BAB III

SKEMA RUNGE-KUTTA UNTUK PDS

Pada bab ini akan dibahas skema Runge-Kutta eksplisit untuk Persamaan Diferensial Biasa dan skema Runge-Kutta eksplisit untuk Persamaan Diferensial Stokastik yang didalamnya akan dijelaskan skema umum Runge-Kutta eksplisit s-*stage* untuk menyelesaikan suatu PDS beserta penentuan parameter – parameter dalam skema Runge-Kutta PDS s-*stage* tersebut, yang selanjutnya akan digunakan dalam penentuan parameter – parameter dalam skema Runge-Kutta PDS 4-*stage* dengan order *strong convergence* 1,5.

3.1 SKEMA RUNGE-KUTTA EKSPLISIT UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Metode atau skema Runge-Kutta adalah sebuah metode yang digunakan untuk menghasilkan barisan $\{t_n, x_n\}_{n=0}^{N}$ yang merupakan titik – titik aproksimasi pada kurva solusi sebuah sistem Persamaan Diferensial Biasa

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right) \quad , \quad x(0) = x_0 , \tag{35}$$

dengan $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ adalah fungsi yang dapat diturunkan (*differentiable*), dan $x_0 \in \mathbb{R}^m$ adalah nilai awal. Sebuah skema Runge-Kutta eksplisit menggunakan informasi dari titik (t_n, x_n) untuk mengaproksimasi titik (t_{n+1}, x_{n+1}). Berdasarkan [12], skema umum Runge-Kutta eksplisit s-*stage* untuk menyelesaikan suatu Persamaan Diferensial Biasa dengan besar langkah h ialah sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \ . \qquad (36)$$

Pada persamaan ini, x_n adalah solusi numerik pada titik diskretisasi t = nh, b_i adalah konstanta yang akan ditentukan nilainya, dan parameter k_i adalah

$$k_i = f\left(x_n + c_i h, x_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right) \ , \ \text{i=1, 2, ..., s} \ . \qquad (37)$$

Parameter a_{ij} dan c_i memiliki hubungan sebagai berikut

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$$

Berdasarkan [4], parameter – parameter ini, secara alternatif dapat ditampilkan dengan menggunakan *Butcher tableau* yang memiliki bentuk

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^{\mathrm{T}} \end{array} \ .$$

Untuk menjelaskaan notasi A, b^T, dan c pada *Butcher tableau* dapat dilihat pada contoh sebagai berikut.

Berdasarkan skema umum (36) dan (37), skema Runge-Kutta eksplisit 4-*stage* yang memiliki order konvergensi 4 untuk penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa ialah

$$x_{n+1} = x_n + h\left(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4\right),$$

dimana

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_n + c_1h, x_n\right),\\
k_2 &= f\left(x_n + c_2h, x_n + ha_{21}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x_n + c_3h, x_n + h\left(a_{31}k_1 + a_{32}k_2\right)\right),\\
k_4 &= f\left(x_n + c_4h, x_n + h\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right)\right).
\end{aligned}$$

Skema Runge-Kutta eksplisit 4-*stage* untuk penyelesaian suatu Persamaan Diferensial Biasa ini, dalam *Butcher tableau* dapat dinyatakan sebagai berikut

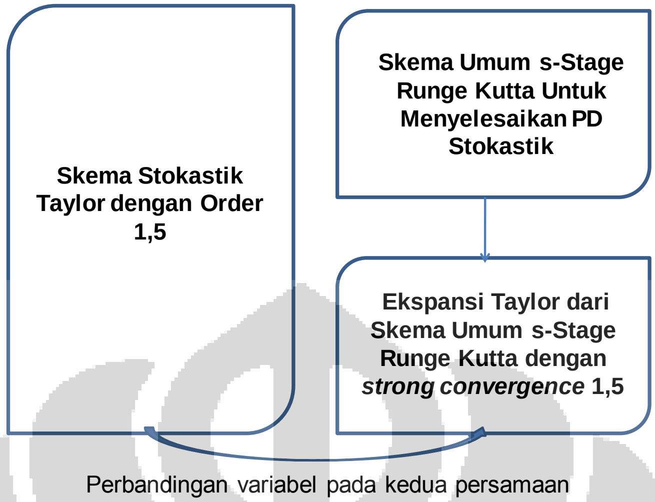
$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}$$

Pada subbab berikutnya, skema Runge-Kutta pada (36) dan (37) akan dikembangkan sehingga dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu Persamaan Diferensial Stokastik.

3.2 SKEMA RUNGE-KUTTA EKSPLISIT UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL STOKASTIK

Pada ekspansi Taylor dengan order *strong convergence* yang semakin tinggi, membutuhkan turunan tingkat yang semakin tinggi yang menyebabkan kompleksitas perhitungan bertambah [3]. Oleh sebab itu, skema Runge-Kutta PDS dapat digunakan sebagai suatu alternatif metode numerik PDS untuk mendapatkan order konvergensi yang tinggi tanpa memerlukan turunan tingkat tinggi [3]. Skema Runge-Kutta PDS memiliki 2 macam bentuk, diantaranya bentuk implisit dan bentuk eksplisit. Pada skripsi ini hanya akan dibahas skema Runge-Kutta PDS yang memiliki bentuk eksplisit. Pada subbab berikut akan diberikan penurunan dari skema Runge-Kutta yang memiliki bentuk eksplisit untuk menyelesaikan suatu Persamaan Diferensial Stokastik dengan order *strong convergence* 1,5. Untuk skema Runge-Kutta dengan order *strong convergence* 1 dapat dilihat pada [15].

