BAB III

TAKSIRAN PROPORSI POPULASI JIKA TERJADI NONRESPON

Dalam bab ini akan dibahas penaksiran proporsi populasi jika terjadi nonrespon dan dilakukan *callback* sebanyak t = 2 kali. Selain itu, juga akan dibahas penentuan ukuran sampel yang diperlukan jika diduga terjadi nonrespon dan akan dilakukan *callback* sebanyak t = 2 kali. Dalam tugas akhir ini hanya akan dibahas pengambilan sampel yang dilakukan secara SRS pada setiap *callback*. Sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu besarnya bias yang ditimbulkan pada taksiran proporsi populasi jika terjadi nonrespon.

3.1 Bias pada Taksiran Proporsi Populasi jika Terjadi Nonrespon

Nonrespon adalah suatu keadaan dimana unit populasi yang terpilih menjadi sampel tidak menanggapi angket yang telah dikirimkan. Misalkan angket yang dikirimkan adalah angket sederhana dan jawabannya hanya dapat berupa ’’setuju’’ atau ‘’tidak setuju’’. Jika peneliti akan melakukan penaksiran parameter (dalam tugas akhir ini proporsi) populasi berdasarkan data yang diperoleh dari responden yang merespon, maka akan terjadi bias pada taksiran yang diperoleh. Misalkan populasi terbagi menjadi dua strata, yaitu:

1. Stratum I: populasi yang memberikan respon
2. Stratum II: populasi yang tidak memberikan respon

Misalkan notasi yang digunakan dalam populasi adalah:

N_{11} = ukuran populasi yang menjawab "setuju" dan memberikan respon

N_{01} = ukuran populasi yang menjawab "tidak setuju" dan memberikan respon

N_{12} = ukuran populasi yang menjawab "setuju" tetapi tidak memberikan respon

N_{02} = ukuran populasi yang menjawab "tidak setuju" tetapi tidak memberikan respon

N_1 = ukuran populasi yang memberikan respon $= N_{11} + N_{01}$

N_2 = ukuran populasi yang tidak memberikan respon $= N_{12} + N_{02}$

N = ukuran keseluruhan populasi $= N_1 + N_2$

Untuk lebih jelasnya mengenai notasi, perhatikan tabel berikut:

Tabel 3.1 Notasi Ukuran Populasi

Respon	**Jawaban**		**Total Ukuran**
	Setuju	Tidak Setuju	
Merespon	N_{11}	N_{01}	N_1
Tidak Merespon	N_{12}	N_{02}	N_2
Total Ukuran			N

Sebut:

$W_1 =$ proporsi populasi yang memberikan respon $= \dfrac{N_1}{N}$

$W_2 =$ proporsi populasi yang tidak memberikan respon $= \dfrac{N_2}{N}$

$p_1 =$ proporsi populasi yang menjawab "setuju" dan memberikan respon $= \dfrac{N_{11}}{N_1}$

$p_2 =$ proporsi populasi yang menjawab "setuju" tetapi tidak memberikan respon $= \dfrac{N_{12}}{N_2}$

Parameter yang akan ditaksir dalam populasi adalah p, yaitu proporsi populasi yang memberikan jawaban “setuju”, dengan $p = \dfrac{N_{11} + N_{12}}{N}$. Akan tetapi, karena tidak semua elemen populasi merespon maka taksiran proporsi hanya dapat diperoleh dari p_1. Oleh karena itu, terjadi bias (sebut =b), yaitu:

$$b = p_1 - p$$

$$b = \frac{N_{11}}{N_1} - \frac{N_{11} + N_{12}}{N}$$

$$b = \frac{N_{11}}{N_1} - \frac{N_{11}}{N_1}\frac{N_1}{N} - \frac{N_{12}}{N_2}\frac{N_2}{N}$$

$$b = \frac{N_{11}}{N_1}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right) - \frac{N_{12}}{N_2}\frac{N_2}{N}$$

$$b = p_1\left(1 - W_1\right) - p_2 W_2$$

$$b = p_1 W_2 - p_2 W_2 = W_2 \left(p_1 - p_2 \right) \tag{3.1.1}$$

Persamaan (3.1.1) menyatakan bahwa bias merupakan selisih antara p_1, yaitu proporsi populasi yang menjawab "setuju" dan memberikan respon dengan p_2, yaitu proporsi yang menjawab "setuju" tetapi tidak memberikan respon. Karena p_2 merupakan proporsi maka:

$$0 \leq p_2 \leq 1$$

Berdasarkan (3.1.1), jika p_2 =0 maka $b = W_2 p_1$ dan jika p_2 =1 maka $b = W_2 \left(p_1 - 1 \right) = -W_2 \left(1 - p_1 \right)$. Sehingga diperoleh batas bawah untuk *b* (sebut $= m$) dan batas atas untuk *b* (sebut = *M*) sebagai berikut:

$$m = -W_2 \left(1 - p_1 \right) \leq b \leq W_2 p_1 = M \tag{3.1.2}$$

3.2 *Callback*

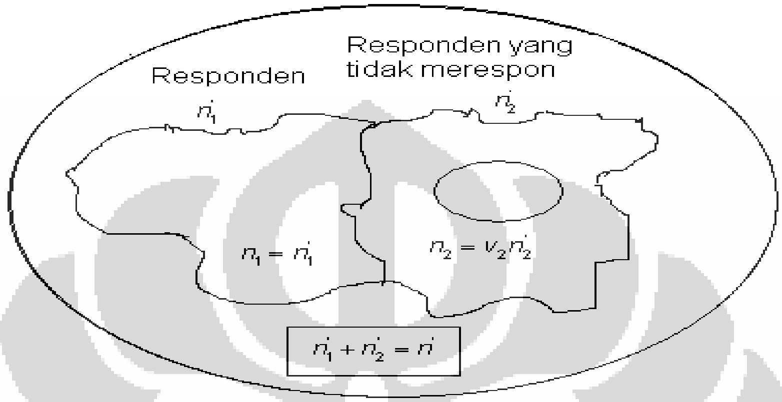
Jika terjadi responden yang tidak merespon salah satu cara mengatasinya adalah dengan melakukan pengambilan subsampel secara SRS dari responden yang tidak merespon. Tehnik pengambilan sampel ini yang biasa disebut *callback* merupakan penerapan *double sampling* untuk stratifikasi yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

Misalkan populasi berukuran *N* dan diambil *simple random sample* berukuran $n^{'}$ untuk dikirimkan angket. Misalkan dari sampel berukuran $n^{'}$ tersebut, responden yang memberikan respon dianggap sebagai stratum 1 dan responden yang tidak memberikan respon dianggap sebagai stratum 2. Misal stratum 1 berukuran $n_1^{'}$ dan stratum 2 berukuran $n_2^{'}$. Kemudian, pada tahap kedua ambil subsampel secara SRS dari stratum 1 dengan ukuran sampel $n_1 = \frac{1}{k_1} n_1^{'}$, dimana $k_1 = 1$ dan dari stratum 2 dengan ukuran sampel $n_2 = \frac{1}{k_2} n_2^{'}$, dimana $k_2 > 1$. Angket dikirimkan kembali hanya kepada n_2 unit subsampel untuk mendapatkan data respon.

Jadi, prosedur *callback* untuk *t* = 2 kali yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Kirimkan angket untuk sampel berukuran $n^{'}$ yang dipilih secara SRS dari populasi berukuran *N*. Pada langkah ini menghasilkan sampel yang merespon dengan ukuran $n_1^{'}$ dan sampel yang tidak merespon dengan ukuran $n_2^{'}$.
2. Kirimkan kembali angket untuk sampel berukuran $n_2 = \frac{1}{k_2} n_2^{'}$ yang dipilih secara SRS dari sampel yang tidak merespon pada langkah 1. Pada langkah ini mungkin juga menghasilkan sampel yang merespon dan tidak merespon. Akan tetapi, karena *t* dibatasi hanya sampai 2

kali maka tidak dilakukan kembali pengiriman angket. Ilusrasi *callback* seperti ditunjukkan oleh gambar berikut:



Gambar 3. 2 *Callback* diantara Responden yang Tidak Merespon

Misalkan N_h adalah ukuran populasi pada stratum ke-*h*, dimana *h* = 1 dan 2. Sebut $w_h = n_h' / n'$, maka w_h adalah taksiran yang tak bias untuk $W_h = N_h / N$.

