BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas beberapa teori dasar yang diperlukan pada bab – bab selanjutnya, diantaranya definisi Persamaan Diferensial Stokastik, proses Wiener, integral stokastik, order *strong convergence* dan order *weak convergence*, ekspansi stokastik Taylor yang terdiri dari skema Euler Maruyama, skema Milstein, beserta skema Taylor dengan order *strong convergence* 1,5, dan pada akhir bab ini, akan dibahas mengenai model pergerakan harga saham yang terdiri dari model pergerakan harga saham tanpa pembayaran dividen, model pergerakan harga saham yang dipengaruhi pembayaran dividen, beserta estimasi parameter yang diperlukan dalam model.

2.1 ***STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION*** / PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK

Berdasarkan [5], sebuah PDS memiliki bentuk sebagai berikut:

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t)\,,\ \ X(0) = X_0\,,\ \ 0 \le t \le T\,. \tag{1}$$

Pada bentuk PDS (1), $f\left(X\left(t\right)\right)$ merupakan suku deterministik yang sering kali disebut sebagai koefisien *drift* sedangkan $g\left(X_t\right)$ merupakan suku stokastik yang sering kali disebut sebagai koefisien *diffusion* dengan X_0 = X(0) adalah nilai awal, W(t) merupakan sebuah proses Wiener yang memiliki karakteristik tertentu yang akan dibahas pada subbab berikutnya. Berdasarkan [14], koefisien *drift* memodelkan kecenderungan dominan pada grafik solusi suatu PDS atau sebagai penentu arah dari solusi suatu PDS, koefisien *diffusion* merepresentasikan fluktuasi dari kurva, sedangkan proses Wiener merepresentasikan *noise /* gangguan pada sistem. Berdasarkan [13], PDS (1) bersifat *nowhere differentiable*, yang artinya $\lim_{h\to 0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$ tidak ada untuk setiap $t\in\left[0,T\right]$, dan berdasarkan [5] memiliki solusi dalam bentuk integral sebagai berikut :

$$X\left(t\right)=X\left(0\right)+\int_0^t f\left(X\left(s\right)\right)ds+\int_0^t g\left(X\left(s\right)\right)dW\left(s\right),\ 0\le t\le T. \tag{2}$$

Solusi X_t = X(t) dapat direpresentasikan sebagai *sample path* / lintasan. Bentuk integral dari suku stokastik pada (2), hanyalah dapat diselesaikan menggunakan integral stokastik atas suatu proses Wiener. Pada subbab berikutnya, akan dibahas beberapa karakteristik dari suatu proses Wiener atau yang disebut juga dengan gerak Brown.

2.2 PROSES WIENER

Proses Wiener atau gerak Brown, yang merupakan gerakan partikel yang tidak beraturan, pertama kali ditemukan pada tahun 1828 oleh R. Brown [11]. Gerak Brown ini sangat berguna dalam memodelkan pergerakan harga saham. Berdasarkan [5], proses Wiener pada [0,T] adalah variabel random W(t) yang bergantung secara kontinu pada $t \in [0,T]$ dan memenuhi ke-3 sifat berikut :

1. W(0) = 0
2. Untuk $0 \le s \le t \le T$, $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$
3. Untuk $0 \le s \le t \le T$ dan $0 \le u \le v \le T$, $W(t) - W(s)$ dan $W(v) - W(u)$ saling bebas.

Untuk kebutuhan komputasi, W(t) terdefinisi secara diskrit pada tiap t. ΔW_j dapat dibangun dengan menggunakan sebuah generator nilai random. Selanjutnya $\Delta t = T/N$ untuk nilai N positif. N merupakan banyaknya titik diskritisasi yang diinginkan pada interval [0,T]. W_j melambangkan $W(t_j)$ dimana t_j ialah j .Δt. Kondisi 1 menjelaskan bahwa $W_0 = 0$, sedangkan kondisi 2 dan 3 menjelaskan bahwa dW_j adalah variabel random yang independen dan berdistribusi $\sqrt{\Delta t}N(0,1)$, dengan

$$W_j = W_{j-1} + dW_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots N . \tag{3}$$

Dengan mengetahui karakteristik dari suatu proses Wiener, pada subbab berikutnya akan dibahas jenis-jenis integral stokastik untuk menyelesaikan suatu Persamaan Diferensial Stokastik.

2.3 INTEGRAL STOKASTIK

Jika diberikan sebuah fungsi $g\left(x(t)\right)$, maka berdasarkan [5], integral $\int_0^T g\left(x(t)\right)dt$ dapat diaproksimasi dengan menggunakan jumlah *Riemann* sebagai berikut

$$\sum_{j=0}^{N-1} g\left(x\left(t_j\right)\right)\left(t_{j+1} - t_j\right), \tag{4}$$

dengan $t_j = j\Delta t$ merupakan titik – titik diskritisasi. Nilai dari $\int_0^T g\left(x(t)\right)dt$ dapat didefinisikan sebagai limit $\delta t \to 0$ dari jumlah *Riemann* pada (4) di atas.

