BAB III

PENGGUNAAN METODE

EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION

(EBLUP) PADA *GENERAL LINEAR MIXED MODEL*

Pada Bab III ini akan dibahas mengenai taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* berdasarkan asumsi **b** dan **e** berdistribusi normal di mana taksiran parameter yang didapat ternyata identik dengan taksiran parameter tanpa asumsi distribusi yang sebelumnya telah diketahui. Kemudian, pembahasan dilanjutkan dengan penaksiran parameter dari variansi efek *random* (δ) yang pada kenyataannya tidak diketahui nilainya. Metode yang digunakan untuk menaksir δ tersebut adalah Metode *Maximum Likelihood* (ML). Dengan adanya penaksiran δ ini, akan diperiksa kembali ketakbiasan dari penaksir yang baru pada *General Linear Mixed Model* yang tergantung pada δ.

3.1. Penaksiran Parameter pada *General Linear Mixed Model* dengan Asumsi b dan e Berdistribusi Normal

Pada Bab sebelumnya telah dijelaskan mengenai penggunaan Metode *Best Linear Unbiased Prediction* (BLUP) dalam penaksiran pada *General Linear Mixed Model* tanpa asumsi distribusi. Untuk sekadar mengingat, bentuk *General Linear Mixed Model* adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{Zb} + \mathbf{e}$$

di mana

$\mathbf{y}$: vektor *random* dari variabel respon yang terobservasi berukuran $n \times 1$ di mana nilai observasinya disebut vektor data.

$\mathbf{X}$: matriks *full rank* berukuran $n \times k$ dari variabel prediktor yang elemen elemennya diketahui.

$\boldsymbol{\alpha}$: vektor parameter bersifat *fixed* berukuran $k \times 1$ yang tidak diketahui dan tidak terobservasi.

$\mathbf{Z}$: matriks *full rank* berukuran $n \times h$ dari variabel prediktor yang elemen elemennya diketahui.

$\mathbf{b}$: vektor *random* parameter yang tidak diketahui dan tidak terobservasi berukuran $h \times 1$.

$\mathbf{e}$: vektor *random error* yang tidak terobservasi berukuran $n \times 1$.

dengan asumsi

$E(\mathbf{b})=\mathbf{0}$, $E(\mathbf{e})=\mathbf{0}$, $Var(\mathbf{b})=E(\mathbf{bb}^T)=\mathbf{G}$, $Var(\mathbf{e})=E(\mathbf{ee}^T)=\mathbf{R}$, di mana **b** dan **e** *independently distributed* sedangkan **G** dan **R** adalah matriks varians kovarians yang tergantung pada vektor parameter dari variansi efek *random*, yaitu $\delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_q)^T$. Misalkan pula nilai-nilai dari vektor *random* **b** dan **e** berturut-turut dinotasikan dengan β dan ε di mana β dan ε berbentuk vektor. Oleh karena **b** dan **e** independen, maka $corr(\mathbf{b},\mathbf{e})=\mathbf{0}$ sehingga $\operatorname{cov}(\mathbf{b},\mathbf{e})=E(\mathbf{be}^T)=E(\mathbf{eb}^T)=\mathbf{0}$. Berikut ini diberikan bentuk dari matriks **G** dan **R**:

$$\mathbf{G}(\delta)=\begin{pmatrix} g_{11}(\delta) & g_{12}(\delta) & \cdots & g_{1h}(\delta) \\ g_{21}(\delta) & g_{22}(\delta) & \cdots & g_{2h}(\delta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{h1}(\delta) & g_{h2}(\delta) & \cdots & g_{hh}(\delta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\delta)=\begin{pmatrix} r_{11}(\delta) & r_{12}(\delta) & \cdots & r_{1n}(\delta) \\ r_{21}(\delta) & r_{22}(\delta) & \cdots & r_{2n}(\delta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}(\delta) & r_{n2}(\delta) & \cdots & r_{nn}(\delta) \end{pmatrix}$$

Pada dasarnya Metode EBLUP adalah suatu metode penaksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* yang merupakan perluasan dari Metode BLUP dengan menggunakan taksiran parameter dari variansi efek *random* $(\hat{\delta})$ yang pada kenyataannya parameter tersebut tidak diketahui nilainya. Metode penaksiran δ yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah Metode ML yang memerlukan asumsi distribusi. Oleh sebab itu, diasumsikan bahwa **b** dan **e** berdistribusi normal. Dikarenakan taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* yang telah didapat sebelumnya ((2.7.3.c)) dan (2.7.3.d)), yaitu $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$, didapat tanpa asumsi distribusi maka harus dicari taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* dengan asumsi **b** dan **e** berdistribusi normal yang dinotasikan dengan $\tilde{\alpha}$ dan $\tilde{\beta}$.

