BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam pengambilan sampel dari suatu populasi, diperlukan suatu teknik pengambilan sampel yang tepat sesuai dengan keadaan populasi tersebut. Sehingga sampel yang diperoleh adalah sampel yang dapat mewakili populasi. Dengan sampel yang mewakili populasi, dapat diperoleh taksiran parameter populasi yang akurat. Taksiran parameter populasi dikatakan akurat, jika merupakan taksiran yang tak bias dan variansi taksirannya paling kecil diantara taksiran yang tak bias lainnya.

Pada bab ini, akan dibahas dua teknik pengambilan sampel dari ”*probability sampling* ” yang menjadi dasar dari metode pengambilan sampel yang akan dibahas dalam tugas akhir ini. Dalam bab ini, akan dijelaskan teknik pengambilan sampel dengan cara *Simple Random Sampling* (SRS), yang merupakan bentuk dasar dari ”*probability sampling* ” yang lain dan *single systematic sampling*. Selain itu, akan dibahas juga tentang taksiran mean populasi beserta variansi dan taksiran variansinya pada kedua teknik pengambilan sampel tersebut.

2.1 *SIMPLE RANDOM SAMPLING* (SRS)

2.1.1 Pendahuluan

Simple Random Sampling (SRS) adalah suatu metode pengambilan sampel dimana sampel berukuran n diambil dari populasi berukuran N, dengan cara sedemikian sehingga setiap sampel yang mungkin mempunyai probabilitas yang sama untuk terpilih menjadi sampel.

Cara mengambil sampel dengan teknik *Simple Random Sampling* (SRS) adalah sebagai berikut:

- Menomori semua elemen dalam populasi.
- Mengambil n bilangan acak diantara N nomor.

Elemen-elemen dengan nomor-nomor yang terpilih menjadi anggota sampel.

Dalam metode ini, pengambilan sampel dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu pengambilan sampel dengan pengembalian dan pengambilan sampel tanpa pengembalian. Karena unit yang sama tidak memberikan tambahan informasi, maka yang sering digunakan adalah pengambilan *Simple Random Sampling* tanpa pengembalian, dimana unit sampel yang terpilih pada suatu pengambilan tidak akan mungkin terpilih pada pengambilan berikutnya.

Pada *Simple Random Sampling*, setiap unit memiliki probabilitas yang sama untuk terpilih menjadi anggota sampel. Hal tersebut dapat dibuktikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.1.1

Dalam *Simple Random Sampling*, probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah $\frac{n}{N}$ (sama).

Bukti:

Misalkan diketahui nilai-nilai dari populasi adalah $= \{u_1, u_2, ..., u_N\}$.

Didefinisikan:

$p_m = \Pr(u_1 \text{ muncul pada pengambilan ke-} m) \quad ; \qquad m = 1, 2, ..., n$

Untuk $m = 1$, maka

$p_1 = \Pr(u_1 \text{ muncul pada pengambilan ke-1})$

$p_1 = \frac{1}{N}$

Untuk $m = 2$, maka

$p_2 = \Pr$ (u_1 muncul pada pengambilan ke-2)

$p_2 = \Pr$ (u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan u_1 muncul pada pengambilan ke-2)

Karena kejadian u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-2, merupakan kejadian saling bebas, maka diperoleh:

$p_2 = \Pr$ (u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1). $\Pr$ (u_1 muncul pada pengambilan ke-2)

$$p_2 = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \left(\frac{1}{N-1}\right)$$

$$p_2 = \left(\frac{N-1}{N}\right) \cdot \left(\frac{1}{N-1}\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{N}$$

Untuk $m = n$, maka

$p_n = \Pr$ (u_1 muncul pada pengambilan ke-n)

$p_n = \Pr$ (u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 sampai pengambilan ke-$n-1$ dan u_1 muncul pada pengambilan ke-n)

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{N-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{N-2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{N-(n-2)}\right) \cdot \left(\frac{1}{N-(n-1)}\right)$$

$$p_n = \left(\frac{N-1}{N}\right).\left(\frac{N-2}{N-1}\right).\left(\frac{N-3}{N-2}\right).....\left(\frac{N-(n-1)}{N-(n-2)}\right).\left(\frac{1}{N-(n-1)}\right)$$

$$p_n = \frac{1}{N}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$p_m = \frac{1}{N} \quad ; \quad \text{untuk} \quad m = 1,2,...,n \qquad (2.1.1.1)$$

Hal yang sama juga dapat dilakukan untuk setiap u_i ; $i = 1,2,...,N$.

