BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dibahas teori dasar pengambilan sampel yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya, yaitu tehnik pengambilan sampel dengan cara *simple random sampling, stratified random sampling*, dan *double sampling* untuk stratifikasi beserta formula untuk menaksir proporsi populasi dan sampling error dari taksiran proporsi tersebut.

2.1 *Simple Random Sampling*

Simple random sampling adalah suatu cara pengambilan sampel, dimana sampel berukuran *n* diambil dari populasi berukuran *N* dengan cara sedemikian sehingga setiap sampel yang mungkin mempunyai probabilitas yang sama untuk terpilih menjadi sampel.

Ada dua cara pengambilan dalam *simple random sampling*, yaitu:

a. *Simple random sampling* dengan pengembalian (SRSWR)

   Elemen yang sama bisa terpilih lebih dari satu kali.

b. *Simple random sampling* tanpa pengembalian (SRSWOR/ SRS)

Elemen yang sama tidak bisa terpilih lebih dari satu kali.

Dalam tugas akhir ini, *simple random sampling* yang dimaksud adalah *simple random sampling* tanpa pengembalian (SRSWOR/ SRS) karena unit yang sama tidak memberikan tambahan informasi.

Dalam subbab selanjutnya, akan dibuktikan taksiran rata-rata dan proporsi dalam SRS. Akan tetapi, sebelumnya akan dibuktikan terlebih dahulu suatu teorema yang menyatakan bahwa setiap unit memiliki probabilitas yang sama untuk terpilih menjadi anggota sampel.

Teorema 2.1. Dalam SRS, probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah $\frac{n}{N}$.

Bukti:

Misalkan nilai-nilai dari populasi $= \{u_1, u_2, ..., u_N\}$

Definisikan $p_j = P(u_1$ muncul pada pengambilan ke-j), dimana j = 1, 2, ..., n.

Untuk j = 1, maka:

$p_1 = P(u_1$ muncul pada pengambilan ke-1) $= \frac{1}{N}$.

Untuk j = 2, maka:

$p_2 = P(u_1$ muncul pada pengambilan ke-2)

p_2 = P(u_1 muncul pada pengambilan ke-2, tapi u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1)

Karena kedua kejadian, yaitu kejadian u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-2, saling bebas, diperoleh:

p_2 = P(u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1) P(u_1 muncul pada pengambilan ke-2)

$$p_2 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{N}.$$

Untuk j = 3, maka:

p_3 = P(u_1 muncul pada pengambilan ke-3)

p_3 = P(u_1 muncul pada pengambilan ke-3, tapi u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan ke-2)

Karena kedua kejadian, yaitu kejadian u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan ke-2 dan kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-3, saling bebas, diperoleh:

p_3 = P(u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan ke-2) P(u_1 muncul pada pengambilan ke-3)

Karena kedua kejadian, yaitu kejadian u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-1 dan kejadian u_1 tidak muncul pada pengambilan ke-2, saling bebas, diperoleh:

$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{N-1}\right)\left(\frac{1}{N-2}\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right)\left(\frac{N-1-1}{N-1}\right)\left(\frac{1}{N-2}\right)$$

$$p_3 = \frac{1}{N}.$$

Dengan demikian, diperoleh $p_j = \frac{1}{N}$, dimana j = 1, 2, ..., n. (2.1.1)

Misalkan $\pi_1 = P\left(u_1 \text{ dalam sampel}\right)$

A_j = kejadian u_1 muncul pada pengambilan ke-j

Sehingga:

$$\pi_1 = P\left(\mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2 \bigcup \mathrm{A}_3 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{A}_n\right)$$

Karena n kejadian tersebut saling lepas, maka:

$$\pi_1 = P\left(\mathrm{A}_1\right) + P\left(\mathrm{A}_2\right) + P\left(\mathrm{A}_3\right) + \ldots + \left(\mathrm{A}_n\right)$$

$$\pi_1 = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N}$$

$$\pi_1 = \frac{n}{N} \; . \qquad (2.1.2)$$

Hal yang sama juga berlaku untuk u_i, i = 1, 2, ..., N.

Dengan demikian terbukti bahwa dalam *Simple Random Sampling*, probabilitas suatu unit terpilih menjadi anggota sampel adalah $\frac{n}{N}$.

2.1.1 Taksiran untuk Rata-Rata dalam *Simple Random Sampling*

Misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ adalah nilai-nilai populasi dan μ adalah rata-rata populasi.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}$$

Misalkan $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ adalah *simple random sample* yang diperoleh dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$.

Definisikan taksiran rata-rata populasi, $\bar{y}$, adalah:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Akan dibuktikan bahwa:

(a) $\bar{y}$ adalah taksiran yang tak bias untuk rata-rata populasi $(\equiv \mu)$.

(b) $V(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$, jika $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i - \mu)^2}{N}$.

(c) $\hat{V}(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n}$ adalah taksiran yang tak bias dari

$V(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$, jika $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$.

Pembuktian:

(a) Untuk membuktikan bahwa taksiran tak bias dari rata-rata populasi $(\equiv \mu)$

adalah $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ yaitu dengan menunjukkan bahwa $E(\bar{y}) = \mu$.

Bukti:

Definisikan variabel random Z, dimana:

$$\begin{aligned} z_i &= 1 \ ; \quad u_i \in S \\ z_i &= 0 \ ; \quad u_i \notin S \end{aligned} \quad ; \ i = 1, 2, ..., N. \qquad (2.1.1.1)$$

Akan dicari $E(z_i)$, yaitu:

$$E(z_i) = \sum_{z_i=0}^{1} z_i P(Z_i = z_i) = 0 \cdot P(Z_i = 0) + 1 \cdot P(Z_i = 1) = P(Z_i = 1)$$

Dari definisi (2.1.1.1), diperoleh:

$$E(z_i) = P(u_i \in S)$$

Berdasarkan teorema 2.1: $P(u_i \in S) = \frac{n}{N}$, sehingga:

$$E(z_i) = \frac{n}{N} \tag{2.1.1.2}$$

Perhatikan bahwa, $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i z_i}{n}$. Sehingga, $E(\bar{y})$ adalah:

$$E(\bar{y}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)$$

$$= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} u_i z_i}{n}\right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i E(z_i)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i . \frac{n}{N}}{n}$$

$$E(\bar{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N} = \mu \tag{2.1.1.3}$$

Karena telah diperoleh $E(\bar{y}) = \mu$, maka terbukti bahwa $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ adalah taksiran tak bias untuk μ.

(b) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa adalah $V(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$, jika

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i - \mu)^2}{N}$.

Bukti:

$$V(\bar{y}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{N} u_i z_i\right)$$

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^2 V(z_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} u_i u_j \mathrm{Cov}(z_i, z_j)\right) \tag{2.1.1.4}$$

Akan dicari $V(z_i)$, yaitu:

$$\mathrm{var}(z_i) = E(z_i^2) - [E(z_i)]^2 = E(z_i) - [E(z_i)]^2$$

Dari persamaan (2.1.1.2), diperoleh:

$$\mathrm{var}(z_i) = \frac{n}{N} - \left(\frac{n}{N}\right)^2 = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \tag{2.1.1.5}$$

Akan dicari kovariansi dari z_i dan z_j, yaitu:

$$\mathrm{Cov}(z_i, z_j) = E(z_i z_j) - E(z_i)E(z_j) \tag{2.1.1.6}$$

Terlebih dahulu akan dicari $E(z_i z_j)$, yaitu:

$$E(z_i z_j) = P(z_i = 1, z_j = 1)$$

Dari definisi (2.1.1.1), diperoleh:

$$E(z_i z_j) = P(u_i \in S, u_j \in S)$$

karena ada $(N-2)$ unit lainnya yang tersedia untuk sisa sampel dan di sisi lain ada $(n-2)$ cara untuk menempatkan dalam sampel dan karena populasi ada sebanyak N diantara n sampel. Sehingga probabilitas u_i dan u_j berada dalam sampel adalah:

$$\begin{aligned} E(z_i z_j) &= \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{\dfrac{(N-2)!}{(N-n)!(n-2)!}}{\dfrac{N!}{(N-n)!n!}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} \cdot \frac{(N-2)!}{N(N-1)(N-2)!} \\ &= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \end{aligned} \tag{2.1.1.7}$$