Dengan asumsi **b** dan **e** berdistribusi normal, parameter pada *General Linear Mixed Model*, yaitu α dan β dapat ditaksir menggunakan Metode ML. Metode ini memerlukan fungsi *likelihood* yang merupakan *joint pdf* dari $\mathbf{y} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)^T$ dan $\beta = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h\right)^T$. *Joint pdf* tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f\left(\mathbf{y}, \beta\right) = g\left(\mathbf{y} \mid \beta\right) \cdot h(\beta) \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

di mana

$$g\left(\mathbf{y} \mid \beta\right) = g\left(\varepsilon\right) \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

seperti telah dibuktikan pada lampiran 9.

Oleh sebab itu, (3.1.1) dapat ditulis sebagai

$$f\left(\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}\right) = g\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) \cdot h(\boldsymbol{\beta})$$

di mana

$$h(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2} \left|\mathbf{G}\right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\beta}\right).$$

Dari (2.5.1.a) didapat

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\mathbf{y}) &= f(\mathbf{y},\boldsymbol{\beta}) \\
&= g(\boldsymbol{\varepsilon})\cdot h(\boldsymbol{\beta}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n \left(|\mathbf{G}||\mathbf{R}|\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\beta}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Oleh karena ingin dicari taksiran dari α dan β menggunakan Metode ML, agar lebih mudah dalam hal perhitungannya akan digunakan fungsi *log-likelihood*, yaitu:

$$
\begin{aligned}
\ln L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\mathbf{y}) = c - \frac{1}{2}(&\mathbf{y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{X}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} + \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{X}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{X}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} \\
&- \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\beta})
\end{aligned}
$$

(3.1.3)

dengan $c = -\ln(2\pi)^n \left(|\mathbf{G}||\mathbf{R}|\right)^{1/2}$ suatu konstanta (bukti dapat dilihat pada lampiran 10). Selanjutnya, fungsi *log-likelihood* tersebut diturunkan terhadap masing-masing α dan β kemudian dicari penyelesaiannya sehingga didapat

$$\mathbf{X}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{X}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \tag{3.1.4}$$

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1}\right)\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}. \tag{3.1.5}$$

(bukti dapat dilihat pada lampiran 11).

Selanjutnya, dengan proses eliminasi didapat

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\mathbf{X}^T\left(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}+\mathbf{G}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\right)\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\left(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}+\mathbf{G}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\right)\mathbf{y}$$

(3.1.6)

dan

$$\tilde{\beta} = \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\tilde{\alpha}\right). \qquad \textbf{(3.1.7)}$$

(bukti dapat dilihat pada lampiran 12).

Jadi, selain $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ yang didapat tanpa asumsi distribusi, terdapat pula $\tilde{\alpha}$ dan $\tilde{\beta}$ yang merupakan taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* dengan mengasumsikan **b** dan **e** berdistribusi normal. Selanjutnya, untuk penaksiran δ menggunakan Metode ML seharusnya memerlukan $\tilde{\alpha}$ dan $\tilde{\beta}$ yang didapat dengan asumsi **b** dan **e** berdistribusi normal. Akan tetapi, pada SubBab berikutnya akan dibuktikan bahwa $\tilde{\alpha}$ dan $\tilde{\beta}$ yang didapat dengan asumsi **b** dan **e** berdistribusi normal tersebut, ternyata identik dengan $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ yang diperoleh tanpa asumsi distribusi. Oleh karena itu, untuk seterusnya penaksiran δ akan menggunakan $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$.

