LAMPIRAN

Lampiran 1

Hubungan semivariogram dengan kovariogram

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= (1/2)E\{[Z(s+h) - Z(s)]^2\} \\
&= (1/2)E\{[Z(s+h)]^2 + Z[(s)]^2 - 2[Z(s+h)][Z(s)]\} \\
&= (1/2)\{E[Z(s+h)]^2 + E[Z(s)]^2 - 2E\{[Z(s+h)][Z(s)]\}\} \\
&= (1/2)[\sigma^2 + \sigma^2 - 2C(h)] \\
&= C(0) - C(h)
\end{aligned}$$

Lampiran 2

Setiap peubah teregional yang memenuhi asumsi stasioner orde dua pasti memenuhi asumsi stasioner intrinsik.

Bukti:

Misalkan Z(s) adalah peubah teregional yang memenuhi asumsi stasioner orde dua. Pilih sembarang Z(s), maka:

1. $E\left[Z(s+h)-Z(s)\right]=\mu-\mu=0$
2. $\frac{1}{2}E\left[(Z(s+h)-Z(s))^2\right]$

$$=\frac{1}{2}E\left[Z(s+h)Z(s+h)\right]+\frac{1}{2}E\left[Z(s)Z(s)\right]-\frac{1}{2}E\left[Z(s+h)Z(s)\right]$$

$$=\frac{1}{2}E\left[Z(s+h)Z(s+h)\right]+\frac{1}{2}E\left[Z(s)Z(s)\right]-Cov\left[Z(s+h)Z(s)\right]-E\left[Z(s+h)\right]E\left[Z(s)\right]$$

$\frac{1}{2}E\left[Z(s+h)Z(s+h)\right]$ adalah suatu nilai yang konstan

$\frac{1}{2}E\left[Z(s)Z(s)\right]$ adalah suatu nilai yang konstan

$E\left[Z(s+h)\right]E\left[Z(s)\right]$ adalah suatu nilai yang konstan

Sedangkan $Cov\left[Z(s+h),Z(s)\right]$merupakan fungsi dari h.

Sehingga $\frac{1}{2}E\left[(Z(s+h)-Z(s))^2\right]$ hanya bergantung pada jarak h.

Terbukti bahwa untuk setiap Z(s), Z(s) memenuhi asumsi stasioner intrinsik.

Lampiran 3

$Var\{\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\} = \text{cov}\{\hat{Z}(s_0)\hat{Z}(s_0)\} - 2\text{cov}\{\hat{Z}(s_0)Z(s_0)\} + \text{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\}$

Bukti:

$Var\ \{\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\}$

$$
\begin{aligned}
&= E[\{\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\}^2] - \{E[\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)]\}^2 \\
&= E[\hat{Z}^2(s_0) - 2\hat{Z}(s_0)Z(s_0) + Z^2(s_0)] - \{E[\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)]\}^2 \\
&= E[\hat{Z}^2(s_0)] - 2E[\hat{Z}(s_0)Z(s_0)] + E[Z^2(s_0)] - E[\hat{Z}(s_0)]^2 \\
&\quad - E[Z(s_0)]^2 + 2E[\hat{Z}(s_0)]E[Z(s_0)] \\
&= E[\hat{Z}^2(s_0)] - E[\hat{Z}(s_0)Z(s_0)] - E[Z(s_0)\hat{Z}(s_0)] + E[Z^2(s_0)] \\
&\quad - E[\hat{Z}(s_0)]^2 - E[Z(s_0)]^2 - E[\hat{Z}(s_0)]E[Z(s_0)] - E[Z(s_0)]E[\hat{Z}(s_0)] \\
&= \left\{E[\hat{Z}^2(s_0)] - E[\hat{Z}(s_0)]^2\right\} + \left\{E[Z^2(s_0)] + E[Z(s_0)]^2\right\} \\
&\quad - \left\{E[\hat{Z}(s_0)Z(s_0)] - E[\hat{Z}(s_0)]E[Z(s_0)]\right\} \\
&\quad - \left\{E[Z(s_0)\hat{Z}(s_0)] - E[Z(s_0)]E[\hat{Z}(s_0)]\right\}
\end{aligned}
$$