Substitusikan persamaan (2.1.1.7) ke dalam persamaan (2.1.1.6). Sehingga:

$$\text{Cov}(z_i, z_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n}{N} \cdot \frac{n}{N} = -\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1} \tag{2.1.1.8}$$

Substitusikan persamaan (2.1.1.5) dan (2.1.1.8) ke (2.1.1.4). Sehingga:

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\sum_{i=1}^{N} u_i^2 + \left(-\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j \neq i} \frac{u_i u_j}{N-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{u_i u_j}{N-1}\right)$$

$$= \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{u_i u_j}{N-1}\right)$$

$$= \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2} - \frac{\left[\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2}\right]}{(N-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2}\left(1+\frac{1}{(N-1)}\right) - \frac{1}{(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{nN}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{(N-1)}\left[N\sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{1}{N-1}\frac{1}{N}\left[N\sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2} - \left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} u_i\right)^2}{N}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{N} u_i^{\,2} - N\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(u_i-\mu)^2\right]$$

$$= \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{1}{n}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i-\mu)^2}{N}\right]$$

$$= \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$$

Dengan demikian terbukti bahwa $V(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$, jika

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i-\mu)^2}{N}$.

(c) Selanjutnya, untuk membuktikan $\hat{V}(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n}$ dengan

$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$ adalah taksiran yang tak bias dari $V(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$ yaitu

dengan menunjukkan bahwa $E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = V(\bar{y})$.

Bukti:

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = E\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n}\right] \qquad \text{; dengan } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$$

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right] = \frac{N-n}{nN}E\left(s^2\right) \qquad (2.1.1.9)$$

Akan dicari $E\left(s^2\right)$, yaitu:

$$E\left(s^2\right) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2\right)$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \mu\right)^2 - n\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right)$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left[\left(y_i - \mu\right)^2\right] - nE\left[\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(y_{ij} - \mu\right)^2 P\left(y_j\right)\right) - nE\left[\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\left(y_{ij}^2\right) - N\mu^2\right)\frac{1}{N}\right) - nE\left[\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(u_{ij}z_{ij}\right)^2 - N\mu^2\right) - nE\left[\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}u_{ij}^2 - N\mu^2\right) - nE\left[\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(u_{ij} - \mu\right)^2\right) - nE\left[\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{n\left(u_j - \mu\right)^2}{N} - nE\left[\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left(s^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[n\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(u_j - \mu\right)^2}{N} - nE\left[\left(\bar{y} - \mu\right)^2\right]\right]$$

$$E\left(s^2\right) = \left(\frac{1}{n-1}\right)\left(n\sigma^2 - nV\left(\bar{y}\right)\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{1}{(n-1)}\left(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{\sigma^2}{(n-1)}\left(n-\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{\sigma^2}{(n-1)}\left(\frac{nN-n-N+n}{N-1}\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\frac{\sigma^2}{(n-1)}\left(\frac{N(n-1)}{N-1}\right)$$

$$E\left(s^2\right)=\left(\frac{N}{N-1}\right)\sigma^2 \qquad (2.1.1.10)$$

Substitusikan persamaan (2.1.1.9) ke (2.1.1.10). Sehingga:

$$E\left[\hat{V}(\bar{y})\right]=\frac{(N-n)}{nN}\frac{N}{(N-1)}\sigma^2=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}=V(\bar{y})$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\hat{V}(\bar{y})=\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n}$ adalah taksiran yang tak bias dari $V(\bar{y})=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$ dengan $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$.

Sampling error dari taksiran rata-rata tersebut adalah:

$$B(\bar{y})=2\sqrt{\hat{V}(\bar{y})}=2\sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{s^2}{n}}$$

dengan $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$.

2.1.2 Taksiran untuk Proporsi dalam *Simple Random Sampling*

Misalkan dalam sebuah populasi berukuran *N*, diketahui nilai populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ dengan:

$u_i = 0$; jika elemen ke-*i* tidak mempunyai karakteristik tertentu

$u_i = 1$; jika elemen ke-*i* mempunyai karakteristik tertentu

dimana *i* = 1,2, ..., *N*.

Proporsi populasi, *p*, adalah:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N} = \mu$$

dengan μ adalah rata-rata populasi secara keseluruhan.

Misalkan $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ adalah *simple random sample* yang diambil dari populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$.

Definisikan taksiran proporsi populasi, $\hat{p}$, adalah:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{y}$$

Akan dibuktikan bahwa:

(a) $\hat{p}$ adalah taksiran yang tak bias untuk proporsi populasi ($\equiv p$) .

(b) $V\left(\hat{p}\right)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p\left(1-p\right)}{n}$.

(c) $\hat{V}\left(\hat{p}\right)=\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n-1}$ adalah taksiran yang tak bias dari

$V\left(\hat{p}\right)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p\left(1-p\right)}{n}$.

Pembuktian:

(a) Untuk membuktikan bahwa taksiran tak bias dari proporsi populasi $\left(\equiv p\right)$

adalah $\hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$ yaitu dengan menunjukkan bahwa $E\left(\hat{p}\right)=p$.

Bukti:

Karena $\hat{p}=\bar{y}$, jika elemen populasi bernilai 0 dan 1, maka:

$$E\left(\hat{p}\right)=E\left(\bar{y}\right)$$

Dari pembuktian pada butir 2.1.1, telah dibuktikan bahwa $E\left(\bar{y}\right)=\mu$, maka diperoleh:

$$E\left(\hat{p}\right)=\mu=p$$

Karena telah diperoleh $E(\hat{p}) = p$, maka terbukti bahwa $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ adalah taksiran tak bias untuk *p*.

(b) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $V(\hat{p}) = \left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)\dfrac{p(1-p)}{n}$.

Bukti:

Jika elemen populasi bernilai 0 dan 1, maka $\hat{p} = \bar{y}$. Sehingga:

$$V(\hat{p}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right) = V(\bar{y}) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{\sigma^2}{n}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{N}(u_i-\mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}u_i^2 - N\mu^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}u_i - N\mu^2}{N} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}u_i}{N} - \frac{N\mu^2}{N} = \mu - \mu^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p)\end{aligned}$$

Sehingga:

$$V(\hat{p}) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $V(\hat{p}) = \left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)\dfrac{p(1-p)}{n}$.

(c) Selanjutnya, untuk membuktikan $\hat{V}(\hat{p}) = \left(\dfrac{N-n}{N}\right)\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}$ adalah taksiran yang tak bias dari $V(\hat{p}) = \left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)\dfrac{p(1-p)}{n}$ yaitu dengan menunjukkan bahwa $E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = V(\hat{p})$

Bukti :

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = E\left[\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}\right] = \frac{(N-n)}{(n-1)N}E\left[\hat{p}(1-\hat{p})\right]$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = \frac{N-n}{(n-1)N}E\left[\hat{p}-\hat{p}^2\right] = \frac{N-n}{(n-1)N}\left[E(\hat{p})-E(\hat{p}^2)\right] \qquad (2.1.2.1)$$

Selanjutnya, akan dicari $E(\hat{p}^2)$, yaitu:

$V(\hat{p}) = E(\hat{p}^2) - \left[E(\hat{p})\right]^2$, karena $E(\hat{p}) = p$.

