

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab II ini, akan dijelaskan tentang teori yang dipakai dalam semivariogram anisotropik. Selain itu juga akan dibahas mengenai teori pendukung dalam melakukan penaksiran kandungan cadangan bauksit di daerah Mempawah Kalimantan, diantaranya yaitu asumsi stasioner orde dua, metode penaksiran *ordinary kriging*, dan uji validasi silang.

2.1 DATA SPASIAL

Data yang diolah dengan menggunakan metode *ordinary kriging* adalah data spasial. Data spasial merupakan data yang diperoleh dari hasil pengukuran yang memuat informasi mengenai lokasi dari pengukuran. Data spasial merupakan data dependen, karena berasal dari lokasi spasial yang berbeda yang mengindikasikan ketergantungan antara nilai pengukuran dengan lokasi. Data spasial biasanya dinyatakan sebagai $Z(s)$, $s \in D$, dimana D adalah himpunan di R^d . Nilai pengukuran di suatu lokasi s , dinyatakan dengan $z(s)$, yang merupakan realisasi dari peubah acak $Z(s)$. Peubah acak $Z(s)$ disebut juga peubah teregional, yaitu peubah yang terdistribusi di dalam ruang dan biasanya menunjukkan adanya korelasi spasial.

2.2 ASUMSI STASIONER ORDE DUA DAN STASIONER INTRINSIK

Himpunan peubah acak $\{Z(s), z \in D\}$ diasumsikan memenuhi asumsi stasioner bila distribusinya invarian terhadap translasi, artinya untuk setiap peningkatan sebesar h , distribusi $Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_n)$, akan sama dengan $Z(s_1+h), Z(s_2+h), \dots, Z(s_n+h)$. Apabila dua momen pertama saja yang konstan yaitu mean dan variansinya, kondisi tersebut disebut sebagai stasioner orde dua. Stasioner orde dua menyatakan

1. Ekspektasi atau mean peubah acak ada dan konstan untuk semua titik.

$$E[Z(s)] = \mu, \quad \forall s \quad (2.2.1)$$

2. Kovariansi antara dua peubah acak yang berjarak h , $[Z(s), Z(s+h)]$, tidak bergantung pada letak titik, hanya bergantung pada jarak antara dua titik.

$$\begin{aligned} C(Z(s+h), Z(s)) &= E\{Z(s+h) \cdot Z(s)\} - E\{Z(s+h)\} \cdot E\{Z(s)\} \\ &= E\{Z(s+h) \cdot Z(s)\} - \mu^2 \\ &= C(h) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$C(h)$ disebut kovariogram. Kovariogram untuk dua data yang berjarak 0, atau $h=0$ nilainya sama dengan variansi dari populasi, atau bisa dinyatakan sebagai berikut, $\text{Var}[Z(s)] = C(0)$ untuk setiap $s \in D$. Sifat-sifat kovariogram dapat dilihat pada lampiran 9.

Jika data spasial tidak memenuhi asumsi stasioner orde dua, maka kondisi untuk kestasioneran data dapat diperlemah dengan adanya asumsi stasioner intrinsik. Himpunan variabel acak $\{Z(s), z \in D\}$ memenuhi asumsi stasioner intrinsik jika memenuhi kondisi di bawah ini:

1. Ekspektasi dari selisih dua peubah acak yang berjarak h nilainya sama dengan nol, atau bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$E[Z(s+h) - Z(s)] = 0, \quad \forall s \quad (2.2.3)$$

2. Selisih peubah acak yang berjarak h , $[Z(s+h) - Z(s)]$, memiliki variansi yang hanya bergantung pada jarak, tidak bergantung pada lokasi atau dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{Var}[Z(s+h) - Z(s)] = E\{[Z(s+h) - Z(s)]^2\} - \{E[Z(s+h) - Z(s)]\}^2$$

Karena $E[Z(s+h) - Z(s)] = 0$, maka

$$\text{Var}[Z(s+h) - Z(s)] = E\{[Z(s+h) - Z(s)]^2\}$$

$$(1/2) \text{Var}[Z(s+h) - Z(s)] = (1/2) E\{[Z(s+h) - Z(s)]^2\} = \gamma(h) \quad (2.2.4)$$

Fungsi $\gamma(h)$ disebut semivariogram.

Untuk peubah terregional $Z(s)$ yang memenuhi asumsi stasioner orde dua, terdapat hubungan antara kovariogram dengan semivariogram. Hubungannya dapat dilihat pada persamaan di bawah:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Pembuktiannya dapat dilihat pada lampiran 1.

Setiap peubah terregional yang memenuhi asumsi stasioner orde dua pasti memenuhi asumsi stasioner intrinsik. Akan tetapi tidak berlaku untuk sebaliknya. Pembuktiannya dapat dilihat pada lampiran 2.

