BAB III

(*a,d*)-PTSAA DARI GRAF MATAHARI

Dalam bab ini akan diberikan konstruksi (*a,d*)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari yang tidak harus isomorfik. Nilai-nilai *d* yang mungkin pada (*a,d*)-PTSAA dari sembarang graf matahari akan dibahas juga dalam bab ini.

Pada bab 2 telah diberikan nilai *d* yang mungkin untuk sembarang graf dengan derajat terkecil δ dan derajat terbesar Δ (2.8). Karena graf matahari memiliki δ=1 dan Δ=3, maka dengan mensubstitusikan nilai ini ke (2.8) diperoleh batasan nilai *d* sebagai berikut

$$d \leq \frac{(3+1)\big(2(2n+2n)-3\big)-(1+1)(1+2)}{2(2n-1)}$$

atau

$$d \leq 7,$$

artinya nilai *d* yang mungkin untuk sembarang graf matahari adalah 0, 1, …, dan 7. Nilai-nilai *d* yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah $d \in$ {0, 1, 2, 3, 4, 6}. Untuk nilai-nilai *d* yang lain merupakan masalah terbuka yang diberikan pada bab kesimpulan.

Pada bagian selanjutnya akan dijelaskan mengenai (*a,d*)-PTSAA serta pembentukan pelabelannya untuk gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari, dimulai dari nilai *d*=0.

3.1 PTSA dari Graf Matahari

Suatu (*a,d*)-PTSAA dengan *d*=0 disebut pelabelan total simpul ajaib (PTSA). Suatu pelabelan disebut PTSA dari graf *G*=*G*(*V,E*) bila terdapat suatu konstanta *k* sehingga semua bobot simpul bernilai *k*. Slamin dkk. [SPSRS08] telah membuktikan bahwa gabungan tak-terhubung 2 graf matahari tak-isomorfik, $S_m \cup S_n$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ memiliki PTSA dengan $k = (m+n)+1$, dan gabungan tak-terhubung *t* graf matahari S_n yang saling isomorfik dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 1$ memiliki PTSA dengan $k = 6nt + 1$. Rahim dkk. [RS08] membuktikan bahwa gabungan tak-terhubung *t* graf matahari S_{n_j} yang tidak harus saling isomorfik dengan $n_j \geq 3$ untuk setiap $j = 1,2,...,t$ dan $t \geq 1$ memiliki PTSA dengan $k = 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1$.

Berikut ini akan diberikan teorema yang menyatakan tentang PTSA untuk gabungan tak-terhubung *t* graf matahari yang tidak harus saling isomorfik dengan pembuktian yang lebih sederhana dari pembuktian yang telah diberikan pada [RS08].

Teorema 3.1.1 Gabungan tak-terhubung *t* graf matahari S_{n_j} memiliki suatu PTSA dengan $k = 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1$, dimana $n_j \geq 3$ untuk setiap $j = 1,2,...,t$ dan $t \geq 1$.

Bukti. Jika v_i^j dan u_i^j menyatakan simpul dalam dan simpul luar ke-*i* dari graf matahari ke-*j* ($j = 1,2,...,t$) didefinisikan λ_1 sebagai berikut,

$$\lambda_1\left(v_i^j\right) = \begin{cases} 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2 & ;i = 1 \\ 2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2(i-2) & ;i = 2,3,...,n_j \end{cases}$$

$$\lambda_1\left(u_i^j\right) = 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i \quad ;i = 1,2,...,n_j$$

$$\lambda_1\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i - 1 \quad ;i = 1,2,...,n_j$$

$$\lambda_1\left(u_i^j v_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2i + 1 \quad ;i = 1,2,...,n_j$$

dengan catatan $\sum_{l=a}^{b} n_l = 0$ untuk $b < a$. Label dari semua simpul dan busur yang diperoleh dari pelabelan λ_1 ialah $\lambda_1\left(V\right) = \{2,4,...,4\sum_{l=1}^{t} n_l\}$ dan $\lambda_1\left(E\right) = \{1,3,...,4\sum_{l=1}^{t} n_l - 1\}$ merupakan himpunan yang saling melengkapi. Terlihat bahwa pelabelan λ_1 merupakan pemetaan satu-satu dan pada dari himpunan $V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup ... \cup S_{n_t}) \cup E(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup ... \cup S_{n_t})$ ke himpunan bilangan {1, 2, …, $4\sum_{l=1}^{t} n_l$ }.

Bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j pada graf S_{n_j} terhadap pelabelan λ_1 adalah,

$$w_{\lambda_1}\left(v_i^j\right) = \lambda_1\left(v_i^j\right) + \lambda_1\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_1\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda_1\left(u_i^j v_i^j\right)$$

dan

$$w_{\lambda_1}\left(u_i^j\right) = \lambda_1\left(u_i^j\right) + \lambda_1\left(u_i^j v_i^j\right).$$

Dapat dibuktikan bahwa bobot dari v_i^j dan u_i^j adalah konstan ($6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1$).

Pertama-tama akan ditunjukkan untuk simpul v_i^j, $j = 1,2,...,t$, $i = 1,2,...,n_j$.

Karena label dari simpul dalam v_i^j dibedakan menjadi dua kasus, maka pembuktian juga akan dibedakan menjadi dua kasus, yaitu untuk *i* = 1 dan *i* > 1 ($i = 2,3,...,n_j$). Untuk $i = 1$ diperoleh,

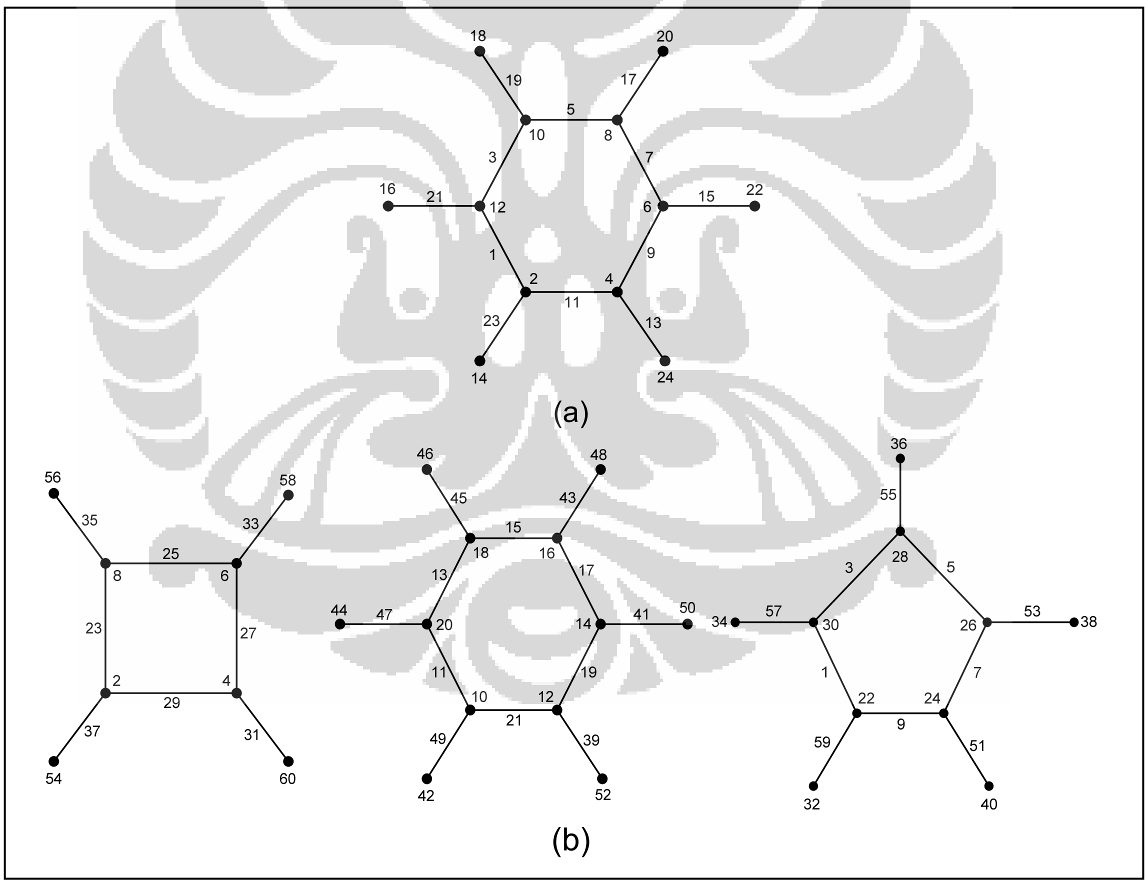
$$\begin{aligned}
w_{\lambda_1}\left(v_1^j\right) &= \lambda_1\left(v_1^j\right) + \lambda_1\left(v_{n_j}^j v_1^j\right) + \lambda_1\left(v_1^j v_2^j\right) + \lambda_1\left(u_1^j v_1^j\right) \\
&= \left(2\sum_{l=1}^{j-i} n_l + 2\right) + \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2n_j - 1\right) + \\
&\quad \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2 - 1\right) + \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2 + 1\right) \\
&= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + \left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l\right) + 2n_j + 1 \\
&= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1,
\end{aligned}$$

sedangkan untuk *i* = 1, 2, …, n_j diperoleh,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_1}\left(v_i^j\right) &= \lambda_1\left(v_i^j\right) + \lambda_1\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_1\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda_1\left(u_i^j v_i^j\right) \\
&= \left(2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2i + 4\right) + \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2(i-1) - 1\right) + \\
&\quad \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i - 1\right) + \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2i + 1\right) \\
&= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 4 - 2i + 2i - 2 - 1 \\
&= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1.
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk simpul luar u_i^j , i = 1, 2, …, n_j, j = 1, 2, …, t.

$$
\begin{aligned}
w_{\lambda_1}\left(u_i^j\right) &= \lambda_1\left(u_i^j\right)+\lambda_1\left(u_i^j v_i^j\right) \\
&= \left(4\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i\right)+\left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2i + 1\right) \\
&= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + \left(-2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2\sum_{l=1}^{j} n_l\right) + 1 \\
&= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1.
\end{aligned}
$$



Gambar 3.1.1: PTSA dari S_6 dengan k = 37 (a); PTSA dari $S_4 \cup S_6 \cup S_5$ dengan k = 91 (b).