3.2.1 Taksiran untuk Proporsi jika Dilakukan *Callback*

Misalkan dalam populasi berukuran *N* diketahui nilai populasi $\{u_1, u_2, ..., u_N\}$ dengan:

$u_i = 0$; jika elemen ke-*i* memberikan jawaban ”tidak setuju”

$u_i = 1$; jika elemen ke-*i* memberikan jawaban ”setuju”

dimana *i* = 1,2, ..., *N*.

Misalkan $\{u_{h1}, u_{h2}, ..., u_{hN_h}\}$ adalah nilai populasi dari stratum ke-*h*, *h* = 1 dan 2 dengan:

$u_{hi} = 0$; jika elemen ke-*i* pada stratum ke-*h* memberikan jawaban ”tidak setuju”

$u_{hi} = 1$; jika elemen ke-*i* pada stratum ke-*h* memberikan jawaban ”setuju”

dimana *i* = 1, 2, ..., N_h.

Misalkan p adalah proporsi populasi yang memberikan jawaban ”setuju”, maka:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_i}{N}$$

Proporsi populasi pada stratum ke- h yang memberikan jawaban ”setuju”, p_h , adalah:

$$p_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}}{N_h}$$

Dengan demikian, p dapat dinyatakan sebagai:

$$p = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{2} \sum_{i=1}^{N_h} u_{hi}$$

$$p = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{2} N_h p_h$$

$$p = \sum_{h=1}^{2} \frac{N_h}{N} p_h$$

$$p = \sum_{h=1}^{2} W_h p_h \qquad .$$

$$p = W_1 p_1 + W_2 p_2$$

Misalkan $\{y_{h1}, y_{h2}, ..., y_{hn_h}\}$ adalah *simple random sample* yang diambil dari stratum ke-*h* yang mempunyai elemen $\{u_{h1}, u_{h2}, ..., u_{hN_h}\}$

Definisikan:

$$\hat{p} = \frac{1}{n'} \sum_{h=1}^{2} n'_h \hat{p}_h = \sum_{h=1}^{2} \frac{n'_h}{n'} \hat{p}_h = \sum_{h=1}^{2} w_h \hat{p}_h = w_1 \hat{p}_1 + w_2 \hat{p}_2$$

dimana $\hat{p}_h$ adalah taksiran proporsi populasi yang memberikan jawaban "setuju" pada stratum ke-*h*, yaitu $\hat{p}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}$. Sehingga didapatkan

$$\hat{p} = \sum_{h=1}^{L} w_h \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h} .$$

Dapat dibuktikan bahwa:

(a) $\hat{p}$ adalah taksiran yang tak bias untuk proporsi populasi $(\equiv p)$.

(b) $V\left(\hat{p}\right)=\frac{Np\left(1-p\right)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)+\frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)n^{'}}\left(k_2-1\right)$, dengan k_2 suatu bilangan yang >1

(c) $\hat{V}\left(\hat{p}\right)=\frac{n^{'}\left(N-1\right)}{\left(n^{'}-1\right)N}\left[\sum_{h=1}^{2}w_h\frac{n_h\hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{\left(n_h-1\right)}\left(\frac{k_h}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)+\frac{\left(N-n^{'}\right)}{\left(N-1\right)n^{'}}\sum_{h=1}^{2}\frac{n_h\hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{n_h-1}\cdot\left(\frac{w_h}{N}-\frac{k_h}{n^{'}}\right)+\frac{\left(N-n^{'}\right)}{\left(N-1\right)n^{'}}\sum_{h=1}^{2}w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2\right]$ adalah taksiran yang tak bias dari $V\left(\hat{p}\right)$, dengan $k_1=1$ dan $k_2>1$.

Pembuktian:

(a) Untuk membuktikan bahwa taksiran tak bias dari proporsi populasi ($\equiv p$) adalah $\hat{p}=\sum_{h=1}^{2}w_h\hat{p}_h$ yaitu dengan menunjukkan bahwa $E\left(\hat{p}\right)=p$.

Bukti:

Karena pada double sampling untuk stratifikasi telah dibuktikan bahwa:

$\hat{p}=\sum_{h=1}^{L}w_h\hat{p}_h$ adalah taksiran yang tak bias untuk $p=\sum_{h=1}^{L}W_hp_h$. Maka pada *callback*:

$$\hat{p}=\sum_{h=1}^{2}w_h\hat{p}_h$$

$$\hat{p}=w_1\hat{p}_1+w_2\hat{p}_2=\frac{1}{n^{'}}\left(n_1^{'}\hat{p}_1+n_2^{'}\hat{p}_2\right) \tag{3.2.1.1}$$

adalah taksiran yang tak bias untuk $p = \sum_{h=1}^{2} W_h p_h$.