Sehingga:

$$E(\hat{p}^2) = V(\hat{p}) + \left[E(\hat{p})\right]^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n} + p^2 \qquad (2.1.2.2)$$

Substitusikan persamaan (2.1.2.2) ke (2.1.1.1). Sehingga:

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = \frac{(N-n)}{(n-1)N}\left\{p - \left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n} + p^2\right]\right\}$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right]=\frac{N-n}{(n-1)N}\left\{\left(p-p^2\right)-\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n}\right]\right\}$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right]=\frac{N-n}{(n-1)N}\left\{\frac{(N-1)n}{(N-1)n}p(1-p)-\left[\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n}\right]\right\}$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right]=\frac{(N-n)}{(n-1)N}\left\{\frac{\left[(Nn-n)p(1-p)\right]-\left[(N-n)p(1-p)\right]}{(N-1)n}\right\}$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right]=\frac{N-n}{(n-1)N}\frac{p(1-p)}{(N-1)n}\left[(Nn-n)-(N-n)\right]$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right]=\frac{(N-n)}{(n-1)N}\cdot\frac{p(1-p)}{(N-1)n}(Nn-N)$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right]=\frac{(N-n)}{(n-1)N}\cdot\frac{p(1-p)}{(N-1)n}\cdot N(n-1)$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right]=\frac{(N-n)}{(N-1)}\frac{p(1-p)}{n}=V(\hat{p})$$

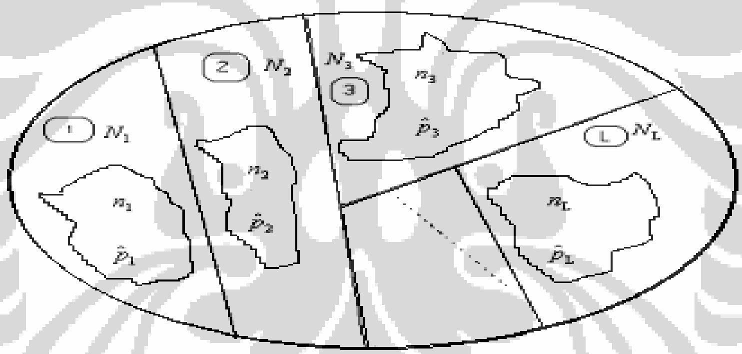
Dengan demikian, terbukti bahwa $\hat{V}(\hat{p})=\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{(n-1)}$ adalah taksiran yang tak bias dari $V(\hat{p})=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n}$.

Sampling error dari taksiran proporsi tersebut adalah:

$$B(\hat{p})=2\sqrt{\hat{V}(\hat{p})}=2\sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{(n-1)}}$$

2.2 *Stratified Random Sampling*

Stratified random sampling adalah suatu cara pengambilan sampel, dengan mengelompokkan elemen-elemen populasi ke dalam kelompok-kelompok yang tidak *overlapping*, sebut strata, dan kemudian memilih secara SRS dari tiap stratum. Pada prinsipnya, *stratified random sampling* menjadikan populasi yang heterogen menjadi homogen dalam tiap stratum. Ilusrasi *stratified random sample* seperti ditunjukkan oleh gambar berikut:



Gambar 2.2 *Stratified Random Sample*

Misalkan notasi yang akan digunakan:

N adalah ukuran keseluruhan populasi dan $N = N_1 + N_2 + ... + N_L$

N_h adalah ukuran populasi pada stratum ke-h

n_h adalah ukuran sampel yang diambil pada stratum ke-h

$\hat{p}_h$ adalah proporsi sampel pada stratum ke-h

dimana h =1, 2, ..., L.

2.2.1 Taksiran untuk Proporsi dalam *Stratified Random Sampling*

Misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ adalah nilai dari populasinya, dengan:

$u_i = 0$; jika elemen ke-*i* tidak mempunyai karakteristik tertentu

$u_i = 1$; jika elemen ke-*i* mempunyai karakteristik tertentu

dimana *i* = 1,2, ..., *N*.

Proporsi populasi, *p*, adalah:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N} = \mu$$

dimana μ adalah rata-rata populasi secara keseluruhan

Misalkan $\{u_{h1}, u_{h2}, ..., u_{hN_h}\}$ adalah nilai populasi dari stratum ke-*h*, *h* = 1,2, ..., L dengan:

$u_{hi} = 0$; jika elemen ke-*i* pada stratum ke-*h* tidak mempunyai karakteristik tertentu

$u_{hi} = 1$; jika elemen ke-*i* pada stratum ke-*h* mempunyai karakteristik tertentu

dimana *i* = 1, 2, ..., N_h.

Proporsi populasi pada stratum ke-*h*, p_h, adalah:

$$p_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}}{N_h} = \mu_h$$

dimana μ_h adalah rata-rata populasi pada stratum ke-*h*, *h* =1, 2, ..., L.

Dengan demikian, proporsi populasi, *p*, dapat dinyatakan sebagai:

$$p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i$$
$$p = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}$$
$$p = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} N_h p_h$$

Misalkan $\{y_{h1}, y_{h2}, ..., y_{hn_h}\}$ adalah *simple random sample* yang diambil dari stratum ke-*h* yang mempunyai elemen $\{u_{h1}, u_{h2}, ..., u_{hN_h}\}$.

Definisikan taksiran proporsi populasi, $\hat{p}$, adalah:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \hat{p}_h}{N}$$

dimana $\hat{p}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}$. Sehingga didapatkan $\hat{p} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h}{N}\left(\frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}\right)$.

Akan dibuktikan bahwa:

(a) $\hat{p}$ adalah taksiran yang tak bias untuk proporsi populasi ($\equiv p$) .

(b) $V(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{p_h(1-p_h)}{n_h}$.

(c) $\hat{V}(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right) \frac{\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h - 1)}$ adalah taksiran yang tak bias dari

$$V(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{p_h(1-p_h)}{n_h}.$$

Pembuktian:

(a) Untuk membuktikan bahwa taksiran tak bias dari proporsi populasi $(\equiv p)$

adalah $\hat{p} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \hat{p}_h}{N}$ yaitu dengan menunjukkan bahwa $E(\hat{p}) = p$.

Bukti:

$$E(\hat{p}) = E\left[\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} N_h \hat{p}_h\right] = \frac{1}{N} \cdot E\left(\sum_{h=1}^{L} N_h \hat{p}_h\right) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{h=1}^{L} N_h E(\hat{p}_h)$$

karena pada stratum ke-*h* dilakukan pengambilan secara SRS dan pada butir 2.1.2 telah dibuktikan bahwa $E(\hat{p}_h) = p_h$, h =1, 2, ..., L. Maka:

$$E(\hat{p}) = \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} N_h p_h = p.$$

Karena telah diperoleh $E(\hat{p}_{st}) = p$, maka terbukti bahwa $\hat{p} = \dfrac{\sum_{h=1}^{L} N_h \hat{p}_h}{N}$

adalah taksiran tak bias untuk *p*.

(b) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa variansi taksiran proporsi adalah

$$V(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{p_h(1-p_h)}{n_h}.$$

Bukti:

$$V(\hat{p}) = V\left(\frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \hat{p}_h}{N}\right) = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h^2 \cdot V(\hat{p}_h)}{N^2}$$

Karena pengambilan sampel pada stratum ke-*h* dilakukan secara SRS, dan pada pembahasan sebelumnya telah dibuktikan bahwa

$V(\hat{p}_h) = \left(\dfrac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \dfrac{p_h(1-p_h)}{n_h}$. Sehingga diperoleh:

$$V(\hat{p}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{p_h(1-p_h)}{n_h} = \sum_{h=1}^{L} \left(\frac{N_h}{N}\right)^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \frac{p_h(1-p_h)}{n_h}.$$

Dengan demikian terbukti bahwa $V(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L} \left(\dfrac{N_h}{N}\right)^2 \left(\dfrac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \dfrac{p_h(1-p_h)}{n_h}$.

(c) Selanjutnya, untuk membuktikan $\hat{V}(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\frac{\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h - 1)}$

adalah taksiran yang tak bias dari $V(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{p_h(1-p_h)}{n_h}$ yaitu dengan

menunjukkan bahwa $E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = V(\hat{p})$.