Terlihat bahwa untuk $i = 1,2,...,n_j$

$$w_{\lambda_1}\left(v_i^j\right) = 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1$$

dan

$$w_{\lambda_1}\left(u_i^j\right) = 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1.$$

Karena $w_{\lambda_1}\left(v_i^j\right)$ dan $w_{\lambda_1}\left(u_i^j\right)$ untuk setiap $i = 1,2,...,n_j$ dan $j = 1,2,...,t$ bernilai konstan ($6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1$), maka pelabelan λ_1 adalah PTSA dengan konstanta ajaib $k = 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 1$. □

Pada Gambar 3.1.1.a diberikan PTSA S_6 dengan $k = 6\sum_{l=1}^{1} n_l + 1 = 6(6) + 1 = 37$ dan Gambar 3.1.1.b diberikan PTSA dari gabungan tak-terhubung 3 graf matahari $S_4 \cup S_6 \cup S_5$ dengan $k = 6\sum_{l=1}^{3} n_l + 1 = 6(n_1 + n_2 + n_3) + 1 = 6(4 + 6 + 5) + 1 = 91$.

Telah dibuktikan bahwa gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari memiliki PTSA. Perlu dicatat bahwa urutan graf tidak berpengaruh pada konstruksi pelabelan, sehingga urutan $S_4 \cup S_5 \cup S_6$ ataupun $S_4 \cup S_6 \cup S_5$ tetap akan diperoleh PTSA dengan nilai *k* yang sama, meskipun labelnya berbeda. Pada bagian selanjutnya akan diberikan (*a,d*)-

PTSAA, $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari.

3.2 (*a,d*)-PTSAA dari Graf Matahari

Suatu pelabelan λ disebut (*a,d*)-PTSAA dari graf *G*(*V,E*) bila himpunan semua bobot simpul adalah $W = \{w_\lambda(x) | x \in V\} = \{a, a+d, \ldots, a+(n-1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat positif *a* dan *d*, dimana *a* > 0 dan $d \geq 0$. Dalam teorema berikut akan diberikan suatu (*a,*1)-PTSAA untuk gabungan tak-terhubung *t* graf matahari yang tidak harus saling isomorfik.

Teorema 3.2.1 Jika $n_j \geq 3$ untuk setiap $j = 1, 2, ..., t$ dan $t \geq 1$, maka gabungan tak-terhubung *t* graf matahari S_{n_j} memiliki suatu (*a*,1)-PTSAA dengan $a = 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 2$.

Bukti. Semua simpul dalam v_i^j dan simpul luar u_i^j dari graf matahari S_{n_j}, $j = 1, 2, ..., t$ didefinisikan λ_2 sebagai berikut,

$$\lambda_2\left(v_i^j\right) = \begin{cases} 3\sum_{l=1}^{t} n_l - \sum_{l=1}^{j} n_l + 1 & ;i = 1 \\ 3\sum_{l=1}^{t} n_l - \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2 - i & ;i = 2,3,\dots,n_j \end{cases}$$

$$\lambda_2\left(u_i^j\right) = 3\sum_{l=1}^{t} n_l + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + i \quad ;i = 1,2,\dots,n_j$$

$$\lambda_2\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) = \sum_{l=1}^{j-1} n_l + i \quad ;i = 1,2,\dots,n_j$$

$$\lambda_2\left(u_i^j v_i^j\right) = \sum_{l=1}^{t} n_l + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + i \quad ;i = 1,2,\dots,n_j$$

dimana $\sum_{l=a}^{b} n_l = 0$ untuk $b < a$. Label dari semua simpul dan busur yang diperoleh dari pelabelan λ_2 ialah $\lambda_2\left(V\right) = \{2\sum_{l=1}^{t} n_l + 1, 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2, \dots, 4\sum_{l=1}^{t} n_l\}$ dan $\lambda_2\left(E\right) = \{1, 2, \dots, 2\sum_{l=1}^{t} n_l\}$ dan kedua himpunan tersebut saling melengkapi. Sehingga pelabelan λ_2 merupakan pemetaan satu-satu dan pada dari himpunan $V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \dots \cup S_{n_t}) \cup E(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \dots \cup S_{n_t})$ ke himpunan bilangan {1, 2, …, $4\sum_{l=1}^{t} n_l$ }.

Berdasarkan pelabelan λ_2 diperoleh bahwa bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j pada graf S_{n_j} ialah sebagai berikut,

$$w_{\lambda_2}\left(v_i^j\right) = \lambda_2\left(v_i^j\right) + \lambda_2\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_2\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda_2\left(u_i^j v_i^j\right)$$

dan

$$w_{\lambda_2}\left(u_i^j\right) = \lambda_2\left(u_i^j\right) + \lambda_2\left(u_i^j v_i^j\right).$$

Dapat dibuktikan bahwa bobot dari v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda d = 1. Label dari simpul dalam v_i^j dibedakan menjadi dua kasus, yaitu untuk i = 1 dan i = 2, 3, ..., n_j. Oleh karena itu, pembuktian bobot dari simpul dalam v_i^j dibedakan menjadi dua kasus. Pertama, saat i = 1 diperoleh,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_2}\left(v_1^j\right) &= \lambda_2\left(v_1^j\right) + \lambda_2\left(v_{n_j}^j v_1^j\right) + \lambda_2\left(v_1^j v_2^j\right) + \lambda_2\left(u_1^j v_1^j\right) \\ &= \left(3\sum_{l=1}^{t} n_l - \sum_{l=1}^{j} n_l + 1\right) + \left(\sum_{l=1}^{j-1} n_l + n_j\right) + \\ &\quad \left(\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 1\right) + \left(\sum_{l=1}^{t} n_l + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 1\right) \\ &= 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 3. \end{aligned}$$

Kedua, untuk i =2, 3, …, n_j diperoleh,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_2}\left(v_i^j\right) &= \lambda_2\left(v_i^j\right) + \lambda_2\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_2\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda_2\left(u_i^j v_i^j\right) \\ &= \left(3\sum_{l=1}^{t} n_l - \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2 - i\right) + \left(\sum_{l=1}^{j-1} n_l + (i-1)\right) + \\ &\quad \left(\sum_{l=1}^{j-1} n_l + i\right) + \left(\sum_{l=1}^{t} n_l + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + i\right) \\ &= 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i + 1. \end{aligned}$$

Selanjutnya bobot dari simpul luar u_i^j , i=1, 2, ..., n_j, j = 1, 2, ..., t adalah sebagai berikut,

$$w_{\lambda_2}\left(u_i^j\right)=\lambda_2\left(u_i^j\right)+\lambda_2\left(u_i^jv_i^j\right)$$

$$=\left(3\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l+i\right)+\left(\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l+i\right)$$