Selanjutnya, misalkan:

$\pi_i = \Pr$ (u_i terpilih dalam sampel) ; untuk suatu i, $i = 1,2,...,N$

Akan dibuktikan $\pi_i = \frac{n}{N}$:

Misalkan:

A_m = kejadian u_i muncul pada pengambilan ke-m ; $m = 1,2,...,n$

Sehingga:

$$\pi_i = \Pr\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup ... \bigcup A_n\right)$$

Karena $A_1, A_2, ..., A_n$ adalah kejadian saling lepas, maka diperoleh:

$$\pi_i = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + ... + \Pr(A_n)$$

$$\pi_i = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + ... + \frac{1}{N}$$

$$\pi_i = \frac{n}{N} \quad \text{(terbukti)} \tag{2.1.1.2}$$

Sehingga $\pi_i = \frac{n}{N}$ berlaku untuk setiap i ; $i = 1,2,...,N$

Dengan demikian terbukti bahwa dalam *Simple Random Sampling*, probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah $\frac{n}{N}$ (sama).

2.1.2 Taksiran Mean Populasi dan Variansinya

Misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ adalah nilai-nilai populasi dan μ adalah mean populasi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

Misalkan $S = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ adalah *Simple Random Sample* yang diambil dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$.

Pandang suatu statistik:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Maka dapat dibuktikan bahwa:

i) $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah taksiran yang tak bias untuk mean populasi $(\equiv \mu)$.

ii) $V(\overline{y})=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, dimana $\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i-\mu)^2}{N}$.

iii) $\hat{V}(\overline{y})=\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dengan $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}{n-1}$ merupakan taksiran yang tak bias untuk $V[\overline{y}]$.

Pembuktian:

i) Untuk membuktikan bahwa $\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah taksiran yang tak bias untuk mean populasi $(\equiv \mu)$, yaitu dengan menunjukkan bahwa $E(\overline{y})=\mu$:

Bukti:

Misalkan didefinisikan sebuah variabel random Z, dimana:

$z_i = 1$; $u_i \in S$; $i=1,2,....,N$

$z_i = 0$; $u_i \notin S$; $i=1,2,....,N$ (2.1.2.1)

Sehingga didapat:

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $E(\overline{y})$:

$$E(\overline{y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$E(\overline{y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i\right)$$

$$E(\overline{y}) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i\right)$$

$$E(\overline{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.E(z_i)\right) \qquad (2.1.2.2)$$

Nilai $E(z_i)$ dapat dicari sebagai berikut:

$$E(z_i) = \sum_{z_i=0}^{1} z_i \Pr(z_i)$$

$E(z_i)$ = 0.Pr(z_i =0) + 1.Pr(z_i =1)

$E(z_i)$ = 1.Pr(z_i =1)

Dari definisi (2.1.2.1), diperoleh:

$E(z_i)$ = 1.Pr($u_i \in S$)

Berdasarkan teorema (2.1.1) diketahui bahwa Pr ($u_i \in S$) adalah $\frac{n}{N}$,

sehingga diperoleh:

$$E(z_i) = 1.\ \frac{n}{N}$$

$$E(z_i) = \frac{n}{N} \quad ; \text{ untuk } i = 1,2,....,N \qquad (2.1.2.3)$$

Substitusikan persamaan (2.1.2.3) ke dalam persamaan (2.1.2.2), sehingga diperoleh nilai $E(\bar{y})$ adalah:

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i . E(z_i)\right)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i . \frac{n}{N}\right)$$

$$E(\bar{y}) = \frac{1}{n} n\left(\sum_{i=1}^{N} u_i . \frac{1}{N}\right)$$

$$E(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{N} u_i . \frac{1}{N}$$

$$E(\bar{y}) = \mu \qquad \text{(terbukti)}$$

Karena telah diperoleh $E(\bar{y}) = \mu$, maka terbukti bahwa $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah taksiran tak bias untuk mean populasi $(\equiv \mu)$.

ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $V(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, dimana

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i - \mu)^2}{N}.$$

Bukti:

$$V(\bar{y}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$V(\bar{y}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i\right)$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i\right)$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{E\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i\right)^2 - \left[E\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i\right)\right]^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{E\left(\sum_{i=1}^{N}(u_i.z_i)^2 + \sum_{i\neq h}^{N} u_i u_h.z_i z_h\right) - \left[\sum_{i=1}^{N} E(u_i.z_i)\right]^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{E\left(\sum_{i=1}^{N}(u_i.z_i)^2\right) + E\left(\sum_{i\neq h}^{N} u_i u_h.z_i z_h\right) - \left[\sum_{i=1}^{N}\left[E(u_i.z_i)\right]^2 + \sum_{i\neq h}^{N} E(u_i.z_i).E(u_h.z_h)\right]\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{N} E(u_i.z_i)^2\right) - \sum_{i=1}^{N}\left[E(u_i.z_i)\right]^2 + \left(\sum_{i\neq h}^{N} E(u_i u_h.z_i z_h)\right) - \sum_{i\neq h}^{N} E(u_i.z_i).E(u_h.z_h)\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[E(u_i.z_i)^2 - \left[E(u_i.z_i)\right]^2\right] + \sum_{i\neq h}^{N}\left[E(u_i z_i.u_h z_h) - E(u_i.z_i).E(u_h.z_h)\right]\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[u_i^2 E(z_i)^2 - u_i^2\left[E(z_i)\right]^2\right] + \sum_{i \neq h}^{N}\left[u_i u_h E(z_i z_h) - u_i u_h E(z_i).E(z_h)\right]\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2\left[E(z_i)^2 - \left[E(z_i)\right]^2\right] + \sum_{i \neq h}^{N} u_i u_h\left[E(z_i z_h) - E(z_i).E(z_h)\right]\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 V[z_i] + \sum_{i \neq h}^{N} u_i u_h \mathrm{Cov}[z_i, z_h]\right\} \quad (2.1.2.4)$$

Akan dicari nilai dari $V[z_i]$, yaitu:

$$V(z_i) = E(z_i)^2 - \left[E(z_i)\right]^2 \quad (2.1.2.5)$$

Terlebih dahulu akan dicari nilai dari $E(z_i)^2$, yaitu:

$$E(z_i)^2 = \sum_{z_i=0}^{1} z_i^2 \Pr(z_i)$$

$$E(z_i)^2 = 0^2.\Pr(z_i = 0) + 1^2.\Pr(z_i = 1)$$

$$E(z_i)^2 = 0.\Pr(z_i = 0) + 1.\Pr(z_i = 1)$$

$$E(z_i)^2 = 1.\Pr(z_i = 1)$$

$$E(z_i)^2 = E(z_i) \quad (2.1.2.6)$$

Substitusikan persamaan (2.1.2.6) ke dalam persamaan (2.1.2.5) , sehingga diperoleh:

$$V(z_i) = E(z_i)^2 - \left[E(z_i)\right]^2$$

$$V(z_i) = E(z_i) - [E(z_i)]^2$$

Dari persamaan (2.1.2.3), diperoleh:

$$V(z_i) = \frac{n}{N} - \left[\frac{n}{N}\right]^2$$

$$V(z_i) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad ; \text{untuk } i = 1,2,\ldots,N \qquad (2.1.2.7)$$

Sementara itu nilai dari $Cov[z_i, z_h]$ adalah:

$$Cov[z_i, z_h] = E(z_i z_h) - E(z_i).E(z_h) \qquad (2.1.2.8)$$

Terlebih dahulu akan dicari nilai $E(z_i z_h)$, yaitu:

$$E(z_i z_h) = \sum_{z_i, z_h = 0}^{1} z_i.z_h \Pr(z_i, z_h)$$

$$E(z_i z_h) = 0.0\Pr(z_i = 0, z_h = 0) + 0.1\Pr(z_i = 0, z_h = 1) + 1.0\Pr(z_i = 1, z_h = 0) + 1.1\Pr(z_i = 1, z_h = 1)$$

$$E(z_i z_h) = \Pr(z_i = 1, z_h = 1)$$

Dari definisi (2.1.2.1), diperoleh:

$$E(z_i z_h) = \Pr(u_i \in S, u_h \in S)$$

$E(z_i z_h) = \Pr(u_i$ dan u_h masuk dalam sampel)