Bukti :

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = E\left[\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\frac{\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h - 1}\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} E\left[\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\frac{\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h - 1}\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\frac{1}{(n_h - 1)}E\left[\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\frac{1}{(n_h - 1)}\left[E(\hat{p}_h) - E(\hat{p}_h^2)\right]$$

karena pada stratum ke-*h* dilakukan pengambilan secara SRS dan

berdasarkan pembuktian pada butir 2.1.2, yaitu $E(\hat{p}_h) = p_h$ dan

$V(\hat{p}_h) = \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{p_h(1-p_h)}{n_h}$, dan karena $V(\hat{p}_h) = E(\hat{p}_h^2) - \left[E(\hat{p}_h)\right]^2$ maka:

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h}\right)\frac{1}{(n_h - 1)}\left\{p_h - \left[\left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{p_h(1-p_h)}{n_h} + (p_h)^2\right]\right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h}\right)\frac{1}{(n_h-1)}\left\{\frac{(N_h-1)n_h\left[p_h-(p_h)^2\right]}{(N_h-1)n_h}-\right.$$

$$\left.\left[\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h(1-p_h)}{n_h}\right]\right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h}\right)\frac{p_h(1-p_h)}{(N_h-1)n_h(n_h-1)}\left[(N_h-1)n_h-(N_h-n_h)\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h(1-p_h)}{n_h} = V(\hat{p}_{st})$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\hat{V}(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h}\right)\frac{\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}$

adalah taksiran yang tak bias dari $V(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h(1-p_h)}{n_h}$

Sampling error dari taksiran proporsi tersebut (sebut = *B*) adalah:

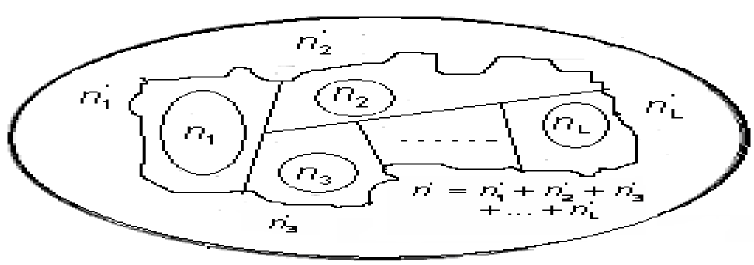
$$B(\hat{p}) = 2\sqrt{\hat{V}(\hat{p})} = 2\sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}\right)^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h}\right)\frac{\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}}$$

2.3 *Double Sampling* untuk Stratifikasi

Seringkali dalam *stratified random sampling*, strata tidak diketahui dari awal tetapi baru terbentuk dari *simple random sample* yang diambil. Dalam kasus seperti ini taksiran parameter dicari berdasarkan data yang didapat dari elemen-elemen *simple random subsample* yang diambil dari setiap strata yang terbentuk. Metode pengambilan sampel dengan mengambil suatu *simple random sample* untuk menentukan strata (sebut tahap pertama) dan kemudian mengambil *simple random subsample* dari setiap stratum (sebut tahap kedua) disebut metode *double sampling* untuk stratifikasi.

Misalkan *N* adalah ukuran populasi dan misalkan pada tahap pertama suatu sampel ukuran $n^{'}$ diambil secara SRS dan dari $n^{'}$ *simple random sample* yang terambil dapat dibentuk L strata dengan ukuran masing-masing sampel pada tiap strata adalah $n_h^{'}$, dimana *h* = 1, 2, …, L. Kemudian pada tahap kedua diambil subsampel dari masing-masing strata yang telah terbentuk dengan ukuran sampel n_h.

Misalkan N_h adalah ukuran populasi pada stratum ke-*h*. Sebut $w_h = n_h^{'}/n^{'}$, maka w_h adalah taksiran yang tak bias untuk $W_h = N_h/N$. Ilusrasi *double sample* untuk stratifikasi seperti ditunjukkan oleh gambar berikut:



Gambar 2. 3 *Double Sample* untuk Stratifikasi

Misalkan notasi yang akan digunakan:

N adalah ukuran keseluruhan populasi

N_h adalah ukuran populasi pada stratum ke-*h*

$n^{'}$ adalah ukuran keseluruhan sampel yang diambil pada tahap pertama

$n_h^{'}$ adalah ukuran sampel yang diambil pada tahap pertama stratum ke-*h*

n adalah ukuran keseluruhan sampel yang diambil pada tahap kedua

n_h adalah ukuran sampel yang diambil pada tahap kedua stratum ke-*h*

dimana *h* =1, 2, ..., L.

2.3.1 Taksiran untuk Proporsi dalam *Double Sampling* untuk Stratifikasi

Misalkan $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ adalah nilai dari populasinya, dengan:

$u_i = 0$; jika elemen ke-*i* tidak mempunyai karakteristik tertentu

$u_i = 1$; jika elemen ke-*i* mempunyai karakteristik tertentu

dimana *i* = 1,2, ..., *N*.

Misalkan $\{u_{h1}, u_{h2}, ..., u_{hN_h}\}$ adalah nilai populasi pada stratum ke-*h*, dimana *h* =1, 2, ..., L, dengan:

$u_{hi} = 0$; jika elemen ke-*i* pada stratum ke-*h* tidak mempunyai karakteristik tertentu

$u_{hi} = 1$; jika elemen ke-*i* pada stratum ke-*h* mempunyai karakteristik tertentu

dimana *i* = 1, 2, ..., N_h.

Misalkan *p* adalah proporsi populasi dengan karakteristik tertentu.

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}$$

Proporsi populasi dengan karakteristik tertentu pada stratum ke-*h* , p_h , adalah:

$$p_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}}{N_h}$$

Dengan demikian, *p* dapat dinyatakan sebagai:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}$$

$$p = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}$$

$$p = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} N_h p_h$$

$$p = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h}{N} p_h$$

$$p = \sum_{h=1}^{L} W_h p_h$$

Misalkan $\{y_{h1}, y_{h2}, ..., y_{hn_h}\}$ adalah *simple random sample* yang diambil dari stratum ke-*h* yang mempunyai elemen $\{u_{h1}, u_{h2}, ..., u_{hN_h}\}$.

Definisikan taksiran proporsi populasi dengan karakteristik tertentu adalah:

$$\hat{p} = \frac{1}{n'} \sum_{h=1}^{L} n'_h \hat{p}_h = \sum_{h=1}^{L} \frac{n'_h}{n'} \hat{p}_h = \sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h$$

dimana $\hat{p}_h$ adalah taksiran proporsi populasi dengan karakteristik tertentu pada stratum ke-*h*, yaitu $\hat{p}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}$. Sehingga didapatkan $\hat{p} = \sum_{h=1}^{L} w_h \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}$.

Akan dibuktikan bahwa:

(a) $\hat{p}$ adalah taksiran yang tak bias untuk proporsi populasi $(\equiv p)$.

(b) $V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right) + \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h N_h p_h (1-p_h)}{(N_h - 1)n'}(k_h - 1)$, dimana k_h suatu bilangan yang ≥ 1.

(c) $\hat{V}(\hat{p}) = \frac{n'(N-1)}{(n'-1)N}\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h \hat{p}_h (1-\hat{p}_h)}{(n_h - 1)}\left(\frac{k_h}{n'} - \frac{1}{N}\right) + \frac{g'}{n'} \sum_{h=1}^{L} \frac{n_h \hat{p}_h (1-\hat{p}_h)}{(n_h - 1)} \left(\frac{w_h}{N} - \frac{k_h}{n'}\right) + \frac{g'}{n'} \sum_{h=1}^{L} w_h (\hat{p}_h - \hat{p})^2\right]$ adalah taksiran yang tak bias dari $V(\hat{p})$, dimana $g' = \frac{N - n'}{N-1}$.

Pembuktian:

(a) Untuk membuktikan bahwa taksiran tak bias dari proporsi populasi $(\equiv p)$

adalah $\hat{p} = \sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h$ yaitu dengan menunjukkan bahwa $E(\hat{p}) = p$.

Bukti:

$$E(\hat{p}) = E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h\right]$$

$$E(\hat{p}) = EE\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h \middle| w_h\right]$$

$$E(\hat{p}) = E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \cdot p_h\right]$$

$$E(\hat{p}) = \sum_{h=1}^{L} W_h p_h = p$$

Karena telah diperoleh $E(\hat{p}) = p$, maka terbukti bahwa $\hat{p} = \sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h$ adalah taksiran tak bias untuk *p*.