Karena telah diperoleh $E(\hat{p}) = p$, maka terbukti bahwa

$\hat{p} = \frac{1}{n^{'}}\left(n_1^{'}\hat{p}_1 + n_2^{'}\hat{p}_2\right)$ adalah taksiran tak bias untuk $p = \sum_{h=1}^{2} W_h p_h$.

(b) Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa

$V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \frac{W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2-1)n^{'}}(k_2 - 1)$, dengan k_2 suatu bilangan

yang >1.

Bukti:

Karena pada double sampling untuk stratifikasi telah dibuktikan bahwa:

$V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h N_h p_h (1-p_h)}{(N_h-1)n^{'}}(k_h - 1)$, dimana k_h suatu

bilangan yang ≥ 1. Maka pada *callback* diperoleh:

$$V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \sum_{h=1}^{2} \frac{W_h N_h p_h (1-p_h)}{(N_h-1)n^{'}}(k_h - 1)$$

$$V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \frac{W_1 N_1 p_1 (1-p_1)}{(N_1-1)n^{'}}(k_1 - 1) + \frac{W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2-1)n^{'}}(k_2 - 1)$$

Karena pada *callback* $n_2 = \frac{1}{k_2} n_2^{'}$, dimana $k_2 > 1$ dan $n_1 = n_1^{'}$, sehingga $k_1 = 1$.

Sehingga diperoleh:

$$V\left(\hat{p}\right)=\frac{Np\left(1-p\right)}{N-1}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)+\frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)n'}\left(k_2-1\right)$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$V\left(\hat{p}\right)=\frac{Np\left(1-p\right)}{N-1}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)+\frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)n'}\left(k_2-1\right). \qquad (3.2.1.2)$$

(c) Untuk membuktikan

$$\hat{V}\left(\hat{p}\right)=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\left[\sum_{h=1}^{2}w_h\frac{n_h\hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{n_h-1}\left(\frac{k_h}{n'}-\frac{1}{N}\right)+\frac{\left(N-n'\right)}{\left(N-1\right)n'}\sum_{h=1}^{2}\frac{n_h\hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{n_h-1}\cdot\right.$$

$$\left.\left(\frac{w_h}{N}-\frac{k_h}{n'}\right)+\frac{\left(N-n'\right)}{\left(N-1\right)n'}\sum_{h=1}^{2}w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2\right]$$ adalah taksiran yang tak bias dari

$V\left(\hat{p}\right)$, dengan $k_1=1$ dan $k_2>1$ yaitu dengan menunjukkan bahwa

$E\left[\hat{V}\left(\hat{p}\right)\right]=V\left(\hat{p}\right)$.

Bukti:

Karena pada double sampling untuk stratifikasi telah dibuktikan

bahwa: $$\hat{V}\left(\hat{p}\right)=\frac{n'\left(N-1\right)}{\left(n'-1\right)N}\left[\sum_{h=1}^{L}w_h\frac{n_h\cdot\hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{n_h-1}\left(\frac{k_h}{n'}-\frac{1}{N}\right)+\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}\frac{n_h\cdot\hat{p}_h\left(1-\hat{p}_h\right)}{n_h-1}\right.$$

$$\left.\left(\frac{w_h}{N}-\frac{k_h}{n'}\right)+\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}w_h\left(\hat{p}_h-\hat{p}\right)^2\right]$$ adalah taksiran yang tak bias untuk

$$V\left(\hat{p}\right)=\sum_{h=1}^{L}\frac{W_hN_hp_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}\left(\frac{k_h}{n'}-\frac{1}{N}\right)+\frac{g'}{n'N}\sum_{h=1}^{L}\left(W_h-1\right)\frac{N_hp_h\left(1-p_h\right)}{\left(N_h-1\right)}$$

