

**PENGUNAAN METODE  
EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION  
(EBLUP) PADA GENERAL LINEAR MIXED MODEL**



**TRI HANDHIKA  
0 3 0 4 0 1 0 5 9 5**



**UNIVERSITAS INDONESIA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
DEPOK  
2008**

**PENGUNAAN METODE  
EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION  
(EBLUP) PADA GENERAL LINEAR MIXED MODEL**

**TUGAS AKHIR**

**Disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains di Universitas Indonesia**

**Oleh:**

**TRI HANDHIKA**

**0 3 0 4 0 1 0 5 9 5**



**DEPOK**

**2008**

SKRIPSI : PENGGUNAAN METODE *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP) PADA *GENERAL LINEAR MIXED MODEL*

NAMA : TRI HANDHIKA

NPM : 0304010595

TUGAS AKHIR INI TELAH DIPERIKSA DAN DISETUJUI

DEPOK, 4 DESEMBER 2008

**Dra. Ida Fithriani, M.Si**

PEMBIMBING I

**Fevi Novkaniza, M.Si**

PEMBIMBING II

Tanggal lulus Ujian Sidang Sarjana: 12 Desember 2008

Penguji I : Dra. Ida Fithriani M.Si.

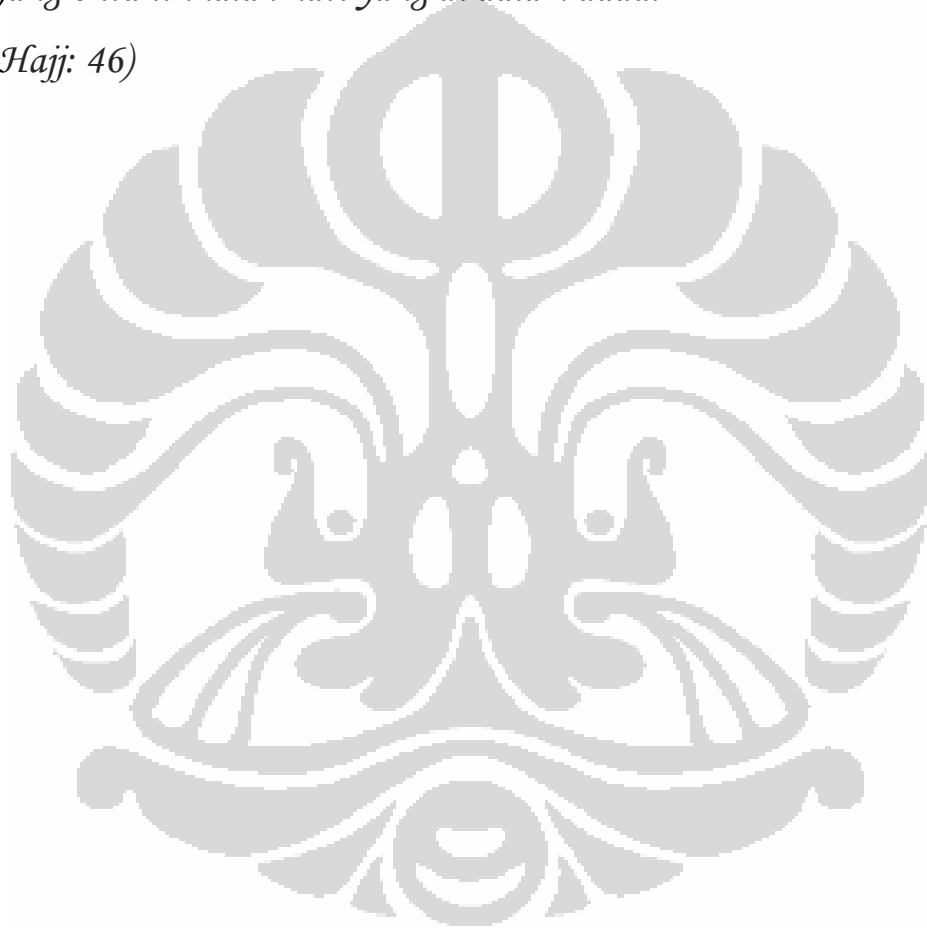
Penguji II : Dr. Dian Lestari.

Penguji III : Dra. Nora Hariadi M.Si.

*Maka tidak pernahkah mereka berjalan di bumi,  
sehingga hati (akal) mereka dapat memahami,  
telinga mereka dapat mendengar?*

*Sebenarnya bukan mata itu yang buta,  
Tetapi yang buta itu ialah hati yang di dalam dada.*

*(QS Al-Hajj: 46)*



*Tulisan ini kupersembahkan untuk  
Ayah, Ibu, Kakak, dan Calon Istriku*

## KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Yang Maha Kuasa karena hanya atas berkat dan rahmat-Nya sajalah sehingga penyusunan Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.

Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat mendapatkan gelar Sarjana Sains (S1) pada Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas dukungan, bimbingan, dan pengarahan yang sangat berharga dalam penyelesaian Tugas Akhir ini kepada:

1. Kedua orang tuaku tercinta, Pak Muchid dan Bu Yati, kakak-kakakku, Mba Ika dan Mas Dwi, serta calon istriku, Murni, yang selalu memberikan doa, semangat, dan kasih sayang kepada penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Ibu Dra. Ida Fithriani M.Si dan Mba Fevi Novkaniza M.Si selaku pembimbing Tugas Akhir yang telah membimbing dan mengarahkan penulis.
3. Ibu Dra. Denny Riama Silaban M.Kom selaku Dosen Wali.

4. Segenap Staf Pengajar, Karyawan Tata Usaha, dan Perpustakaan Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu pnetahuan Alam, Universitas Indonesia.
5. Sahabatku Kusnanto, yang selalu mendengar curhatan penulis.
6. MEMBER 5, Adidarma Sepang, Irwanto, Reza Henganing Ayodya, dan Revaldo Ilfestra Metzi Zen, yang selalu memberi inspirasi bagi penulis.
7. F 4, Bong Novi Herawati, Evarida Meilina Simatupang, dan Milka Hutagalung, yang selalu membantu dalam hal akademis dan ekonomis dengan humoris dan tangis (naon sich??).
8. Ajat Adriansyah, Mba Lenny Suardi, Edi Setiawan, Ega Prihastari, dan Rieska Indah Astuti, serta Yanuar, yang membantu penulis menghilangkan pertanyaan-pertanyaan yang muncul selama menyelesaikan Tugas Akhir ini.
9. Teman-teman menggila 2004, yang tidak ingin disebutkan namanya (HUAHAHAHA....) yang telah mewarnai kehidupan penulis selama empat setengah tahun di Universitas Indonesia.
10. Rekan-rekan Asisten Dosen Departemen Manajemen, Fakultas Ekonomi, Universitas Indonesia, yang memberikan pengalaman luar biasa dalam hal berorganisasi.
11. Rekan-rekan Paduan Suara Paragita, Universitas Indonesia, yang mengisi kebosanan penulis selama di Universitas Indonesia.
12. Rekan-rekan Guru SMA Dwiwarna (*Boarding School*), yang banyak memberikan masukan dan saran dalam pengembangan diri penulis.

13. Semua pihak yang telah membantu penulis baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih belum sempurna dan perlu dilakukannya studi yang lebih mendalam. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran sebagai bekal penyempurnaan penulisan-penulisan selanjutnya di kemudian hari.

Akhir kata, penulis berharap semoga tulisan ini dapat bermanfaat dalam pengembangan Ilmu Matematika dan disiplin ilmu lainnya.

Depok, Desember 2008

Penulis,

Tri Handhika

0304010595

## ABSTRAK

Tugas Akhir ini bertujuan untuk mencari taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model*. Parameter-parameter dalam *General Linear Mixed Model* merupakan parameter untuk melihat efek *fixed* dan efek *random* dari variabel-variabel prediktor terhadap variabel respon. Salah satu metode yang digunakan untuk mencari taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* adalah Metode *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP).

Berbeda dengan Metode *Best Linear Unbiased Prediction* (BLUP) di mana parameter dari variansi efek *random*-nya diketahui, Metode EBLUP memerlukan penaksiran terhadap parameter tersebut yang pada kenyataannya tidak diketahui nilainya. Metode yang digunakan untuk menaksir parameter dari variansi efek *random* ini ialah Metode *Maximum Likelihood* (ML). Kemudian, Metode EBLUP dilanjutkan dengan mensubstitusikan taksiran parameter dari variansi efek *random* ke dalam taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* yang diperoleh melalui prosedur penaksiran dengan menggunakan Metode BLUP.

Kata kunci: *Best Linear Unbiased Prediction; Empirical Best Linear Unbiased Prediction; General Linear Mixed Model*.

