BAB IV

CONTOH SIMULASI DATA

Pada bab sebelumnya, telah dibahas mengenai suatu metode pengambilan sampel yang merupakan modifikasi dari *single systematic sampling*, yang menghasilkan taksiran tak bias untuk mean populasi, dan yang memberikan taksiran tak bias untuk variansinya. Pada bab ini hal tersebut akan ditunjukkan melalui contoh simulasi data.

Data yang akan digunakan di sini adalah data nilai akhir mata kuliah Distribusi Loss tahun ajaran 2006/2007 semester 2 mahasiswa Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia.

Dalam hal ini akan ditunjukkan dengan data bahwa $\bar{y}_{nss} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i} = \bar{y}$ adalah taksiran yang tak bias untuk mean populasi (μ) dengan $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$, dan $\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)(y_i - y_j)^2$ merupakan taksiran yang tak bias untuk $V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)(u_i - u_j)^2$.

Datanya ditampilkan dalam tabel berikut:

Tabel 4.1 Data nilai akhir distribusi loss mahasiswa tahun ajaran 2006/2007

Individu	Nilai Akhir
1	59.33
2	57.03
3	82.25
4	91.5
5	71.75
6	76.7
7	64.75
8	72.55
9	86.2
10	86.95

Data diatas mempunyai N=10 dan nilai mean populasi adalah:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$\mu = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} u_i$$

$$\mu = \frac{1}{10}\left(59,33 + 57,03 + ... + 86.95\right)$$

$$\mu = 74.90$$

Dalam bab ini akan diberikan dua contoh, dimana dalam kedua contoh ini diambil sampel berukuran 5 $(N = nk)$, kemudian dipilih suatu nilai r dari $1,2,....,10$ secara acak, selanjutnya

- $*$ Pada contoh 1, ditentukan $v = 2$ dan $d = 2$.
- $*$ Pada contoh 2, ditentukan $v = 3$ dan $d = 2$.

4.1 CONTOH 1

Pada contoh 1, sampel-sampel yang mungkin terpilih dapat terlihat pada tabel berikut:

Tabel 4.1.1 Kemungkinan sampel pada contoh 1

r	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	59.33	57.03	91.5	76.7	72.55
2	57.03	82.25	71.75	64.75	86.2
3	82.25	91.5	76.7	72.55	86.95
4	91.5	71.75	64.75	86.2	59.33
5	71.75	76.7	72.55	86.95	57.03
6	76.7	64.75	86.2	59.33	82.25
7	64.75	72.55	86.95	57.03	91.5
8	72.55	86.2	59.33	82.25	71.75

9	86.2	86.95	57.03	91.5	76.7
10	86.95	59.33	82.25	71.75	64.75

Akan ditentukan nilai dari taksiran mean populasi pada tiap-tiap sampel dengan rumus $\overline{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, kemudian dihitung nilai $E(\overline{y}_{nss})$ dan dibandingkan hasilnya dengan nilai mean populasi. Taksiran mean populasi pada masing-masing sampel ditampilkan pada tabel berikut:

Tabel 4.1.2 Nilai taksiran mean populasi pada contoh 1

r	$\overline{y}_{nss}$
1	71.42
2	72.40
3	81.99
4	74.71
5	73
6	73.85
7	74.56
8	74.42
9	79.68
10	73.01

Nilai $E(\bar{y}_{nss})$:

$$E(\bar{y}_{nss}) = \sum_{r=1}^{N} \bar{y}_{nss_r} p(\bar{y}_{nss})$$

$$E(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} \bar{y}_{nss_r}$$

$$E(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{10}\sum_{r=1}^{10} \bar{y}_{nss_r}$$

$$E(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{10}(71.42 + 72.40 + ... + 73.01)$$

$$E(\bar{y}_{nss}) = 74.90$$

Karena $E(\bar{y}_{nss}) = 74.90 = \mu$, maka dapat ditunjukkan bahwa $\bar{y}_{nss}$ adalah taksiran tak bias untuk μ .

Selanjutnya pada masing-masing sampel ditentukan taksiran variansi $\bar{y}_{nss}$ dimana:

$$\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)(y_i - y_j)^2$$

$$\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{10^2}\sum_{i}^{5}\sum_{j>i}^{5}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{10^2}{5^2}\right)(y_i - y_j)^2$$

$$\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{100}\sum_{i}^{5}\sum_{j>i}^{5}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{100}{25}\right)(y_i - y_j)^2$$

$$\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{100}\sum_{i}^{5}\sum_{j>i}^{5}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - 4\right)\left(y_i - y_j\right)^2$$

Pada tabel berikut ditampilkan taksiran variansi $\bar{y}_{nss}$ pada masing-masing sampel:

Tabel 4.1.3 Nilai taksiran variansi untuk taksiran mean populasi pada contoh 1

r	$\hat{V}(\bar{y}_{nss})$
1	-0.64
2	41.77
3	0.46
4	30.37
5	-6.40
6	-0.93
7	-3.08
8	2.30
9	-9.04
10	45.40

Pada tabel di atas terlihat bahwa terdapat sampel yang nilai taksiran variansinya bernilai negatif.