3.2. Memeriksa bahwa Taksiran Parameter pada *General Linear Mixed Model* yang didapat dengan atau tanpa Asumsi b dan e Berdistribusi Normal adalah Identik

Telah diketahui dari (2.7.3.c) dan (2.7.3.d) bahwa taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* tanpa asumsi distribusi adalah sebagai berikut:

$$\hat{\alpha}(\delta,\mathbf{y}) = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}(\delta)\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}(\delta)\mathbf{y} \text{ dan}$$

$$\hat{\beta}(\delta,\mathbf{y}) = \mathbf{G}(\delta)\mathbf{Z}^T\mathbf{\Omega}^{-1}(\delta)\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\alpha}(\delta,\mathbf{y})\right)$$

di mana

$$\Omega(\delta) = \mathbf{\Omega} = \mathbf{R} + \mathbf{ZGZ}^T.$$

Sedangkan, taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* dengan asumsi **b** dan **e** berdistribusi normal diberikan oleh (3.1.6) dan (3.1.7).

Dari (3.1.6), misalkan:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}+\mathbf{G}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}. \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

Jika terbukti bahwa $\mathbf{W} = \mathbf{\Omega}^{-1}$ maka $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$.

Oleh karena terbukti pada lampiran 13 bahwa $\mathbf{\Omega W} = \mathbf{I}$, maka terbukti pula bahwa

$$\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}. \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

Sedangkan, untuk membuktikan bahwa $\tilde{\beta} = \hat{\beta}$ di mana (3.2.2) terpenuhi adalah dengan membuktikan bahwa $\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}+\mathbf{G}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{GZ}^T\mathbf{\Omega}^{-1}$.

Berdasarkan bukti pada lampiran 14 dapat disimpulkan bahwa

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta}. \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

Berdasarkan (3.2.2) dan (3.2.3) terbukti bahwa dengan atau tanpa asumsi **b** dan **e** berdistribusi normal kedua jenis taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* tersebut identik sehingga taksiran parameter yang didapat dengan asumsi **b** dan **e** berdistribusi normal juga memiliki sifat *linear*, *unbiased*, dan *best*.

3.3. Penaksiran Parameter dari Variansi Efek *Random* (δ)

Pada Tugas Akhir ini, Metode ML digunakan untuk menaksir δ pada *General Linear Mixed Model*. Oleh karena itu, dibutuhkan fungsi *likelihood* yang merupakan *joint pdf* dari $\mathbf{y} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)^T$ sehingga fungsi *likelihood*-nya adalah sebagai berikut:

$$L\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta};\mathbf{y}\right) = f\left(\mathbf{y}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}\left|\boldsymbol{\Omega}\left(\boldsymbol{\delta}\right)\right|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}\right)^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\boldsymbol{\delta}\right)\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}\right)\right) \quad \textbf{(3.3.1)}$$

(bukti diberikan pada lampiran 15).

Sebagaimana sebelumnya, Metode ML menggunakan fungsi *log-likelihood*, yaitu:

$$\ln L\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta};\mathbf{y}\right) = c - \frac{1}{2}\left(\ln\left(\left|\boldsymbol{\Omega}\left(\boldsymbol{\delta}\right)\right|\right) + \left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}\right)^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\boldsymbol{\delta}\right)\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}\right)\right) \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

dengan $c = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\right)$ adalah suatu konstanta. Selanjutnya, dengan menggunakan (2.3.3.a), (2.3.6.d), dan (2.3.6.e) fungsi *log-likelihood* tersebut diturunkan terhadap $\boldsymbol{\delta}$, dinotasikan dengan $\mathbf{s}\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta}\right)$, sehingga untuk elemen ke-*j* didapat formula berikut ini:

$$s_j(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta}) = -\frac{1}{2}tr\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{(j)}\right) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha})^T\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{(j)}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}) \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

dengan $\boldsymbol{\Omega}_{(j)} = \dfrac{\partial\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\delta})}{\partial\delta_j}$ (bukti dapat dilihat pada lampiran 16).