(b) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa

$V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right) + \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h N_h p_h (1-p_h)}{(N_h - 1)n'}(k_h - 1)$, dimana k_h suatu bilangan yang ≥ 1.

Bukti:

Perhatikan bahwa:

$$\hat{p} = \sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h = \sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} + \sum_{h=1}^{L} w_h \left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'} \right)$$

Sehingga:

$$V\left(\hat{p}\right) = V\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h \right) = V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} + \sum_{h=1}^{L} w_h \left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'} \right) \right]$$

$$V\left(\hat{p}\right) = \underbrace{V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right]}_{\mathrm{I}} + \underbrace{V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'} \right) \right]}_{\mathrm{II}} + \underbrace{2\operatorname{cov}\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'}, \sum_{h=1}^{L} w_h \left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'} \right) \right]}_{\mathrm{III}} \tag{2.3.1.1}$$

I. Perhatikan bentuk $V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right]$

Misalkan:

$\hat{p}^{'}$ adalah proporsi sampel yang diambil pada tahap pertama dengan karakteristik tertentu, maka $\hat{p}^{'} = \frac{1}{n^{'}} \sum_{i=1}^{n^{'}} y_{hi}$,

$\hat{p}_h^{'}$ adalah proporsi sampel yang diambil pada tahap pertama dengan karakteristik tertentu stratum ke-*h*, maka $\hat{p}_h^{'} = \frac{1}{n_h^{'}} \sum_{i=1}^{n_h^{'}} y_{hi}$, dan

$w_h = n_h^{'} / n^{'}$

Maka:

$$\hat{p}^{'} = \frac{1}{n^{'}}\sum_{i=1}^{n^{'}} y_{hi} = \frac{1}{n^{'}}\frac{n_h^{'}}{n_h^{'}}\sum_{i=1}^{n^{'}} y_{hi} = \frac{n_h^{'}}{n^{'}}\sum_{i=1}^{n^{'}}\frac{y_{hi}}{n_h^{'}} = \sum_{h=1}^{L} w_h \sum_{i=1}^{n_h^{'}}\frac{y_{hi}}{n_h^{'}} = \sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'}$$

Karena pemilihan sampel berukuran $n^{'}$ yang diambil pada tahap pertama dari populasi berukuran N dilakukan secara SRS, maka berdasarkan pembuktian pada butir 2.1.2: $V\left(\hat{p}^{'}\right) = \left(\frac{N-n^{'}}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n^{'}}$. Oleh karena itu:

$$V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'}\right] = V\left(\hat{p}^{'}\right) = \left(\frac{N-n^{'}}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{n^{'}}$$

$$V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'}\right] = N\left(\frac{N-n^{'}}{N-1}\right)\frac{p(1-p)}{Nn^{'}}$$

$$V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'}\right] = \left(\frac{N}{N-1}\right)p(1-p)\left(\frac{N-n^{'}}{Nn^{'}}\right)$$

$$V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'}\right] = \frac{Np(1-p)}{(N-1)}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) \qquad (2.3.1.2)$$

II. Perhatikan bentuk $V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)\right]$

$$V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)\right] = EV\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \cdot \left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)\middle| w_h\right] +$$

$$VE\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \cdot \left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)\middle| w_h\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot V\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)\right] +$$

$$V\left[\sum_{h=1}^{L}\left[E\left(w_h\hat{p}_h \middle| w_h\right) - E\left(w_h\hat{p}_h^{'} \middle| w_h\right)\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot \left[E\left[\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)^2\right] - \left[E\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)\right]^2\right]\right] +$$

$$V\left[\sum_{h=1}^{L}\left[w_h\hat{p}_h^{'} - w_h\hat{p}_h^{'}\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot E\left[\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)^2\right] - \left[E\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)\right]^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot E\left[\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)^2\right] - \left[E\left(\hat{p}_h\right) - E\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right]^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot \left[E\left(\hat{p}_h\right)^2 - 2E\left(\hat{p}_h\hat{p}_h^{'}\right) + E\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right]\right.$$

$$\left. - \left[\left(E\left(\hat{p}_h\right)\right)^2 - 2E\left(\hat{p}_h\right)E\left(\hat{p}_h^{'}\right) + \left(E\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right)^2\right]\right]$$

Karena pemilihan sampel berukuran n_h yang diambil pada tahap kedua dari sampel berukuran $n_h^{'}$ yang diambil pada tahap pertama dilakukan secara SRS, maka berdasarkan pembuktian pada butir 2.1.2 diperoleh $E\left(\hat{p}_h\right) = \hat{p}_h^{'}$. Maka:

$$V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h - \hat{p}_h^{'}\right)\right] = E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot \left[E\left(\hat{p}_h\right)^2 - 2EE\left(\hat{p}_h\hat{p}_h^{'} \middle| \hat{p}_h^{'}\right) + E\left(\hat{p}_h^{'}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left.\left[\left[E\left(\hat{p}_h\right)\right]^2 - 2EE\left(\hat{p}_h \middle| \hat{p}_h^{'}\right)E\left(\hat{p}_h^{'}\right) + \left[E\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right]^2\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot \left[E\left(\hat{p}_h\right)^2 - 2E\left(\hat{p}_h^{'}\hat{p}_h^{'}\right) + E\left(\hat{p}_h^{'}\right)^2\right] - \left[\left[E\left(\hat{p}_h\right)\right]^2 - 2E\left(\hat{p}_h^{'}\right)E\left(\hat{p}_h^{'}\right) + \left[E\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right]^2\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot \left[E\left(\hat{p}_h\right)^2 - 2E\left(\hat{p}_h\right)^2 + E\left(\hat{p}_h^{'}\right)^2\right] - \left[\left[E\left(\hat{p}_h\right)\right]^2 - 2\left[E\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right]^2 + \left[E\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right]^2\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot \left[E\left(\hat{p}_h\right)^2 - E\left(\hat{p}_h^{'}\right)^2\right] - \left[\left[E\left(\hat{p}_h\right)\right]^2 - \left[E\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right]^2\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot \left[E\left(\hat{p}_h\right)^2 - \left[E\left(\hat{p}_h\right)\right]^2\right] - \left[E\left(\hat{p}_h^{'}\right)^2 - \left[E\left(\hat{p}_h\right)\right]^2\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h^2 \cdot \left[V\left(\hat{p}_h\right) - V\left(\hat{p}_h^{'}\right)\right]\right]$$

Karena $\hat{p}_h$ adalah taksiran proporsi populasi dengan karakteristik tertentu yang diambil pada tahap kedua stratum ke-*h* dan pada masing-masing strata dilakukan pengambilan sampel secara SRS, maka dari pembuktian butir 2.1.2 diperoleh $V\left(\hat{p}_h\right) = \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right)\frac{p_h\left(1 - p_h\right)}{n_h}$ dan karena $\hat{p}_h^{'}$ adalah taksiran proporsi populasi dengan karakteristik tertentu yang diambil pada tahap pertama stratum ke-*h* dan pada masing-masing strata dilakukan pengambilan sampel secara SRS, maka dari pembuktian butir 2.1.2 diperoleh