Karena ada $(N-2)$ unit lainnya yang tersedia untuk sisa sampel dan disisi lain ada $(n-2)$ untuk menempatkan dalam sampel dan karena terdapat N buah elemen dalam populasi dan sampel berukuran n, maka probabilitas u_i dan u_h masuk dalam sampel adalah:

$$E(z_i z_h) = Pr(u_i \in S, u_h \in S)$$

$$E(z_i z_h) = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(z_i z_h) = \frac{\frac{(N-2)!}{(N-n)!(n-2)!}}{\frac{N!}{(N-n)!n!}}$$

$$E(z_i z_h) = \frac{(N-2)!}{(N-n)!(n-2)!} \cdot \frac{(N-n)!n!}{N!}$$

$$E(z_i z_h) = \frac{(N-2)!}{(n-2)!} \cdot \frac{n!}{N!}$$

$$E(z_i z_h) = \frac{(N-2)!}{(n-2)!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)!}{N(N-1)(N-2)!}$$

$$E(z_i z_h) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \qquad (2.1.2.9)$$

Substitusikan persamaan (2.1.2.9) ke dalam persamaan (2.1.2.8), sehingga diperoleh nilai dari $Cov[z_i, z_h]$ adalah:

$$Cov[z_i, z_h] = E(z_i z_h) - E(z_i).E(z_h)$$

$$Cov\left[z_i,z_h\right]=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}-E\left(z_i\right).E\left(z_h\right)$$

Dari persamaan (2.1.2.3), diperoleh:

$$Cov\left[z_i,z_h\right]=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}-\frac{n}{N}.\frac{n}{N}$$

$$Cov\left[z_i,z_h\right]=-\frac{n}{N}\left(\frac{n}{N}-\frac{(n-1)}{(N-1)}\right)$$

$$Cov\left[z_i,z_h\right]=-\frac{n}{N}\left(\frac{n\left(N-1\right)-N(n-1)}{N(N-1)}\right)$$

$$Cov\left[z_i,z_h\right]=-\frac{n}{N}\left(\frac{nN-n-Nn+N}{N(N-1)}\right)$$

$$Cov\left[z_i,z_h\right]=-\frac{n}{N}\left(\frac{N-n}{N(N-1)}\right)$$

$$Cov\left[z_i,z_h\right]=-\frac{n}{N}\frac{1}{(N-1)}\left(\frac{N-n}{N}\right)$$

$$Cov\left[z_i,z_h\right]=-\frac{n}{N}\frac{1}{(N-1)}\left(1-\frac{n}{N}\right) \qquad (2.1.2.10)$$

; untuk $i=1,2,..,N$ dan $h=1,2,..,N$, dimana $i\neq h$

Substitusikan persamaan (2.1.2.7) dan (2.1.2.10) ke dalam persamaan (2.1.2.4), sehingga diperoleh nilai $V\left(\bar{y}\right)$ adalah:

$$V\left(\bar{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}u_i^2V\left[z_i\right]+\sum_{i\neq h}^{N}u_iu_hCov\left[z_i,z_h\right]\right\}$$

$$V\left(\bar{y}\right)=\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}u_i^2\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)+\sum_{i\neq h}^{N}u_iu_h\left[-\frac{1}{N-1}\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\right]\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) + \left[-\frac{1}{N-1}\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\right]\sum_{i\neq h}^{N} u_i u_h\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) + \left[-\frac{1}{N-1}\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\right]\left[\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} u_i^2\right]\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 + \left[-\frac{1}{N-1}\right]\left[\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} u_i^2\right]\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 + \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left\{\left(1+\frac{1}{N-1}\right)\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left\{\left(\frac{N}{N-1}\right)\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{nN}\left(\frac{N-n}{N}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - N\mu^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{nN}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - 2N\mu^2 + N\mu^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{N} u_i + \sum_{i=1}^{N}\mu^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i^2 - 2\mu u_i + \mu^2\right)\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i - \mu\right)^2\right\}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\sigma^2$$

$$V(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \qquad \text{(terbukti)}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $V(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, dimana $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i - \mu)^2}{N}$

iii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\hat{V}(\bar{y}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dengan

$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$ adalah taksiran yang tak bias untuk $V(\bar{y})$.

