BAB III

TEKNIK PENGAMBILAN SAMPEL YANG MERUPAKAN MODIFIKASI DARI *SINGLE SYSTEMATIC SAMPLING* YANG MENGHASILKAN TAKSIRAN TAK BIAS UNTUK MEAN POPULASI DAN MEMBERIKAN TAKSIRAN TAK BIAS UNTUK VARIANSINYA

Pada bab sebelumnya telah terbukti bahwa pada *single systematic sampling* taksiran dari mean populasi (sebut $\bar{y}_{sy}$) dimana $\bar{y}_{sy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ merupakan taksiran yang tak bias untuk mean populasi (μ) dimana $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$, akan tetapi taksiran untuk variansi $\bar{y}_{sy}$ (sebut $\hat{V}\left(\bar{y}_{sy}\right)$) dimana $\hat{V}(\bar{y}_{sy}) = \frac{s^2}{n}\left(\frac{N-n}{N}\right)$ dengan $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$ merupakan taksiran yang bias untuk variansi $\bar{y}_{sy}$ (sebut $V\left(\bar{y}_{sy}\right)$) dimana $V(\bar{y}_{sy}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1+[n-1]\rho\right)$ dengan $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu)^2$. Oleh karena itu, diperlukan suatu metode pengambilan sampel yang merupakan modifikasi dari *single systematic sampling* yang menghasilkan taksiran tak bias untuk mean populasi dan memberikan taksiran tak bias untuk variansinya.

Berdasarkan penjelasan tersebut, pada bab ini akan dibahas mengenai:

1. Cara pengambilan sampel yang merupakan modifikasi dari *single systematic sampling* yang menghasilkan taksiran tak bias untuk mean populasi dan memberikan taksiran tak bias untuk variansinya.
2. Taksiran tak bias untuk mean populasi dengan cara pengambilan sampel tersebut.
3. Variansi dari taksiran mean populasi yang diperoleh pada cara pengambilan sampel tersebut.
4. Taksiran yang tak bias untuk variansi taksiran mean populasi yang diperoleh pada cara pengambilan sampel tersebut.

3.1 CARA PENGAMBILAN SAMPEL

Misal populasi mengandung N unit yang berbeda yang diidentifikasikan dengan unit misal $U_1, U_2, \ldots\ldots, U_N$, kemudian dari populasi ini dipilih sampel berukuran n, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Pilih satu bilangan acak dari 1 sampai N, misalkan terpilih r.
2. Pilih bilangan bulat positif v dan d, dimana $v \leq n$, dan memenuhi dua kondisi berikut:
   - Setiap sampel harus mengandung unit yang berbeda.

* Probabilitas setiap pasangan unit berada dalam sampel nilainya harus positif.

3. Mulai dari elemen ke-r sebut (u_r), pilih sebanyak v unit secara berurutan, setelah itu pilih sebanyak $w = n - v$ unit dengan interval d.

Unit-unit yang terpilih tersebut menjadi elemen dari sampel dengan unit sampel yang diperoleh adalah $s_r = (s'_r, s''_r)$, dimana:

s'_r terdiri dari unit-unit dengan index $r + f(f = 0,1,....,v-1)$

$$s'_r = (u_r, u_{r+1}, ..., u_{r+v-1})$$

s''_r terdiri dari unit-unit dengan index $r + v - 1 + f'd(f' = 1,....,w)$

$$s''_r = (u_{r+v-1+d}, u_{r+v-1+2d}, ..., u_{r+v-1+wd})$$

dengan $p(s_r) = \dfrac{1}{N}$ $\qquad r = 1,...,N$

Contoh :

Misalkan suatu populasi terdiri dari 12 pengamatan $(N = 12)$, sebut $\{U_1, U_2, ..., U_{12}\}$, selanjutnya akan diambil sampel ukuran 6 $(n = 6)$. Misalkan terpilih bilangan acak r = 10, dan misalkan $v = 3$ sehingga $w = 6 - 3 = 3$, serta $d = 2$, maka diperoleh unit sampel yaitu:

$s_{10} = (u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_2, u_4, u_6)$

3.2 TAKSIRAN TAK BIAS UNTUK MEAN POPULASI

Misalkan sebut populasi berukuran *N* adalah $\{U_1, U_2, ..., U_N\}$, dimana u_i non negatif ; $i = 1,2,...,N.$ Suatu sampel berukuran *n*, yaitu $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ diambil dengan menggunakan cara pengambilan sampel yang merupakan modifikasi dari *single systematic sampling* yang dibahas dalam tugas akhir ini.