Secara analog, integral $\int_0^T g\left(x(t)\right)dW(t)$ juga dapat diaproksimasi dengan menggunakan jumlah *Riemann* sebagai berikut

$$\sum_{j=0}^{N-1} g\left(x\left(t_j\right)\right)\left(W\left(t_{j+1}\right) - W\left(t_j\right)\right), \tag{5}$$

Pada kasus ini, fungsi $g\left(x(t)\right)$ diintegralkan atas sebuah proses Wiener.

Ekspresi (4) juga dapat direpresentasikan sebagai

$$\sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{x(t_j)+x(t_{j+1})}{2}\right)(t_{j+1}-t_j), \tag{6}$$

yang juga merupakan jumlah *Riemann* untuk aproksimasi nilai integral

$\int_0^T g(x(t))\,dt$.

Secara analog, integral $\int_0^T g(x(t_j))\,dW(t)$ juga dapat diaproksimasi dengan menggunakan jumlah *Riemann* sebagai berikut

$$\sum_{j=0}^{N-1} g\left(\frac{x(t_j)+x(t_{j+1})}{2}\right)(W(t_{j+1})-W(t_j)). \tag{7}$$

Sebagai catatan, jumlah *Riemann* stokastik pada (5) dan (7) akan memberikan nilai yang berbeda. Berdasarkan [5] perbedaan nilai tersebut tidak akan berkurang walaupun untuk nilai δt yang kecil sekalipun. Hal ini merupakan salah satu ciri yang membedakan jumlah *Riemann* untuk fungsi deterministik dengan jumlah *Riemann* untuk fungsi stokastik. Dalam perkataan lain hal ini memberikan karakter yang berbeda antara integral deterministik dengan integral stokastik.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa terdapat 2 (dua) buah alternatif mencari aproksimasi dari sebuah integral stokastik, yaitu dengan menggunakan limit $\delta t \to 0$ dari jumlah *Riemann* stokastik pada (5) atau dengan menggunakan limit $\delta t \to 0$ dari jumlah *Riemann* stokastik pada (7). 2 (dua) buah alternatif ini, dibedakan berdasarkan bagaimana jumlah *Riemann* stokastik ini dibentuk. Jumlah *Riemann* stokastik "*left-hand*" seperti pada ekspresi (5) digunakan dalam mengaproksimasi Integral Îto, sedangkan jumlah *Riemann* stokastik "*midpoint*" seperti pada ekspresi (7) digunakan dalam mengaproksimasi Integral Stratonovich. Pembahasan lebih lanjut mengenai 2 (dua) jenis integral ini dapat dilihat di [8].

Integral stokastik ini digunakan dalam penentuan metode numerik untuk menyelesaikan PDS. Salah satu kriteria yang diperhatikan pada metode numerik adalah masalah order konvergensi. Pada subbab berikut akan dibahas order konvergensi dari metode numerik.

2.4 ORDER *STRONG CONVERGENCE* DAN *WEAK CONVERGENCE*

Order konvergensi dari suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah PDS menjadi salah satu penentu apakah metode tersebut layak digunakan. Berikut diberikan definisi dari 2 (dua) buah jenis order konvergensi, yaitu *Strong Convergence* dan *Weak Convergence* berdasarkan [3].

1. Definisi *Strong Convergence*

Suatu metode akan dikatakan memiliki *strong convergence* order γ jika terdapat C sedemikian sehingga $\mathrm{E}\left|X\left(t_j\right)-X\left(\tau_j\right)\right|\leq C\Delta t^{\gamma}$. Dimana $X\left(t_j\right)$ adalah solusi numerik dan $X\left(\tau_j\right)$ adalah solusi eksplisit pada titik diskritisasi ke-j dari sebuah Persamaan Diferensial Stokastik. Berdasarkan subbab 2.1, solusi numerik maupun solusi eksplisit ini merupakan suatu *sample path* / lintasan.

2. Definisi *Weak Convergence*

Suatu metode akan dikatakan memiliki *weak convergence* order β jika terdapat C sedemikian sehingga $\left|\mathrm{E}p\left(X\left(t_j\right)\right)-\mathrm{E}p\left(X\left(\tau_j\right)\right)\right| \le C\Delta t^{\beta}$. Dimana $X\left(t_j\right)$ adalah solusi numerik dan $X\left(\tau_j\right)$ adalah solusi eksplisit pada titik diskritisasi ke-j dari sebuah Persamaan Diferensial Stokastik.