Pada subbab 2.5.3, telah dibahas skema stokastik Taylor order *strong convergence* 1,5 (20). Pada langkah selanjutnya skema (20) akan dibandingkan dengan skema umum Runge-Kutta eksplisit s-*stage* untuk mendapatkan skema Runge-Kutta 4-*stage* dengan order *strong convergence* 1,5. Untuk lebih memahami langkah – langkah yang telah dijelaskan di atas, maka bagan di bawah ini, menjelaskan bagaimana skema Runge Kutta 4-*stage* dengan order *strong convergence* 1,5 ditentukan.



Gambar 3.1 Bagan penurunan skema RK PDS 4-stage.

Bagan pada Gambar 3.1, menjelaskan bagaimana alur kerja yang harus dilakukan dalam menurunkan skema RK PDS 4-*stage*. Parameter – parameter pada skema ini dapat ditentukan dengan membandingkan variabel – variabel terkait pada skema stokastik Taylor dengan order *strong convergence* 1,5 (20) dengan ekspansi Taylor dari skema umum Runge-Kutta s-*stage* yang memiliki order *strong convergence* yang sama, yaitu 1,5.

Skema stokastik Taylor dengan order *strong convergence* 1,5 telah dibahas pada bab II, oleh karena itu, pada subbab berikut, sebelum dijelaskan lebih lanjut mengenai ekspansi Taylor dari skema umum Runge-Kutta s-*stage*, akan dibahas terlebih dahulu mengenai skema umum Runge Kutta eksplisit s-*stage* untuk PDS.

3.2.1 Skema Umum Runge-Kutta Eksplisit s-*stage* Untuk Menyelesaikan Suatu Persamaan Diferensial Stokastik

Berdasarkan [8], berikut ialah skema umum Runge-Kutta eksplisit s-*stage* untuk menyelesaikan suatu Persamaan Diferensial Stokastik yang memiliki bentuk umum pada (1), yaitu

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i + \Delta W_n \sum_{i=1}^{s} \overline{b}_i \overline{k}_i + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i \tilde{k}_i + \sqrt{vh}\sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i \hat{k}_i \,. \qquad (40)$$

Pada persamaan ini, $\overline{x}_n$ adalah solusi numerik pada titik t = nh, dan parameter – parameter $k_i, \overline{k}_i, \tilde{k}_i,$ dan $\hat{k}_i$ adalah fungsi – fungsi yang bernilai sebagai berikut

$$\begin{cases} k_i = f\left(\overline{x}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + \Delta W_n \sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij} \overline{k}_j + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} \tilde{k}_j \right), \\ \overline{k}_i = g\left(\overline{x}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + \Delta W_n \sum_{j=1}^{i-1} \overline{a}_{ij} \overline{k}_j + \sqrt{vh}\sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij} \hat{k}_j \right), \\ \tilde{k}_i = g\left(\overline{x}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + \sqrt{vh}\sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij} \hat{k}_j \right), \\ \hat{k}_i = g\left(\overline{x}_n + \sqrt{vh}\sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij} \hat{k}_j \right), \end{cases} \qquad (41)$$

dengan v adalah konstanta positif. Parameter – parameter $\{b_i\}, \{\overline{b}_i\}, \{\tilde{b}_i\}$ dan $\{\hat{b}_i\}$ untuk i = 1, 2, …, s, pada skema umum Runge-Kutta PDS s-*stage* (41), dan $\{a_{ij}\}, \{\overline{a}_{ij}\}, \{\tilde{a}_{ij}\},$ dan $\{\hat{a}_{ij}\}$ untuk i = 1, 2, …, s (j=1, …, i-1) pada persamaan (41), akan ditentukan sehingga solusi numerik dapat ditentukan dengan menggunakan skema tersebut.

Untuk mendapatkan nilai dari parameter – parameter pada skema umum Runge-Kutta eksplisit s-*stage* untuk menyelesaikan suatu Persamaan Diferensial Stokastik, diperlukan ekspansi Taylor dari skema numerik Runge-Kutta s-*stage* dengan *strong convergence* order 1,5 pada (40) dan (41), dimana $\overline{x}_n$ adalah solusi aproksimasi pada titik $t = t_n$. Sesuai dengan penjelasan pada [8], dengan mensubstitusi (41) ke persamaan (40), dan dengan mengekspansikan (40) berdasarkan ekspansi Taylor pada subbab 2.5, maka didapatkan

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n &+ \Delta W_n \left[g\right]_n \sum_{i}^{s} \bar{b}_i + \Delta \tilde{W}_n \left[g\right]_n \sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i \\
&+ \sqrt{vh}\left[g\right]_n \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i + h\left[f\right]_n \sum_{i=1}^{s} b_i + \Delta W_n^{\,2} \left[g_x\left(g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i \bar{c}_i \\
&+ \Delta W_n \sqrt{vh}\left[g_x\left(g\right)\right] \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i \hat{c}_i + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} \sqrt{vh}\left[g_x\left(g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i \hat{c}_i \\
&+ \left(\sqrt{vh}\right)^2 \left[g_x\left(g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i \hat{c}_i + h\Delta W_n \left[f_x\left(g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} b_i \bar{c}_i \\
&+ h\frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} \left[f_x\left(g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} b_i \tilde{c}_i + h\Delta W_n \left[g_x\left(f\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i c_i \\
&+ \Delta W_n^{\,3} \left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} \bar{b}_i \bar{a}_{ij} \bar{c}_j + \Delta W_n^{\,2} \sqrt{vh}\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} \bar{b}_i \bar{a}_{ij} \hat{c}_j \\
&+ \Delta W_n \left(\sqrt{vh}\right)^2 \left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} \bar{b}_i \hat{a}_{ij} \hat{c}_j + \frac{\Delta W_n^{\,3}}{2} \left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i \bar{c}_i^{\,2} \\
&+ \Delta W_n \left(\sqrt{vh}\right)^2 \left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i \hat{c}_i^{\,2} + \Delta W_n^{\,2} \sqrt{vh}\left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \bar{b}_i \bar{c}_i \hat{c}_i \\
&+ h\frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} \left[g_x\left(f\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i c_i + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{vh}\right)^2 \left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{b}_i \hat{a}_{ij} \hat{c}_j \qquad ,(42) \\
&+ \frac{\Delta \tilde{W}_n \left(\sqrt{vh}\right)^2}{2\sqrt{3}} \left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i \hat{c}_i^{\,2} + \left(\sqrt{vh}\right)^3 \left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} \hat{b}_i \hat{a}_{ij} \hat{c}_j \\
&+ \frac{\left(\sqrt{vh}\right)^2}{2} \left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i \hat{c}_i^{\,2} + r\left(t_n, \bar{x}_n\right)
\end{aligned}
$$