$$=4\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2i$$

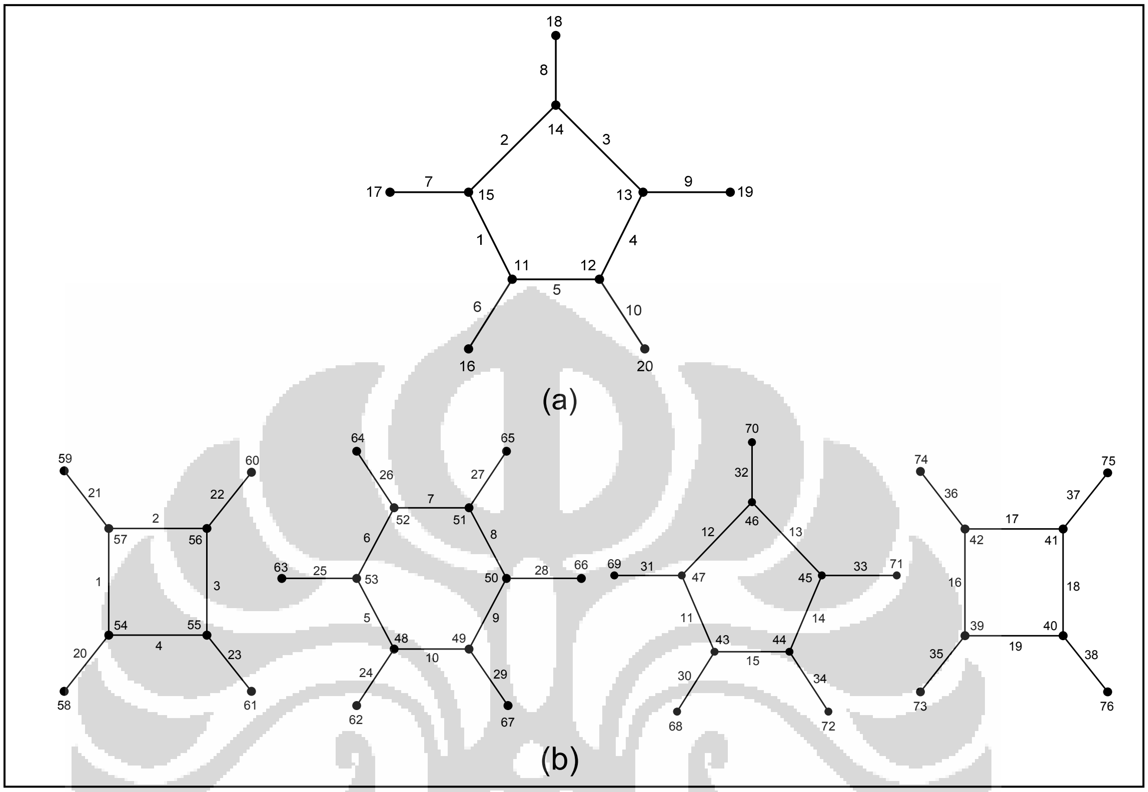
Sehingga diperoleh bahwa untuk i = 1, 2, …, n_j

$$w_{\lambda_2}\left(v_i^j\right)=4\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2i+1$$

dan

$$w_{\lambda_2}\left(u_i^j\right)=4\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2i$$

dengan bobot terkecil muncul pada simpul u_1^1, yaitu $4\sum_{l=1}^{t}n_l+2$. Himpunan bobot dari semua simpul ialah $W=\{w_{\lambda_2}\left(u_i^j\right)\mid u_i^j\in V_j\}\cup\{w_{\lambda_2}\left(v_i^j\right)\mid v_i^j\in V_j\}=$ $\{4\sum_{l=1}^{t}n_l+2,4\sum_{l=1}^{t}n_l+4,...,6\sum_{l=1}^{t}n_l\}\cup\{4\sum_{l=1}^{t}n_l+3,4\sum_{l=1}^{t}n_l+5,...,6\sum_{l=1}^{t}n_l+1\}$. Terlihat bahwa bobot dari semua simpul membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a=4\sum_{l=1}^{t}n_l+2$ dan beda d =1. Jadi, pelabelan λ_2 adalah pelabelan $(4\sum_{l=1}^{t}n_l+2$,1)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung t graf matahari S_{n_j}. □



Gambar 3.2.1: (22,1)-PTSAA dari S_5 (a); (78,1)-PTSAA dari $S_4 \cup S_6 \cup S_5 \cup S_4$ (b).

Pada Gambar 3.2.1.a diberikan (a,1)-PTSAA S_5 dengan $a = 4\sum_{k=1}^{1} n_k + 2 = 4(5) + 2 = 22$. Gambar 3.2.2.b diberikan (a,1)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung 4 graf matahari $S_4 \cup S_6 \cup S_5 \cup S_4$ dengan $a = 4\sum_{l=1}^{4} n_l + 2 = 4(19) + 2 = 78$.

Gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari mempunyai (a, 2)-PTSAA. Pada teorema berikut akan dijelaskan mengenai (a, 2)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari beserta konstruksi pelabelannya.

Teorema 3.2.2 Apabila $n_j \geq 3$, j = 1, 2, …, t dan $t \geq 1$, maka gabungan tak-terhubung t graf matahari S_{n_j} memiliki (a,2)-PTSAA dengan $a = 4\sum_{k=1}^{t} n_k + 3$.

Bukti. Jika label dari simpul dalam dan simpul luar ke-i, v_i^j dan u_i^j , j = 1, 2, …, t didefinisikan pelabelan λ_3 sebagai berikut,

$$\lambda_3\left(v_i^j\right) = \begin{cases} 2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 1 & ; i = 1 \\ 2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2n_j + 3 - 2i & ; i = 2,3,\ldots,n_j \end{cases}$$

$$\lambda_3\left(u_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l - 1 + 2i \quad ; i = 1,2,\ldots,n_j$$

$$\lambda_3\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) = 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i \; ; i = 1,2,\ldots,n_j$$

$$\lambda_3\left(u_i^j v_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i \; ; i = 1,2,\ldots,n_j$$

dengan catatan $\sum_{l=a}^{b} n_l = 0$ bila b<a. Dengan pelabelan λ_3 diperoleh $\lambda_3\left(V\right) = \{1,3,\ldots,4\sum_{l=1}^{t} n_l - 3, 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 1\}$ dan $\lambda_3\left(E\right) = \{2,4,\ldots,4\sum_{l=1}^{t} n_l - 2, 4\sum_{l=1}^{t} n_l\}$. Karena label dari semua simpul dan semua busur pada graf S_{n_j} membentuk himpunan yang saling melengkapi, maka pelabelan λ_3 merupakan pemetaan satu-satu dan pada dari himpunan $V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t}) \cup E(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t})$ ke himpunan bilangan {1, 2, …, $4\sum_{l=1}^{t} n_l$ }.

Bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j pada graf S_{n_j} terhadap pelabelan λ_3 adalah,

$$w_{\lambda_3}\left(v_i^j\right)=\lambda_3\left(v_i^j\right)+\lambda_3\left(v_{i-1}^j v_i^j\right)+\lambda_3\left(v_i^j v_{i+1}^j\right)+\lambda_3\left(u_i^j v_i^j\right)$$

dan

$$w_{\lambda_3}\left(u_i^j\right)=\lambda_3\left(u_i^j\right)+\lambda_3\left(u_i^j v_i^j\right).$$

Dapat dibuktikan bahwa bobot dari v_i^j dan u_i^j membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda *d* = 2. Pembuktian bobot simpul dalam v_i^j, *j* =1, 2, ..., *t* dibedakan menjadi dua kasus. Hal ini dikarenakan label dari simpul dalam v_i^j tersebut juga dibedakan menjadi dua kasus, yaitu *i* = 1 dan $i=2,3,...,n_j$. Pada saat *i* =1, bobot dari simpul dalam v_i^j bernilai,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_3}\left(v_1^j\right)&=\lambda_3\left(v_1^j\right)+\lambda_3\left(v_{n_j}^j v_1^j\right)+\lambda_3\left(v_1^j v_2^j\right)+\lambda_3\left(u_1^j v_1^j\right)\\
&=\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l+1\right)+\left(2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2n_j\right)+\left(2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2\right)+\\
&\quad\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2\right)\\
&=4\sum_{l=1}^{t}n_l+4\sum_{l=1}^{j-1}n_l+5,
\end{aligned}$$

sedangkan saat *i* =2, 3, …, n_j, bobot simpul v_i^j bernilai,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_3}\left(v_i^j\right)&=\lambda_3\left(v_i^j\right)+\lambda_3\left(v_{i-1}^j v_i^j\right)+\lambda_3\left(v_i^j v_{i+1}^j\right)+\lambda_3\left(u_i^j v_i^j\right)\\
&=\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2n_j+3-2i\right)+\left(2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2(i-1)\right)+
\end{aligned}$$

$$\left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i\right) + \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i\right)$$

$$= 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4i + 1.$$

Selanjutnya untuk simpul luar u_i^j , i=1, 2, ..., n_j, j = 1, 2, ..., t.