Misalkan didefinisikan:

$c_{ti} = 1, \quad ; U_i \in s_t \qquad ; i = 1,....,N \; , \; t = 1,....,N$

$c_{ti} = 0, \quad ; U_i \notin s_t$ (3.2.1)

Serta didefinisikan:

$\pi_i = \Pr(U_i$ ada dalam sampel)

(3.2.2)

$$\pi_i = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} c_{ti} \qquad ; i = 1,....,N$$

Dan

$\pi_{ij} = \Pr\left(U_i \text{ dan } U_j \text{ ada dalam sampel}\right)$

(3.2.3)

$$\pi_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} c_{ti}c_{tj} \qquad ;\ i,j = 1,....,N$$

Dalam prosedur pengambilan sampel yang dibahas pada bab ini diperoleh:

$$\pi_i = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} c_{ti}$$

$$\pi_i = \frac{1}{N}\left(n \times 1 + (N-n) \times 0\right)$$

$$\pi_i = \frac{n}{N} \qquad ;\ i = 1,....,N \qquad (3.2.4)$$

Mean populasi didefinisikan dengan:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i \qquad (3.2.5)$$

Secara umum, taksiran dari mean populasi ($\equiv \mu$) dapat dituliskan:

$$\bar{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i \qquad (3.2.6)$$

dimana β_i adalah konstanta yang digunakan sebagai bobot dari unit ke-i, jika unit ke-i terpilih dalam sampel, dan β_i bergantung pada sampel yang terpilih.

Berdasarkan definisi dari (3.2.1) maka diperoleh:

$$\bar{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i$$

$$\bar{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\beta_i u_i . c_{ti} \tag{3.2.7}$$

Pembahasan berikut adalah untuk mencari nilai β_i sedemikian sehingga

$\bar{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i$ merupakan taksiran tak bias untuk μ.

Jika $\bar{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i$ merupakan taksiran tak bias untuk μ, maka

$$E\left[\bar{y}_{nss}\right] = \mu \tag{3.2.8}$$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i\right] = \mu$$

Substitusikan persamaan (3.2.5) dan (3.2.7) ke dalam persamaan (3.2.8), sehingga diperoleh:

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\beta_i u_i . c_{ti}\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i$$

$$\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{N}\beta_i u_i . c_{ti}\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\beta_i u_i E\left[c_{ti}\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_i \tag{3.2.9}$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $E\left[c_{ti}\right]$, yaitu:

$$E[c_{ti}] = \sum_{c_{ti}=0}^{1} c_{ti} \Pr(c_{ti})$$

$$E[c_{ti}] = 0.\Pr(c_{ti}=0) + 1.\Pr(c_{ti}=1)$$

$$E[c_{ti}] = 1.\Pr(c_{ti}=1)$$

Dari definisi (3.2.1), diperoleh:

$$E[c_{ti}] = 1.\Pr(U_i \in s_t)$$

Dari definisi (3.2.2), diperoleh:

$$E[c_{ti}] = 1.\pi_i$$

$$E[c_{ti}] = \pi_i \qquad (3.2.10)$$

Substitusikan persamaan (3.2.10) ke dalam persamaan (3.2.9), sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \beta_i u_i E[c_{ti}] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} \beta_i u_i \pi_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i u_i \frac{\pi_i}{n} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\pi_i \beta_i u_i}{n} - \frac{u_i}{N} \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\pi_i \beta_i}{n} - \frac{1}{N} \right) u_i = 0 \qquad (3.2.11)$$

Jika terdapat $u_i \neq 0$, maka pada persamaan (3.2.11) diperoleh $\frac{\pi_i \beta_i}{n} - \frac{1}{N} = 0$ untuk setiap i, sehingga nilai β_i dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{\pi_i \beta_i}{n} - \frac{1}{N} = 0$$

$$\frac{\pi_i \beta_i}{n} = \frac{1}{N}$$

$$\beta_i = \frac{n}{N\pi_i} \quad ; \; i = 1,2,...,N \qquad (3.2.12)$$

Dengan demikian jika nilai $\beta_i = \frac{n}{N\pi_i}$ maka $\overline{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$ merupakan taksiran tak bias untuk μ.