Secara umum dapat dijelaskan bahwa definisi *strong convergence* ditujukan untuk melihat konvergensi dari sebuah lintasan, sedangkan definisi *weak convergence* ditujukan untuk melihat konvergensi dari rata – rata lintasan. .

Berdasarkan [6] diperlukan metode numerik dengan tingkat konvergensi yang lebih tinggi untuk mendapatkan hasil aproksimasi solusi yang lebih baik. Untuk mendapatkan metode numerik dengan tingkat konvergensi yang lebih tinggi, dibutuhkan ekspansi stokastik Taylor yang akan dijelaskan pada subbab berikut ini.

2.5 EKSPANSI STOKASTIK TAYLOR

Ekspansi Stokastik Taylor dari solusi sebuah PDS pada X_0 dapat dijabarkan sebagai berikut [5] :

$$x_t = x_0 + f(x_0)\int_0^T dt + g(x_0)\int_0^T dW_t + g(x_0)g'(x_0)\int_0^T\int_0^t dW_s dW_t + R\,. \qquad (8)$$

Dengan menggunakan definisi dari Integral Stokastik Îto pada subbab 2.3 , bentuk integral stokastik pada (8) dapat diubah menjadi

$$\int_0^{\mathrm{T}} dW_t = \sum_{j=0}^{n-1}\Big(W\big(t_{j+1}\big) - W\big(t_j\big)\Big) = \Delta W_n\,,$$

dan

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^t dW_s dW_t &= \int_0^T \Delta W_n dW_t = \sum_{j=0}^{n-1}\Delta W_n\Big(W\big(t_{j+1}\big) - W\big(t_j\big)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(W\big(t_{j+1}\big)^2 - W\big(t_j\big)^2 - W\big(t_{j+1}\big)^2 + 2W\big(t_{j+1}\big)W\big(t_j\big)\Big),\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(W\big(t_{j+1}\big)^2 - \Big(W\big(t_{j+1}\big) - W\big(t_j\big)\Big)^2\Big)\end{aligned}$$

dengan bentuk $\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\Big(W\big(t_{j+1}\big) - W\big(t_j\big)\Big)^2\Big)$ berdasarkan [5] memiliki nilai ekspektasi Δt, maka dapat disimpulkan

$$\int_0^T\int_0^t dW_s dW_t = \frac{1}{2}\big(\Delta W_n^{\ 2} - \Delta t\big).$$

Sehingga persamaan (8) dapat dinyatakan secara iteratif menjadi persamaan (9) di bawah ini

$$x_{n+1} = x_n + f\big(x_n\big)\Delta t + g\big(x_n\big)\Delta W_n + g\big(x_n\big)g'\big(x_n\big)\frac{1}{2}\Big\{\big(\Delta W_n\big)^2 - \Delta t\Big\} + R\,. \qquad (9)$$

Dengan perkataan lain, persamaan (9) juga merupakan solusi sebuah PDS yang disebut dengan solusi iteratif, dimana $t \in [0,T]$ dan R adalah suku sisa.

Selanjutnya, ekspansi stokastik Taylor ini digunakan sebagai metode numerik dalam penyelesaian suatu Persamaan Diferensial Stokastik. Pada subbab berikut ini, akan dibahas beberapa contoh dari metode numerik yang diturunkan berdasarkan ekspansi stokastik Taylor untuk menyelesaikan PDS dengan order *strong convergence* 0,5 , 1 , dan 1,5.

2.5.1 Skema Euler-Maruyama

Dengan menggunakan 3 (tiga) buah suku pertama pada ekspansi stokastik Taylor (8), yaitu

$$x_t = x_0 + f(x_0)\int_0^T dt + g(x_0)\int_0^T dW_t\,, \tag{10}$$

maka akan didapat skema Euler-Maruyama (1955) yang memiliki order *strong convergence* 0,5 [5]. Skema Euler-Maruyama memiliki bentuk sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t + g(x_n)\Delta W_n\,, \tag{11}$$

dengan $n = 0,1,...,N-1$, nilai awal X_0, dan perubahan proses Wiener $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$. ΔW_n adalah sebuah variabel random berdistribusi Gaussian dengan rataan nol dan variansi Δ. Skema Euler Maruyama merupakan representasi dari skema Taylor dengan order *strong convergence* 0,5. Pembahasan lebih dalam mengenai skema ini dapat dilihat pada [9]. Pada subbab berikut akan dibahas Skema Milstein yang merupakan representasi dari skema Taylor dengan strong order konvergensi 1.