$\frac{g'}{n'}\sum_{h=1}^{L}W_h\left(p_h-p\right)^2$. Maka pada *callback*:

$$\hat{V}(\hat{p}) = \frac{n^{'}(N-1)}{(n^{'}-1)N}\left[\sum_{h=1}^{2} w_h \frac{n_h\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\left(\frac{k_h}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \frac{(N-n^{'})}{(N-1)n^{'}}\sum_{h=1}^{2}\frac{n_h\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{(n_h-1)}\cdot\right.$$

$$\left.\left(\frac{w_h}{N} - \frac{k_h}{n^{'}}\right) + \frac{(N-n^{'})}{(N-1)n^{'}}\sum_{h=1}^{2} w_h(\hat{p}_h - \hat{p})^2\right] \qquad (3.2.1.3)$$

adalah taksiran yang tak bias dari

$$V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \frac{W_2N_2p_2(1-p_2)}{(N_2-1)n^{'}}(k_2-1).$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\hat{V}(\hat{p}) = \frac{n^{'}(N-1)}{(n^{'}-1)N}\left[\sum_{h=1}^{2} w_h \frac{n_h\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}\left(\frac{k_h}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \frac{(N-n^{'})}{(N-1)n^{'}}\sum_{h=1}^{2}\frac{n_h\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}\cdot\right.$$

$\left.\left(\frac{w_h}{N} - \frac{k_h}{n^{'}}\right) + \frac{(N-n^{'})}{(N-1)n^{'}}\sum_{h=1}^{2} w_h(\hat{p}_h - \hat{p})^2\right]$ adalah taksiran yang tak bias dari $V(\hat{p})$

dengan $k_1 = 1$ dan $k_2 > 1$.

Sampling error dari taksiran proporsi tersebut adalah:

$$B(\hat{p}) = 2\sqrt{\hat{V}(\hat{p})} = 2\left\{\frac{n^{'}(N-1)}{(n^{'}-1)N}\left[\sum_{h=1}^{2} w_h \frac{n_h\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}\left(\frac{k_h}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{(N-n^{'})}{(N-1)n^{'}}\sum_{h=1}^{2}\frac{n_h\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}\left(\frac{w_h}{N} - \frac{k_h}{n^{'}}\right) + \frac{(N-n^{'})}{(N-1)n^{'}}\sum_{h=1}^{2} w_h(\hat{p}_h - \hat{p})^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

dengan $k_1 = 1$ dan $k_2 > 1$.

3.2.2 Ukuran Sampel Optimum jika Dilakukan *Callback*

Misalkan $c_0 =$ biaya dalam pengambilan setiap unit sampel pertama kali

$c_1 =$ biaya dalam pengolahan per unit data yang diperoleh dari sampel tahap pertama yang merespon

$c_2 =$ biaya dalam pengambilan dan pengolahan per unit data dari sampel yang tidak merespon pada tahap pertama tetapi merespon pada tahap kedua

Sehingga total biaya (*c*) adalah:

$$c = c_0 n^{'} + c_1 n_1^{'} + \frac{c_2 n_2^{'}}{k_2}$$

Ekspektasi dari *c* (sebut= *C*) adalah:

$$C = E(c) = E\left(c_0 n^{'} + c_1 n_1^{'} + \frac{c_2 n_2^{'}}{k_2} \right) = c_0 n^{'} + c_1 E\left(n_1^{'}\right) + \frac{c_2}{k_2} E\left(n_2^{'}\right)$$

$$C = c_0 n^{'} + c_1 W_1 n^{'} + \frac{c_2}{k_2} W_2 n^{'} \qquad (3.2.2.1)$$

Variansi dari $\hat{p}$ (sebut= *V*) adalah:

$$V = V(\hat{p}) = \frac{Np(1-p)}{N-1}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N} \right) + \frac{W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2-1)n^{'}}(k_2 - 1) \qquad (3.2.2.2)$$

Permasalahan dalam menentukan ukuran sampel adalah:

1. Memilih $n^{'}$ dan k_2 supaya meminimumkan variansi *V* dengan *C* tertentu, atau
2. Memilih $n^{'}$ dan k_2 supaya meminimumkan *C* dengan variansi *V* tertentu.

Penyelesaian kedua masalah tersebut adalah sebagai berikut:

1. Untuk meminimumkan $V = \frac{Np(1-p)}{(N-1)}\left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N}\right) + \frac{W_2N_2p_2(1-p_2)}{(N_2-1)n^{'}}(k_2-1)$

   dengan syarat $C - \left(c_0n^{'} + c_1W_1n^{'} + \frac{c_2}{k_2}W_2n^{'}\right) = 0$

Akan dicari $n^{'}$ dan k_2 yang memenuhi dengan menggunakan pengali Lagrange. Sebelumnya, akan dibuktikan terlebih dahulu suatu pengujian nilai minimum, yaitu jika $D > 0$ dan $\frac{\partial V}{\partial n^{'}\partial n^{'}} > 0$, *V* adalah sebuah nilai minimum.