dimana suku $r\left(t_n, \bar{x}_n\right)$ adalah suku sisa.

Pada skema (40) dan (41) terdapat parameter – parameter yang harus ditentukan terlebih dahulu sebelum skema tersebut dapat diimplementasikan. Oleh karena itu, pada subbab berikut, akan dibahas mengenai penentuan parameter – parameter dalam skema Runge-Kutta s-*stage*.

3.2.2 Penentuan Parameter - Parameter dalam Skema Runge-Kutta s-*stage*.

Sebelumnya telah dibahas ekspansi Taylor dari skema numerik Runge-Kutta s-*stage* dengan order *strong convergence* 1,5 pada (42) yang dapat digunakan untuk menyelesaikan atau mencari solusi aproksimasi dari suatu Persamaan Diferensial Stokastik dalam bentuk Îto. Sebelumnya pula juga telah dibahas penjabaran dari skema Taylor dengan *strong convergence* 1,5 pada (20) di bab II. Dengan membandingkan koefisien dari suku – suku yang terkait pada dua persamaan ini, dapat diperoleh sebuah sistem persamaan yang dapat digunakan untuk mencari parameter - parameter yang dibutuhkan dalam skema Runge-Kutta PDS tersebut [8].

Berikut adalah langkah – langkah yang digunakan untuk mendapatkan sistem persamaan tersebut.

(c.1) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\Delta W_n \left[g \right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $g\left(x(t_n)\right)\Delta W_n$ = $\Delta W_n \left[g \right]_n \sum_{i=1}^{s} \overline{b_i}$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s} \overline{b_i}$ = 1.

(c.2) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\Delta W_n^{\,2} \left[g_x\left(g\right) \right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $\left(g\right)_x \left(g\right)\left(x\left(t_n\right)\right)\frac{\Delta W_n^{\,2}}{2}$ = $\Delta W_n^{\,2} \left[g_x\left(g\right) \right]_n \sum_{i=1}^{s} \overline{b_i}\overline{c_i}$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s} \overline{b_i}\overline{c_i}$ = $\frac{1}{2}$.

(c.3) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\left(\sqrt{vh}\right)^2\left[g_x(g)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $(g)_x(g)\left(x(t_n)\right)\frac{h}{2}$ = $\left(\sqrt{vh}\right)^2\left[g_x(g)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\hat{b}_i\hat{c}_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\hat{b}_i\hat{c}_i$ = $-\frac{1}{2v}$.

(c.4) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $h[f]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $f\left(x(t_n)\right)h$ = $h[f]_n\sum_{i=1}^{s}b_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}b_i$ = 1 .

(c.5) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\frac{\Delta W_n^{\,3}}{2}\left[g_{xx}(g,g)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $\left((g)_{xx}(g,g)\left(x(t_n)\right)\right)\frac{\Delta W_n^{\,3}}{6}$ = $\frac{\Delta W_n^{\,3}}{2}\left[g_{xx}(g,g)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\bar{c}_i^{\,2}$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\bar{c}_i^{\,2}$ = $\frac{1}{3}$.

(c.6) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\Delta W_n\left(\sqrt{vh}\right)^2\left[g_{xx}(g,g)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $\left((g)_{xx}(g,g)\left(x(t_n)\right)\right)\frac{-3\Delta W_n h}{6}$ = $\Delta W_n\left(\sqrt{vh}\right)^2\left[g_{xx}(g,g)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\hat{c}_i^{\,2}$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\hat{c}_i^{\,2}$ = $-\frac{1}{2v}$.

(c.7) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\Delta W_n^{\,3}\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$\left(\left(g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right)\left(x\left(t_n\right)\right)\right)\frac{\Delta W_n^{\,3}}{6}$ = $\Delta W_n^{\,3}\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\bar{b}_i\bar{a}_{ij}\bar{c}_j$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\bar{b}_i\bar{a}_{ij}\bar{c}_j$ = $\frac{1}{6}$.

(c.8) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\Delta W_n\left(\sqrt{vh}\right)^2\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$\left(\left(g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right)\left(x\left(t_n\right)\right)\right)\frac{-3\Delta W_n h}{6}$ = $\Delta W_n\left(\sqrt{vh}\right)^2\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\bar{b}_i\hat{a}_{ij}\hat{c}_j$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\bar{b}_i\hat{a}_{ij}\hat{c}_j$ = $-\frac{1}{2v}$.