2.5.2 Skema Milstein

Dengan menambahkan satu buah suku pada (10) dari ekspansi stokastik Taylor (8), sehingga didapat

$$x_t = x_0 + f(x_0)\int_0^T dt + g(x_0)\int_0^T dW_t + g(x_0)g'(x_0)\int_0^T\int_0^t dW_s dW_t \ , \qquad (12)$$

maka akan didapat skema Millstein (1974) yang memiliki order *strong convergence* 1 [5]. Skema Millstein memiliki bentuk sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n + f\left(x_n\right)\Delta t + g\left(x_n\right)\Delta W_n + g\left(x_n\right)g'\left(x_n\right)\frac{1}{2}\left\{\left(\Delta W_n\right)^2 - \Delta t\right\}. \qquad (13)$$

Pembahasan lebih dalam mengenai skema ini dapat dilihat pada [9].

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, diperlukan metode numerik dengan tingkat konvergensi yang lebih tinggi untuk mendapatkan hasil aproksimasi solusi yang lebih baik. Maka dari itu, pada subbab berikutnya akan dibahas skema Taylor dengan order *strong convergence* 1,5.

2.5.3 Skema Taylor dengan Order *Strong Convergence* 1.5

Berikut adalah sebuah skema stokastik Taylor dengan order 1,5 yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu PDS Îto [8].

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= x(t_n) + g(x(t_n)) I_{(1)}(t_n, t_{n+1}) + f(x(t_n)) I_{(0)}(t_n, t_{n+1}) \\ &\quad + [Gg](x(t_n)) I_{(1,1)}(t_n, t_{n+1}) + [Fg](x(t_n)) I_{(0,1)}(t_n, t_{n+1}) \\ &\quad + [Gf](x(t_n)) I_{(1,0)}(t_n, t_{n+1}) + \left[G^2 g\right](x(t_n)) I_{(1,1,1)}(t_n, t_{n+1}) + R(t_n, h) \end{aligned} \quad , (14)$$

dengan F dan G merupakan operator differensial yang didefinisikan pada [8] sebagai berikut

$$F(\cdot) = \sum_{j=1}^{d} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\cdot) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} g_j g_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(\cdot) = (\cdot)_x (f) + \frac{1}{2}(\cdot)_{xx}(g,g), \qquad (15)$$

$$G(\cdot) = \sum_{j=1}^{d} g_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\cdot) = (\cdot)_x (g). \qquad (16)$$

Pada skema stokastik Taylor di atas, ditetapkan bahwa t_n = nh dimana h = Δt dan nilai integral – integral dengan tipe $I_{(j_1, j_2, \ldots, j_m)}(t_n, t_{n+1})$ dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} & I_{(1)}(t_n, t_{n+1}) = \Delta W_n, \qquad I_{(0)}(t_n, t_{n+1}) = h, \\ & I_{(1,1)}(t_n, t_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\Delta W_n^{\ 2} - h\right), \\ & I_{(0,1)}(t_n, t_{n+1}) = \Delta W_n h - I_{(1,0)}(t_n, t_{n+1}), \\ & I_{(1,1,1)}(t_n, t_{n+1}) = \frac{1}{6}\left(\Delta W_n^{\ 3} - 3\Delta W_n h\right), \end{aligned} \qquad (17)$$

dengan ΔW_n sebagai perubahan dari proses Wiener dimensi satu yang merupakan simulasi dari nilai sampel dari nilai random yang berdistribusi normal atau dengan kata lain jika $\xi_n \in N(0,1)$, maka $\Delta W_n = \xi_n\sqrt{h}$.

Berdasarkan [8], integral $I_{(0,1)}(t_n, t_{n+1})$ dan $I_{(1,0)}(t_n, t_{n+1})$ ditetapkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} I_{(0,1)}(t_n, t_{n+1}) &= \frac{h}{2}\left(\Delta W_n - \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\tilde{W}_n\right), \\ I_{(1,0)}(t_n, t_{n+1}) &= \frac{h}{2}\left(\Delta W_n + \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\tilde{W}_n\right), \end{aligned} \quad (18)$$

dimana $\Delta\tilde{W}_n = \tilde{\xi}_n\sqrt{h}$, $\tilde{\xi}_n \in N(0,1)$, dan nilai random ξ_n dan $\tilde{\xi}_n$ saling bebas. Maka, dengan mensubstitusi (17) dan (18) ke persamaan (14) , skema ekspansi Taylor dengan order 1,5 dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) = {} & x(t_n) + g(x(t_n))\Delta W_n + f(x(t_n))h + [Gg](x(t_n))\frac{\Delta W_n^{\,2} - h}{2} \\ & + \left([Fg](x(t_n)) + [Gf](x(t_n))\right)\frac{\Delta W_n}{2}h \\ & + \left([Gf](x(t_n)) - [Fg](x(t_n))\right)\Delta\tilde{W}_n\frac{h}{2\sqrt{3}} \\ & + \left[G^2 g\right](x(t_n))\frac{\Delta W_n^{\,3} - 3\Delta W_n h}{6} + R(t_n, h) \end{aligned} . \quad (19)$$

Skema Taylor tersebut memiliki suku “sisa” R dan suku – suku yang merupakan perubahan dari 2 (dua) buah proses Wiener , ΔW_n dan $\Delta\tilde{W}_n$.