Untuk membuktikan $\hat{V}(\bar{y}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ adalah taksiran tak bias untuk

$V(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, yaitu dengan membuktikan bahwa $E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = V[\bar{y}]$

Bukti:

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = E\left[\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\right] \qquad ; \text{ dengan } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n}E\left[s^2\right] \qquad (2.1.2.11)$$

Terlebih dahulu akan dicari nilai $E\left[s^2\right]$, yaitu:

$$E\left[s^2\right]=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2\right)$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\mu\right)^2-n\left(\bar{y}-\mu\right)^2\right)$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left[\left(y_i-\mu\right)^2\right]-nE\left[\left(\bar{y}-\mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}V(y)-nV(\bar{y})\right]$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[nV(y)-nV(\bar{y})\right]$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2-nV(\bar{y})\right]$$

Karena $V\left(\bar{y}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, maka diperoleh:

$$E\left[s^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{n-1}\right)\right]$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{\sigma^2}{n-1}\left[n-\frac{N-n}{N-1}\right]$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{\sigma^2}{n-1}\left[\frac{n\left(N-1\right)-\left(N-n\right)}{N-1}\right]$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{\sigma^2}{n-1}\left[\frac{nN-n-N+n}{N-1}\right]$$

$$E\left[s^2\right]=\frac{\sigma^2}{n-1}\left[\frac{nN-N}{N-1}\right]$$

$$E\left[s^2\right] = \frac{\sigma^2}{n-1}\left[\frac{N(n-1)}{N-1}\right]$$

$$E\left[s^2\right] = \frac{N}{N-1}\sigma^2 \qquad (2.1.2.12)$$

Substitusikan persamaan (2.1.2.12) ke dalam persamaan (2.1.2.11), sehingga diperoleh nilai $E\left[\hat{V}(\bar{y})\right]$ adalah:

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n}E\left[s^2\right]$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n}\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = V\left[\bar{y}\right]$$

Karena telah diperoleh $E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = V\left[\bar{y}\right]$, maka terbukti bahwa

$\hat{V}(\bar{y}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dengan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}$ adalah taksiran tak bias untuk

$V(\bar{y}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ dengan $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i - \mu\right)^2}{N}$.

Selanjutnya diperoleh *Standard Error* (SE) dari taksiran mean populasi pada *Simple Random Sampling* $(\bar{y})$ adalah:

$$\mathrm{SE}(\bar{y}) = \sqrt{\hat{V}(\bar{y})}$$

2.2 SINGLE SYSTEMATIC SAMPLING

2.2.1 Pendahuluan

Pengertian dari *single systematic sampling* adalah suatu cara pengambilan sampel, dimana sampel diperoleh dengan cara memilih secara random satu elemen dari k-elemen pertama pada frame, dan setiap elemen ke-k berikutnya.

Cara mengambil sampel dengan teknik *single systematic sampling* adalah sebagai berikut:

- Pilih satu elemen dari k elemen pertama secara acak.
- Pilih setiap elemen ke k setelahnya.

Single systematic sampling baik digunakan untuk populasi terurut, yaitu populasi yang elemen-elemennya berurut menurut besaran yang diukur.

Selain itu, *single systematic sampling* juga baik digunakan jika frame merupakan daftar yang panjang.

Supaya diperoleh ukuran sampel yang diinginkan, k harus dipilih lebih kecil atau sama dengan $\frac{N}{n}$, akan tetapi dalam tugas akhir ini pembahasan dibatasi untuk $N = nk$.

2.2.2 Taksiran Mean Populasi dan Variansinya

Misalkan $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_N\}$ adalah nilai-nilai populasi dan μ adalah mean populasi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

Misalkan $S = \{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n\}$ adalah *single systematic sample* yang diambil dari populasi $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_N\}$.

Untuk menaksir mean populasi ($\equiv \mu$) digunakan $\overline{y}_{sy}$, dimana dalam penerapan *single systematic sampling*, $\overline{y}_{sy}$ biasanya dihitung dengan menggunakan formula, yang digunakan untuk menghitung taksiran mean pada *Simple Random Sampling*, yaitu: $\overline{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ serta taksiran variansinya

adalah $\hat{V}(\overline{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dengan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}$.

Dapat dibuktikan bahwa dalam *single systematic sampling* dengan N=nk :

i) $\overline{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah taksiran yang tak bias untuk mean populasi ($\equiv \mu$).

ii) Dapat ditunjukkan bahwa $V(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left[1+(n-1)\rho\right]$, dimana

$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu)^2$ merupakan variansi dari populasi, dan ρ adalah korelasi antara pasangan-pasangan elemen dalam *systematic sample* yang sama.

iii) $\hat{V}(\overline{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dengan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}$ merupakan taksiran yang bias untuk $V\left[\overline{y}_{sy}\right]$.