(c.9) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $h\Delta W_n\left[g_x\left(f\right)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $\left(\left(g\right)_x\left(f\right)\left(x\left(t_n\right)\right)\right)\frac{\Delta W_n}{2}h$ = $h\Delta W_n\left[g_x\left(f\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i c_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i c_i$ = $\frac{1}{2}$.

(c.10) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $h\Delta W_n\left[f_x\left(g\right)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $\left(\left(f\right)_x\left(g\right)\left(x\left(t_n\right)\right)\right)\frac{\Delta W_n}{2}h$ = $h\Delta W_n\left[f_x\left(g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s}b_i\bar{c}_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}b_i\bar{c}_i$ = $\frac{1}{2}$.

(c.11) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $h\frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left[f_x(g)\right]_n$,

secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $\left((f)_x(g)\left(x(t_n)\right)\right)\Delta\tilde{W}_n\frac{h}{2\sqrt{3}}$

= $h\frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left[f_x(g)\right]_n\sum_{i=1}^{s}b_i\tilde{c}_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}b_i\tilde{c}_i$ = $\frac{1}{2}$.

(c.12) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $h\frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left[g_x(f)\right]_n$,

secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$\left(-(g)_x(f)\left(x(t_n)\right)\right)\Delta\tilde{W}_n\frac{h}{2\sqrt{3}}$ = $h\frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left[g_x(f)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_ic_i$ maka dapat disimpulkan

bahwa $\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_ic_i$ = $-\frac{1}{2}$.

(c.13) Dengan membandingkan koefisien pada variabel

$\frac{\Delta\tilde{W}_n\left(\sqrt{vh}\right)^2}{2\sqrt{3}}\left[g_{xx}(g,g)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$\left(-\frac{1}{2}(g)_{xx}(g,g)\left(x(t_n)\right)\right)\Delta\tilde{W}_n\frac{h}{2\sqrt{3}}$ = $\frac{\Delta\tilde{W}_n\left(\sqrt{vh}\right)^2}{2\sqrt{3}}\left[g_{xx}(g,g)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_i\hat{c}_i^{\,2}$ maka dapat

disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_i\hat{c}_i^{\,2}$ = $-\frac{1}{2v}$.

(c.14) Dengan membandingkan koefisien pada variabel

$\Delta W_n{}^2\sqrt{vh}\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$0=\Delta W_n{}^2\sqrt{vh}\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\overline{b}_i\overline{a}_{ij}\hat{c}_j$ maka dapat disimpulkan bahwa

$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\overline{b}_i\overline{a}_{ij}\hat{c}_j = 0$.

(c.15) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\Delta W_n\sqrt{vh}\left[g_x\left(g\right)\right]$,

secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $0=\Delta W_n\sqrt{vh}\left[g_x\left(g\right)\right]\sum_{i=1}^{s}\overline{b}_i\hat{c}_i$

maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\overline{b}_i\hat{c}_i = 0$.

(c.16) Dengan membandingkan koefisien pada variabel

$\Delta W_n{}^2\sqrt{vh}\left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$0=\Delta W_n{}^2\sqrt{vh}\left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\overline{b}_i\overline{c}_i\hat{c}_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\overline{b}_i\overline{c}_i\hat{c}_i = 0$

(c.17) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\Delta\tilde{W}_n\left[g\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $0 = \Delta\tilde{W}_n\left[g\right]_n\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_i = 0$.

(c.18) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\sqrt{vh}\left[g_x\left(g\right)\right]_n$,

secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$0=\frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\sqrt{vh}\left[g_x\left(g\right)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_i\hat{c}_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_i\hat{c}_i = 0$.

(c.19) Dengan membandingkan koefisien pada variabel

$\frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{vh}\right)^2\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$0 = \frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{vh}\right)^2\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\tilde{b}_i\hat{a}_{ij}\hat{c}_j$ maka dapat disimpulkan bahwa

$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\tilde{b}_i\hat{a}_{ij}\hat{c}_j = 0$.

(c.20) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\sqrt{vh}\left[g\right]_n$, secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan $0 = \sqrt{vh}\left[g\right]_n\sum_{i=1}^{s}\hat{b}_i$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\hat{b}_i = 0$.

(c.21) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\left(\sqrt{vh}\right)^3\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n$,

secara urut pada (20) dan (42) didapat persamaan

$0=\left(\sqrt{vh}\right)^3\left[g_x\left(g_x\left(g\right)\right)\right]_n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\hat{b}_i\hat{a}_{ij}\hat{c}_j$ maka dapat disimpulkan bahwa

$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\hat{b}_i\hat{a}_{ij}\hat{c}_j = 0$.

(c.22) Dengan membandingkan koefisien pada variabel $\frac{\left(\sqrt{v}h\right)^2}{2}\left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n$

pada (20) dan (42) didapat persamaan $0 = \frac{\left(\sqrt{v}h\right)^2}{2}\left[g_{xx}\left(g,g\right)\right]_n \sum_{i=1}^{s}\hat{b}_i\hat{c}_i^{\,2}$ maka dapat disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{s}\hat{b}_i\hat{c}_i^{\,2} = 0$.