Dengan menggunakan definisi dari F dan G sebagai operator differensial pada (15) dan (16), maka akhirnya didapat penjabaran dari skema Taylor (19) sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
x(t_{n+1}) = {} & x(t_n) + g\left(x(t_n)\right)\Delta W_n + f\left(x(t_n)\right)h + (g)_x(g)\left(x(t_n)\right)\frac{\Delta W_n^{\ 2} - h}{2} \\
& + \left((g)_x(f)\left(x(t_n)\right) + \frac{1}{2}(g)_{xx}(g,g)\left(x(t_n)\right) + (f)_x(g)\left(x(t_n)\right)\right)\frac{\Delta W_n}{2}h \\
& + \left((f)_x(g)\left(x(t_n)\right) - (g)_x(f)\left(x(t_n)\right) - \frac{1}{2}(g)_{xx}(g,g)\left(x(t_n)\right)\right)\Delta\tilde{W}_n\frac{h}{2\sqrt{3}} \\
& + \left((g)_{xx}(g,g)\left(x(t_n)\right) + \left(g_x\left(g_x(g)\right)\right)\left(x(t_n)\right)\right)\frac{\Delta W_n^{\ 3} - 3\Delta W_n h}{6} + R(t_n,h)
\end{aligned}
\quad .(20)
$$

Dapat disimpulkan dengan membandingkan skema Taylor 0,5 , 1 , dan 1,5 pada persamaan (11), (13) dan (20) , dengan menaikkan order *strong convergence* dari metode numerik, dibutuhkan turunan tingkat yang semakin tinggi yang menyebabkan kompleksitas perhitungan bertambah, hal ini sesuai dengan peryataan pada [2]. Maka dari itu diperlukan suatu alternatif metode numerik untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Stokastik dengan order konvergensi yang tinggi tanpa memerlukan turunan tingkat tinggi.

Pada langkah selanjutnya, metode – metode numerik ini akan diimplementasikan pada suatu model pergerakan harga saham yang dimodelkan dalam bentuk Persamaan Diferensial Stokastik. Pada subbab berikut ini, akan dibahas model harga saham yang dimaksud.

2.6 MODEL PERGERAKAN HARGA SAHAM

Pada subbab ini akan dibahas bagaimana permodelan dari harga saham dapat dibentuk dalam Persamaan Diferensial Stokastik [7].

Berdasarkan [16], dalam dunia finansial, terdapat 2 (dua) buah jenis saham, diantaranya adalah *common stock* dan *preferred stock*. Pada dasarnya setiap pemegang saham akan mendapatkan suatu imbal hasil berdasarkan besarnya saham yang dimilikinya. Pemegang saham berjenis *common stock* memiliki hak suara pada pengambilan keputusan suatu rapat pemegang saham yang akan mempengaruhi perusahaan tersebut. Sedangkan pemegang saham berjenis *preferred stock* tidak memiliki hak suara dalam pengambilan keputusan, melainkan pemegang saham bertipe ini akan mendapatkan suatu pembayaran dividen dengan tingkat tertentu, sebelum dividen perusahaan dibagikan ke pemegang saham lainnya. Pemegang saham terbesar akan diutamakan dalam hal pengambilan suara ataupun pembagian dividen.

Pergerakan harga saham dipengaruhi oleh besar kecilnya permintaan dan penawaran. Sama halnya dengan pergerakan harga pasar suatu komoditas, harga saham sebanding dengan permintaan dan berbanding terbalik dengan penawaran.

Maka dari itu, dalam dunia finansial pemodelan harga saham memiliki peranan penting yang dapat digunakan untuk memprediksi harga saham di kemudian hari. Karakteristik nilai harga saham yang berubah – ubah terhadap waktu dengan pola yang tidak terduga, menyebabkan pergerakan harga saham biasa dimodelkan sebagai proses stokastik, antara lain dalam suatu bentuk Persamaan Diferensial Stokastik. Bentuk umum dari Persamaan Diferensial Stokastik telah dijelaskan pada subbab 2.1.

Selanjutnya proses Wiener / gerak Brown pada subbab 2.2 akan digunakan dalam model pergerakan harga saham yang akan dijelaskan pada subbab berikut.