Pengujian dari asumsi stasioner orde dua dapat dilihat pada lampiran 10.

2.3 METODE *ORDINARY KRIGING*

Metode penaksiran *ordinary kriging* merupakan metode yang memberikan penaksir yang linier tak bias terbaik (BLUE = *best linear unbiased estimator*).

Penaksir *ordinary kriging* di titik yang tidak tersampel, s_0 , merupakan kombinasi linier dari peubah acak $Z(s_i)$, yaitu $\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i)$, dimana λ_i adalah bobot dari $Z(s_i)$ untuk $i=1,2,\dots,n$. λ_i disebut bobot *kriging*.

Dalam membentuk persamaan *ordinary kriging* akan dicari nilai dari λ_i , bobot dari $Z(s_i)$ untuk $i=1,2,\dots,n$. Nilai λ_i kemudian akan digunakan untuk menghitung $\hat{Z}(s_0)$. Pada pembahasan selanjutnya akan dibahas mengenai penaksir yang tak bias dan penaksir terbaik.

2.3.1 Penaksir tak bias

Suatu penaksir dari peubah acak dikatakan tak bias bila nilai ekspektasinya sama dengan nilai parameternya atau jika nilai ekspektasi dari selisih antara penaksir dengan nilai parameternya sama dengan nol. Misalkan $R(s_0)$ adalah residual yang didefinisikan sebagai selisih antara peubah acak $Z(s_0)$ dan $\hat{Z}(s_0)$, yang dinyatakan sebagai berikut

$$R(s_0) = \hat{Z}(s_0) - Z(s_0) \quad (2.3.1)$$

Karena $\hat{Z}(s_0)$ merupakan kombinasi linier dari peubah acak $Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_n)$, maka $R(s_0)$ juga merupakan peubah acak. Nilai residual di suatu lokasi s_0 , dinyatakan dengan $r(s_0)$, yang merupakan realisasi dari peubah acak $R(s_0)$.

Agar penaksir $\hat{Z}(s_0)$ tidak bias maka nilai ekspektasi dari $R(s_0)$ harus sama dengan nol. Persamaannya dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E\{R(s_0)\} &= E\{\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i) - Z(s_0)\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i)\right\} - E\{Z(s_0)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i E\{Z(s_i)\} - E\{Z(s_0)\} \end{aligned}$$

Karena peubah acak $Z(s)$ diasumsikan stasioner, atau dapat dinyatakan $E\{Z(s)\} = \mu$, maka

$$E\{R(s_0)\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu - \mu$$

Agar penaksir $\hat{Z}(s_0)$ memenuhi sifat tidak bias maka nilai ekspektasi dari $R(s_0)$ sama dengan nol.

$$E\{R(s_0)\} = 0 = \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i - \mu$$

$$\mu \sum_{i=1}^n \lambda_i = \mu$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (2.3.2)$$

2.3.2 Penaksir terbaik

Suatu penaksir dikatakan terbaik jika mempunyai variansi residual yang minimum. Agar $\hat{Z}(s_0)$ dikatakan penaksir terbaik maka harus memiliki variansi residual yang minimum. Bobot kriging $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ didapatkan dengan cara meminimumkan *mean square predicted error* terhadap kendala $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ dengan menggunakan metode pengali Lagrange. *Mean square predicted error* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$MSPE = E\{(\hat{Z}(s_0) - Z(s_0))^2\} \quad (2.3.3)$$

Variansi dari residual pada lokasi s_0 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Var\{R(s_0)\} &= Var\{\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\} \\ &= E\{(\hat{Z}(s_0) - Z(s_0))^2\} \\ &= cov\{\hat{Z}(s_0), \hat{Z}(s_0)\} - cov\{\hat{Z}(s_0), Z(s_0)\} - cov\{Z(s_0), \hat{Z}(s_0)\} + cov\{Z(s_0), Z(s_0)\} \\ &= cov\{\hat{Z}(s_0), \hat{Z}(s_0)\} - 2cov\{\hat{Z}(s_0), Z(s_0)\} + cov\{Z(s_0), Z(s_0)\} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Pembuktiannya dapat dilihat pada lampiran 3.

Karena $\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Var}\{R(S_0)\} &= \text{cov}\{\hat{Z}(s_0), \hat{Z}(s_0)\} - 2\text{cov}\{\hat{Z}(s_0), Z(s_0)\} + \text{cov}\{Z(s_0), Z(s_0)\} \\ \sigma_R^2 &= \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Pembuktiannya dapat dilihat pada lampiran 4.

