

1. Kromosom

Kromosom merupakan representasi solusi yang mungkin dari masalah. Solusi-solusi yang mungkin akan dikodekan menjadi kromosom-kromosom.

2. Nilai *Fitness*

Nilai *fitness* merupakan nilai yang diberikan kepada setiap kromosom dalam satu populasi yang menunjukan seberapa baik kromosom tersebut untuk tetap tinggal dalam populasi. Implikasi dari hal tersebut adalah kromosom dengan nilai *fitness* lebih tinggi merupakan solusi yang lebih baik daripada kromosom dengan nilai *fitness* lebih rendah.

3. Seleksi Orangtua

Sebelum melakukan pindah silang dan mutasi, harus dilakukan proses pemilihan (seleksi) orangtua. Pindah silang dan mutasi dilakukan terhadap kromosom yang terpilih.

Seleksi orangtua dalam satu populasi terkait dengan nilai *fitness* kromosom. Semakin tinggi nilai *fitness*, maka peluang untuk terpilih semakin besar. Metode yang umum digunakan sebagai metode seleksi orangtua adalah metode roda roulete (*roulette-wheel*).

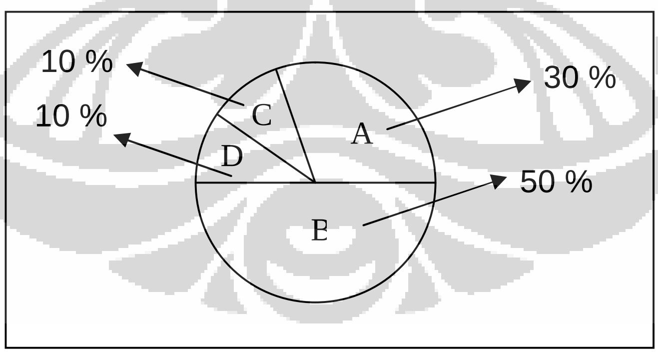
Roda roulete digambarkan sebagai papan berbentuk lingkaran dengan beberapa juring. Banyak juring yang terbentuk sesuai dengan jumlah kromosom dalam populasi. Besarnya ukuran juring tidaklah sama, akan tetapi dibuat proporsional dengan nilai *fitness* masing-masing kromosom. Roda roulete ini kemudian diputar dan diberi sebuah jarum penanda di bagian bawah atau atasnya sebagai penentu bagian yang terpilih. Bagian juring yang ditunjuk oleh jarum tersebut -ketika roda roulete berhenti- adalah bagian yang terpilih dan kromosom yang direpresentasikan oleh bagian tersebut adalah kromosom yang terpilih.

Sebagai contoh: dalam satu populasi terdapat 4 buah kromosom, yaitu A, B, C, dan D dengan nilai *fitness* berturut-turut adalah 3, 5, 1, 1. Jumlah dari seluruh nilai *fitness* adalah 10. Aturan pembagian luas juring adalah sebagai berikut; A sebesar $\left(\frac{3}{10}\right)\times 100\% = 30\%$, B sebesar $\left(\frac{5}{10}\right)\times 100\% = 50\%$, C dan D masing-masing sebesar $\left(\frac{1}{10}\right)\times 100\% = 10\%$. Berikut adalah tabel nilai *fitness* dari keempat kromosom tersebut.

Tabel 1. Nilai *fitness*

Kromosom	*Fitness*
A	3
B	5
C	1
D	1
Jumlah	10

Berdasarkan nilai *fitness* pada Tabel 1, maka skema pembagian roda roulete adalah sebagai berikut:



Gambar 10. Roda roulete

4. Pindah Silang (*crossover*)

Pindah silang merupakan proses penurunan sifat dari dua kromosom orangtua menjadi kromosom anak. Proses pindah silang akan menghasilkan dua kromosom anak. Sifat dari kromosom anak hasil pindah silang merupakan persilangan sifat kedua orangtuanya. Terjadinya proses pindah silang dalam suatu populasi ditentukan oleh probabilitas pindah silang. Skema pindah silang yang digunakan tergantung pada masalah yang akan diselesaikan. Skema pindah silang tertentu mungkin cocok untuk masalah A, tapi tidak cocok untuk masalah B, begitu juga sebaliknya [14].

5. Mutasi

Mutasi merupakan proses perubahan informasi kromosom. Terjadinya mutasi kromosom ditentukan oleh probabilitas mutasi.

Kromosom hasil pindah silang dan mutasi dihitung nilai *fitness*-nya. Beberapa kromosom dengan nilai *fitness* terbaik menggantikan kromosom dengan nilai *fitness* rendah sehingga diperoleh populasi baru.

Berikut adalah *pseucode* dari algoritma genetika [15]:

Algoritma Genetika

$P \leftarrow$ `Inisialisasi populasi (N buah kromosom)`

`for` `setiap kromosom` $\{p_i \in P\}_{i=1}^{N}$ `evaluasi fitness` p_i

`while` `(kriteria berhenti belum tercapai)` **`and`**
      `(generasi terakhir belum tercapai)`

    `generate` `populasi baru menggunakan operator seleksi, pindah silang, mutasi`

    `Evaluasi nilai fitness kromosom pada populasi baru`

    `Ganti kromosom lama dengan kromosom terbaik`

`end while`

2.10 KRITERIA KOMPRESI

Kriteria kompresi merupakan suatu ukuran yang digunakan untuk menilai baik atau buruk suatu metode kompresi. Suatu metode kompresi dinilai dari 2 kriteria: pertama, kualitas citra hasil kompresi (PSNR) dan kedua, rasio kompresi yang dicapai.

Metrik yang digunakan dalam aplikasi untuk mengukur perbedaan antara dua citra adalah metrik rms. Perbedaan antara dua citra z dan z' yang masing-masing berdimensi $n \times n$ diukur menggunakan persamaan berikut [6] [9] [12] :

$$rms = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(z'_{ij} - z_{ij}\right)^2} \tag{2.16}$$

dengan z_{ij}, z'_{ij} berturut-turut menyatakan nilai intensitas *pixel* (i, j) pada citra asli z dan citra hasil dekompresi z'. Berikut adalah dua kriteria kompresi:

1. Kualitas Citra (PSNR)

Kualitas citra hasil dekompresi diukur menggunakan *Peak signal-to-noise ratio* (PSNR) [12] [6], yaitu

$$PSNR = 20 \times \log_{10}\left(\frac{b}{rms}\right) \tag{2.17}$$

dengan b adalah nilai intensitas *pixel* terbesar. Semakin besar nilai $PSNR$, maka kualitas citra hasil dekompresi semakin baik. Satuan untuk PSNR adalah db (desibel).

2. Rasio Kompresi

Rasio kompresi yang dicapai, diukur menggunakan persamaan berikut [12]:

$$rasio = 100\% - \left(\frac{\text{ukuran citra hasil kompresi}}{\text{ukuran citra asli}}\right) \times 100\% \tag{2.18}$$

Ukuran citra menyatakan besar penggunaan memori untuk menyimpan citra. Semakin tinggi rasio yang dicapai, maka metode kompresi semakin baik.