2.6.1 Model Pergerakan Harga Saham Tanpa Pembayaran Dividen

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa seorang investor yang memiliki saham pada suatu perusahaan, akan mendapatkan suatu imbal hasil. Misalkan S adalah harga saham pada saat t dimana μ merupakan ekspektasi tingkat imbal hasil saham per satuan waktu, maka besar imbal hasil yang diharapkan dari harga saham S adalah sebesar μS. Oleh karena itu, untuk selang waktu δt yang cukup kecil, ekpektasi perubahan harga saham S adalah μS δt. Atau dengan perkataan lain model pergerakan harga saham adalah

$$\delta S = \mu S \delta t \,. \qquad (21)$$

Untuk δt mendekati 0, persamaan (21) menjadi

$$dS = \mu S dt \text{ atau } \frac{dS}{S} = \mu dt \,. \qquad (22)$$

Persamaan (22) dapat dicari solusinya dengan mengintegrasikan atas t pada interval [0,T], yaitu

$$S_T = S_0 e^{\mu T} , \qquad (23)$$

dengan S_0 adalah harga saham pada saat 0 dan S_T adalah harga saham pada saat T. Persamaan (23) menunjukkan bahwa harga saham meningkat secara kontinu.

Pada keadaan yang sebenarnya, pergerakan harga saham juga dipengaruhi oleh suatu volatilitas σ yang menggambarkan ketidakpastian imbal hasil yang diberikan. Untuk selang waktu δt yang cukup kecil, diasumsikan perubahan tingkat imbal hasil adalah sama dan tidak bergantung pada harga saham saat itu. Oleh karena itu, dapat diasumsikan bahwa standar deviasi perubahan harga saham pada selang waktu δt sebanding dengan harga saham. Maka model pergerakan harga saham pada (22) dengan sebuah tingkat volatilitas σ dapat direpresentasikan sebagai

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \text{ atau } \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \qquad (24)$$

dengan μ merupakan ekspektasi tingkat imbal hasil saham per satuan waktu, σ merupakan tingkat volatilitas, S adalah harga saham pada saat t, dan W adalah proses Wiener (definisi pada subbab 2.1).

Menggunakan lemma Îto [6], dari persamaan (24) juga akan diperoleh

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW .$$

Lemma Îto [6] juga akan digunakan pada perhitungan solusi eksplisit dari sebuah model Persamaan Diferensial Stokastik. Dengan demikian perubahan ln(S) antara saat t = 0 dan saat mendatang t = T, berdistribusi normal dengan mean $\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T$ dan variansi $\sigma^2 T$. Dengan kata lain

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim N\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right], \tag{25}$$

dan

$$\ln S_T \sim N\left[\ln S_0 + \left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right],$$

dengan S_T adalah harga saham pada saat mendatang t = T, dan S_0 adalah harga saham pada saat t=0. Sifat persamaan (25) akan digunakan pada estimasi volatilitas harga saham.

Setelah didapatkan model pergerakan harga saham (24) yang merupakan Persamaan Diferensial Stokastik, selanjutnya akan dibahas tentang pengaruh pembayaran dividen terhadap model pergerakan harga saham tersebut.

2.6.2 Model Pergerakan Harga Saham yang Dipengaruhi Pembayaran Dividen

Pada subbab ini akan dibahas mengenai pengaruh pembayaran dividen terhadap model pergerakan harga saham.

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab (2.6) bahwa pemegang saham akan menerima dividen. Dividen adalah pembayaran oleh perusahaan kepada para pemegang saham. Ketika sebuah perusahaan mendapatkan keuntungan atau surplus, uang tersebut dapat digunakan dengan 2 (dua) cara, diantaranya dapat diinvestasikan kembali (*retained earnings*) atau dapat dibagikan kepada para pemegang saham (dividen). Pada saat dimana pemegang saham akan dicantumkan sebagai penerima dividen (waktu tersebut dikenal dengan istillah *recording date*), para calon investor biasanya akan membeli saham perusahaan tersebut dengan harapan mereka akan mendapatkan keuntungan dari pembayaran dividen. Kondisi ini mengakibatkan naiknya permintaan atas saham tersebut. Namun investor pemegang saham tidak banyak yang melepas sahamnya karena juga menginginkan dividen, sehingga penawaran sedikit dan harga saham akan naik. Sesaat setelah masa *recording date* berakhir, dikenal dengan masa *ex-dividend date*, harga saham akan kembali turun sebesar dividen yang dibayarkan. Untuk pemabahasan lebih lanjut, terdapat pada [11].