Sesuai dengan Metode ML, berikutnya (3.3.3) dicari solusinya menjadi

$$tr\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\Omega}_{(j)}\right) = (\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}})^T\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\Omega}_{(j)}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\delta})\right)(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \qquad \textbf{(3.3.4)}$$

Terlihat dari (3.3.4) $\boldsymbol{\delta}$ tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, taksiran $\boldsymbol{\delta}$ dengan Metode ML kemudian diselesaikan secara numerik. Pada Tugas Akhir ini, berdasarkan (2.5.2.a) algoritma yang digunakan adalah *Scoring Algorithm* di mana iterasi ke-$a+1$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(a+1)}$, secara iteratif menggunakan formula sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(a+1)} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(a)} + \left(\boldsymbol{\Upsilon}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(a)}\right)\right)^{-1}\mathbf{s}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(a)}\right),\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(a)}\right)$$

dengan

$$\mathbf{s}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) = \left(s_1\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\delta}}\right), s_2\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\delta}}\right),\ldots,s_q\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right)^T \text{ dan } \boldsymbol{\Upsilon}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) = \left(\boldsymbol{\Upsilon}_1^T\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right),\boldsymbol{\Upsilon}_2^T\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right),\ldots,\boldsymbol{\Upsilon}_q^T\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right)^T$$

di mana

$$\Upsilon_{jk}(\boldsymbol{\delta}) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta};\mathbf{y})}{\partial\delta_k\partial\delta_j}\right) = \frac{1}{2}tr\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{(j)}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{(k)}\right) \qquad \textbf{(3.3.5)}$$

seperti telah dibuktikan pada lampiran 17.

Berdasarkan penjabaran di atas, didapatkan taksiran parameter dari variansi efek *random* $\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)$ secara numerik yang selanjutnya akan digunakan dalam penaksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* sesuai dengan Metode EBLUP.

3.4. Penaksiran Parameter pada *General Linear Mixed Model* dengan Metode EBLUP

Pada Subbab 3.1 telah dijelaskan bahwa Metode EBLUP adalah suatu metode penaksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* yang merupakan perluasan dari metode BLUP dengan menggunakan taksiran parameter dari variansi efek *random* $\left(\hat{\delta}\right)$ yang pada kenyataannya parameter tersebut tidak diketahui nilainya. Pada Subbab 3.3 telah didapatkan taksiran δ, dinotasikan dengan $\hat{\delta}(\mathbf{y})$, secara numerik dengan menggunakan Metode ML.

Taksiran parameter pada *General Linear Mixed Model* dengan menggunakan Metode EBLUP didapat dengan mensubstitusikan $\hat{\delta}(\mathbf{y})$ ke $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$, yaitu:

$$\hat{\alpha}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)=\left(\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\left(\hat{\delta}\right)\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\left(\hat{\delta}\right)\mathbf{y} \text{ dan}$$

$$\hat{\beta}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)=\mathbf{G}\left(\hat{\delta}\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\left(\hat{\delta}\right)\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\alpha}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\right)$$

Berdasarkan (2.7.3.e) taksiran kombinasi linier yang baru adalah sebagai berikut:

$$\hat{\tau}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)=\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)+\boldsymbol{\omega}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right). \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

Oleh karena $\hat{\tau}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)$ tersebut didapat dengan mensubstitusikan $\hat{\delta}(\mathbf{y})$ ke $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, maka perlu dibuktikan ketakbiasan dari taksiran tersebut. Sebelumnya diketahui *lemma* berikut ini:

***Lemma* 3.1**

Jika $\mathbf{z}$ adalah vektor *random* berdistribusi simetris di sekitar nol sedemikian sehingga $\mathbf{z}$ dan $-\mathbf{z}$ *identically distributed*, dan $f(\mathbf{z})$ adalah variabel *random* yang merupakan fungsi ganjil dari $\mathbf{z}$ sehingga $f(-\mathbf{z})=-f(\mathbf{z})$, maka $f(\mathbf{z})$ berdistribusi simetris di sekitar nol.

Sebelumnya diketahui bahwa $E\left(\hat{\tau}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\right)$ berhingga dan $\hat{\delta}(\mathbf{y})$ merupakan fungsi genap serta *translation-invariant* dari $\mathbf{y}$ sehingga didapat

$$\hat{\delta}(\mathbf{y})=\hat{\delta}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha})=\hat{\delta}(\mathbf{Zb}+\mathbf{e})=\hat{\delta}\left(-(\mathbf{Zb}+\mathbf{e})\right) \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

Untuk membuktikan ketakbiasan dari $\hat{\tau}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)$, harus dibuktikan bahwa $E\left(\hat{\tau}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)-\mathrm{t}\right)=0$. Oleh karena hal tersebut telah terbukti pada lampiran 18, maka dapat disimpulkan bahwa $\hat{\tau}\left(\hat{\delta}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)$ tetap *unbiased* untuk mengestimasi $\tau=\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\beta}$.