Bibliografi: 14 (1959– 2007)



## DAFTAR ISI

	Halaman
KATA PENGANTAR .....	i
ABSTRAK .....	iv
DAFTAR ISI .....	v
DAFTAR LAMPIRAN .....	viii
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	2
1.3 Tujuan Penulisan .....	2
1.4 Pembatasan Masalah .....	3
1.5 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II. LANDASAN TEORI	
2.1 Matriks	
2.1.1 <i>Trace</i> Matriks .....	6
2.1.2 <i>Rank</i> Matriks .....	8
2.1.3 Invers Matriks.....	11
2.1.4 Determinan dan <i>Adjoint</i> Matriks .....	11
2.2 Notasi Bentuk Linier, Bentuk Kuadratik, Definit Positif, dan Semi-Definit Positif .....	14

2.3	Diferensiasi Matriks	
2.3.1	Definisi dan Notasi Diferensiasi Matriks.....	15
2.3.2	Diferensiasi Bentuk Linier dan Bentuk Kuadratik.....	20
2.3.3	Diferensiasi dari Penjumlahan dan Perkalian Matriks .....	21
2.3.4	Diferensiasi dari <i>Trace</i> Matriks .....	22
2.3.5	Aturan Rantai.....	23
2.3.6	Diferensiasi Parsial Pertama dari Determinan, Invers, dan <i>Adjoint</i> Matriks.....	27
2.3.7	Diferensiasi Parsial Kedua dari Determinan dan Invers Matriks .....	31
2.4	Vektor <i>Random Normal</i> .....	33
2.5	Estimasi Parameter	
2.5.1	Metode <i>Maximum Likelihood (ML)</i> .....	35
2.5.2	<i>Scoring Algorithm</i> .....	36
2.6	Definisi Faktor <i>Fixed</i> dan Faktor <i>Random</i> .....	36
2.7	<i>Linear Regression Model, Generalized Linear Regression Model, dan General Linear Mixed Model</i> beserta Metode-Metode Penaksirannya	
2.7.1	<i>Linear Regression Model (LRM)</i> .....	39
2.7.2	<i>Generalized Linear Regression Model (GLRM)</i> .	44
2.7.3	<i>General Linear Mixed Model</i> .....	46

2.8	Definisi Fungsi Genap, Fungsi Ganjil, dan <i>Translation-Invariant</i>	
2.8.1	Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil .....	49
2.8.2	<i>Translation-invariant</i> .....	50
BAB III. PENGGUNAAN METODE <i>EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION (EBLUP)</i> PADA <i>GENERAL LINEAR MIXED MODEL</i>		
3.1	Penaksiran Parameter pada <i>General Linear Mixed Model</i> dengan Asumsi <b>b</b> dan <b>e</b> Berdistribusi Normal .....	52
3.2	Memeriksa bahwa Taksiran Parameter pada <i>General Linear Mixed Model</i> yang didapat dengan atau tanpa Asumsi <b>b</b> dan <b>e</b> Berdistribusi Normal adalah Identik....	56
3.3	Penaksiran Parameter dari Variansi Efek <i>Random</i> ( $\delta$ )	58
3.4	Penaksiran Parameter pada <i>General Linear Mixed Model</i> dengan Metode EBLUP .....	60
BAB IV. PENERAPAN.....		62
BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN		
5.1	Kesimpulan .....	65
5.2	Saran .....	66
DAFTAR PUSTAKA .....		67
LAMPIRAN .....		69

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1. Bukti Lemma 2.18 .....	69
2. Bukti (2.3.2.a), (2.3.2.b), dan (2.3.2.c).....	70
3. Bukti (2.3.3.a).....	72
4. Bukti (2.3.3.b).....	73
5. Bukti (2.3.7.a), (2.3.7.b), dan (2.3.7.c).....	74
6. Bukti $\theta$ memaksimumkan $L(\theta) \leftrightarrow \theta$ memaksimumkan $\ln L(\theta)$ ....	76
7. Metode Newton-Raphson.....	85
8. Bukti (2.7.3.b).....	91
9. Bukti (3.1.2).....	93
10. Bukti (3.1.3).....	94
11. Bukti (3.1.4) dan (3.1.5).....	95
12. Bukti (3.1.6) dan (3.1.7).....	96
13. Bukti bahwa $\mathbf{W} = \mathbf{\Omega}^{-1}$ .....	97
14. Bukti bahwa $(\mathbf{Z}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{G} \mathbf{Z}^T \mathbf{\Omega}^{-1}$ .....	98
15. Bukti (3.3.1).....	99
16. Bukti (3.3.3).....	100
17. Bukti (3.3.5).....	101

18. Bukti bahwa $\hat{\tau}(\hat{\delta}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ tetap <i>unbiased</i> untuk mengestimasi $\tau = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\beta}$ .....	103
19. Data Ilustrasi Penggunaan Metode EBLUP pada <i>General Linear Mixed Model</i> serta Bentuk Matriks $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{Z}$ .....	106
20. Pengujian Kenormalan .....	108
21. Penaksiran Parameter pada <i>General Linear Mixed Model</i> menggunakan <i>Software</i> MATLAB 7.0.1 .....	109
22. Tabel Perbandingan antara $\mathbf{y}$ dan $\hat{\mathbf{y}}$ .....	111
23. Tabel <i>Error</i> .....	113