Diasumsikan bahwa pembayaran dividen diberikan secara rutin dengan tingkat dividen tetap sebesar D. Karena harga saham akan turun sebesar dividen yang dibayarkan, maka model pergerakan harga saham pada persamaan (24) menjadi

$$dS = \mu S dt - DSdt + \sigma S dW \,. \qquad (26)$$

Karena S dan W adalah fungsi dari t, maka (26) dapat ditulis sebagai berikut

$$dS(t) = (\mu - D)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\,. \tag{27}$$

Pada skripsi ini, diasumsikan investor bersifat *risk neutral.* Seorang investor sebelum melakukan investasi, akan memperhatikan 2 (dua) hal, diantaranya tingkat imbal hasil dan resiko. Dalam kondisi dimana investor diasumsikan *risk neutral*, yaitu investor hanya melihat investasi sebatas ekspektasi tingkat imbal hasilnya.

Persamaan (27) merepresentasikan proses pergerakan harga saham dengan satu faktor stokastik yaitu volatilitas harga saham. Persamaan ini akan digunakan untuk mensimulasikan lintasan harga saham pada berbagai metode numerik yang akan dibahas pada bab III. Dimana S adalah harga saham pada saat t, μ merupakan ekspektasi tingkat imbal hasil saham per satuan waktu , D adalah tingkat dividen (*dividend yield*), σ adalah volatilitas harga saham, dan W adalah proses Wiener. Parameter – parameter pada persamaan (27) haruslah terlebih dahulu diketahui. Oleh karena itu, pada subbab berikut akan dijelaskan bagaimana mengestimasi parameter yang digunakan pada persamaan (27).

2.6.3 Estimasi Parameter

Pada subbab ini akan dijelaskan bagaimana mengestimasi parameter yang dibutuhkan persamaan (27), yaitu ekspektasi tingkat imbal hasil saham per satuan waktu μ, tingkat hasil dividen (*dividend yield*) D, dan volatilitas harga saham σ.

Tingkat imbal hasil atau *return* dalam setahun, didapat dengan menjumlahkan *daily return* selama setahun. Berdasarkan [6], *daily return* $u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$, dimana S_i adalah harga saham pada akhir interval ke-i, untuk i = 1, 2, 3, …, n. Sehingga nilai imbal hasil dalam setahun ialah

$$\mu = \sum_{1}^{n} u_i \, . \tag{28}$$

Selanjutnya akan dicari parameter kedua, yaitu tingkat hasil dividen. Tingkat hasil dividen atau disebut juga *dividend yield* pada harga saham suatu perusahaan adalah rasio dari pembayaran dividen selama satu tahun dengan harga saham saat ini. Tingkat hasil dividen D sering direpresentasikan dalam bentuk persen. Misalkan sebuah perusahaan membagikan dividen sebanyak n kali yang besarnya d_1, d_2, … , d_n pada tanggal yang berlainan dalam jangka waktu satu tahun dan misalkan pula harga saham saat ini adalah S. Maka berdasarkan [6], tingkat hasil deviden adalah

$$D = \frac{d_1 + d_2 + ... + d_n}{S} \, , \tag{29}$$

Pada kasus dimana perusahaan tidak membagikan dividen selama satu tahun, maka D = 0. Selanjutnya akan dijelaskan bagaimana mengestimasi nilai volatilitas harga saham σ.

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.6.1, bahwa volatilitas harga saham mengukur ketidakpastian imbal hasil yang diberikan. Oleh karena itu volatilitas dapat diukur dengan standar deviasi dari imbal hasil yang diberikan selama jangka waktu tertentu [6].

Untuk mengestimasi σ secara empiris, harga saham diamati dalam interval waktu yang tetap, misalnya setiap hari, setiap minggu atau setiap bulan. Misalkan

n + 1 = jumlah pengamatan,

S_i = harga saham pada akhir interval ke-i (i=0, 1, 2, …, n),

τ = panjang interval waktu dalam setahun.

Misalkan juga

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) = \ln S_i - \ln S_{i-1} \text{ untuk i = 1, 2, …, n.} \qquad (30a)$$

Dapat dilihat di [6], besar estimasi standar deviasi s dari u_i ialah

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - \bar{u}\right)^2}\,, \qquad (30b)$$

dengan $\bar{u}$ adalah *mean* dari u_i. Dari persamaan (25), standar deviasi dari u_i adalah $\sigma\sqrt{\tau}$. Sehingga s dapat mengestimasi $\sigma\sqrt{\tau}$, atau $s \approx \sigma\sqrt{t}$. Dari sini dapat diperoleh bahwa volatilitas σ dapat diestimasikan oleh $\hat{\sigma}$ dengan

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}\,. \qquad (30c)$$

Misalkan banyaknya hari transaksi harga saham sebanyak T hari, maka panjang interval waktu dalam setahun adalah $\tau = \frac{1}{T}$. Sehingga estimasi volatilitas σ dapat dinyatakan sebagai

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\frac{1}{T}}} = s\sqrt{T} \; . \tag{30d}$$

Dengan estimasi parameter – parameter yang didapat, maka model pergerakan harga saham pada (27) dapat digunakan.