$$\text{cov}\{\hat{Z}(s_0)\hat{Z}(s_0)\} = E\left\{[\hat{Z}(s_0)]^2\right\} - E[\hat{Z}(s_0)]^2$$

$$\text{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\} = E\left\{[Z(s_0)]^2\right\} - E[Z(s_0)]^2$$

$$\text{cov}\{\hat{Z}(s_0)Z(s_0)\} = E\left\{[\hat{Z}(s_0)Z(s_0)]\right\} - E[\hat{Z}(s_0)]E[Z(s_0)]$$

$$\text{cov}\{Z(s_0)\hat{Z}(s_0)\} = E\left\{[Z(s_0)\hat{Z}(s_0)]\right\} - E[Z(s_0)]E[\hat{Z}(s_0)]$$

maka

$Var\{\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\} = \text{cov}\{\hat{Z}(s_0)\hat{Z}(s_0)\} - 2\text{cov}\{\hat{Z}(s_0)Z(s_0)\} + \text{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\}$

Lampiran 4

$$Var\{R(S_0)\} = \text{cov}\{\hat{Z}(s_0)\hat{Z}(s_0)\} - 2\,\text{cov}\{\hat{Z}(s_0)Z(s_0)\} + \text{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\}$$
$$\sigma_R^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij} - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_{i0}$$

Bukti:

$$Var\{R(s_0)\} = \text{cov}\{\hat{Z}(s_0)\hat{Z}(s_0)\} - 2\,\text{cov}\{\hat{Z}(s_0)Z(s_0)\} + \text{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\}$$

Karena $\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(s_i)$, maka diperoleh

$$\text{cov}\{\hat{Z}(s_0)\hat{Z}(s_0)\} = Var\{\hat{Z}(s_0)\}$$
$$= Var\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(s_i)\}$$
$$\text{cov}\{\hat{Z}(s_0)\hat{Z}(s_0)\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij} \qquad (1)$$

Pembuktian persamaan (1) dapat dilihat pada lampiran 8.

$\text{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\}$ adalah kovariansi dari peubah teregional $Z(s_o)$. Jika diasumsikan bahwa setiap peubah teregional mempunyai variansi yang sama, σ^2, maka:

$$\text{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\} = Var\{Z(s_0)\}$$
$$\text{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\} = \sigma^2 \qquad (2)$$

$$
\begin{aligned}
2\operatorname{cov}\{\hat{Z}(s_0)Z(s_0)\} &= 2\operatorname{cov}\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(s_i)Z(s_0)\} \\
&= 2E\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(s_i)Z(s_0)\} - 2E\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(s_i)\}E\{Z(s_0)\} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i E\{Z(s_i)Z(s_0)\} - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i E\{Z(s_i)\}E\{Z(s_0)\} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i [E\{Z(s_i)Z(s_0)\} - E\{Z(s_i)\}E\{Z(s_0)\}]
\end{aligned}
$$

$$2\operatorname{cov}\{\hat{Z}(s_0)Z(s_0)\} = 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_{i0} \qquad (3)$$

Substitusikan persamaan (1), (2), (3) pada persamaan variansi dari residual penaksiran:

$$Var\{R(S_0)\} = \operatorname{cov}\{\hat{Z}(s_0)\hat{Z}(s_0)\} - 2\operatorname{cov}\{\hat{Z}(s_0)Z(s_0)\} + \operatorname{cov}\{Z(s_0)Z(s_0)\}$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij} - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_{i0} + \sigma^2$$

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij} - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_{i0}$$

Lampiran 5

Hasil turunan parsial pertama untuk λ_1

$$\frac{\partial(\sigma_R^2)}{\partial(\lambda_j)} = 2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_{1j} - 2C_{10} + 2m = 0$$

$$2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_{1j} + 2m = 2C_{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_{1j} + m = C_{10}$$

Bukti:

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij} - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_{i0} + 2m(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - 1)$$

maka

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij})}{\partial(\lambda_1)} = \frac{\partial(\lambda_1{}^2 C_{11} + 2\lambda_1\sum_{j=2}^{n}\lambda_j C_{1j})}{\partial(\lambda_1)}$$

$$= 2\lambda_1 C_{11} + 2\sum_{j=2}^{n}\lambda_j C_{1j}$$

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij})}{\partial(\lambda_1)} = 2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_{1j} \tag{1}$$

$$\frac{\partial(2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_{i0})}{\partial(\lambda_1)} = \frac{\partial(2\lambda_1 C_{10})}{\partial(\lambda_1)}$$

$$\frac{\partial(2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_{i0})}{\partial(\lambda_i)} = 2C_{10} \tag{2}$$

$$\frac{\partial(2m(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - 1))}{\partial(\lambda_1)} = 2m \qquad (3)$$

Dengan menggabungkan ketiga persamaan (1), (2), dan (3), maka akan diperoleh persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\sigma_R^2)}{\partial(\lambda_1)} &= 2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_{ij} - 2C_{i0} + 2m = 0 \\
2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_{ij} + 2m &= 2C_{i0} \\
\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C_{ij} + m &= C_{i0}
\end{aligned}$$

Lampiran 6

$\varepsilon_k \sim N(0,1)$

Bukti:

Ingin dibuktikan ε_k berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi 1.

Diasumsikan bahwa residual, $r(s_k) = \hat{z}(s_k) - z(s_k)$ berdistribusi normal,

sehingga $\varepsilon_k = \dfrac{\hat{z}(s_k) - z(s_k)}{\hat{\sigma}_k} = \dfrac{r(s_k)}{\hat{\sigma}_k}$, juga berdistribusi normal.

$E[\varepsilon_k]=0$, $k=2,\ldots,n$

Bukti :

$E[\varepsilon_k]=0$ jelas merupakan sifat ketidakbiasan dari kriging.

$E[\varepsilon_k\varepsilon_l]=0$ jika $k=l$, $k, l=2,3,\ldots,n$
$=1$ jika $k\neq l$, $k, l=2,3,\ldots,n$

Bukti :

$E[\varepsilon_k\varepsilon_l]=1$, merupakan konsekuensi dari normalisasi

Asumsikan $k > l$ dan kovariansi C didefinisikan, maka

$$E[\varepsilon_k\varepsilon_l] = \frac{1}{\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l} E\left[\left(z(s_k) - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{ki} z(s_i)\right)\left(\left(z(s_l) - \sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{lj} z(s_j)\right)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l}\left\{\left(C(z(s_k), z(s_l)) - \sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{lj} C(z(s_k), z(s_j))\right) - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{ki}\left(\left(C(z(s_i), z(s_l)) - \sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{lj} C(z(s_i), z(s_j))\right)\right)\right\}$$

Misalkan untuk sembarang i, i<l, terdapat hubungan

$$\sum_{j=1}^{l-1}\lambda_{lj} C(z(s_i), z(s_j)) + v_l = C(z(s_i), z(s_l))$$

maka

$$E[\varepsilon_k, \varepsilon_l] = \frac{1}{\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l}\left(v_l - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{ki} v_l\right) = 0$$

Lampiran 7

$Q_1 \sim N\left(0, \frac{1}{n-1}\right)$

Bukti:

$$E[Q_1] = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\varepsilon_k\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}E[\varepsilon_k] = 0$$

$$E\left[Q_1^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\varepsilon_k\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n}\varepsilon_k\varepsilon_l\right]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=2}^{n}E(\varepsilon_k\varepsilon_l)\right] = \left(\frac{1}{n-1}\right)^2(n-1) = \frac{1}{n-1}$$

$$Var[Q_1] = E\left[Q_1^2\right] - E^2[Q_1]$$

$$= \frac{1}{n-1} - 0 = \frac{1}{n-1}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $Q_1 \sim N\left(0, \frac{1}{n-1}\right)$

Lampiran 8

$$Var\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(s_i)\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij}$$