Secara ringkas, sistem persamaan di atas dapat disimpulkan sebagai berikut

(c.1) $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i = 1$

(c.2) $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\bar{c}_i = \frac{1}{2}$

(c.3) $\sum_{i=1}^{s}\hat{b}_i\hat{c}_i = -\frac{1}{2v}$

(c.4) $\sum_{i=1}^{s}b_i = 1$

(c.5) $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\bar{c}_i^{\,2} = \frac{1}{3}$

(c.6) $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\hat{c}_i^{\,2} = -\frac{1}{2v}$

(c.7) $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\bar{b}_i\bar{a}_{ij}\bar{c}_j = \frac{1}{6}$

(c.8) $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\bar{b}_i\hat{a}_{ij}\hat{c}_j = -\frac{1}{2v}$

(c.9) $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i c_i = \frac{1}{2}$

(c.10) $\sum_{i=1}^{s}b_i\bar{c}_i = \frac{1}{2}$

(c.11) $\sum_{i=1}^{s}b_i\tilde{c}_i = \frac{1}{2}$

(c.12) $\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_i c_i = -\frac{1}{2}$

(c.13) $\sum_{i=1}^{s}\tilde{b}_i\hat{c}_i^{\,2} = -\frac{1}{2v}$

(c.14) $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i-1}\bar{b}_i\bar{a}_{ij}\hat{c}_j = 0$

(c.15) $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\hat{c}_i = 0$

(c.16) $\sum_{i=1}^{s}\bar{b}_i\bar{c}_i\hat{c}_i = 0$

(c.17) $\sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i = 0$

(c.18) $\sum_{i=1}^{s} \tilde{b}_i \hat{c}_i = 0$

(c.19) $\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{b}_i \hat{a}_{ij} \hat{c}_j = 0$

(c.20) $\sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i = 0$

(c.21) $\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} \hat{b}_i \hat{a}_{ij} \hat{c}_j = 0$

(c.22) $\sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i \hat{c}_i^{\,2} = 0$.

Pada subbab ini telah dibahas sistem persamaan yang dapat digunakan untuk menentukan parameter – parameter pada skema Runge-Kutta s-*stage*. Pada subbab berikut, akan dibahas bagaimana sistem persamaan yang dapat digunakan untuk menentukan parameter – parameter pada skema Runge-Kutta 4-*stage* sehingga parameter – parameter pada skema Runge-Kutta 4-*stage* dapat ditentukan

3.2.3 Penentuan Parameter – Parameter dalam Skema Runge-Kutta 4-*stage* dengan Order *Strong Convergence* 1,5.

Berdasarkan skema umum Runge-Kutta PDS s-*stage* pada (40), akan didapat skema Runge-Kutta PDS 4-*stage* sebagai berikut

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + h\sum_{i=1}^{4} b_i k_i + \Delta W_n \sum_{i=1}^{4} \bar{b}_i \bar{k}_i + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^{4} \tilde{b}_i \tilde{k}_i + \sqrt{vh} \sum_{i=1}^{4} \hat{b}_i \hat{k}_i \,. \qquad (43)$$

Pada persamaan ini, $\bar{x}_n$ adalah solusi numerik pada titik t = nh, dan parameter – parameter $k_i, \bar{k}_i, \tilde{k}_i,$ dan $\hat{k}_i$ adalah fungsi – fungsi yang bernilai sebagai berikut

$$\begin{cases} k_i = f\left(\bar{x}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j + \Delta W_n \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij}\bar{k}_j + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij}\tilde{k}_j\right), \\ \bar{k}_i = g\left(\bar{x}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j + \Delta W_n \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij}\bar{k}_j + \sqrt{vh}\sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij}\hat{k}_j\right), \\ \tilde{k}_i = g\left(\bar{x}_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j + \sqrt{vh}\sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij}\hat{k}_j\right), \\ \hat{k}_i = g\left(\bar{x}_n + \sqrt{vh}\sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij}\hat{k}_j\right), \end{cases} \quad (44)$$

dimana v adalah konstanta positif. Parameter – parameter $\{b_i\}, \{\bar{b}_i\}, \{\tilde{b}_i\}$ dan $\{\hat{b}_i\}$ untuk i = 1, 2, 3, 4, $\{a_{ij}\}, \{\bar{a}_{ij}\}, \{\tilde{a}_{ij}\},$ dan $\{\hat{a}_{ij}\}$ untuk i = 1, 2, 3, 4 (j=1, …, i-1) pada persamaan (43) dan (44) di atas, akan ditentukan nilainya sehingga solusi numerik dapat ditemukan dengan menggunakan skema tersebut. Untuk menentukan nilai dari parameter – parameter tersebut, akan digunakan sistem persamaan (c.1) - (c.22) dengan s = 4. Sistem persamaan tersebut terdiri dari 22 buah persamaan yang digunakan untuk penurunan rumus umum Runge-Kutta PDS s-*stage*. Oleh karena itu, sistem persamaan ini dapat dijabarkan untuk Runge-Kutta PDS 4-*stage* sebagai berikut

(c.1) $\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 + \bar{b}_4 = 1$

(c.2) $\bar{b}_1\bar{c}_1 + \bar{b}_2\bar{c}_2 + \bar{b}_3\bar{c}_3 + \bar{b}_4\bar{c}_4 = \frac{1}{2}$

(c.3) $\hat{b}_1\hat{c}_1 + \hat{b}_2\hat{c}_2 + \hat{b}_3\hat{c}_3 + \hat{b}_4\hat{c}_4 = -\frac{1}{2v}$

(c.4) $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$

(c.5) $\bar{b}_1\bar{c}_1^{\,2} + \bar{b}_2\bar{c}_2^{\,2} + \bar{b}_3\bar{c}_3^{\,2} + \bar{b}_4\bar{c}_4^{\,2} = \frac{1}{3}$

(c.6) $\bar{b}_1\hat{c}_1^{\,2} + \bar{b}_2\hat{c}_2^{\,2} + \bar{b}_3\hat{c}_3^{\,2} + \bar{b}_4\hat{c}_4^{\,2} = -\frac{1}{2v}$