Pandang: $D\left(n^{'},k_2\right) = \frac{\partial V}{\partial n^{'}\partial n^{'}}\frac{\partial V}{\partial k_2\partial k_2} - \frac{\partial V}{\partial n^{'}\partial k_2}$. Akan dibuktikan: $D\left(n^{'},k_2\right) > 0$.

Bukti:

$$D\left(n^{'},k_2\right) = \left[\frac{2Np(1-p)}{(N-1)}\frac{1}{\left(n^{'}\right)^3} + \frac{2W_2N_2p_2(1-p_2)}{(N_2-1)n^{'}}\frac{1}{\left(n^{'}\right)^3}(k_2-1)\right]0 - \left[-\frac{W_2N_2p_2(1-p_2)}{(N_2-1)n^{'}}\frac{1}{\left(n^{'}\right)^2}\right]$$

$$D\left(n^{'},k_2\right)=\frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)n^{'}}\frac{1}{\left(n^{'}\right)^2}$$

Karena $N_2>1$ sehingga $\left(N_2-1\right)>0$, $n^{'}>0$ sehingga $\left(n^{'}\right)^2>0$, $0<W_2<1$, dan $0<p_2<1$ sehingga $0<1-p_2<1$. Oleh karena itu diperoleh: $D\left(n^{'},k_2\right)>0$.

Akan dibuktikan bahwa $\frac{\partial V}{\partial n^{'}\partial n^{'}}>0$.

Bukti:

$$\frac{\partial V}{\partial n^{'}\partial n^{'}}=\frac{2Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)}\frac{1}{\left(n^{'}\right)^3}+\frac{2W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)n^{'}}\frac{1}{\left(n^{'}\right)^3}\left(k_2-1\right)$$

Karena $N>1$ sehingga $\left(N-1\right)>0$, $N_2>1$ sehingga $\left(N_2-1\right)>0$, $n^{'}>0$ sehingga $\left(n^{'}\right)^2>0$, $0<W_2<1$, $0<p<1$ sehingga $0<1-p<1$, dan $0<p_2<1$ sehingga $0<1-p_2<1$. Oleh karena itu diperoleh:

$\frac{\partial V}{\partial n^{'}\partial n^{'}}>0$.

Lagrangian (sebut= L) adalah:

$$L=\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)}\left(\frac{1}{n^{'}}-\frac{1}{N}\right)+\frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)n^{'}}\left(k_2-1\right)+\lambda\left[C-\left(c_0n^{'}+c_1W_1n^{'}+\frac{c_2}{k_2}W_2n^{'}\right)\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial n'} = -\frac{1}{\left(n'\right)^2}\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} - \frac{1}{\left(n'\right)^2}\frac{\left(k_2-1\right)W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} + \lambda\left[c_0 + c_1W_1 + \frac{c_2}{k_2}W_2\right] = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_2} = \frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)n'} - \lambda\left(\frac{c_2}{k_2^{\ 2}}W_2n'\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - \left(c_0n' + c_1W_1n' + \frac{c_2}{k_2}W_2n'\right) = 0 \tag{3}$$

dari (1) diperoleh:

$$\lambda\left[c_0 + c_1W_1 + \frac{c_2}{k_2}W_2\right] = \frac{1}{\left(n'\right)^2}\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \frac{1}{\left(n'\right)^2}\frac{\left(k_2-1\right)W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}$$

$$\lambda\left[c_0 + c_1W_1 + \frac{c_2}{k_2}W_2\right] = \frac{1}{\left(n'\right)^2}\left[\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \frac{\left(k_2-1\right)W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]$$

$$\lambda = \frac{\left[\dfrac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \dfrac{\left(k_2-1\right)W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}{\left(n'\right)^2\left[c_0 + c_1W_1 + \dfrac{c_2}{k_2}W_2\right]} \tag{4}$$

dari (2) diperoleh:

$$\frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)n'} = \lambda\left(\frac{c_2}{k_2^{\ 2}}W_2n'\right)$$

$$\frac{N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)\left(n'\right)^2} = \lambda\left(\frac{c_2}{k_2^{\ 2}}\right)$$

$$k_2^{\,2} = \lambda \frac{c_2 \left(n^{'}\right)^2}{\dfrac{N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}} \tag{5}$$