$$w_{\lambda_3}\left(u_i^j\right) = \lambda_3\left(u_i^j\right) + \lambda_3\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$= \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l - 1 + 2i\right) + \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i\right)$$

$$= 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4i - 1.$$

Terlihat bahwa untuk i = 1, 2, …, n_j

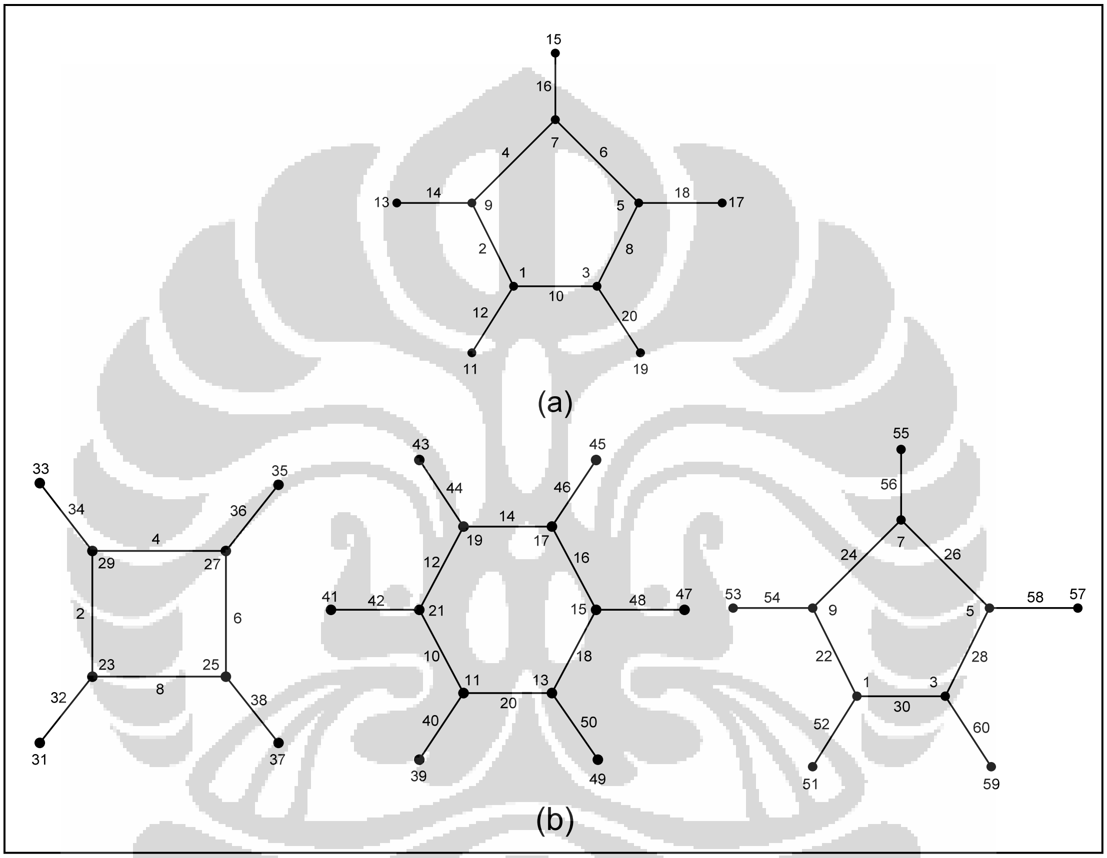
$$w_{\lambda_3}\left(v_i^j\right) = 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4i + 1$$

dan

$$w_{\lambda_3}\left(u_i^j\right) = 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4i - 1$$

dengan bobot terkecil muncul pada simpul u_1^1, yaitu $4\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$. Himpunan bobot dari semua simpul ialah $W = \{w_{\lambda_3}\left(u_i^j\right) \mid u_i^j \in V_j, j = 1,2,...,t\} \cup \{w_{\lambda_3}\left(v_i^j\right) \mid v_i^j \in V_j, j = 1,2,...,t\} = \{4\sum_{l=1}^{t} n_l + 3, 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 7, ..., 8\sum_{l=1}^{t} n_l - 5, 8\sum_{l=1}^{t} n_l - 1\} \cup \{4\sum_{l=1}^{t} n_l + 5, 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 9, ..., 8\sum_{l=1}^{t} n_l - 3, 8\sum_{l=1}^{t} n_l + 1\}$. Terlihat bahwa bobot dari semua simpul membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 4\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$ dan beda

d = 2. Jadi, pelabelan λ_3 adalah pelabelan ($4\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$, 2)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari. □



Gambar 3.2.2: (23,2)-PTSAA dari S_5 (a); (63,2)-PTSAA dari $S_4 \cup S_6 \cup S_5$ (b).

Pada Gambar 3.2.2.a diberikan contoh (a,2)-PTSAA dari graf S_5, dimana $a = 4\sum_{l=1}^{1} n_l + 3 = 4(5) + 3 = 23$. Contoh (a,2)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung 3 graf matahari $S_4 \cup S_6 \cup S_5$ dengan nilai $a = 4\sum_{k=1}^{3} n_k + 3 = 4(4 + 6 + 5) + 3 = 63$, dapat dilihat pada Gambar 3.2.2.b.

Dalam teorema berikut akan diberikan konstruksi pelabelan (*a,*3)-PTSAA untuk gabungan tak-terhubung *t* graf matahari berderajat ganjil yang tidak harus saling isomorfik.

Teorema 3.2.3 Gabungan tak-terhubung *t* graf matahari S_{n_j} memiliki suatu (*a*,3)-PTSAA dengan $a = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$, dimana $n_j \geq 3$ merupakan bilangan ganjil untuk setiap *j* = 1, 2, …, *t* dan *t* ≥ 1.

Bukti. Jika didefinisikan label dari **s**emua simpul dalam v_i^j dan simpul luar u_i^j pada graf matahari S_{n_j}, $j = 1,2,...,t$ sebagai berikut,

$$\lambda_4\left(v_i^j\right) = 3\sum_{l=1}^{t} n_l + \sum_{l=1}^{j} n_l - i + 1 \quad ; i = 1,2,...,n_j$$

$$\lambda_4\left(u_i^j\right) = 3\sum_{l=1}^{t} n_l - \sum_{l=1}^{j} n_l + i \quad ; i = 1,2,...,n_j$$

$$\lambda_4\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) = \begin{cases} 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + i & ; i = 1,3,...,n_j \\ 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + n_j + i & ; i = 2,4,...,n_j - 1 \end{cases}$$

$$\lambda_4\left(u_i^j v_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i \quad ; i = 1,2,...,n_j,$$

maka diperoleh himpunan label dari semua simpul dalam dan simpul luar

$\lambda_4(E) = \{1,2,...,2\sum_{l=1}^{t} n_l - 1, 2\sum_{l=1}^{t} n_l\}$ dan $\lambda_4(V) = \{2\sum_{l=1}^{t} n_l + 1, 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2, ..., 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 1,$

$4\sum_{l=1}^{t} n_l\}$. Himpunan tersebut saling melengkapi, maka pelabelan λ_4 merupakan pemetaan satu-satu dan pada dari himpunan $V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup ... \cup S_{n_t}) \cup V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup ... \cup S_{n_t})$ ke himpunan bilangan {1, 2, …, $4\sum_{l=1}^{t} n_l$ }.

Pelabelan λ_4 menghasilkan bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j pada graf S_{n_j} sebagai berikut,

$$w_{\lambda_4}\left(v_i^j\right) = \lambda_4\left(v_i^j\right) + \lambda_4\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_4\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda\left(u_i^j v_i^j\right)$$

dan

$$w_{\lambda_4}\left(u_i^j\right) = \lambda_4\left(u_i^j\right) + \lambda_4\left(u_i^j v_i^j\right).$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa bobot dari v_i^j dan u_i^j membentuk suatu barisan aritmatika dengan selisih setiap bobotnya adalah 3. Karena label dari busur dalam $v_i^j v_{i+1}^j$ dibedakan menjadi dua kasus, maka pembuktian bobot untuk simpul v_i^j, j =1, 2, ..., t juga akan dibedakan menjadi dua kasus, yaitu untuk $i = 1, 3, ..., n_j$ dan $i = 2, 4, ..., n_j - 1$. Untuk i = 1, 3, ..., n_j diperoleh,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_4}\left(v_i^j\right) &= \lambda_4\left(v_i^j\right) + \lambda_4\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_4\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda_4\left(u_i^j v_i^j\right) \\
&= \left(3\sum_{l=1}^{t} n_l + \sum_{l=1}^{j} n_l - i + 1\right) + \left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + n_j + (i-1)\right) + \\
&\quad \left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + i\right) + \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i\right) \\
&= 5\sum_{l=1}^{t} n_l + 3\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 3i,
\end{aligned}$$

sedangkan untuk i = 2, 4, …, n_j-1 diperoleh,

$$w_{\lambda_4}\left(v_i^j\right)=\lambda_4\left(v_i^j\right)+\lambda_4\left(v_{i-1}^j v_i^j\right)+\lambda_4\left(v_i^j v_{i+1}^j\right)+\lambda_4\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$=\left(3\sum_{l=1}^{t} n_l+\sum_{l=1}^{j} n_l-i+1\right)+\left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l+(i-1)\right)+$$

$$\left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l+n_j+i\right)+\left(2\sum_{l=1}^{t} n_l-2\sum_{l=1}^{j} n_l+2i\right)$$

$$=5\sum_{l=1}^{t} n_l+3\sum_{l=1}^{j-1} n_l+3i.$$

Bobot dari simpul luar u_i^j, i=1, 2, ..., n_j, j = 1, 2, ..., t ialah sebagai berikut,

$$w_{\lambda_4}\left(u_i^j\right)=\lambda_4\left(u_i^j\right)+\lambda_4\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$=\left(3\sum_{l=1}^{t} n_l-\sum_{l=1}^{j} n_l+i\right)+\left(2\sum_{l=1}^{t} n_l-2\sum_{l=1}^{j} n_l+2i\right)$$