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.2.12) ke dalam persamaan (3.2.6) sehingga diperoleh:

$$\overline{y}_{nss} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{N\pi_i} y_i$$

$$\overline{y}_{nss} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\pi_i} \qquad (3.2.13)$$

Substitusikan persamaan (3.2.4) ke dalam persamaan (3.2.13), diperoleh:

$$\overline{y}_{nss} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\frac{n}{N}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y}$$

Dengan demikian diperoleh bahwa taksiran tak bias untuk mean populasi

($\equiv \mu$) pada metode pengambilan sampel di atas adalah $\overline{y}_{nss} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i} = \overline{y}$.

3.3 VARIANSI UNTUK TAKSIRAN MEAN POPULASI

Pada prosedur metode pengambilan sampel yang merupakan modifikasi dari *single systematic sampling* yang dibahas dalam tugas akhir ini, diperoleh bahwa taksiran tak bias untuk mean populasi adalah $\overline{y}_{nss} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}$. Selanjutnya akan ditentukan variansi dari taksiran tersebut, dengan prosedurnya adalah sebagai berikut:

Misalkan didefinisikan:

$t_i = 1$; $U_i \in S$; $i = 1,2,....,N$

$t_i = 0$; $U_i \notin S$; $i = 1,2,....,N$ (3.3.1)

Selanjutnya akan dicari nilai $E(t_i)$, $V(t_i)$, dan $\text{cov}(t_i,t_j)$ untuk $i \neq j$:

$*$ $E(t_i) = \sum_{t_i=0}^{1} t_i \Pr(t_i)$

$E(t_i) = 1.\Pr(t_i = 1) + 0.\Pr(t_i = 0)$

$E(t_i) = 1.\Pr(t_i = 1)$

Berdasarkan definisi dari (3.3.1), diperoleh:

$$E(t_i) = 1.\Pr(U_i \in S)$$

Berdasarkan definisi (3.2.2), diperoleh:

$$E(t_i) = 1.\pi_i$$

$$E(t_i) = \pi_i \tag{3.3.2}$$

* $$V(t_i) = E\left(t_i - E(t_i)\right)^2$$

$$V(t_i) = E(t_i - \pi_i)^2$$

$$V(t_i) = E(t_i)^2 + E(\pi_i)^2 - 2\pi_i E(t_i) \tag{3.3.3}$$

Akan dicari nilai dari $E(t_i)^2$, sebagai berikut:

$$E(t_i)^2 = \sum_{t_i=0}^{1} t_i^2 \Pr(t_i)$$

$$E(t_i)^2 = 0^2.\Pr(t_i = 0) + 1^2.\Pr(t_i = 1)$$

$$E(t_i)^2 = 0.\Pr(t_i = 0) + 1.\Pr(t_i = 1)$$

$$E(t_i)^2 = 1.\Pr(t_i = 1)$$

$$E(t_i)^2 = E(t_i) \tag{3.3.4}$$

Selanjutnya substitusikan (3.3.4) ke dalam persamaan (3.3.3), sehingga diperoleh:

$$V(t_i) = E(t_i) + E(\pi_i)^2 - 2\pi_i E(t_i)$$

Dari definisi (3.3.2), diperoleh:

$$V(t_i) = \pi_i + \pi_i^2 - 2\pi_i^2$$

$$V(t_i) = \pi_i - \pi_i^2$$

$$V(t_i) = \pi_i(1 - \pi_i) \qquad (3.3.5)$$

$*$ Untuk $i \neq j$

$$\text{cov}(t_i, t_j) = E(t_i t_j) - E(t_i)E(t_j)$$

Berdasarkan definisi (3.3.2),diperoleh:

$$\text{cov}(t_i, t_j) = E(t_i t_j) - \pi_i \pi_j \qquad (3.3.6)$$

Nilai $E(t_i t_j)$ dapat dicari sebagai berikut:

$$E(t_i t_j) = \sum_{t_i, t_j = 0}^{1} t_i . t_j \Pr(t_i, t_j)$$

$$E(t_i t_j) = 0.0\Pr(t_i = 0, t_j = 0) + 0.1\Pr(t_i = 0, t_j = 1) + 1.0\Pr(t_i = 1, t_j = 0) + 1.1\Pr(t_i = 1, t_j = 1)$$

$$E(t_i t_j) = \Pr(t_i = 1, t_j = 1)$$

Berdasarkan definisi (3.3.1), diperoleh:

$$E(t_i t_j) = \Pr(U_i \in S, U_j \in S)$$

$E(t_i t_j) = \Pr(U_i$ dan U_j masuk dalam sampel)