Substitusikan (4) ke (5), sehingga diperoleh:

$$k_2^{\,2} = \frac{\left[\dfrac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \dfrac{\left(k_2-1\right)W_2 N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}{\left(n^{'}\right)^2 \left[c_0 + c_1 W_1 + \dfrac{c_2}{k_2} W_2\right]} \frac{c_2 \left(n^{'}\right)^2}{\dfrac{N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}}$$

$$k_2^{\,2} = \frac{\left[\dfrac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \dfrac{\left(k_2-1\right)W_2 N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}{\left[c_0 + c_1 W_1 + \dfrac{c_2}{k_2} W_2\right]} \frac{c_2}{\dfrac{N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}}$$

$$k_2^{\,2}\left[c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2\right]\left[\frac{N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right] = c_2 \left[\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \frac{\left(k_2-1\right)W_2 N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]$$

$$k_2^{\,2}\left[c_0 + c_1 W_1\right]\left[\frac{N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right] + k_2 \left[\frac{c_2 W_2 N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} - \frac{c_2 W_2 N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]$$
$$+ c_2 \left[\frac{W_2 N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} - \frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)}\right] = 0$$

$$k_2^{\,2}\left[c_0 + c_1 W_1\right]\left[\frac{N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right] + c_2 \left[\frac{W_2 N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} - \frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)}\right] = 0$$

$$k_2^{\,2} = \frac{c_2 \left[\dfrac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} - \dfrac{W_2 N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}{\left[c_0 + c_1 W_1\right]\left[\dfrac{N_2 p_2 \left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}$$

Karena $k_2 > 1$, maka solusi untuk k_2 adalah:

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2\left[\frac{Np(1-p)}{(N-1)} - \frac{W_2N_2p_2(1-p_2)}{(N_2-1)}\right]}{[c_0 + c_1W_1]\left[\frac{N_2p_2(1-p_2)}{(N_2-1)}\right]}}$$

p dan p_2 tidak diketahui, maka karena tidak ada informasi apapun mengenai *p* dan p_2, ambil *p* = 0.5 dan $p_2 = 0.5$. Sehingga $\frac{Np(1-p)}{(N-1)} \approx \frac{N_2p_2(1-p_2)}{(N_2-1)}$. Oleh karena itu:

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2[1-W_2]}{[c_0 + c_1W_1]}} \qquad (6)$$

2. Untuk meminimumkan $C = c_0n' + c_1W_1n' + \frac{c_2}{k_2}W_2n'$ dengan syarat

$$V - \frac{Np(1-p)}{(N-1)}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right) - \frac{W_2N_2p_2(1-p_2)}{(N_2-1)n'}(k_2 - 1) = 0.$$

Akan dicari n' dan k_2 yang memenuhi dengan menggunakan pengali Lagrange.

Lagrangian (sebut= *L*) adalah:

$$L = c_0 n^{'} + c_1 W_1 n^{'} + \frac{c_2}{k_2} W_2 n^{'} + \lambda \left[V - \frac{Np(1-p)}{(N-1)} \left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N} \right) - \frac{W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2 - 1) n^{'}} (k_2 - 1) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial n^{'}} = c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2 + \lambda \left[\frac{1}{(n^{'})^2} \frac{Np(1-p)}{(N-1)} + \frac{1}{(n^{'})^2} \frac{(k_2 - 1) W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2 - 1)} \right] = 0$$

(1')

$$\frac{\partial L}{\partial k_2} = -\frac{c_2}{k_2^{\,2}} W_2 n^{'} - \lambda \left(\frac{W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2 - 1) n^{'}} \right) = 0 \tag{2'}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = V - \frac{Np(1-p)}{(N-1)} \left(\frac{1}{n^{'}} - \frac{1}{N} \right) - \frac{W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2 - 1) n^{'}} (k_2 - 1) = 0 \tag{3'}$$

dari (1') diperoleh:

$$c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2 = -\lambda \left[\frac{1}{(n^{'})^2} \frac{Np(1-p)}{(N-1)} + \frac{1}{(n^{'})^2} \frac{(k_2 - 1) W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2 - 1)} \right]$$