$V\left(\hat{p}_h^{'}\right)=\left(\frac{N_h-n_h^{'}}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h^{'}}$. Sehingga:

$$V\left[\sum_{h=1}^{L}w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}_h^{'}\right)\right]=E\left[\sum_{h=1}^{L}w_h^2\left[\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h}-\left(\frac{N_h-n_h^{'}}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h^{'}}\right]\right]$$

$$=E\left[\sum_{h=1}^{L}w_h^2\left[\frac{n_h^{'}}{n_h^{'}}\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{n_h}{n_h}\left(\frac{N_h-n_h^{'}}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h^{'}}\right]\right]$$

$$=E\left[\sum_{h=1}^{L}w_h^2\left[\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h^{'}\left(N_h-1\right)n_h}\left[N_hn_h^{'}-n_h^{'}n_h-\left(N_hn_h-n_h^{'}n_h\right)\right]\right]\right]$$

$$=E\left[\sum_{h=1}^{L}w_h^2\left[\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h^{'}\left(N_h-1\right)n_h}\left(N_hn_h^{'}-N_hn_h\right)\right]\right]$$

$$=E\left[\sum_{h=1}^{L}w_h^2\left[\frac{N_hp_h\left(1-p_h\right)}{n_h^{'}\left(N_h-1\right)n_h}\left(n_h^{'}-n_h\right)\right]\right]$$

$$=E\left[\sum_{h=1}^{L}w_h^2\left[\frac{N_hp_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{1}{n_h}-\frac{1}{n_h^{'}}\right)\right]\right]$$

karena n_h adalah ukuran subsampel yang diambil dari $n_h^{'}$, sehingga sebut

$n_h=\frac{1}{k_h}n_h^{'}$, dengan $k_h\geq 1$, dan karena $n_h^{'}=w_hn^{'}$, sehingga

$n_h=\frac{1}{k_h}n_h^{'}=\frac{1}{k_h}w_hn^{'}$, dengan $k_h\geq 1$. Oleh karena itu:

$$V\left[\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}_h^{'}\right)\right]=E\left[\sum_{h=1}^{L}\frac{w_h^2 N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{k_h}{w_h n^{'}}-\frac{1}{w_h n^{'}}\right)\right]$$

$$=\sum_{h=1}^{L} E\left[\frac{w_h^2 N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)w_h n^{'}}\left(k_h-1\right)\right]$$

$$=\sum_{h=1}^{L}\frac{W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)n^{'}}\left(k_h-1\right) \qquad (2.3.1.3)$$

III. Perhatikan bentuk $\operatorname{cov}\left[\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'},\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}_h^{'}\right)\right]$

$$\operatorname{cov}\left[\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'},\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}_h^{'}\right)\right]=\operatorname{cov}\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'},\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h\right)+\operatorname{cov}\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'},-\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\right)$$

$$=\operatorname{cov}\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'},\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h\right)-\operatorname{cov}\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'},\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\right)$$

$$=\operatorname{cov}\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'},\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h\right)-V\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\right)$$

$$=\left\{E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\cdot\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h\right)-E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\right)\cdot\right.$$

$$\left.E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h\right)\right\}-V\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\right)$$

$$=\left\{EE\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\cdot\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h\middle|\hat{p}_h^{'}\right)-E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\right)\cdot\right.$$

$$\left.EE\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h\middle|\hat{p}_h^{'}\right)\right\}-V\left(\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^{'}\right)$$

$$= \left\{ E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \cdot \sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right) - E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right) \cdot \right.$$

$$\left. E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right) \right\} - V\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right)$$

$$= \left\{ E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right)^2 - \left[E\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right) \right]^2 \right\} - V\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right)$$

$$= V\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right) - V\left(\sum_{h=1}^{L} w_h \hat{p}_h^{'} \right) = 0 \qquad (2.3.1.4)$$

Substitusikan (2.3.1.2) dan (2.3.1.3) dan (2.3.1.4) ke (2.3.1.1), sehingga diperoleh:

$$V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N} \right) + \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h N_h p_h (1-p_h)}{(N_h - 1)n^{'}} (k_h - 1) \quad (2.3.1.5)$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N} \right) + \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h N_h p_h (1-p_h)}{(N_h - 1)n^{'}} (k_h - 1)$, dimana k_h suatu bilangan yang ≥ 1.

Perhatikan bahwa:

$$Np(1-p) = p(1-p)\sum_{h=1}^{L} N_h$$

$$Np(1-p) = p\sum_{h=1}^{L} N_h - p^2 \sum_{h=1}^{L} N_h$$

$$Np(1-p) = p\sum_{h=1}^{L} N_h - 2p^2 \sum_{h=1}^{L} N_h + p^2 \sum_{h=1}^{L} N_h$$

$$Np(1-p)=\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}N_hp_h\right)}{N}\sum_{h=1}^{L}N_h-2p\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}N_hp_h\right)}{N}\sum_{h=1}^{L}N_h+p^2\sum_{h=1}^{L}N_h$$

$$Np(1-p)=\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}N_hp_h\right)}{\sum_{h=1}^{L}N_h}\sum_{h=1}^{L}N_h-2p\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}N_hp_h\right)}{\sum_{h=1}^{L}N_h}\sum_{h=1}^{L}N_h+p^2\sum_{h=1}^{L}N_h$$

$$Np(1-p)=\left[\left(\sum_{h=1}^{L}N_hp_h\right)-\sum_{h=1}^{L}N_h\left(p_h\right)^2\right]+\left[\sum_{h=1}^{L}N_h\left(p_h\right)^2-2p\left(\sum_{h=1}^{L}N_hp_h\right)+p^2\sum_{h=1}^{L}N_h\right]$$

$$Np(1-p)=\sum_{h=1}^{L}N_hp_h\left(1-p_h\right)+\sum_{h=1}^{L}N_h\left(p_h-p\right)^2 \qquad (2.3.1.6)$$

Sebut $g^{'}=\dfrac{N-n^{'}}{N-1}$. Maka perkalian (2.3.1.6) dengan $g^{'}/n^{'}N$ akan

menghasilkan:

$$\frac{g^{'}}{n^{'}N}Np(1-p)=\frac{g^{'}}{n^{'}N}\left[\sum_{h=1}^{L}N_hp_h\left(1-p_h\right)+\sum_{h=1}^{L}N_h\left(p_h-p\right)^2\right]$$

$$\frac{\left(N-n^{'}\right)}{(N-1)n^{'}N}Np(1-p)=\frac{g^{'}}{n^{'}}\left[\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}p_h\left(1-p_h\right)+\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\left(p_h-p\right)^2\right]$$

$$\frac{\left(N-n^{'}\right)}{(N-1)n^{'}}p(1-p)=\frac{g^{'}}{n^{'}}\left[\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\frac{N_h-1}{N_h-1}p_h\left(1-p_h\right)+\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\left(p_h-p\right)^2\right]$$

$$\frac{N}{N}\frac{\left(N-n^{'}\right)}{n^{'}}\frac{p(1-p)}{(N-1)}=\frac{g^{'}}{n^{'}}\left[\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h-1}{N}\frac{N_h}{N_h-1}p_h\left(1-p_h\right)+\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\left(p_h-p\right)^2\right]$$

$$\frac{Np(1-p)}{(N-1)}\frac{\left(N-n^{'}\right)}{Nn^{'}}=\frac{g^{'}}{n^{'}}\left[\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{N_h}{N}-\frac{1}{N}\right)\frac{N_h}{N_h-1}p_h\left(1-p_h\right)+\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h}{N}\left(p_h-p\right)^2\right]$$

$$\frac{Np(1-p)}{(N-1)}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)=\frac{g'}{n'}\left[\sum_{h=1}^{L}\left(W_h-\frac{1}{N}\right)\frac{N_h}{N_h-1}p_h(1-p_h)+\sum_{h=1}^{L}W_h(p_h-p)^2\right]$$

$$\frac{Np(1-p)}{(N-1)}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)=\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}\left(W_h-\frac{1}{N}\right)\frac{N_hp_h(1-p_h)}{(N_h-1)}+\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}W_h(p_h-p)^2$$