Untuk mencari nilai $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ yang menyebabkan penaksir memiliki variansi residual yang minimum akan digunakan metode pengali Lagrange, yaitu metode yang digunakan untuk meminimumkan fungsi dengan kendala $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Misalkan terdapat suatu parameter m atau disebut juga dengan parameter Lagrange. Dengan menambahkan m , dan mengikutsertakan syarat tak bias, sistem persamaannya dapat dibuat sebagai berikut:

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + 2m \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \quad (2.3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (2.3.7)$$

Kemudian, variansi residual diminimumkan dengan menghitung turunan parsial pertama terhadap $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan m dan membuat setiap turunan tersebut sama dengan nol. Untuk λ_1 hasil turunan parsial pertamanya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sigma_R^2)}{\partial(\lambda_1)} &= 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{1j} - 2C_{10} + 2m = 0 \\ 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{1j} + 2m &= 2C_{10} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{1j} + m &= C_{10} \end{aligned}$$

Pembuktiannya dapat dilihat pada lampiran 5.

Penurunan juga dilakukan terhadap $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, dan m maka akan diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{1j} - 2C_{10} + 2m = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{1j} + m = C_{10}$$

$$2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{2j} - 2C_{20} + 2m = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{2j} + m = C_{20}$$

...

$$2 \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{nj} - 2C_{n0} + 2m = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{nj} + m = C_{n0}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Hasil turunan parsial terhadap $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan m yang meminimumkan variansi residual dan memenuhi kendala $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ dapat dinyatakan dalam sistem persamaan dengan $n+1$ persamaan di bawah ini:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} + m = C_{i0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; \text{ dan} \quad (2.3.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (2.3.9)$$

Bentuk matriks dari sistem persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} C(0) & C(s_1 - s_2) & \dots & C(s_1 - s_n) & 1 \\ C(s_2 - s_1) & C(0) & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C(s_n - s_1) & \cdot & \cdot & C(0) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s_0 - s_1) \\ C(s_0 - s_2) \\ \cdot \\ C(s_0 - s_n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

Sistem persamaan (2.3.10) disebut juga sistem persamaan *ordinary kriging*.

Berdasarkan hubungan antara kovariogram dan semivariogram,

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

sistem persamaan *ordinary kriging* juga dapat dinyatakan dalam bentuk semivariogram, yaitu

$$\begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(s_1 - s_2) & \dots & \gamma(s_1 - s_n) & 1 \\ \gamma(s_2 - s_1) & \gamma(0) & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma(s_n - s_1) & \cdot & \cdot & \gamma(0) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_n \\ -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(s_0 - s_1) \\ \gamma(s_0 - s_2) \\ \cdot \\ \gamma(s_0 - s_n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

Dari sistem persamaan (2.3.10) atau (2.3.11), kemudian dapat dihitung nilai $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Setelah diperoleh $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ maka dapat ditaksir nilai $Z(s_0)$

melalui persamaan $\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i)$.

Variansi residual yang minimum diperoleh dengan mensubstitusi persamaan (2.3.8) dan (2.3.9) ke persamaan (2.3.5). Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Kalikan setiap persamaan pada sistem persamaan *ordinary kriging* dengan λ_i

$$\lambda_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} + m \right) = \lambda_i C_{i0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

2. Jumlahkan setiap persamaan di atas sehingga menjadi

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j C_{ij} + \sum_{i=1}^n \lambda_i m = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - \sum_{i=1}^n \lambda_i m$$

Karena $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, maka persamaannya menjadi:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - m \quad (2.3.12)$$

substitusikan persamaan (2.3.12) ke persamaan (2.3.5), sehingga menjadi:

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0}$$

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - m \right) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0}$$

$$= \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - m$$

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} + m \right)$$

Kemudian didapat variansi residual yang minimum dalam bentuk kovariogram, yaitu:

$$\sigma_R^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_{i0} - m$$

Sedangkan variansi residual yang minimum dalam bentuk semivariogram adalah:

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{i0} - m$$

Variansi residual yang minimum ini disebut juga variansi *ordinary kriging* yang dapat dinotasikan dengan σ_{OK}^2 .

2.4 VALIDASI SILANG

Ketika model semivariogram akan digunakan dalam sistem persamaan *ordinary kriging*, sebelumnya akan diuji dahulu apakah model semivariogram sesuai dengan keadaan data spasial.

Pengujian yang akan digunakan adalah validasi silang. Dalam pengujian validasi silang, model semivariogram diuji dengan menggunakan nilai dari sampel. Setelah model dipilih, nilai sampel yang sudah ada kemudian ditaksir dengan menggunakan metode *ordinary kriging* terhadap sampel tersebut. Setelah itu, bandingkan nilai sampel yang sebenarnya dengan hasil yang diperoleh melalui metode penaksiran. Selisih antara kedua nilai tersebut disebut residual. Residual diasumsikan berdistribusi normal.