Berdasarkan definisi (3.2.3), diperoleh:

$$E\left(t_i t_j\right) = \pi_{ij} \tag{3.3.7}$$

Substitusikan persamaan (3.3.7) ke dalam persamaan (3.3.6), sehingga diperoleh nilai dari $\operatorname{cov}(t_i, t_j)$ adalah:

$$\operatorname{cov}(t_i, t_j) = E(t_i t_j) - E(t_i)E(t_j)$$

$$\operatorname{cov}(t_i, t_j) = \pi_{ij} - \pi_i \pi_j \tag{3.3.8}$$

Berdasarkan definisi dari (3.3.1), maka diperoleh:

$$\bar{y}_{nss} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \frac{u_i}{\pi_i}$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $V\left(\bar{y}_{nss}\right)$:

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\pi_i}\right)$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \frac{u_i}{\pi_i}\right)$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2} V\left(\sum_{i=1}^{N} t_i \frac{u_i}{\pi_i}\right)$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right) = \frac{1}{N^2}\left\{E\left(\sum_{i=1}^{N} t_i . \frac{u_i}{\pi_i}\right)^2 - \left[E\left(\sum_{i=1}^{N} t_i . \frac{u_i}{\pi_i}\right)\right]^2\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right) = \frac{1}{N^2}\left\{E\left(\sum_{i=1}^{N}\left(t_i . \frac{u_i}{\pi_i}\right)^2 + \sum_{i \neq j}^{N}\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}.t_i t_j\right) - \left[E\left(\sum_{i=1}^{N} t_i . \frac{u_i}{\pi_i}\right)\right]^2\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\left\{E\left(\sum_{i=1}^{N}\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2\right)+E\left(\sum_{i\neq j}^{N}\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}.t_it_j\right)-\left[\sum_{i=1}^{N}\left[E\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right)\right]^2+\sum_{i\neq j}^{N}E\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right).E\left(t_j.\frac{u_j}{\pi_j}\right)\right]\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{N}E\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2\right)-\sum_{i=1}^{N}\left[E\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right)\right]^2+\left(\sum_{i\neq j}^{N}E\left(\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}.t_it_j\right)\right)-\sum_{i\neq j}^{N}E\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right).E\left(t_j.\frac{u_j}{\pi_j}\right)\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[E\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2-\left[E\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right)\right]^2\right]+\sum_{i\neq j}^{N}\left[E\left(t_i\frac{u_i}{\pi_i}.t_j\frac{u_j}{\pi_j}\right)-E\left(t_i.\frac{u_i}{\pi_i}\right).E\left(t_j.\frac{u_j}{\pi_j}\right)\right]\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2E\left(t_i\right)^2-\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2\left[E\left(t_i\right)\right]^2\right]+\sum_{i\neq j}^{N}\left[\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}E\left(t_it_j\right)-\frac{u_i}{\pi_i}E\left(t_i\right).\frac{u_j}{\pi_j}E\left(t_j\right)\right]\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2E\left(t_i\right)^2-\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2\left[E\left(t_i\right)\right]^2\right]+\sum_{i\neq j}^{N}\left[\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}E\left(t_it_j\right)-\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}E\left(t_i\right).E\left(t_j\right)\right]\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2\left[E\left(t_i\right)^2-\left[E\left(t_i\right)\right]^2\right]+\sum_{i\neq j}^{N}\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}\left[E\left(t_it_j\right)-E\left(t_i\right).E\left(t_j\right)\right]\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2V\left[t_i\right]+\sum_{i\neq j}^{N}\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}\operatorname{cov}\left[t_i,t_j\right]\right\} \qquad (3.3.9)$$

Substitusikan persamaan (3.3.5) dan (3.3.8) ke dalam persamaan (3.3.9), sehingga diperoleh nilai $V\left(\bar{y}_{nss}\right)$ adalah:

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2\pi_i\left(1-\pi_i\right)+\sum_{i\neq j}^{N}\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}\left(\pi_{ij}-\pi_i\pi_j\right)\right\}$$

$$V\left(\bar{y}_{nss}\right)=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\pi_i\right)\pi_i\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2+\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}^{N}\left(\frac{\pi_{ij}-\pi_i\pi_j}{\pi_i\pi_j}\right)u_iu_j \qquad (3.3.10)$$

Terlebih dahulu akan dicari nilai dari $\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\pi_i\right)\pi_i\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2$, sebagai berikut:

Misal $p_{i,m}$ adalah probabilitas unit ke-i $\left(U_i\right)$ terpilih pada pengambilan ke-m;

$m=1,2,....,n$; $i=1,2,....,N$.