Sehingga (I) menjadi:

$$V(\hat{p})=\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}\left(W_h-\frac{1}{N}\right)\frac{N_hp_h(1-p_h)}{(N_h-1)}+\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}W_h(p_h-p)^2+$$

$$\sum_{h=1}^{L}\frac{W_hN_hp_h(1-p_h)}{n'(N_h-1)}(k_h-1) \qquad (2.3.1.7)$$

karena dimisalkan $g'=(N-n')/(N-1)$, maka:

$$-\frac{1}{n'}+\frac{g'}{n'}=-\frac{1}{n'}+\frac{(N-n')}{(N-1)n'}$$

$$-\frac{1}{n'}+\frac{g'}{n'}=-\frac{(N-1)}{(N-1)n'}+\frac{(N-n')}{(N-1)n'}$$

$$-\frac{1}{n'}+\frac{g'}{n'}=\frac{1-n'}{(N-1)n'}$$

$$-\frac{1}{n'}+\frac{g'}{n'}=\frac{N}{N}\frac{(1-n')}{(N-1)n'}$$

$$-\frac{1}{n'}+\frac{g'}{n'}=\frac{-Nn'+N}{N(N-1)n'}$$

$$-\frac{1}{n'}+\frac{g'}{n'}=\frac{-(Nn'-n')+(N-n')}{N(N-1)n'}$$

$$-\frac{1}{n'}+\frac{g'}{n'}=\frac{-n'(N-1)}{N(N-1)n'}+\frac{1}{Nn'}\left[\frac{(N-n')}{(N-1)}\right]$$

$$-\frac{1}{n^{'}}+\frac{g^{'}}{n^{'}}=-\frac{1}{N}+\frac{g^{'}}{n^{'}N}$$

Oleh karenanya, (2.3.1.7) dapat ditulis sebagai :

$$V\left(\hat{p}\right)=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left(W_h-\frac{1}{N}\right)\frac{N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}+\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left(W_h-\frac{1}{N}\right)\frac{N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}+$$

$$\sum_{h=1}^{L}\frac{k_h W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{n^{'}\left(N_h-1\right)}-\sum_{h=1}^{L}\frac{W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{n^{'}\left(N_h-1\right)}$$

$$V\left(\hat{p}\right)=\sum_{h=1}^{L}\frac{k_h W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)n^{'}}+\sum_{h=1}^{L}\frac{W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(-\frac{1}{n^{'}}+\frac{g^{'}}{n^{'}}\right)+$$

$$\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left(-\frac{1}{N}\right)\frac{W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}+\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}W_h\left(p_h-p\right)^2$$

$$V\left(\hat{p}\right)=\sum_{h=1}^{L}\frac{k_h W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)n^{'}}+\sum_{h=1}^{L}\frac{W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(-\frac{1}{N}+\frac{g^{'}}{n^{'}N}\right)+$$

$$\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left(-\frac{1}{N}\right)\frac{W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}+\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}W_h\left(p_h-p\right)^2$$

$$V\left(\hat{p}\right)=\sum_{h=1}^{L}\frac{W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)+\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{W_h g^{'}}{n^{'}N}-\frac{g^{'}}{n^{'}N}\right)+$$

$$\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}W_h\left(p_h-p\right)^2$$

Sehingga diperoleh bentuk lain untuk $V\left(\hat{p}\right)$, yaitu:

$$V\left(\hat{p}\right)=\sum_{h=1}^{L}\frac{W_h N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)+\frac{g^{'}}{n^{'}N}\sum_{h=1}^{L}\left(W_h-1\right)\frac{N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}+$$

$$\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}W_h\left(p_h-p\right)^2$$

(c) Untuk membuktikan

$$\hat{V}(\hat{p}) = \frac{n^{'}(N-1)}{(n^{'}-1)N}\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h \cdot \hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)+\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{n_h \cdot \hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}\right.$$

$$\left.\left(\frac{w_h}{N}-\frac{k_h}{n^{'}}\right)+\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} w_h(\hat{p}_h-\hat{p})^2\right]$$, dengan $g^{'} = \frac{N-n^{'}}{N-1}$ adalah taksiran yang tak

bias dari $V(\hat{p})$.

yaitu dengan menunjukkan bahwa $E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = V(\hat{p})$.

Bukti:

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = E\left[\frac{n^{'}(N-1)}{(n^{'}-1)N}\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)+\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{n_h\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\frac{w_h}{N}-\frac{k_h}{n^{'}}\right)+\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} w_h(\hat{p}_h-\hat{p})^2\right]\right]$$

$$E\left[\hat{V}(\hat{p})\right] = \frac{n^{'}(N-1)}{(n^{'}-1)N}\left\{\underbrace{E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h \cdot \hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)\right]}_{\mathrm{I}}+\right.$$

$$\left.\underbrace{E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{n_h \cdot \hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\left(\frac{w_h}{N}-\frac{k_h}{n^{'}}\right)\right]}_{\mathrm{II}}+\underbrace{E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} w_h(\hat{p}_h-\hat{p})^2\right]}_{\mathrm{III}}\right\} \quad (2.3.1.8)$$

I. Perhatikan bentuk $E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h \cdot \hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)\right]$

$$E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h \cdot \hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)\right] = \sum_{h=1}^{L}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)EE\left[w_h\frac{n_h \cdot \hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\middle| w_h\right]$$

Pandang:

$$E\left[\frac{n_h}{n_h-1}\right]=E\left[\frac{\frac{1}{n_h}}{\frac{1}{n_h-1}}\right]$$

$$=E\left[\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}}\right]$$

Sebut: $\hat{p}_{h1}=\frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h-1}$ karena dilakukan pengambilan secara SRS maka

$\hat{p}_{h1}$ merupakan taksiran yang tak bias untuk $p_{h1}=\frac{\sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}}{N_h-1}$. Sehingga

$E\left[\frac{n_h}{n_h-1}\right]=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}}{N_h-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}}{N_h}}=\frac{\frac{1}{N_h-1}}{\frac{1}{N_h}}=\frac{N_h}{N_h-1}$. Oleh karena itu:

$$E\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h\cdot\hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{n_h-1}\left(\frac{k_h}{n'}-\frac{1}{N}\right)\right]=\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{k_h}{n'}-\frac{1}{N}\right)E\left[w_h\frac{N_h\cdot p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\right]$$

$$=\sum_{h=1}^{L}\left(\frac{k_h}{n'}-\frac{1}{N}\right)W_h\frac{N_h\cdot p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)} \qquad (2.3.1.9)$$

II. Perhatikan bentuk $E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{n_h \cdot \hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{\left(n_h-1\right)}\left(\frac{w_h}{N}-\frac{k_h}{n^{'}}\right)\right]$

$$E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{n_h \cdot \hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{\left(n_h-1\right)}\left(\frac{w_h}{N}-\frac{k_h}{n^{'}}\right)\right]=E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{w_h}{N}\frac{n_h \cdot \hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{\left(n_h-1\right)}\right]-$$

$$E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{k_h}{n^{'}}\frac{n_h \cdot \hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{\left(n_h-1\right)}\right]$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}N}\sum_{h=1}^{L}EE\left[\frac{w_h n_h \cdot \hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{\left(n_h-1\right)}\middle| w_h\right]-$$

$$\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{k_h}{n^{'}}E\left[\frac{n_h \cdot \hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{\left(n_h-1\right)}\right]$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}N}\sum_{h=1}^{L}E\left[\frac{w_h N_h \cdot p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\right]-$$

$$\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{k_h}{n^{'}}\frac{N_h \cdot p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}N}\sum_{h=1}^{L}\frac{W_h N_h \cdot p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}-$$

$$\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{k_h}{n^{'}}\frac{N_h \cdot p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h \cdot p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{W_h}{N}-\frac{k_h}{n^{'}}\right) \quad (2.3.1.10)$$

III. Perhatikan bentuk $E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2\right]$

Pandang:

$$\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2=\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h^2-2\hat{p}_h\hat{p}+\hat{p}^2\right)$$

$$\sum_{h} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2=\sum_{h} w_h\hat{p}_h^2-2\sum_{h} w_h\hat{p}_h\hat{p}+\sum_{h} w_h\hat{p}^2$$

$$\sum_{h} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2=\sum_{h} w_h\hat{p}_h^2-2\hat{p}\hat{p}+\hat{p}^2$$

$$\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2=\sum_{h=1}^{L} w_h\hat{p}_h^2-\hat{p}^2$$

Sehingga:

$$E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2\right]=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} E\left[w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2\right]$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} E\left[w_h\hat{p}_h^2-\hat{p}^2\right]$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left\{E\left[w_h\hat{p}_h^2\right]-E\left(\hat{p}^2\right)\right\}$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left\{EE\left[w_h\,\hat{p}_h^2\middle|w_h\right]-E\left(\hat{p}^2\right)\right\}$$

karena pada stratum ke-*h* dilakukan pengambilan secara SRS maka berdasarkan pembuktian pada butir 2.1.2: diperoleh $E\left(\hat{p}_h\right)=p_h$ dan $V\left(\hat{p}_h\right)=\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h}$, dan telah dibuktikan sebelumnya $E\left(\hat{p}\right)=p$.