(c.7) $\bar{b}_2\bar{a}_{21}\bar{c}_1 + \bar{b}_3\bar{a}_{31}\bar{c}_1 + \bar{b}_3\bar{a}_{32}\bar{c}_2 + \bar{b}_4\bar{a}_{41}\bar{c}_1 + \bar{b}_4\bar{a}_{42}\bar{c}_2 + \bar{b}_4\bar{a}_{43}\bar{c}_3 = \frac{1}{6}$

(c.8) $\bar{b}_2\hat{a}_{21}\hat{c}_1 + \bar{b}_3\hat{a}_{31}\hat{c}_1 + \bar{b}_3\hat{a}_{32}\hat{c}_2 + \bar{b}_4\hat{a}_{41}\hat{c}_1 + \bar{b}_4\hat{a}_{42}\hat{c}_2 + \bar{b}_4\hat{a}_{43}\hat{c}_3 = -\frac{1}{2v}$

(c.9) $\bar{b}_1c_1 + \bar{b}_2c_2 + \bar{b}_3c_3 + \bar{b}_4c_4 = \frac{1}{2}$

(c.10) $b_1\bar{c}_1 + b_2\bar{c}_2 + b_3\bar{c}_3 + b_4\bar{c}_4 = \frac{1}{2}$

(c.11) $b_1\tilde{c}_1 + b_2\tilde{c}_2 + b_3\tilde{c}_3 + b_4\tilde{c}_4 = \frac{1}{2}$

(c.12) $\tilde{b}_1c_1 + \tilde{b}_2c_2 + \tilde{b}_3c_3 + \tilde{b}_4c_4 = -\frac{1}{2}$

(c.13) $\tilde{b}_1\hat{c}_1^{\,2} + \tilde{b}_2\hat{c}_2^{\,2} + \tilde{b}_3\hat{c}_3^{\,2} + \tilde{b}_4\hat{c}_4^{\,2} = -\frac{1}{2v}$

(c.14) $\bar{b}_2\bar{a}_{21}\hat{c}_1 + \bar{b}_3\bar{a}_{31}\hat{c}_1 + \bar{b}_3\bar{a}_{32}\hat{c}_2 + \bar{b}_4\bar{a}_{41}\hat{c}_1 + \bar{b}_4\bar{a}_{42}\hat{c}_2 + \bar{b}_4\bar{a}_{43}\hat{c}_3 = 0$

(c.15) $\bar{b}_1\hat{c}_1 + \bar{b}_2\hat{c}_2 + \bar{b}_3\hat{c}_3 + \bar{b}_4\hat{c}_4 = 0$

(c.16) $\bar{b}_1\bar{c}_1\hat{c}_1 + \bar{b}_2\bar{c}_2\hat{c}_2 + \bar{b}_3\bar{c}_3\hat{c}_3 + \bar{b}_4\bar{c}_4\hat{c}_4 = 0$

(c.17) $\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 + \tilde{b}_4 = 0$

(c.18) $\tilde{b}_1\hat{c}_1 + \tilde{b}_2\hat{c}_2 + \tilde{b}_3\hat{c}_3 + \tilde{b}_4\hat{c}_4 = 0$

(c.19) $\tilde{b}_2\hat{a}_{21}\hat{c}_1 + \tilde{b}_3\hat{a}_{31}\hat{c}_1 + \tilde{b}_3\hat{a}_{32}\hat{c}_2 + \tilde{b}_4\hat{a}_{41}\hat{c}_1 + \tilde{b}_4\hat{a}_{42}\hat{c}_2 + \tilde{b}_4\hat{a}_{43}\hat{c}_3 = 0$

(c.20) $\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4 = 0$

(c.21) $\hat{b}_2\hat{a}_{21}\hat{c}_1 + \hat{b}_3\hat{a}_{31}\hat{c}_1 + \hat{b}_3\hat{a}_{32}\hat{c}_2 + \hat{b}_4\hat{a}_{41}\hat{c}_1 + \hat{b}_4\hat{a}_{42}\hat{c}_2 + \hat{b}_4\hat{a}_{43}\hat{c}_3 = 0$

(c.22) $\hat{b}_1\hat{c}_1^{\,2} + \hat{b}_2\hat{c}_2^{\,2} + \hat{b}_3\hat{c}_3^{\,2} + \hat{b}_4\hat{c}_4^{\,2} = 0$ (45)

Dengan menggunakan 22 buah persamaan di atas, akan dicari nilai parameter - parameter yang ada dalam skema Runge-Kutta PDS 4-*stage*, dengan *strong convergence* 1,5 dalam skema Îto menggunakan algoritma Kaneko yang telah dibahas pada [8]. Berikut parameter – parameter yang dapat ditentukan

v = 3

$b_1 = \frac{1}{6}$	$\bar{b}_1 = \frac{1}{6}$	$\tilde{b}_1 = \frac{1}{6}$	$\hat{b}_1 = 0$
$b_2 = -\frac{2}{9}$	$\bar{b}_2 = -\frac{2}{9}$	$\tilde{b}_2 = -\frac{2}{9}$	$\hat{b}_2 = -\frac{1}{18}$
$b_3 = \frac{8}{9}$	$\bar{b}_3 = \frac{8}{9}$	$\tilde{b}_3 = \frac{8}{9}$	$\hat{b}_3 = \frac{8}{9}$
$b_4 = \frac{1}{6}$	$\bar{b}_4 = \frac{1}{6}$	$\tilde{b}_4 = -\frac{5}{6}$	$\hat{b}_4 = -\frac{5}{6}$

$c_2 = \frac{1}{2}$	$c_4 = 1$	$\bar{c}_3 = \frac{1}{2}$	$\tilde{c}_2 = \frac{1}{2}$
$c_3 = \frac{1}{2}$	$\bar{c}_2 = \frac{1}{2}$	$\bar{c}_4 = 1$	$\tilde{c}_3 = \frac{1}{2}$