Pembuktian:

i) Untuk membuktikan bahwa $\overline{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah taksiran yang tak bias untuk μ, yaitu dengan menunjukkan bahwa $E\left(\overline{y}_{sy}\right) = \mu$.

Bukti:

Misalkan didefinisikan sebuah variabel random Z, dimana:

$z_i = 1 \; ; \; u_i \in S \quad ; \; i = 1,2,....,N$

$z_i = 0 \; ; \; u_i \notin S \quad ; \; i = 1,2,....,N$ (2.2.2.1)

Sehingga didapat:

$$\bar{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $E\left(\bar{y}_{sy}\right)$:

$$E\left(\bar{y}_{sy}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$E\left(\bar{y}_{sy}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i\right)$$

$$E\left(\bar{y}_{sy}\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.z_i\right)$$

$$E\left(\bar{y}_{sy}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.E\left(z_i\right)\right) \qquad (2.2.2.2)$$

$E\left(z_i\right)$ dapat dicari sebagai berikut:

$$E\left(z_i\right) = \sum_{z_i=0}^{1} z_i \Pr\left(z_i\right)$$

$E(z_i) = 0.\Pr(z_i=0) + 1.\Pr(z_i=1)$

$E(z_i) = 1.\Pr(z_i=1)$

Dari definisi (2.2.2.1), diperoleh:

$E(z_i) = 1.\Pr(u_i \in S)$

Karena pada *single systematic sampling* probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah $\frac{1}{k}$, maka diperoleh:

$E(z_i) = 1.\frac{1}{k}$

$$E(z_i) = \frac{1}{k} \quad ; \text{ untuk } i=1,2,....,N \qquad (2.2.2.3)$$

Substitusikan persamaan (2.2.2.3) ke dalam persamaan (2.2.2.2), sehingga diperoleh nilai $E(\bar{y}_{sy})$ adalah:

$$E(\bar{y}_{sy}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.E(z_i)\right)$$

$$E(\bar{y}_{sy}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i.\frac{1}{k}\right)$$

$$E(\bar{y}_{sy}) = \frac{1}{n}\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)$$

Karena $N = nk$, maka diperoleh:

$$E\left(\bar{y}_{sy}\right) = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$E\left(\bar{y}_{sy}\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$E\left(\bar{y}_{sy}\right) = \mu \qquad \text{(terbukti)}$$

Karena telah diperoleh $E\left(\bar{y}_{sy}\right) = \mu$, maka terbukti bahwa $\bar{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ adalah taksiran tak bias untuk μ .

ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + [n-1]\rho\right)$, dimana $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(u_i - \mu\right)^2}{N}$.

Bukti:

Pandang suatu *single systematic sampling* berukuran n , yang diambil dari populasi berukuran N dengan $N = nk$. Pada tabel berikut ditampilkan sampel-sampel yang mungkin dari populasi tersebut:

Tabel 2.2.2.1 Kemungkinan sampel-sampel pada *single systematic sampling* dengan N=nk

Sampel ke	1	2	…	n	Mean
1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1n}	$\bar{y}_1$
2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2n}	$\bar{y}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
k	y_{k1}	y_{k2}	…	y_{kn}	$\bar{y}_k$

Misalkan y_{pj} menyatakan anggota ke- j dari *systematic sampl*e ke- p ($p=1,2,...,k$; $j=1,2,...,n$) dan y_{pu} menyatakan anggota ke- u dari *systematic sampl*e ke- p ($p=1,2,...,k$; $u=1,2,...,n$), dengan $j<u$.

ρ adalah korelasi antara pasangan-pasangan elemen dalam *systematic sample* yang sama, dimana rumusnya didefinisikan:

$$\rho = \frac{E\left(y_{pj}-\mu\right)\left(y_{pu}-\mu\right)}{\sqrt{E\left(y_{pj}-\mu\right)^2}\sqrt{E\left(y_{pu}-\mu\right)^2}}$$

$$\rho = \frac{E\left(y_{pj}-\mu\right)\left(y_{pu}-\mu\right)}{\sigma.\sigma}$$

$$\rho = \frac{E\left(y_{pj}-\mu\right)\left(y_{pu}-\mu\right)}{\sigma^2} \qquad (2.2.2.4)$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $E(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)$:

$$E(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)=\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)P\left(y_{pj},y_{pu}\right) \tag{2.2.2.5}$$

$P\left(y_{pj},y_{pu}\right)$ menyatakan probabilitas y_j dan y_u ada dalam *systematic sample* ke-p ; $p=1,2,...,k$.