Nilai $E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)$:

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=\sum_{r=1}^{N}\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)_r p\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)$$

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)_r$$

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=\frac{1}{10}\sum_{r=1}^{10}\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)_r$$

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=\frac{1}{10}\left(-0.64+41.77+.....+45.4\right)$$

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=10.02$$

Lalu dihitung Nilai $V\left(\bar{y}_{nss}\right)$:

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1-\frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i-u_j\right)^2$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{10^2}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j>i}^{10}\left(1-\frac{10^2}{5^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i-u_j\right)^2$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j>i}^{10}\left(1-4\pi_{ij}\right)\left(u_i-u_j\right)^2$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=10.02$$

Karena $E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right] = 10.02 = V\left(\bar{y}_{nss}\right)$, maka dapat ditunjukkan bahwa

$\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)\left(y_i - y_j\right)^2$ merupakan taksiran tak bias untuk

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2 .$$

4.2 CONTOH 2

Pada contoh 2, sampel-sampel yang mungkin terpilih dapat terlihat pada tabel berikut:

Tabel 4.2.1 Kemungkinan sampel pada contoh 2

r	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	59.33	57.03	82.25	71.75	64.75
2	57.03	82.25	91.5	76.7	72.55
3	82.25	91.5	71.75	64.75	86.2
4	91.5	71.75	76.7	72.55	86.95
5	71.75	76.7	64.75	86.2	59.33
6	76.7	64.75	72.55	86.95	57.03
7	64.75	72.55	86.2	59.33	82.25
8	72.55	86.2	86.95	57.03	91.5

9	86.2	86.95	59.33	82.25	71.75
10	86.95	59.33	57.03	91.5	76.7

Akan ditentukan nilai dari taksiran mean populasi pada tiap-tiap sampel dengan rumus $\bar{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, kemudian dihitung nilai $E(\bar{y}_{nss})$ dan dibandingkan hasilnya dengan nilai mean populasi. Taksiran mean populasi pada masing-masing sampel ditampilkan pada tabel berikut:

Tabel 4.2.2 Nilai taksiran mean populasi pada contoh 2

r	$\bar{y}_{nss}$
1	67.02
2	76.01
3	79.29
4	79.89
5	71.75
6	71.60
7	73.02
8	78.85
9	77.30
10	74.30

Nilai $E(\bar{y}_{nss})$:

$$E(\bar{y}_{nss}) = \sum_{r=1}^{N} \bar{y}_{nss_r} p(\bar{y}_{nss})$$

$$E(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \bar{y}_{nss_r}$$

$$E(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{10} \sum_{r=1}^{10} \bar{y}_{nss_r}$$

$$E(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{10}(67.02 + 76.01 + ... + 74.30)$$

$$E(\bar{y}_{nss}) = 74.90$$

Karena $E(\bar{y}_{nss}) = 74.90 = \mu$, maka dapat ditunjukkan bahwa $\bar{y}_{nss}$ adalah taksiran tak bias untuk μ.

Selanjutnya pada masing-masing sampel ditentukan taksiran variansi $\bar{y}_{nss}$ dimana:

$$\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i}^{n} \sum_{j>i}^{n} \left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2} \right) (y_i - y_j)^2$$

$$\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{10^2} \sum_{i}^{5} \sum_{j>i}^{5} \left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{10^2}{5^2} \right) (y_i - y_j)^2$$

$$\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{100} \sum_{i}^{5} \sum_{j>i}^{5} \left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{100}{25} \right) (y_i - y_j)^2$$

$$\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{100}\sum_{i}^{5}\sum_{j>i}^{5}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - 4\right)(y_i - y_j)^2$$

Pada tabel berikut ditampilkan taksiran variansi $\bar{y}_{nss}$ pada masing-masing sampel:

Tabel 4.2.3 Nilai taksiran variansi untuk taksiran mean populasi pada contoh 2

r	$\hat{V}(\bar{y}_{nss})$
1	12.18
2	-6.07
3	40.30
4	0.30
5	-0.72
6	19.85
7	0.17
8	33.79
9	-0.31
10	54.03

Pada tabel tersebut terlihat bahwa terdapat sampel yang nilai taksiran variansinya bernilai negatif.

Nilai $E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)$:

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=\sum_{r=1}^{N}\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)_r p\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)$$

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)_r$$

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=\frac{1}{10}\sum_{r=1}^{10}\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)_r$$

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=\frac{1}{10}\left(12.18-6.07+.....+54.03\right)$$

$$E\left(\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right)=15.35$$

Lalu dihitung Nilai $V\left(\bar{y}_{nss}\right)$:

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1-\frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i-u_j\right)^2$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{10^2}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j>i}^{10}\left(1-\frac{10^2}{5^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i-u_j\right)^2$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10}\sum_{j>i}^{10}\left(1-4\pi_{ij}\right)\left(u_i-u_j\right)^2$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=15.35$$

Karena $E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right)\right] = 15.35 = V\left(\bar{y}_{nss}\right)$, maka dapat ditunjukan bahwa

$\hat{V}\left(\bar{y}_{nss}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)\left(y_i - y_j\right)^2$ merupakan taksiran tak bias untuk

$V\left(\bar{y}_{nss}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2$.