$$c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2 = \frac{-\lambda}{(n^{'})^2} \left[\frac{Np(1-p)}{(N-1)} + \frac{(k_2 - 1) W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2 - 1)} \right]$$

$$\lambda = -\frac{(n^{'})^2 \left[c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2 \right]}{\left[\frac{Np(1-p)}{(N-1)} + \frac{(k_2 - 1) W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2 - 1)} \right]} \tag{4'}$$

dari (2') diperoleh:

$$\frac{c_2}{k_2^{\,2}} W_2 n^{'} = -\lambda \left(\frac{W_2 N_2 p_2 (1-p_2)}{(N_2 - 1) n^{'}} \right)$$

$$\left(\frac{c_2}{k_2^{\,2}}\right) = -\lambda\left(\frac{N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(n'\right)^2\left(N_2-1\right)}\right)$$

$$k_2^{\,2} = -\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{\left(n'\right)^2}{\frac{N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}}\right) \tag{5'}$$

Substitusikan (4') ke (5'), sehingga diperoleh:

$$k_2^{\,2} = -\frac{c_2}{-\frac{\left(n'\right)^2\left[c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2\right]}{\left[\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \frac{\left(k_2-1\right) W_2 N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}}\left(\frac{\left(n'\right)^2}{\frac{N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}}\right)$$

$$k_2^{\,2} = \frac{c_2}{\left[c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2\right]}\left(\frac{\left[\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \frac{\left(k_2-1\right) W_2 N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}{\frac{N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}}\right)$$

$$k_2^{\,2}\left[c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2\right]\frac{N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} = c_2\left[\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} + \frac{\left(k_2-1\right) W_2 N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]$$

$$k_2^{\,2}\left[c_0 + c_1 W_1\right]\frac{N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} + k_2 c_2 W_2\frac{N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} = k_2 c_2\frac{W_2 N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} + c_2 \cdot \left[\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} - \frac{W_2 N_2 p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]$$

$$k_2^{\,2}\left[c_0 + c_1W_1\right]\left[\frac{N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right] + k_2\left[\frac{c_2W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} - \frac{c_2W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]$$

$$+c_2\left[\frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} - \frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)}\right] = 0$$

$$k_2^{\,2}\left[c_0 + c_1W_1\right]\left[\frac{N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right] + c_2\left[\frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)} - \frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)}\right] = 0$$

$$k_2^{\,2} = \frac{c_2\left[\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} - \frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}{\left[c_0 + c_1W_1\right]\left[\frac{N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}$$

Karena $k_2 > 1$, maka solusi untuk k_2 adalah:

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2\left[\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} - \frac{W_2N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}{\left[c_0 + c_1W_1\right]\left[\frac{N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}\right]}}$$

p dan p_2 tidak diketahui, maka karena tidak ada informasi apapun mengenai p dan p_2, ambil p = 0.5 dan $p_2 = 0.5$. Sehingga $\frac{Np\left(1-p\right)}{\left(N-1\right)} \approx \frac{N_2p_2\left(1-p_2\right)}{\left(N_2-1\right)}$. Oleh karena itu:

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2\left[1-W_2\right]}{\left[c_0 + c_1W_1\right]}} \tag{6'}$$

Berdasarkan (6) dan (6') diperoleh nilai k_2 optimum adalah:

$$k_{2_{opt}} = \sqrt{\frac{c_2\left[1-W_2\right]}{\left[c_0 + c_1 W_1\right]}}$$

Dalam penelitian biasanya biaya ditentukan, maka jika *C* ditentukan akan dicari *n* ' dari (3), yaitu:

$$C - \left(c_0 n' + c_1 W_1 n' + \frac{c_2}{k_2} W_2 n' \right) = 0$$

$$C = c_0 n' + c_1 W_1 n' + \frac{c_2}{k_2} W_2 n'$$

$$C = \left(c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_2} W_2 \right) n'$$

$$n'_{opt} = \frac{C}{\left(c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_{2_{opt}}} W_2 \right)}$$

Dengan demikian, diperoleh k_2 optimum adalah:

$$k_{2_{opt}} = \sqrt{\frac{c_2\left[1-W_2\right]}{\left[c_0 + c_1 W_1\right]}}$$

dan ukuran sampel optimum adalah:

$$n'_{opt} = \frac{C}{\left(c_0 + c_1 W_1 + \frac{c_2}{k_{2_{opt}}} W_2 \right)}$$