Bukti:

$$Var\{\lambda_1 Z(s_1)+...+\lambda_n Z(s_n)\}$$

$$= E\{[\lambda_1 Z(s_1)+...+\lambda_n Z(s_n)]^2\} - \{E[\lambda_n Z(s_n)+...+\lambda_n Z(s_n)]\}^2$$

$$= \lambda_1{}^2 E[Z^2(s_1)] + \lambda_1\lambda_2 E[Z(s_1)Z(s_2)]...+\lambda_n{}^2 E[Z^2(s_n)]$$

$$-\{\lambda_1{}^2 E^2[Z(s_1)] + \lambda_1\lambda_2 E[Z(s_1)]E[Z(s_2)]...+\lambda_n{}^2 E^2[Z(s_n)]\}$$

$$= \{\lambda_1{}^2 E[Z^2(s_1)] - \lambda_1{}^2 E^2[Z(s_1)]\} + \{\lambda_1\lambda_2 E[Z(s_1)Z(s_2)] - \lambda_1\lambda_2 E[Z(s_1)]E[Z(s_2)]\}$$

$$+...+\{\lambda_n{}^2 E[Z^2(s_n)] - \lambda_n{}^2 E^2[Z(s_n)]\}$$

Jadi

$$Var\{\lambda_1 Z(s_1)+...+\lambda_n Z(s_n)\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij}$$

$$Var\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(s_i)\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C_{ij}$$

Lampiran 9

Sifat-sifat Kovariogram

1. $C(0) = \sigma^2$

   Bukti :

   $$C(h) = E\{[Z(s+h)-\mu].[Z(s)-\mu]\}$$

   Untuk h=0

   $$C(0) = E\{[Z(s)-\mu].[Z(s)-\mu]\}$$
   $$C(0) = E\{[Z(s)-\mu]^2\}$$
   $$C(0) = \sigma^2$$

2. $C(-h) = C(h)$

   Bukti:

   $$C(h) = E\{[Z(s+h)-\mu].[Z(s)-\mu]\}$$
   $$C(-h) = E\{[Z(s-h)-\mu].[Z(s)-\mu]\}$$

   Misalkan $t = s-h$, maka

   $$C(-h) = E\{[Z(t)-\mu].[Z(t+h)-\mu]\}$$
   $$C(-h) = C(h)$$

3. $|C(h)| \leq C(0)$

   Bukti:

   ➔ Adib $C(h) \leq C(0)$

   Bukti :

   $$E\{[Z(s+h)-Z(s)]^2\} \geq 0$$
   $$E\{[Z(s+h)-\mu]^2 + [Z(s)-\mu]^2 - [Z(s+h)-\mu][Z(s)-\mu]\} \geq 0$$
   $$2.C(0) - 2.C(h) \geq 0$$
   $$C(h) \leq C(0)$$

➔ Adib $C(h) \geq -C(0)$

Bukti:

$$E\{[Z(s+h)+Z(s)]^2\} \geq 0$$
$$E\{[Z(s+h)-\mu]^2 + [Z(s)-\mu]^2 + 2[Z(s+h)-\mu][Z(s)-\mu]\} \geq 0$$
$$2.C(0) + 2.C(h) \geq 0$$
$$C(h) \geq -C(0)$$

Lampiran 10

Pengujian Asumsi Stasioner Orde Dua

Untuk mengetahui data spasial memenuhi asumsi stasioner orde dua atau tidak, dapat dilakukan dengan:

a. Buat plot nilai pengamatan, $z(s_i)$, terhadap lokasinya, s_i. Jika plot permukaan tersebut tidak menunjukkan trend atau pola dalam mean dan tidak terdapat fluktuasi, berarti kemungkinan data memenuhi asumsi stasioner orde dua.

b. Buat plot nilai pengamatan, $z(s_i)$, terhadap absis (sumbu X) dari koordinat lokasi data. Kemudian juga buat plot nilai pengamatan, $z(s_i)$, terhadap ordinat (sumbu Y) dari koordinat lokasi data. Jika salah satu plot nilai pengamatan, $z(s_i)$, terhadap absis (sumbu X) atau plot nilai pengamatan, $z(s_i)$, terhadap ordinat (sumbu Y) membentuk trend atau pola dan tidak terdapat fluktuasi, berarti data tidak memenuhi asumsi stasioner orde dua.