$\tilde{c}_4 = 1$ $\quad \hat{c}_2 = -1$ $\quad \hat{c}_3 = -\dfrac{1}{4}$ $\quad \hat{c}_4 = 0$

$$a_{21} = \frac{1}{2} \qquad a_{31} = \frac{1}{4} \qquad a_{32} = \frac{1}{4} \qquad a_{41} = \frac{1}{3} \qquad a_{42} = -2 \qquad a_{43} = \frac{8}{3}$$

$$\bar{a}_{21} = \frac{1}{2} \qquad \bar{a}_{31} = \frac{1}{4} \qquad \bar{a}_{32} = \frac{1}{4} \qquad \bar{a}_{41} = \frac{1}{3} \qquad \bar{a}_{42} = -2 \qquad \bar{a}_{43} = \frac{8}{3}$$

$$\tilde{a}_{21} = \frac{1}{2} \qquad \tilde{a}_{31} = 0 \qquad \tilde{a}_{32} = \frac{1}{2} \qquad \tilde{a}_{41} = 0 \qquad \tilde{a}_{42} = 0 \qquad \tilde{a}_{43} = 1 \qquad \hat{a}_{21} = -1$$

$$\hat{a}_{31} = -\frac{13}{32} \qquad \hat{a}_{32} = \frac{5}{32} \qquad \hat{a}_{41} = -\frac{7}{24} \qquad \hat{a}_{42} = \frac{1}{8} \qquad \hat{a}_{43} = \frac{1}{6} \qquad (46)$$

Parameter – parameter ini, secara alternatif dapat ditampilkan dengan menggunakan *Butcher tableau* sebagai berikut

$$\begin{array}{c|c} c & a_{ij} \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|c} c & \bar{a}_{ij} \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & -2 & 8/3 & 0 \\ \hline & 1/6 & -2/9 & 8/9 & 1/6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} c & \tilde{a}_{ij} \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & -2/9 & 8/9 & -5/6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} c & \hat{a}_{ij} \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -13/32 & 5/32 & 0 & 0 \\ 0 & -7/24 & 1/8 & 1/6 & 0 \\ \hline & 0 & -1/18 & 8/9 & -5/6 \end{array}$$

Setelah parameter – parameter pada (46) ditemukan, skema Runge-Kutta PDS 4-*stage* dengan *strong convergence* 1,5 akan didapat dengan mensubtitusi nilai – nilai parameter pada (46) ke persamaan (43), sehingga didapat skema berikut

$$\begin{aligned} \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n &+ \left(\frac{1}{6}k_1 - \frac{2}{9}k_2 + \frac{8}{9}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right)h + \left(\frac{1}{6}\overline{k}_1 - \frac{2}{9}\overline{k}_2 + \frac{8}{9}\overline{k}_3 + \frac{1}{6}\overline{k}_4\right)\Delta W_n \\ &+ \left(\frac{1}{6}\tilde{k}_1 - \frac{2}{9}\tilde{k}_2 + \frac{8}{9}\tilde{k}_3 - \frac{5}{6}\tilde{k}_4\right)\frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{1}{18}\hat{k}_2 + \frac{8}{9}\hat{k}_3 - \frac{5}{6}\hat{k}_4\right)\sqrt{3h}. \end{aligned} \qquad (47)$$

Dimana nilai dari parameter – parameter $k_i, \overline{k}_i, \tilde{k}_i,$ dan $\hat{k}_i$ adalah fungsi – fungsi yang bernilai sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(\bar{x}_n\right), \\
k_2 &= f\left(\bar{x}_n + h\left(a_{21}k_1\right) + \Delta W_n\left(\bar{a}_{21}\bar{k}_1\right) + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left(\tilde{a}_{21}\tilde{k}_1\right)\right), \\
k_3 &= f\left(\bar{x}_n + h\left(a_{31}k_1 + a_{32}k_2\right) + \Delta W_n\left(\bar{a}_{31}\bar{k}_1 + \bar{a}_{32}\bar{k}_2\right) + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left(\tilde{a}_{31}\tilde{k}_1 + \tilde{a}_{32}\tilde{k}_2\right)\right), \\
k_4 &= f\left(\bar{x}_n + h\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right) + \Delta W_n\left(\bar{a}_{41}\bar{k}_1 + \bar{a}_{42}\bar{k}_2 + \bar{a}_{43}\bar{k}_3\right) + \frac{\Delta \tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left(\tilde{a}_{41}\tilde{k}_1 + \tilde{a}_{42}\tilde{k}_2 + \tilde{a}_{43}\tilde{k}_3\right)\right), \\
\\
\bar{k}_1 &= g\left(\bar{x}_n\right), \\
\bar{k}_2 &= g\left(\bar{x}_n + h\left(a_{21}k_1\right) + \Delta W_n\left(\bar{a}_{21}\bar{k}_1\right) + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{21}\hat{k}_1\right)\right), \\
\bar{k}_3 &= g\left(\bar{x}_n + h\left(a_{31}k_1 + a_{32}k_2\right) + \Delta W_n\left(\bar{a}_{31}\bar{k}_1 + \bar{a}_{32}\bar{k}_2\right) + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{31}\hat{k}_1 + \hat{a}_{32}\hat{k}_2\right)\right), \\
\bar{k}_4 &= g\left(\bar{x}_n + h\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right) + \Delta W_n\left(\bar{a}_{41}\bar{k}_1 + \bar{a}_{42}\bar{k}_2 + \bar{a}_{43}\bar{k}_3\right) + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{41}\hat{k}_1 + \hat{a}_{42}\hat{k}_2 + \hat{a}_{43}\hat{k}_3\right)\right), \\
\\
\tilde{k}_1 &= g\left(\bar{x}_n\right), \\
\tilde{k}_2 &= g\left(\bar{x}_n + h\left(a_{21}k_1\right) + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{21}\hat{k}_1\right)\right), \\
\tilde{k}_3 &= g\left(\bar{x}_n + h\left(a_{31}k_1 + a_{32}k_2\right) + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{31}\hat{k}_1 + \hat{a}_{32}\hat{k}_2\right)\right), \\
\tilde{k}_4 &= g\left(\bar{x}_n + h\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right) + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{41}\hat{k}_1 + \hat{a}_{42}\hat{k}_2 + \hat{a}_{43}\hat{k}_3\right)\right), \\
\\
\hat{k}_1 &= g\left(\bar{x}_n\right), \\
\hat{k}_2 &= g\left(\bar{x}_n + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{21}\hat{k}_1\right)\right), \\
\hat{k}_3 &= g\left(\bar{x}_n + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{31}\hat{k}_1 + \hat{a}_{32}\hat{k}_2\right)\right), \\
\hat{k}_4 &= g\left(\bar{x}_n + \sqrt{vh}\left(\hat{a}_{41}\hat{k}_1 + \hat{a}_{42}\hat{k}_2 + \hat{a}_{43}\hat{k}_3\right)\right).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Dengan mensubtitusi nilai parameter – parameter (46) ke persamaan (48), maka nilai dari parameter – parameter $k_i, \bar{k}_i, \tilde{k}_i,$ dan $\hat{k}_i$ adalah fungsi – fungsi yang bernilai sebagai berikut