$$=5\sum_{l=1}^{t} n_l-3\sum_{l=1}^{j} n_l+3i.$$

Terlihat bahwa untuk i = 1, 2, …, n_j

$$w_{\lambda}\left(u_i^j\right)=5\sum_{l=1}^{t} n_l-3\sum_{l=1}^{j} n_l+3i$$

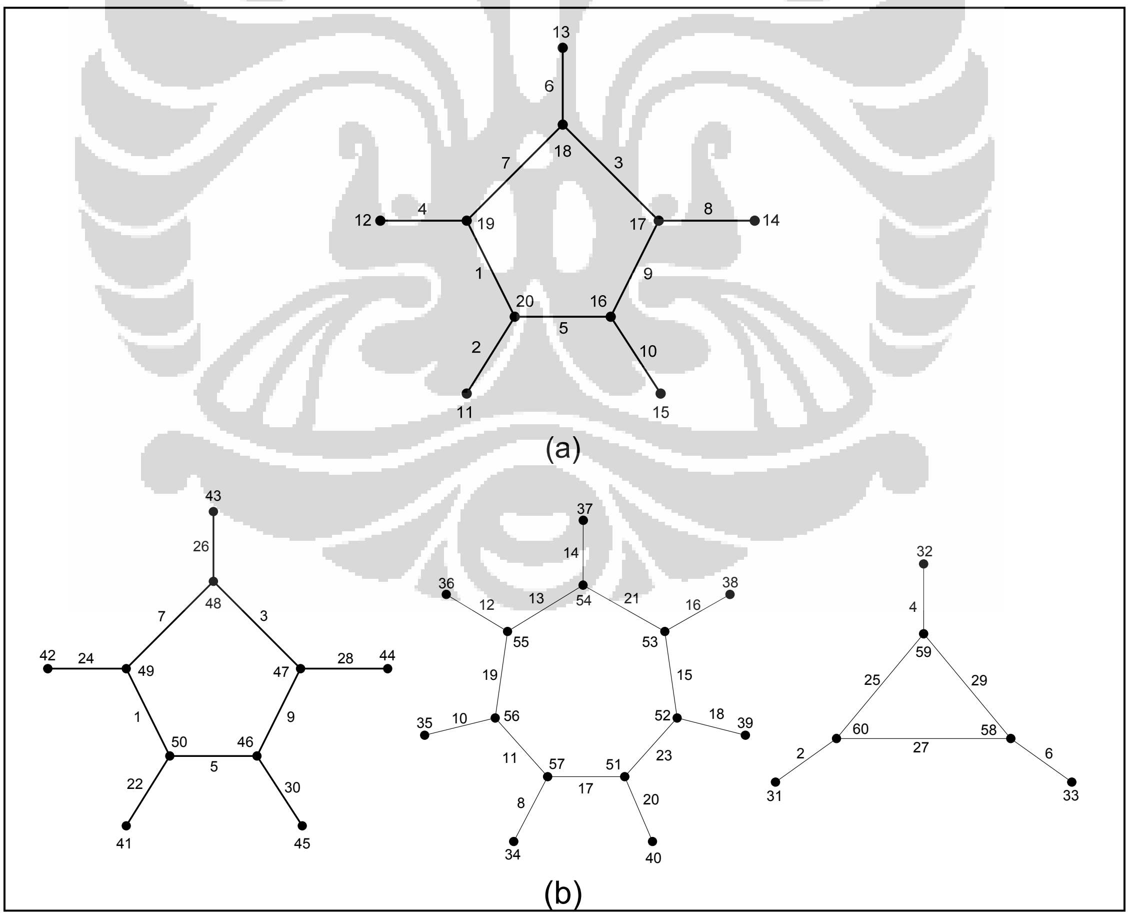
dan

$$w_{\lambda_4}\left(v_i^j\right)=5\sum_{l=1}^{t} n_l+3\sum_{l=1}^{j-1} n_l+3i$$

dengan bobot terkecil muncul pada simpul u_1^t, yaitu $2\sum_{l=1}^{t} n_l+3$. Sehingga bobot dari semua simpul dalam dan simpul luar membentuk himpunan bobot sebagai berikut $W=\{w_{\lambda_4}\left(u_i^j\right) \mid u_i^j \in V_j, j=1,2,...,t\} \cup \{w_{\lambda_4}\left(v_i^j\right) \mid v_i^j \in V_j, j=1,2,$

$\ldots,t\} = \{2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3, 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 6, \ldots, 5\sum_{l=1}^{t} n_l - 3, 5\sum_{l=1}^{t} n_l\} \cup \{5\sum_{l=1}^{t} n_l + 3, 5\sum_{l=1}^{t} n_l + 6, \ldots,$

$8\sum_{l=1}^{t} n_l - 3, 8\sum_{l=1}^{t} n_l\}$. Bobot dari semua simpul membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$ dan beda d = 3. Jadi, pelabelan λ_4 adalah pelabelan ($2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$, 3)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung t graf matahari. □



Gambar 3.2.3: (13,3)-PTSAA dari S_5 (a); (33,3)-PTSAA dari $S_5 \cup S_7 \cup S_3$ (b).

Pada Gambar 3.2.3.a diberikan contoh (a,3)-PTSAA dari graf S_5 dengan $a = 2\sum_{k=1}^{1} n_k + 3 = 2(5) + 3 = 13$ dan Gambar 3.2.3.b diberikan contoh (a,3)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung 3 graf matahari $S_5 \cup S_7 \cup S_3$ dengan $a = 2\sum_{k=1}^{3} n_k + 3 = 2(5+7+3) + 3 = 33$.

Apabila bobot semua simpul dalam dan simpul luar, v_i^j dan u_i^j membentuk suatu barisan artmatika dengan beda d = 4, maka pelabelan tersebut merupakan (a,4)-PTSAA. Dalam teorema berikut akan dibuktikan bahwa gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari memiliki (a,4)-PTSAA.

Teorema 3.2.4 Apabila $n_j \geq 3$, j = 1, 2, …, t dan $t \geq 1$, maka gabungan tak-terhubung t graf matahari S_{n_j} memiliki (a,4)-PTSAA dengan $a = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$.

Bukti. Jika pada simpul dalam dan simpul luar, v_i^j dan u_i^j dari graf matahari ke-j S_{n_j}, j = 1, 2, …, t didefinisikan pelabelan λ_5 sebagai berikut,

$$\lambda_5\left(v_i^j\right) = \begin{cases} 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2 & ; i = 1 \\ 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 4 + 2n_j - 2i & ; i = 2,3,\ldots,n_j \end{cases}$$

$$\lambda_5\left(u_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i \qquad ; i = 1,2,\ldots,n_j$$

$$\lambda_5\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i - 1 \quad ; i = 1, 2, \ldots, n_j$$

$$\lambda_5\left(u_i^j v_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i - 1 \quad ; i = 1, 2, \ldots, n_j$$

maka label dari semua simpul dan busur yang diperoleh dari pelabelan λ_5 adalah $\lambda_5(E) = \{1, 3, \ldots, 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 3, 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 1\}$ dan $\lambda(V) = \{2, 4, \ldots, 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 2, 4\sum_{l=1}^{t} n_l\}$ yang merupakan himpunan yang saling melengkapi. Pelabelan λ_5 merupakan pemetaan satu-satu dan pada dari himpunan $V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t}) \cup E(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t})$ ke himpunan bilangan $\{1, 2, \ldots, 4\sum_{l=1}^{t} n_l\}$.

Bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j pada graf S_{n_j} terhadap pelabelan λ_5 adalah,

$$w_{\lambda_5}\left(v_i^j\right) = \lambda_5\left(v_i^j\right) + \lambda_5\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_5\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda_5\left(u_i^j v_i^j\right)$$

dan

$$w_{\lambda_5}\left(u_i^j\right) = \lambda_5\left(u_i^j\right) + \lambda_5\left(u_i^j v_i^j\right).$$

Label dari simpul dalam v_i^j dibedakan menjadi dua kasus, yaitu untuk $i = 1$ dan $i = 2, 3, \ldots, n_j$. Oleh karena itu, pembuktian bobot dari simpul dalam v_i^j juga dibedakan menjadi dua kasus. Apabila $i = 1$, maka bobot simpul dalam v_i^j ialah,

$$w_{\lambda_5}\left(v_1^j\right)=\lambda_5\left(v_1^j\right)+\lambda_5\left(v_{n_j}^j v_1^j\right)+\lambda_5\left(v_1^j v_2^j\right)+\lambda_5\left(u_1^j v_1^j\right)$$

$$=\left(4\sum_{l=1}^{t}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2\right)+\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2n_j-1\right)+$$

$$\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2-1\right)+\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2-1\right)$$

$$=\left(4\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l\right)+\left(-2\sum_{l=1}^{j}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+$$

$$\left(2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2n_j\right)+\left(2+2-1-1+2-1\right)$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+\left(-6\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+2\sum_{l=1}^{j}n_l+3$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l-4\sum_{l=1}^{j}n_l+3.$$