Dalam validasi silang, digunakan nilai-nilai residual terbaku untuk menentukan apakah model semivariogram yang dipilih sudah valid. Residual terbaku adalah residual yang sudah distandarisasi. Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji Q_1 . Jika model sudah valid, model semivariogram tersebut dapat digunakan untuk menaksir nilai dari peubah teregional di lokasi yang tidak tersampel.

2.4.1 Statistik Uji Q_1

Statistik uji Q_1 digunakan untuk menentukan apakah model semivariogram valid atau sesuai dengan keadaan data spasial. Q_1 menyatakan rata-rata residual terbaku, yaitu:

$$Q_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \left[\frac{(\hat{z}_k - z_k)}{\hat{\sigma}_k} \right]$$

Jika $\varepsilon_k = \left[\frac{(\hat{z}_k - z_k)}{\hat{\sigma}_k} \right]$, maka Q_1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Q_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k$$

Dimana ε_k merupakan residual terbaku dan $\varepsilon_k \sim N(0,1)$.

Pembuktian dapat dilihat pada lampiran 6.

Distribusi dari Q_1 adalah normal dengan mean nol dan variansi $\frac{1}{n-1}$ atau dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Q_1 \sim N\left(0, \frac{1}{n-1}\right)$$

Pembuktian dapat dilihat pada lampiran 7.

Dengan menggunakan statistik uji Q_1 , model ditolak jika

$$|Q_1| > \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai prosedur yang dilakukan dalam validasi silang.

2.4.2 Prosedur Validasi silang

Dalam pengujian validasi silang, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Misal $z(s_i)$ adalah nilai dari peubah acak $Z(s)$ di lokasi s_i dimana $i=1,2,3,\dots,n$. Hitung nilai taksiran $\hat{z}(s_2)$ dengan menggunakan metode *ordinary kriging* hanya dengan menggunakan nilai $z(s_1)$. Sehingga $\hat{z}(s_2)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{z}(s_2) = \lambda_1 z(s_1)$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan *ordinary kriging*

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}(s_1 - s_1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}(s_2 - s_1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

diperoleh $\hat{z}(s_2) = z(s_1)$ dan $\hat{\sigma}_2^2 = \lambda_1 \hat{\gamma}(s_2 - s_1) - m = 2\hat{\gamma}(s_2 - s_1)$

2. Bandingkan $\hat{z}(s_2)$ dengan nilai $z(s_2)$ dari data sampel. Kemudian hitung residual dari taksiran,

$$r(s_2) = \hat{z}(s_2) - z(s_2)$$

3. Selanjutnya digunakan nilai $z(s_1)$ dan nilai $z(s_2)$ untuk menaksir nilai $\hat{z}(s_3)$. Kemudian hitung residualnya.
4. Setelah seluruh residual telah dihitung, kemudian lakukan standarisasi residual. Residual yang telah distandarisasi tersebut disebut residual terbaku. Residual terbaku dinyatakan dengan ε_k .

$$\varepsilon_k = \frac{r(s_k)}{\hat{\sigma}_k}$$

5. Lanjutkan prosedur yang sama sampai diperoleh $\hat{z}(s_n)$ dengan menggunakan $z(s_1), z(s_2), \dots, z(s_{n-1})$ dan kemudian hitung residual dan residual terbakunya. Secara umum, residual dan residual terbaku dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$r(s_k) = \hat{z}(s_k) - z(s_k) \quad \text{untuk } k = 2, \dots, n$$

$$\varepsilon_k = \frac{r(s_k)}{\hat{\sigma}_k} \quad \text{untuk } k = 2, \dots, n$$

6. Hitung rata-rata dari keseluruhan residual terbaku (Q_1), yaitu:

$$Q_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k$$

7. Setelah itu dilakukan pengujian hipotesis

H_0 : Model semivariogram cocok (valid)

H_1 : Model semivariogram tidak cocok (tidak valid)

$$\text{Statistik uji} : Q_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \varepsilon_k$$

Aturan keputusan dengan tingkat signifikansi 0.05.

$$H_0 \text{ ditolak jika } |Q_1| > \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

Atau dengan perkataan lain, model semivariogram yang dipilih tidak

$$\text{cocok (valid) jika } |Q_1| > \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

2.4.3 Pemilihan Model Semivariogram Yang Terbaik

Ketika selesai melakukan uji validasi silang, ada kemungkinan diperoleh lebih dari satu model semivariogram yang valid. Cara untuk mengetahui model manakah yang paling baik digunakan yaitu dengan membandingkan nilai $|Q_1|$ dari masing-masing model. Nilai Q_1 dinyatakan sebagai berikut:

$$Q_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \left[\frac{(\hat{z}_k - z_k)}{\hat{\sigma}_k} \right]$$

Model yang paling baik adalah model yang memiliki rata-rata residual yang mendekati nol. Jadi, model yang terbaik adalah model yang memiliki nilai $|Q_i|$ paling mendekati nol.