Selanjutnya akan dicari solusi eksplisit dari PDS (27), dengan menggunakan lemma Îto [6], sebagai berikut :

Misalkan nilai dari variabel x merupakan proses Îto berikut ini

$$dS = a(S,t)\,dt + b(S,t)\,dW \; ,$$

lemma Îto menunjukkan bahwa sebuah sembarang fungsi G, yang merupakan fungsi dari S dan t, berlaku pula proses berikut :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} b\,dW \; . \tag{31}$$

Dengan menggunakan lemma Îto, persamaan (27) yaitu

$$dS(t) = (\mu - D)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \; ,$$

akan didapat

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}(\mu - D)S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S\,dW \; . \tag{32}$$

Dengan mengambil fungsi $G = \ln S$, sehingga

$$\frac{\partial G}{\partial S}=\frac{1}{S}\ ;\ \frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2}\ ;\ \text{dan}\ \frac{\partial G}{\partial t}=0\,, \tag{33}$$

dan dengan mensubstitusikan (33) ke (32) didapat

$$d\ln S=\left(\frac{1}{S}(\mu-D)S+0-\frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma^2 S^2\right)dt+\frac{1}{S}\sigma S dW\ ,$$

atau

$$d\ln S(t)=\left(\mu-D-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dW(t)\,,$$

maka

$$\ln S(t+dt)-\ln S(t)=\left(\mu-D-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dW(t)\,.$$

Dengan mengeksponensialkan kedua ruas maka didapat

$$\exp\left[\ln S(t+dt)-\ln S(t)\right]=\exp\left[\left(\mu-D-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dW(t)\right],$$

sehingga

$$\frac{S(t+dt)}{S(t)}=\exp\left[\left(\mu-D-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dW(t)\right].$$

Dengan memindahkan $S(t)$ ke ruas kanan, maka didapat

$$S(t+dt)=S(t)\exp\left[\left(\mu-D-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dW(t)\right],$$

atau

$$S_{i+1}=S_i\exp\left[\left(\mu-D-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dW_i\right]\quad,\ \text{i = 0, 1, ..., n-1}\,. \tag{34a}$$

Persamaan (34a) ini digunakan untuk membentuk lintasan harga saham S. Persamaan ini juga disebut sebagai solusi eksplisit dalam bentuk iteratif dari persamaan diferential stokastik (27) pada implementasi di Bab IV. Solusi eksplisit (34a) dapat dijabarkan secara iteratif sebagai berikut :

Dari (34a), $S_{i+1} = S_i \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_i\right]$, $i = 0, 1, ..., n\text{-}1$, maka

dapat disimpulkan pula

$$S_i = S_{i-1} \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_{i-1}\right] ,$$

sehingga dengan mensubstitusikan S_i ke persamaan (34a), maka didapatkan

$$S_{i+1} = S_{i-1} \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_{i-1}\right] \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_i\right] . \qquad (34b)$$

Sedangkan berdasarkan (34a), S_{i-1} dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$S_{i-1} = S_{i-2} \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_{i-2}\right] ,$$

Sehingga dengan mensubstitusikan S_{i-1} ke persamaan (34b), maka diperoleh

$$S_{i+1} = S_{i-2} \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_{i-2}\right] \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_{i-1}\right] \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_i\right] .$$

Dengan mengalikan bentuk eksponensial dari persamaan ini, maka didapat

$$S_{i+1} = S_{i-2} \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right)3dt + \sigma\left(dW_{i-2} + dW_{i-1} + dW_i\right)\right].$$

Jika proses iteratif ini diteruskan, maka akan didapat persamaan sebagai berikut :

$$S_{i+1} = S_0 \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right) n.dt + \sigma\left(dW_0 + dW_1 + ... + dW_{i-2} + dW_{i-1} + dW_i\right)\right], \quad (34c)$$

dengan $n.dt = t$ dan nilai dari $dW_i = W(t) - W(t-1)$, sehingga

$$\begin{aligned} dW_0 + dW_1 + ... + dW_{i-1} + dW_i &= W(t) - W(t-1) + W(t-1) - W(t-2) + ... + W(1) - W(0) \\ &= W(t) - W(0) \\ &= W(t) - 0 \\ &= W(t) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi nilai $n.dt$ dan $dW_0 + dW_1 + ... + dW_{i-1} + dW_i$ ke persamaan (34c), maka akan diperoleh solusi eksplisit dari PDS pada (27) dalam bentuk lain sebagai berikut :

$$S(t) = S_0 \exp\left[\left(\mu - D - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right] .$$