$$k_1 = f\left(\bar{x}_n\right),$$
$$k_2 = f\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{2}k_1\right) + \Delta W_n\left(\frac{1}{2}\bar{k}_1\right) + \frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\tilde{k}_1\right)\right),$$
$$k_3 = f\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right) + \Delta W_n\left(\frac{1}{4}\bar{k}_1 + \frac{1}{4}\bar{k}_2\right) + \frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left(0\tilde{k}_1 + \frac{1}{2}\tilde{k}_2\right)\right),$$
$$k_4 = f\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{3}k_1 - 2k_2 + \frac{8}{3}k_3\right) + \Delta W_n\left(\frac{1}{3}\bar{k}_1 - 2\bar{k}_2 + \frac{8}{3}\bar{k}_3\right) + \frac{\Delta\tilde{W}_n}{\sqrt{3}}\left(0\tilde{k}_1 + 0\tilde{k}_2 + 1\tilde{k}_3\right)\right),$$

$$\bar{k}_1 = g\left(\bar{x}_n\right),$$
$$\bar{k}_2 = g\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{2}k_1\right) + \Delta W_n\left(\frac{1}{2}\bar{k}_1\right) + \sqrt{vh}\left(-1\hat{k}_1\right)\right),$$
$$\bar{k}_3 = g\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right) + \Delta W_n\left(\frac{1}{4}\bar{k}_1 + \frac{1}{4}\bar{k}_2\right) + \sqrt{vh}\left(-\frac{13}{32}\hat{k}_1 + \frac{5}{32}\hat{k}_2\right)\right),$$
$$\bar{k}_4 = g\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{3}k_1 - 2k_2 + \frac{8}{3}k_3\right) + \Delta W_n\left(\frac{1}{3}\bar{k}_1 - 2\bar{k}_2 + \frac{8}{3}\bar{k}_3\right) + \sqrt{vh}\left(-\frac{7}{24}\hat{k}_1 + \frac{1}{8}\hat{k}_2 + \frac{1}{6}\hat{k}_3\right)\right),$$

$$\tilde{k}_1 = g\left(\bar{x}_n\right),$$
$$\tilde{k}_2 = g\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{2}k_1\right) + \sqrt{vh}\left(-1\hat{k}_1\right)\right),$$
$$\tilde{k}_3 = g\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right) + \sqrt{vh}\left(-\frac{13}{32}\hat{k}_1 + \frac{5}{32}\hat{k}_2\right)\right),$$
$$\tilde{k}_4 = g\left(\bar{x}_n + h\left(\frac{1}{3}k_1 - 2k_2 + \frac{8}{3}k_3\right) + \sqrt{vh}\left(-\frac{7}{24}\hat{k}_1 + \frac{1}{8}\hat{k}_2 + \frac{1}{6}\hat{k}_3\right)\right),$$

$$\hat{k}_1 = g\left(\bar{x}_n\right),$$
$$\hat{k}_2 = g\left(\bar{x}_n + \sqrt{vh}\left(-1\hat{k}_1\right)\right),$$
$$\hat{k}_3 = g\left(\bar{x}_n + \sqrt{vh}\left(-\frac{13}{32}\hat{k}_1 + \frac{5}{32}\hat{k}_2\right)\right), \qquad (49)$$
$$\hat{k}_4 = g\left(\bar{x}_n + \sqrt{vh}\left(-\frac{7}{24}\hat{k}_1 + \frac{1}{8}\hat{k}_2 + \frac{1}{6}\hat{k}_3\right)\right).$$

Persamaan (47) dan (49) merupakan skema Runge-Kutta PDS 4-*stage* dengan *strong convergence* 1,5. Skema ini selanjutnya akan diimplementasikan pada bab IV untuk pencarian solusi numerik dari sebuah model Persamaan Diferensial Stokastik dalam memprediksi harga saham suatu perusahaan yang telah dijelaskan pada Bab II.