Apabila i =2, 3, …, n_j, maka akan diperoleh bobot simpul dalam v_i^j sebagai berikut,

$$w_{\lambda_5}\left(v_i^j\right)=\lambda_5\left(v_i^j\right)+\lambda_5\left(v_{i-1}^j v_i^j\right)+\lambda_5\left(v_i^j v_{i+1}^j\right)+\lambda_5\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$=\left(4\sum_{l=1}^{t}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l+4+2n_j-2i\right)+\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2(i-1)-1\right)+$$

$$\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2i-1\right)+\left(2\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2i-1\right)$$

$$=\left(4\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l\right)+\left(-2\sum_{l=1}^{j}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l-2\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+$$

$$\left(+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2n_j\right)+\left(4-2i+2i-1+2(i-1)-1+2i-1\right)$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+\left(-6\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+2\sum_{l=1}^{j}n_l+4i-1$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l-4\sum_{l=1}^{j}n_l+4i-1.$$

Bobot simpul luar u_i^j , *i*=1, 2, ..., n_j, *j* = 1, 2, ..., *t* ialah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_5}\left(u_i^j\right) &= \lambda_5\left(u_i^j\right)+\lambda_5\left(u_i^j v_i^j\right) \\ &= \left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i\right)+\left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i - 1\right) \\ &= 2\sum_{l=1}^{t} n_l + \left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) + 2i + 2i - 1 \\ &= 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4i - 1. \end{aligned}$$

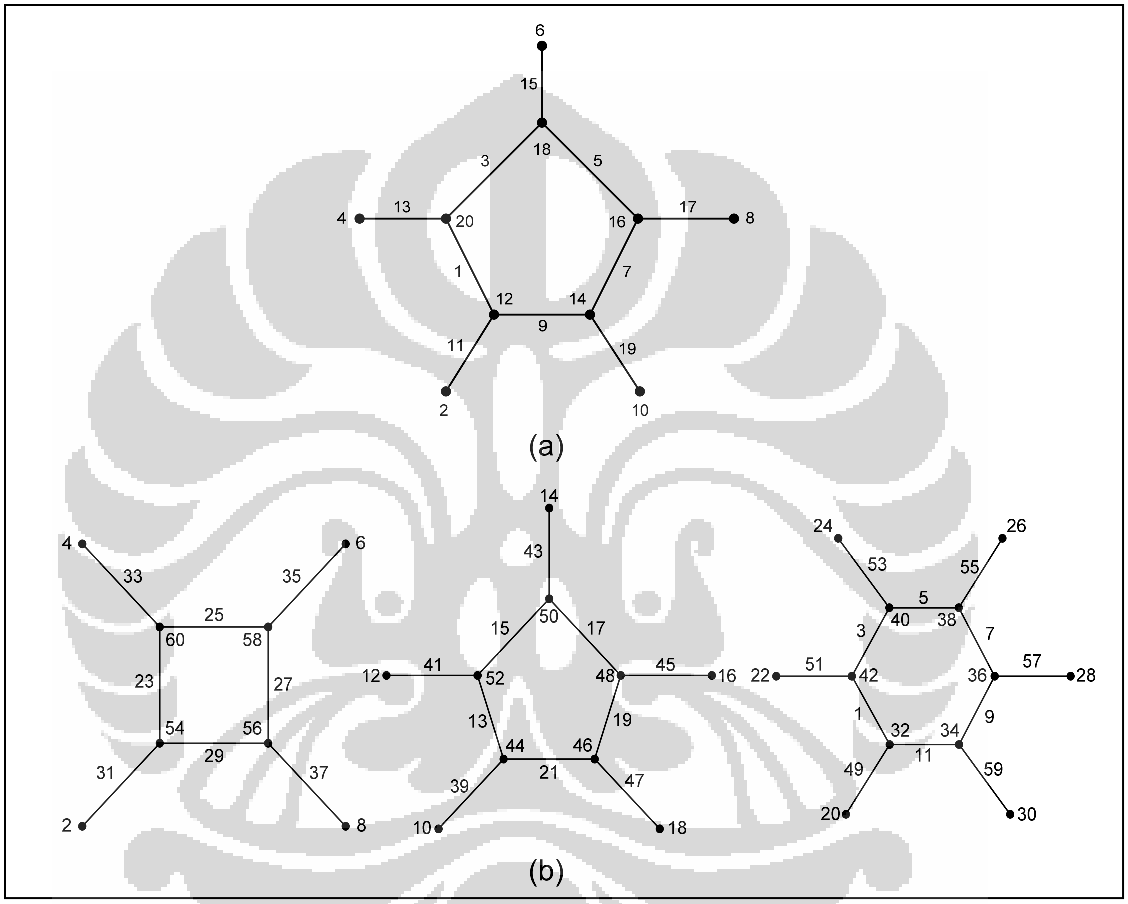
Bobot dari semua simpul dalam dan simpul luar yang diperoleh adalah,

$$w_{\lambda_5}\left(v_i^j\right) = 10\sum_{l=1}^{t} n_l - 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 4i - 1$$

dan

$$w_{\lambda_5}\left(u_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4i - 1$$

dengan bobot terkecil muncul pada simpul luar u_1^1, yaitu $2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$. Sehingga himpunan bobot dari semua simpul dalam dan simpul luar, v_i^j dan u_i^j dari graf matahari ke-*j* S_{n_j} ialah $W = \{w_{\lambda_5}\left(u_i^j\right) \mid u_i^j \in V_j, j = 1,2,\ldots,t\} \cup \{w_{\lambda_5}\left(v_i^j\right) \mid v_i^j \in V_j, j = 1,2,\ldots,t\} = \{2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3, 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 7, \ldots, 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j} n_l - 5, 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j} n_l - 1\} \cup \{2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 3, 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 7, \ldots, 10\sum_{l=1}^{t} n_l - 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l - 5, 10\sum_{l=1}^{t} n_l - 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l - 1\}$. Terlihat bahwa bobot dari semua simpul membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$ dan beda *d* = 4. Jadi, pelabelan λ_5 adalah pelabelan ($2\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$,4)-PTSAA gabungan tak-terhubung *t* graf matahari S_{n_j} . □



Gambar 3.2.4: (13,4)-PTSAA dari S_5 (a); (33,4)-PTSAA dari $S_4 \cup S_5 \cup S_6$ (b).

Contoh (*a*,4)-PTSAA dari graf S_5 dapat dilihat pada Gambar 3.2.4.a, dimana $a = 2\sum_{l=1}^{1} n_l + 3 = 2(5) + 3 = 13$. Pada Gambar 3.2.4.b diberikan (*a*,4)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung 3 graf matahari $S_4 \cup S_5 \cup S_6$ dengan $a = 2\sum_{l=1}^{3} n_l + 3 = 2(4+6+5) + 3 = 33$.

Dalam teorema berikut akan diberikan (a,6)-PTSAA untuk gabungan tak-terhubung t graf matahari berderajat ganjil yang tidak harus saling isomorfik beserta konstruksi pelabelannya.

Teorema 3.2.5 Gabungan tak-terhubung t graf matahari S_{n_j} memiliki suatu (a,6)-PTSAA dengan $a = 5$, dimana $n_j \geq 3$ merupakan bilangan ganjil untuk setiap $j = 1,2,...,t$ dan $t \geq 1$.

Bukti. Jika v_i^j dan u_i^j menyatakan simpul dalam dan simpul luar ke-i dari graf matahari ke-j ($j = 1,2,...,t$) didefinisikan λ_6 sebagai berikut,

$$\lambda_6\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) = \begin{cases} 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i & ; i = 1,3,...,n_j \\ 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2n_j + 2i & ; i = 2,4,...,n_j - 1 \end{cases}$$

$$\lambda_6\left(u_i^j v_i^j\right) = 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 4i \quad ; i = 1,2,...,n_j$$

$$\lambda_6\left(v_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2i + 1 \quad ; i = 1,2,...,n_j$$

$$\lambda_6\left(u_i^j\right) = 2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i - 1 \quad ; i = 1,2,...,n_j.$$

Label dari semua simpul dan busur yang diperoleh dari pelabelan λ_6 ialah

$\lambda_6(V) = \{1,3,...,4\sum_{l=1}^{t} n_l - 3, 4\sum_{l=1}^{t} n_l - 1\}$ dan $\lambda_6(E) = \{2,4,...,4\sum_{l=1}^{t} n_l - 2, 4\sum_{l=1}^{t} n_l\}$

merupakan himpunan yang saling melengkapi. Pelabelan λ_6 merupakan pemetaan satu-satu dan pada dari himpunan $V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup ... \cup S_{n_t}) \cup E(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup ... \cup S_{n_t})$ ke himpunan bilangan {1, 2, …, $4\sum_{l=1}^{t} n_l$ }.

Bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j pada graf S_{n_j} terhadap pelabelan λ_6 adalah,

$$w_{\lambda_6}\left(v_i^j\right) = \lambda_6\left(v_i^j\right) + \lambda_6\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_6\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda\left(u_i^j v_i^j\right)$$

dan

$$w_{\lambda_6}\left(u_i^j\right) = \lambda_6\left(u_i^j\right) + \lambda_6\left(u_i^j v_i^j\right).$$

Dapat dibuktikan bahwa bobot dari v_i^j dan u_i^j membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda *d* = 6. Karena label dari busur dalam $v_i^j v_{i+1}^j$ dibedakan menjadi dua kasus, maka pembuktian juga akan dibedakan menjadi dua kasus, yaitu untuk *i* ganjil ($i = 1,3,...,n_j$) dan *i* genap ($i = 2,4,...,n_j - 1$). Untuk $i = 1,3,...,n_j$, bobot dari simpul dalam v_i^j adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_6}\left(v_i^j\right) &= \lambda_6\left(v_i^j\right) + \lambda_6\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_6\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda_6\left(u_i^j v_i^j\right) \\
&= \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2i + 1\right) + \left(4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2n_j + 2(i-1)\right) + \\
&\quad \left(4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2i\right) + \left(4\sum_{l=1}^{t} n_l - 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 4i\right) \\
&= \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{t} n_l\right) + \left(4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) +
\end{aligned}$$

$$\left(2\sum_{l=1}^{j} n_l - 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 2n_j\right) + \left(-2i + 1 + 2i + 2i - 2 + 4i\right)$$

$$= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 8\sum_{l=1}^{j-1} n_l + \left(-2\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) + 6i - 1$$

$$= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 6\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 6i - 1,$$

sedangkan untuk $i = 2, 4, ..., n_j - 1$ diperoleh bobot simpul dalam v_i^j sebagai berikut,

$$w_{\lambda_6}\left(v_i^j\right) = \lambda_6\left(v_i^j\right) + \lambda_6\left(v_{i-1}^j v_i^j\right) + \lambda_6\left(v_i^j v_{i+1}^j\right) + \lambda_6\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$= \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j} n_l - 2i + 1\right) + \left(4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2(i-1)\right) +$$

$$\left(4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2n_j + 2i\right) + \left(4\sum_{l=1}^{t} n_l - 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 4i\right)$$

$$= \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{t} n_l\right) + \left(4\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) + \left(2\sum_{l=1}^{j} n_l - 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 2n_j\right) +$$

$$\left(-2i + 1 + 2i + 2i - 2 + 4i\right)$$

$$= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 8\sum_{l=1}^{j-1} n_l + \left(-2\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) + 6i - 1$$

$$= 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 6\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 6i - 1.$$

Selanjutnya untuk simpul luar $u_i^j,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n_j,\ j = 1,\ 2, ...,\ t.$

$$w_{\lambda_6}\left(u_i^j\right) = \lambda_6\left(u_i^j\right) + \lambda_6\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$= \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2i - 1\right) + \left(4\sum_{l=1}^{t} n_l - 4\sum_{l=1}^{j} n_l + 4i\right)$$

$$= \left(2\sum_{l=1}^{t} n_l + 4\sum_{l=1}^{t} n_l\right) + \left(-2\sum_{l=1}^{j} n_l - 4\sum_{l=1}^{j} n_l\right) + \left(2i - 1 + 4i\right)$$

$$= 6\sum_{l=1}^{t} n_l - 6\sum_{l=1}^{j} n_l + 6i - 1.$$

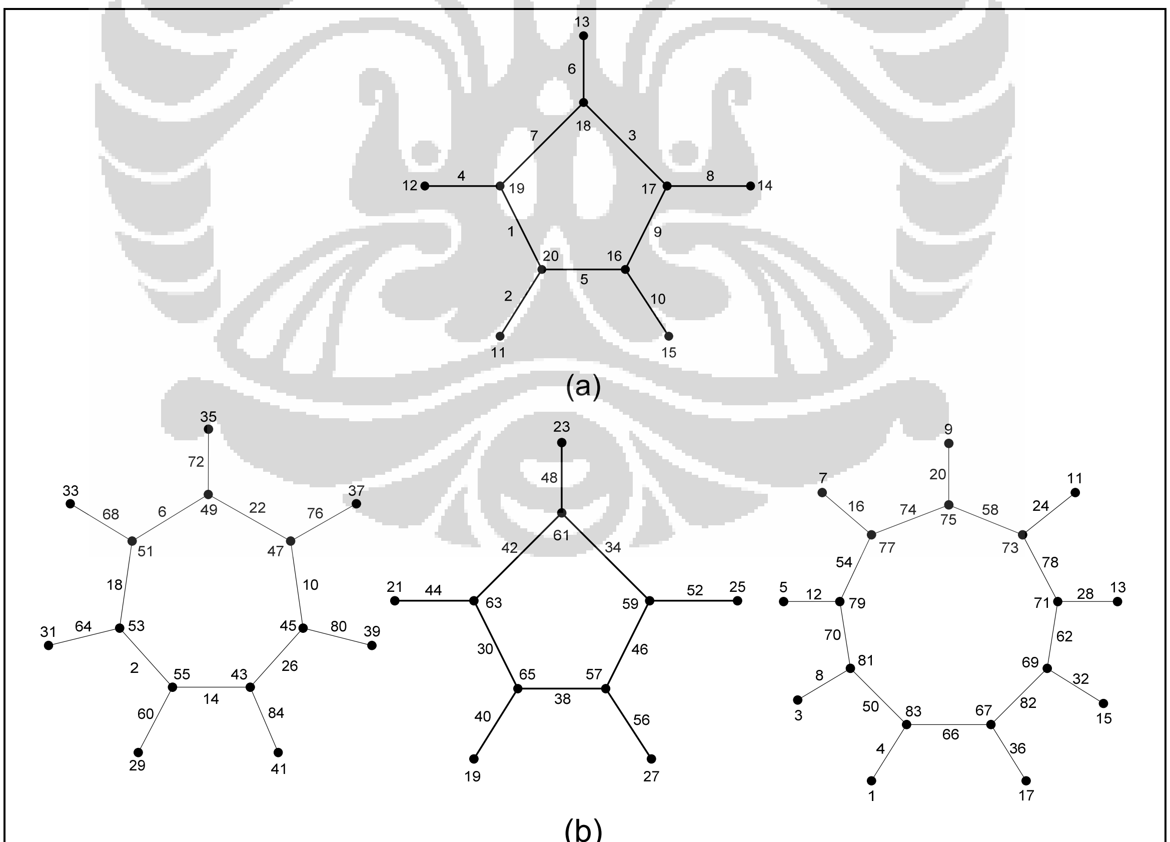
Terlihat bahwa untuk $i = 1, 2, \ldots, n_j$

$$w_{\lambda_6}\left(u_i^j\right) = 6\sum_{l=1}^{t} n_l - 6\sum_{l=1}^{j} n_l + 6i - 1$$

dan

$$w_{\lambda_6}\left(v_i^j\right) = 6\sum_{l=1}^{t} n_l + 6\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 6i - 1$$

dengan bobot terkecil muncul pada simpul u_1^t, yaitu 5. Himpunan bobot dari



Gambar 3.2.5: (5,6)-PTSAA dari S_5 (a); (5,6)-PTSAA dari $S_7 \cup S_5 \cup S_9$ (b).

semua simpul ialah $W=\{w_{\lambda_6}\left(u_i^j\right) \mid u_i^j \in V_j, j=1,\ 2,\ ...,\ t\} \cup \{w_{\lambda_6}\left(v_i^j\right) \mid v_i^j \in V_j,$

$j=1,\ 2,...,\ t\}=\{5, 11,\ ...,\ 6\sum_{l=1}^{t} n_l-7,\ 6\sum_{l=1}^{t} n_l-1\} \cup \{6\sum_{l=1}^{t} n_l+5,\ 6\sum_{l=1}^{t} n_l+11,\ \ldots,$

$12\sum_{l=1}^{t} n_l-7,\ 12\sum_{l=1}^{t} n_l-1\}$.

Bobot dari semua simpul membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a=5$ dan beda $d=6$. Jadi, pelabelan λ_6 merupakan pelabelan (5,6)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung *t* graf matahari S_{n_j}. □

Pada Gambar 3.2.5.a diberikan (5,6)-PTSAA S_5. Pada Gambar 3.2.5.b diberikan (5,6)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung 3 graf matahari $S_7 \cup S_5 \cup S_9$.

Dalam bab ini telah dijelaskan mengenai (*a,d*)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari untuk nilai $d \in \{0,1,2,4\}$ untuk semua nilai $n \geq 3$ dan $d \in \{3,6\}$ untuk bilangan ganjil $n \geq 3$.

Pada bab berikutnya akan dibahas mengenai (*a,d*)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf Petersen diperumum untuk beberapa nilai *d*.