Nilai dari $P\left(y_{pj},y_{pu}\right)$ dapat dicari sebagai berikut:

Karena banyaknya kombinasi $\left(y_j,y_u\right)$ dari sampel berukuran n adalah

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2},$$

dan karena banyaknya *systematic sample* adalah k, maka

$$P\left(y_{pj},y_{pu}\right)=\frac{1}{k}.\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P\left(y_{pj},y_{pu}\right)=\frac{1}{k}.\frac{2}{n(n-1)}$$

$$P\left(y_{pj},y_{pu}\right)=\frac{2}{kn(n-1)} \tag{2.2.2.6}$$

Substitusikan (2.2.2.6) ke dalam persamaaan (2.2.2.5), sehingga diperoleh nilai dari $E(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)$:

$$E(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)=\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)P\left(y_{pj},y_{pu}\right)$$

$$E(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)=\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)\frac{2}{kn(n-1)}$$

$$E(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)=\frac{2}{kn(n-1)}\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu) \qquad (2.2.2.7)$$

Substitusikan persamaan (2.2.2.7) ke dalam persamaan (2.2.2.4), sehingga diperoleh nilai ρ adalah:

$$\rho=\frac{E\left(y_{pj}-\mu\right)\left(y_{pu}-\mu\right)}{\sigma^2}$$

$$\rho=\frac{\frac{2}{kn(n-1)}\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu)}{\sigma^2}$$

$$\rho=\frac{2}{kn(n-1)\sigma^2}\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}(y_{pj}-\mu)(y_{pu}-\mu) \qquad (2.2.2.8)$$

Selanjutnya, pandang:

$$n^2kV(\overline{y}_{sy})=n^2k\frac{\sum_{p=1}^{k}\left(\overline{y}_p-\mu\right)^2}{k}$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy})=n^2\sum_{p=1}^{k}\left(\overline{y}_p-\mu\right)^2$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy})=\sum_{p=1}^{k}\left(n(\overline{y}_p-\mu)\right)^2$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = \sum_{p=1}^{k}\left(n\overline{y}_p - n\mu\right)^2$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = \sum_{p=1}^{k}\left(n\frac{\sum_{j=1}^{n} y_{pj}}{n} - n\mu\right)^2$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = \sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{pj} - n\mu\right)^2$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = \sum_{p=1}^{k}\left(\left(y_{p1} + y_{p2} + \ldots.. + y_{pn}\right) - (\mu + \mu + \ldots.. + \mu)\right)^2$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = \sum_{p=1}^{k}\left[\left(y_{p1} - \mu\right) + \left(y_{p2} - \mu\right) + \ldots.. + \left(y_{pn} - \mu\right)\right]^2$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = \sum_{p=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(y_{pj} - \mu\right)\right]^2$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = \sum_{p=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(y_{pj} - \mu\right)^2 + 2\sum_{j<u}^{n}\left(y_{pj} - \mu\right)\left(y_{pu} - \mu\right)\right]$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{pj} - \mu\right)^2 + 2\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}\left(y_{pj} - \mu\right)\left(y_{pu} - \mu\right)$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy}) = N\sigma^2 + 2\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}\left(y_{pj} - \mu\right)\left(y_{pu} - \mu\right) \qquad (2.2.2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.2.2.8) dimana

$\rho = \dfrac{2}{kn(n-1)\sigma^2}\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}\left(y_{pj} - \mu\right)\left(y_{pu} - \mu\right)$, maka diperoleh:

$$2\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}\left(y_{pj}-\mu\right)\left(y_{pu}-\mu\right)=kn(n-1)\sigma^2\rho \qquad (2.2.2.10)$$