Oleh karena itu:

$$E\left[\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2\right]=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left\{E\left[w_h\left[\left(\frac{N_h-n_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h}+\left(p_h\right)^2\right]\right]-\right.$$

$$\left.\left[V\left(\hat{p}_d\right)+p^2\right]\right\}$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left\{E\left[w_h\left[\left(\frac{N_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left(\frac{n_h}{N_h-1}\right)\left(\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h}\right)+\left(p_h\right)^2\right]\right]-\left[V\left(\hat{p}\right)+p^2\right]\right\}$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left\{E\left[w_h\left[\left(\frac{N_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left(\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{N_h-1}\right)+\left(p_h\right)^2\right]\right]-\left[V\left(\hat{p}\right)+p^2\right]\right\}$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left\{E\left[w_h\left[\left(\frac{N_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{n_h}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left(\frac{N_h}{N_h-1}\right)\frac{p_h\left(1-p_h\right)}{N_h}+\left(p_h\right)^2\right]\right]-\left[V\left(\hat{p}\right)+p^2\right]\right\}$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left\{E\left[w_h\left[\left(\frac{N_h}{N_h-1}\right)p_h\left(1-p_h\right)\left(\frac{1}{n_h}-\frac{1}{N_h}\right)+\left(p_h\right)^2\right]\right]-\right.$$

$$\left.\left[V\left(\hat{p}\right)+p^2\right]\right\}$$

$$=\frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\left\{E\left[w_h\left[\left(\frac{N_h}{N_h-1}\right)p_h\left(1-p_h\right)\left(\frac{k_h}{w_h n^{'}}-\frac{1}{W_h N}\right)+\left(p_h\right)^2\right]\right]-\right.$$

$$\left.\left[V\left(\hat{p}\right)+p^2\right]\right\}$$

$$= \frac{g'}{n'} \sum_{h=1}^{L} \left\{ W_h \left[\left(\frac{N_h}{N_h - 1} \right) p_h \left(1 - p_h\right) \left(\frac{k_h}{W_h n'} - \frac{1}{W_h N} \right) + \left(p_h\right)^2 \right] - \right.$$

$$\left. \left[V\left(\hat{p}\right) + p^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{g'}{n'} \sum_{h=1}^{L} \left\{ \left(\frac{N_h}{N_h - 1} \right) p_h \left(1 - p_h\right) \left(\frac{k_h}{n'} - \frac{1}{WN} \right) + W_h \left(p_h\right)^2 - \right.$$

$$\left. \left[V\left(\hat{p}\right) + p^2 \right] \right\} \tag{2.3.1.11}$$

Substitusikan (2.3.1.9), (2.3.1.10), dan (2.3.1.11) ke (2.3.1.8), sehingga:

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right] = \frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N} \left\{ \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{N_h p_h \left(1 - p_h\right)}{\left(N_h - 1\right)} \left(\frac{k_h}{n'} - \frac{1}{N} \right) + \right.$$

$$\frac{g'}{n'} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h p_h \left(1 - p_h\right)}{\left(N_h - 1\right)} \left(\frac{W_h}{N} - \frac{k_h}{n'} \right) +$$

$$\left. \frac{g'}{n'} \left[\sum_{h=1}^{L} W_h \left(p_h\right)^2 - p^2 + \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h p_h \left(1 - p_h\right)}{\left(N_h - 1\right)} \left(\frac{k_h}{n'} - \frac{1}{N} \right) - V\left(\hat{p}\right) \right] \right\}$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right] = \frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N} \left\{ \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{N_h p_h \left(1 - p_h\right)}{\left(N_h - 1\right)} \left(\frac{k_h}{n'} - \frac{1}{N} \right) + \right.$$

$$\frac{g'}{n'} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h p_h \left(1 - p_h\right)}{\left(N_h - 1\right)} \left(\frac{W_h}{N} - \frac{k_h}{n'} \right) +$$

$$\left. \frac{g'}{n'} \left[\sum_{h=1}^{L} W_h \left(p_h - p\right)^2 + \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h p_h \left(1 - p_h\right)}{\left(N_h - 1\right)} \left(\frac{k_h}{n'} - \frac{1}{N} \right) - V\left(\hat{p}\right) \right] \right\}$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right] = \frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N} \left\{ \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{N_h p_h \left(1 - p_h\right)}{\left(N_h - 1\right)} \left(\frac{k_h}{n'} - \frac{1}{N} \right) + \right.$$

$$\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{W_h}{N}-\frac{1}{N}\right)+$$

$$\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(-\frac{k_h}{n'}+\frac{k_h}{n'}\right)+\frac{g'}{n'}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h\left(p_h-p\right)^2-V\left(\hat{p}\right)\right]\Bigg\}$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right]=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\left\{\sum_{h=1}^{L}W_h\frac{N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{k_h}{n'}-\frac{1}{N}\right)+\frac{g'}{n'N}\sum_{h=1}^{L}\left(W_h-1\right)\cdot\right.$$

$$\left.\frac{N_h p_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}+\frac{g'}{n'}\left[\sum_{h=1}^{L}W_h\left(p_h-p\right)^2\right]\right\}-\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\frac{g'}{n'}V\left(\hat{p}\right)$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right]=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}V\left(\hat{p}\right)-\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\frac{g'}{n'}V\left(\hat{p}\right)$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right]=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\left(1-\frac{g'}{n'}\right)V\left(\hat{p}\right)$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right]=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\left(1-\frac{\left(N-n'\right)}{\left(N-1\right)n'}\right)V\left(\hat{p}\right)$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right]=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\left(\frac{\left(N-1\right)n'-\left(N-n'\right)}{\left(N-1\right)n'}\right)V\left(\hat{p}\right)$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right]=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\left(\frac{Nn'-N}{\left(N-1\right)n'}\right)V\left(\hat{p}\right)$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right]=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\left(\frac{N\left(n'-1\right)}{\left(N-1\right)n'}\right)V\left(\hat{p}\right)=V\left(\hat{p}\right)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\hat{V}(\hat{p}) = \frac{n^{'}(N-1)}{(n^{'}-1)N}\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h \hat{p}_h (1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\left(\frac{k_h}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L}\frac{n_h \hat{p}_h (1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\right.$$

$$\left.\left(\frac{w_h}{N} - \frac{k_h}{n^{'}}\right) + \frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} w_h (\hat{p}_h - \hat{p})^2\right]$$ dimana $g^{'} = \frac{N-n^{'}}{N-1}$ dan k_h suatu bilangan

yang ≥ 1 adalah taksiran yang tak bias dari $V(\hat{p})$.

Sampling error dari taksiran proporsi tersebut adalah:

$$B(\hat{p}) = 2\sqrt{\hat{V}(\hat{p})} =$$

$$2\sqrt{\frac{n^{'}(N-1)}{(n^{'}-1)N}\left[\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h \cdot \hat{p}_h (1-\hat{p}_h)}{n_h - 1}\left(\frac{k_h}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} w_h \frac{n_h \cdot \hat{p}_h (1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\left(\frac{w_h}{N} - \frac{k_h}{n^{'}}\right) + \frac{g^{'}}{n^{'}}\sum_{h=1}^{L} w_h (\hat{p}_h - \hat{p})^2\right]}$$

dimana $g^{'} = \frac{N-n^{'}}{N-1}$ dan k_h suatu bilangan yang ≥ 1