Definisikan:

$$\pi_i=\Pr\left(U_i \text{ dalam sampel}\right)$$

$$\pi_i=\sum_{m=1}^{n}p_{i.m}$$

Kemudian diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{N}\pi_i=\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}p_{i.m}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}p_{i.m}=n$$

Serta definisikan:

$$\pi_{ij}=\Pr\left(U_i \text{ dan } U_j \text{ dalam sampel ; } i\neq j\right)$$

$$\pi_{ij}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{l\neq k}^{n}p_{i,l}.p_{j,k}\ ;\ i\neq j$$

Kemudian diperoleh:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \pi_{ij} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{l\neq k}^{n} p_{i,l} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} p_{j,k}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \pi_{ij} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{l\neq k}^{n} p_{i,l} = (n-1)\sum_{l=1}^{n} p_{i,l} = (n-1)\pi_i$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \pi_i \pi_j = \pi_i \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \pi_j = \pi_i (n-\pi_i)$$

Karena

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \pi_{ij} = (n-1)\pi_i$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \pi_i \pi_j = \pi_i (n-\pi_i)$$

Maka diperoleh:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} (\pi_i \pi_j - \pi_{ij}) = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \pi_i \pi_j - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} \pi_{ij}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} (\pi_i \pi_j - \pi_{ij}) = \pi_i (n-\pi_i) - (n-1)\pi_i$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} (\pi_i \pi_j - \pi_{ij}) = n\pi_i - \pi_i^2 - n\pi_i + \pi_i$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\pi_i\pi_j - \pi_{ij}\right) = \pi_i - \pi_i^2$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\pi_i\pi_j - \pi_{ij}\right) = \left(1-\pi_i\right)\pi_i \qquad (3.3.11)$$

Substitusikan persamaan (3.3.11) ke dalam nilai $\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(1-\pi_i)\pi_i\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2$,

sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(1-\pi_i)\pi_i\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\left(\pi_i\pi_j - \pi_{ij}\right)\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(1-\pi_i)\pi_i\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\pi_i\pi_j - \pi_{ij}\right)\left\{\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2 + \left(\frac{u_j}{\pi_j}\right)^2\right\} \qquad (3.3.12)$$

Selanjutnya pada persamaan (3.3.10) akan dicari nilai $\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}^{N}\left(\frac{\pi_{ij}-\pi_i\pi_j}{\pi_i\pi_j}\right)u_iu_j$

yaitu:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}^{N}\left(\frac{\pi_{ij}-\pi_i\pi_j}{\pi_i\pi_j}\right)u_iu_j = -\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}^{N}\left(\pi_i\pi_j - \pi_{ij}\right)\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}^{N}\left(\frac{\pi_{ij}-\pi_i\pi_j}{\pi_i\pi_j}\right)u_iu_j = -\frac{1}{N^2}\left\{2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\pi_i\pi_j - \pi_{ij}\right)\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}\right\}$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}^{N}\left(\frac{\pi_{ij}-\pi_i\pi_j}{\pi_i\pi_j}\right)u_iu_j = -\frac{2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\pi_i\pi_j - \pi_{ij}\right)\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j} \qquad (3.3.13)$$

Substitusikan persamaan (3.3.12) dan (3.3.13) ke dalam persamaan (3.3.10) sehingga diperoleh nilai $V(\bar{y}_{nss})$ adalah:

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}(1-\pi_i)\pi_i\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}^{N}\left(\frac{\pi_{ij}-\pi_i\pi_j}{\pi_i\pi_j}\right)u_iu_j$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\pi_i\pi_j-\pi_{ij}\right)\left\{\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2+\left(\frac{u_j}{\pi_j}\right)^2\right\}-\frac{2}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\pi_i\pi_j-\pi_{ij}\right)\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\pi_i\pi_j-\pi_{ij}\right)\left\{\left(\frac{u_i}{\pi_i}\right)^2+\left(\frac{u_j}{\pi_j}\right)^2-2\frac{u_i}{\pi_i}\frac{u_j}{\pi_j}\right\}$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\pi_i\pi_j-\pi_{ij}\right)\left(\frac{u_i}{\pi_i}-\frac{u_j}{\pi_j}\right)^2$$

Karena pada metode pengambilan sampel di atas nilai $\pi_i = \pi_j = \frac{n}{N}$, maka diperoleh:

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\frac{n}{N}\frac{n}{N}-\pi_{ij}\right)\left(\frac{Nu_i}{n}-\frac{Nu_j}{n}\right)^2$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\frac{n^2}{N^2}-\pi_{ij}\right)\left(\frac{N}{n}\left(u_i-u_j\right)\right)^2$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\frac{n^2}{N^2}-\pi_{ij}\right)\frac{N^2}{n^2}\left(u_i-u_j\right)^2$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\frac{n^2}{N^2}\frac{N^2}{n^2}\left(u_i-u_j\right)^2-\pi_{ij}\frac{N^2}{n^2}\left(u_i-u_j\right)^2\right)$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\left(u_i - u_j\right)^2 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\left(u_i - u_j\right)^2\right)$$

$$V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2$$

Dengan demikian diperoleh bahwa variansi untuk taksiran mean populasi adalah: $V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2$.