Substitusikan persamaan (2.2.2.10) ke dalam persamaan (2.2.2.9), sehingga diperoleh:

$$n^2kV(\overline{y}_{sy})=N\sigma^2+2\sum_{p=1}^{k}\sum_{j<u}^{n}\left(y_{pj}-\mu\right)\left(y_{pu}-\mu\right)$$

$$n^2kV(\overline{y}_{sy})=N\sigma^2+kn(n-1)\sigma^2\rho$$

$$V(\overline{y}_{sy})=\frac{N\sigma^2+kn(n-1)\sigma^2\rho}{n^2k}$$

$$V(\overline{y}_{sy})=\frac{N\sigma^2+kn(n-1)\sigma^2\rho}{nnk}$$

$$V(\overline{y}_{sy})=\frac{N\sigma^2+N(n-1)\sigma^2\rho}{nN}$$

$$V(\overline{y}_{sy})=\frac{N\sigma^2}{nN}+\frac{N(n-1)\sigma^2\rho}{nN}$$

$$V(\overline{y}_{sy})=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{(n-1)\sigma^2\rho}{n}$$

$$V(\overline{y}_{sy})=\frac{\sigma^2}{n}\left[1+(n-1)\rho\right] \qquad \text{(terbukti)}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $V(\overline{y}_{sy})=\frac{\sigma^2}{n}\left(1+\left[n-1\right]\rho\right)$.

iii) Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $\hat{V}(\bar{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ merupakan taksiran yang bias untuk $V(\bar{y}_{sy})$.

Untuk membuktikan $\hat{V}(\bar{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ adalah taksiran yang bias dari $V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1+[n-1]\rho\right)$, yaitu dengan menunjukkan bahwa $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{sy})\right] \neq V(\bar{y}_{sy})$

Bukti:

Terlebih dahulu akan dicari nilai $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{sy})\right]$, dimana $\hat{V}(\bar{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$:

$$E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{sy}\right)\right] = E\left[\frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)\right]$$

$$E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{sy}\right)\right] = \frac{N-n}{N} E\left[\frac{s^2}{n}\right]$$

$$E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{sy}\right)\right] = \frac{N-n}{N}\frac{1}{n} E\left[s^2\right] \qquad (2.2.2.11)$$

Substitusikan $E\left[s^2\right] = \left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2$ ke dalam persamaan (2.2.2.11), sehingga diperoleh nilai $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{sy})\right]$:

$$E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{sy}\right)\right] = \frac{N-n}{N}\frac{1}{n}\frac{N}{N-1}\sigma^2$$

$$E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{sy}\right)\right] = \frac{N-n}{n}\frac{\sigma^2}{N-1}$$

$$E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{sy}\right)\right] = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

Dengan demikian diperoleh nilai $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{sy})\right]$ adalah $E\left[\hat{V}\left(\bar{y}_{sy}\right)\right] = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right]$.

Pada pembahasan sebelumnya telah dibuktikan bahwa bentuk dari $V(\bar{y}_{sy})$ adalah $V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left[1+(n-1)\rho\right]$, maka selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{sy})\right] = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right] \neq V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left[1+(n-1)\rho\right]$:

Misalkan $\rho = 0$ maka diperoleh nilai $V(\bar{y}_{sy})$, yaitu:

$$V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left[1+(n-1)0\right]$$

$$V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}[1]$$

$$V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Sehingga jika $\rho = 0$ diperoleh $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{sy})\right] = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right] \neq V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Misalkan $\rho = 1$ maka diperoleh nilai $V(\overline{y}_{sy})$, yaitu:

$$V(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left[1 + (n-1)1\right]$$

$$V(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left[1 + n - 1\right]$$

$$V(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left[n\right]$$

$$V(\overline{y}_{sy}) = \sigma^2$$

Sehingga jika $\rho = 1$ diperoleh $E\left[\hat{V}(\overline{y}_{sy})\right] = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{N-n}{N-1}\right] \neq V(\overline{y}_{sy}) = \sigma^2$.

Karena untuk $\rho = 0$ dan $\rho = 1$ diperoleh $E[\hat{V}(\overline{y}_{sy})] \neq V(\overline{y}_{sy})$, maka terbukti

bahwa $\hat{V}(\overline{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ adalah taksiran yang bias untuk

$V(\overline{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + [n-1]\rho\right)$.

Selanjutnya diperoleh *Standard Error* (SE) dari taksiran mean populasi pada *single systematic sampling* $\left(\overline{y}_{sy}\right)$ adalah:

$$SE\left(\overline{y}_{sy}\right) = \sqrt{\hat{V}\left(\overline{y}_{sy}\right)}$$