Lampiran 11

Sifat-sifat semivariogram

1. $\gamma(0) = 0$

   Bukti :

   $\gamma(h) = (1/2)E\{[Z(s+h) - Z(s)]^2\}$

   Untuk *h*=0 maka

   $\gamma(0) = (1/2)E\{[Z(s+0) - Z(s)]^2\}$

   $\gamma(0) = (1/2)E\{[Z(s) - Z(s)]^2\}$

   $\gamma(0) = (1/2)E\{0\}$

   $\gamma(0) = 0$

2. $\gamma(h) \geq 0$

   Bukti:

   Dari sifat diketahui:

   $$E\{[Z(s+h) - Z(s)]^2\} \geq 0$$

   $$(1/2)E\{[Z(s+h) - Z(s)]^2\} \geq 0$$

   $$\gamma(h) \geq 0$$

3. $\gamma(-h) = \gamma(h)$

   Bukti:

   $\gamma(h) = (1/2)E\{[Z(s+h) - Z(s)]^2\}$

   $\gamma(-h) = (1/2)E\{[Z(s-h) - Z(s)]^2\}$

   Misalkan t = s-h, maka

   $\gamma(-h) = (1/2)E\{[Z(t) - Z(t+h)]^2\}$

   $\gamma(-h) = \gamma(h)$

Lampiran 12

Suatu penaksir dikatakan terbaik jika mempunyai variansi residual yang minimum

Bukti:

- Penaksir terbaik adalah penaksir tidak bias yang mempunyai variansi penaksir minimum (*unbiased minimum variance estimator*).

  Penaksir $\hat{\mu}$ disebut *unbiased minimum variance estimator* dari parameter μ jika $\hat{\mu}$ tidak bias, yaitu E($\hat{\mu}$)= μ, dan jika variansi $\hat{\mu}$ kurang atau sama dengan variansi dari penaksir tak bias lain dari parameter μ. (Hogg dan Craig, 1995).

- Misalkan, $\hat{\theta}$ adalah penaksir yang tidak bias dari parameter θ.

  Variansi dari penaksir $\hat{\theta}$, dapat dinyatakan sebagai berikut

  $Var(\hat{\theta}) = E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2\}$

  Karena $\hat{\theta}$ adalah penaksir yang tidak bias dari parameter θ maka $E(\hat{\theta}) = \theta$, sehingga

  $Var(\hat{\theta}) = E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2\}$
  $Var(\hat{\theta}) = E\{[\hat{\theta} - \theta]^2\}$

- Misalkan R adalah residual yang didefinisikan sebagai selisih antara penaksir $\hat{\theta}$ dan parameter θ, yang dapat dinyatakan sebagai berikut

  $R = \hat{\theta} - \theta$.

  Variansi dari residual R dapat dinyatakan sebagai berikut

  $Var(R) = E\{[R - E(R)]^2\}$

Karena $\hat{\theta}$ adalah penaksir yang tidak bias dari parameter θ maka $E(\hat{\theta}) = \theta$, sehingga

$$\begin{aligned} E(R) &= E(\hat{\theta} - \theta) \\ &= E(\hat{\theta}) - E(\theta) \\ &= \theta - \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi variansi dari residual R dapat juga dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} Var(R) &= E\{[R - E(R)]^2\} \\ &= E\{[(\hat{\theta} - \theta) - 0]^2 \\ &= E\{[\hat{\theta} - \theta]^2\} \end{aligned}$$ ……………………………………………………………..(*)

- Persamaan (*) disebut juga dengan *mean square predictor error*, atau dapat dinyatakan

  $$MSPE = E\{[\hat{\theta} - \theta]^2\}$$

- Karena $\hat{\theta}$ adalah penaksir tidak bias maka variansi dari penaksir $\hat{\theta}$ dapat juga dinyatakan sebagai variansi dari residual, R, dimana $R = \hat{\theta} - \theta$, yaitu

  $$Var(\hat{\theta}) = E\{[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2\} = E\{[\hat{\theta} - \theta]^2\} = E\{[R - E(R)]^2\} = Var(R)$$

- Jadi, penaksir terbaik yaitu penaksir tidak bias yang mempunyai variansi penaksir minimum atau penaksir tidak bias yang mempunyai variansi residual minimum.