3.4 TAKSIRAN VARIANSI TAK BIAS UNTUK TAKSIRAN MEAN POPULASI

Pada metode pengambilan sampel yang merupakan modifikasi dari *single systematic sampling* yang dibahas dalam tugas akhir ini, diperoleh bahwa variansi untuk taksiran mean populasi adalah $V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)\left(y_i - y_j\right)^2$ merupakan taksiran tak bias untuk $V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2$.

Untuk membuktikan $\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)(y_i - y_j)^2$ adalah taksiran tak bias untuk $V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)(u_i - u_j)^2$, yaitu dengan membuktikan bahwa $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = V(\bar{y}_{nss})$

Bukti:

Misalkan didefinisikan:

$$t_i = 1\ ;\ U_i \in S \quad ;\ i = 1,2,....,N$$

$$t_i = 0\ ;\ U_i \notin S \quad ;\ i = 1,2,....,N \tag{3.4.1}$$

Selanjutnya akan dicari nilai dari $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right]$:

$$E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = E\left[\frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)(y_i - y_j)^2\right]$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = E\left[\frac{1}{N^2}\sum_{i}^{N}\sum_{j>i}^{N}t_i t_j\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)(u_i - u_j)^2\right]$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)(u_i - u_j)^2 E\left[t_i t_j\right] \tag{3.4.2}$$

Nilai $E\left[t_i t_j\right]$ dapat dicari sebagai berikut:

$$E\left[t_i t_j\right] = \sum_{t_i,t_j=0}^{1} t_i.t_j \Pr\left(t_i,t_j\right)$$

$$E\left[t_i t_j\right] = 0.0\Pr\left(t_i=0,t_j=0\right) + 0.1\Pr\left(t_i=0,t_j=1\right) + 1.0\Pr\left(t_i=1,t_j=0\right) + 1.1\Pr\left(t_i=1,t_j=1\right)$$

$$E\left[t_i t_j\right] = \Pr\left(t_i=1,t_j=1\right)$$

Berdasarkan definisi (3.4.1), diperoleh:

$$E\left[t_i t_j\right] = \Pr\left(U_i \in S, U_j \in S\right)$$

$$E\left[t_i t_j\right] = \Pr(U_i \textit{ dan } U_j \text{ masuk dalam sampel})$$

Berdasarkan definisi (3.2.3), diperoleh:

$$E\left[t_i t_j\right] = \pi_{ij} \tag{3.4.3}$$

Substitusikan persamaan (3.4.3) ke dalam persamaan (3.4.2), sehingga diperoleh nilai $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right]$ adalah:

$$E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)\left(u_i - u_j\right)^2 E\left[t_i t_j\right]$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)\left(u_i - u_j\right)^2 \pi_{ij}$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(\frac{1}{\pi_{ij}}\pi_{ij} - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2$$

Karena telah diperoleh $E\left[\hat{V}(\bar{y}_{nss})\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2 = V(\bar{y}_{nss})$,

maka terbukti bahwa $\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)\left(y_i - y_j\right)^2$ merupakan taksiran tak bias untuk $V(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\left(1 - \frac{N^2}{n^2}\pi_{ij}\right)\left(u_i - u_j\right)^2$.

Akan tetapi karena pada $\hat{V}(\bar{y}_{nss}) = \frac{1}{N^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{1}{\pi_{ij}} - \frac{N^2}{n^2}\right)\left(y_i - y_j\right)^2$, ada kemungkinan $\frac{1}{\pi_{ij}}$ bisa lebih kecil dari $\frac{N^2}{n^2}$, maka $\hat{V}(\bar{y}_{nss})$ bisa bernilai negatif. Hal ini merupakan kelemahan dari metode yang dibahas dalam tugas akhir ini. Kelemahan metode ini dapat diatasi dengan metode taksiran Brewer dan metode taksiran Murthy (tidak dibahas dalam tugas akhir ini).