BAB IV

(*a,d*)-PTSAA DARI GRAF PETERSEN DIPERUMUM

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai konstruksi (*a,d*)-PTSAA dari graf Petersen diperumum. Konstruksi pelabelan dilakukan pada gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf Petersen diperumum untuk nilai-nilai *d* yang mungkin.

Graf Petersen diperumum merupakan graf teratur berderajat 3, artinya $\delta = \Delta = r = 3$. Sehingga dengan mesubstitusikan nilai-nilai tersebut ke (2.8) akan diperoleh batasan nilai *d* ialah sebagai berikut:

$$d \leq \frac{(3+1)(2(2n+3n)-(3))-(3+1)(3+2)}{2(2n-1)}$$

atau

$$d \leq 9,$$

artinya nilai-nilai *d* yang mungkin dari (*a,d*)-PTSAA graf Petersen diperumum adalah 0,1,…, dan 9.

Pembahasan selanjutnya ialah konstruksi (*a,d*)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf Petersen diperumum, dimana nilai-nilai *d* yang dibahas dalam skripsi ini adalah $d \in \{0,2,3\}$. PTSA gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf Petersen diperumum akan dibahas terlebih dahulu, dan dilanjutkan untuk nilai-nilai *d* yang lainnya.

4.1 PTSA dari Graf Petersen Diperumum

Suatu pelabelan disebut PTSA dari graf $G = G(V,E)$ bila terdapat suatu konstanta k sehingga semua bobot simpul bernilai k. [Slamin dkk. 2008] telah membuktikan bahwa gabungan tak-terhubung 2 graf Petersen diperumum yang isomorfik $2P(n,m)$ memiliki PTSA dengan konstanta ajaib $k = 19n + 2$ dan $k = 21n + 2$. Masalah gabungan yang tak-isomorfik diberikan sebagai masalah terbuka dalam makalah [Slamin dkk. 2008]. Pada bagian ini akan diberikan konstruksi PTSA (atau $(a,0)$-PTSAA) dari gabungan tak-terhubung t buah graf Petersen diperumum yang tidak harus saling isomorfik. Konstruksi ini memberikan jawaban pada masalah terbuka yang diberikan pada makalah [Slamin dkk. 2008].

Dalam teorema berikut akan diberikan suatu PTSA dengan disertai konstruksi pelabelannya.

Teorema 4.1.1 Untuk $n_j \geq 3$, $1 \leq m_j \leq \left\lfloor \frac{n_j - 1}{2} \right\rfloor$ dan $t \geq 1$, gabungan tak-terhubung t graf Petersen diperumum $P(n_1,m_1) \cup P(n_2,m_2) \cup \cdots \cup P(n_t,m_t)$ memiliki suatu PTSA dengan konstanta ajaib $k = 10\sum_{l=1}^{t} n_l + 2$.

Bukti. Setiap simpul dalam dan simpul luar, v_i^j dan u_i^j dari graf matahari ke-j (j = 1, 2, …, t) didefinisikan pelabelan λ_7 sebagai berikut,

$$\lambda_7(u_i^j)=\left(n_j+1-i\right)\alpha\left(1,i-1\right)+1+\sum_{l=1}^{j-1}n_l$$

$$\lambda_7(v_i^j)=\left(m_j+1-i\right)\alpha\left(i,m_j\right)+\left(n_j+m_j+1-i\right)\alpha\left(m_j+1,i\right)+4\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l$$

$$\lambda_7(u_i^ju_{i+1}^j)=i+4\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l$$

$$\lambda_7(u_i^jv_i^j)=\left(n_j+1-i\right)+2\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l$$

$$\lambda_7(v_i^jv_{i+m_j}^j)=i+2\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l$$

dimana $\alpha\left(x,y\right)=\begin{cases}1 & ,x\le y\\ 0 & ,x>y.\end{cases}$

Berdasarkan pelabelan tersebut diperoleh bahwa setiap simpul dan busur memiliki label yang berbeda, yaitu: $\lambda_7\left(V\right)=\{1,\ 2,\ \ldots,\ \sum_{l=1}^{t}n_l\}\cup\{3\sum_{l=1}^{t}n_l+1,\ 3\sum_{l=1}^{t}n_l+2,\ldots,4\sum_{l=1}^{t}n_l\}\cup\{4\sum_{l=1}^{t}n_l+1,4\sum_{l=1}^{t}n_l+2,\ldots,5\sum_{l=1}^{t}n_l\}$ dan $\lambda_7\left(E\right)=\{\sum_{l=1}^{t}n_l+1,\ \sum_{l=1}^{t}n_l+2,\ \ldots,\ 2\sum_{l=1}^{t}n_l\}\cup\{2\sum_{l=1}^{t}n_l+1,\ 2\sum_{l=1}^{t}n_l+2,\ \ldots,\ 3\sum_{l=1}^{t}n_l\}$. Sehingga pelabelan λ_7 merupakan pemetaan bijektif dari $V\cup E$ ke $1,\ 2,\ldots,\ 5\sum_{l=1}^{t}n_l$.

Berdasarkan pelabelan λ_7, bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j pada $\bigcup_{j=1}^{t}P(n_j,m_j)$ dinyatakan sebagai berikut,

$$w_{\lambda_7}\left(v_i^j\right)=\lambda_7\left(v_i^j\right)+\lambda_7\left(v_{i-m_j}^jv_i^j\right)+\lambda_7\left(v_i^jv_{i+m_j}^j\right)+\lambda_7\left(u_i^jv_i^j\right)$$

dan

$$w_{\lambda_7}\left(u_i^j\right)=\lambda_7\left(u_i^j\right)+\lambda_7\left(u_{i-1}^ju_i^j\right)+\lambda_7\left(u_i^ju_{i+1}^j\right)+\lambda_7\left(u_i^jv_i^j\right).$$

Dengan demikian dapat ditunjukkan bahwa bobot semua simpul bernilai sama, yaitu $10\sum_{l=1}^{t}n_l+2.$ Pertama-tama akan ditunjukkan terlebih dahulu bobot dari simpul dalam v_i^j. Karena nilai dari fungsi α pada label simpul v_i^j terbagi menjadi dua kasus, maka dalam pembuktian bobot simpul dalam v_i^j juga akan dibedakan menjadi 2 kasus, yaitu kasus $i \le m_j$ dan $i > m_j$. Untuk kasus $i=1,2,\ldots,m_j$, nilai dari $\alpha\left(i,m_j\right)=1$ dan $\alpha\left(m_j+1,i\right)=0$, dimana indeks simpul merupakan modulo n_j, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
w_{\lambda_7}\left(v_i^j\right)&=\lambda_7\left(v_i^j\right)+\lambda_7\left(v_{i-m_j}^jv_i^j\right)+\lambda_7\left(v_i^jv_{i+m_j}^j\right)+\lambda_7\left(u_i^jv_i^j\right)\\
&=\left(\left(m_j+1-i\right)+4\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l\right)+\left(\left(n_j-m_j+i\right)+2\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+\\
&\quad\left(i+2\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+\left(\left(n_j+1-i\right)+2\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l\right)\\
&=10\sum_{l=1}^{t}n_l+\left(2\sum_{l=1}^{j-1}n_l-2\sum_{l=j+1}^{j}n_l+n_j\right)+2\\
&=10\sum_{l=1}^{t}n_l+2.
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk kasus $i=m_j+1,\ m_j+2,\ \ldots,\ n_j$, nilai $\alpha\left(m_j+1,i\right)=1$ dan $\alpha\left(i,m_j\right)=0$. Dengan demikian diperoleh bobot simpul v_i^j sebagai berikut,

$$w_{\lambda_7}\left(v_i^j\right)=\lambda_7\left(v_i^j\right)+\lambda_7\left(v_{i-m_j}^j v_i^j\right)+\lambda_7\left(v_i^j v_{i+m_j}^j\right)+\lambda_7\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$=\left(\left(n_j+m_j+1-i\right)+4\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l\right)+\left(\left(i-m_j\right)+2\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+$$

$$\left(i+2\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+\left(\left(n_j+1-i\right)+2\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l\right)$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+\left(2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2n_j-2\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+2$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+2.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa bobot simpul luar u_i^j bernilai konstan untuk setiap i = 1, 2, …, n_j dan j = 1, 2, …, t. Pada label bobot u_i^j, terdapat dua kasus pelabelan, yaitu untuk i = 1 dan i = 2, 3, …, n_j. Nilai $\alpha\left(1,i-1\right)=0$ saat i = 1. Dengan demikian bobot dari simpul u_1^j ialah,

$$w_{\lambda_7}\left(u_1^j\right)=\lambda_7\left(u_1^j\right)+\lambda_7\left(u_{n_j}^j u_1^j\right)+\lambda_7\left(u_1^j u_2^j\right)+\lambda_7\left(u_1^j v_1^j\right)$$

$$=\left(1+\sum_{l=1}^{j-1}n_l\right)+\left(n_j+4\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+\left(1+4\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+$$

$$\left(\left(n_j+1-1\right)+2\sum_{l=1}^{t}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l\right)$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+\left(2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2n_j-2\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+2$$

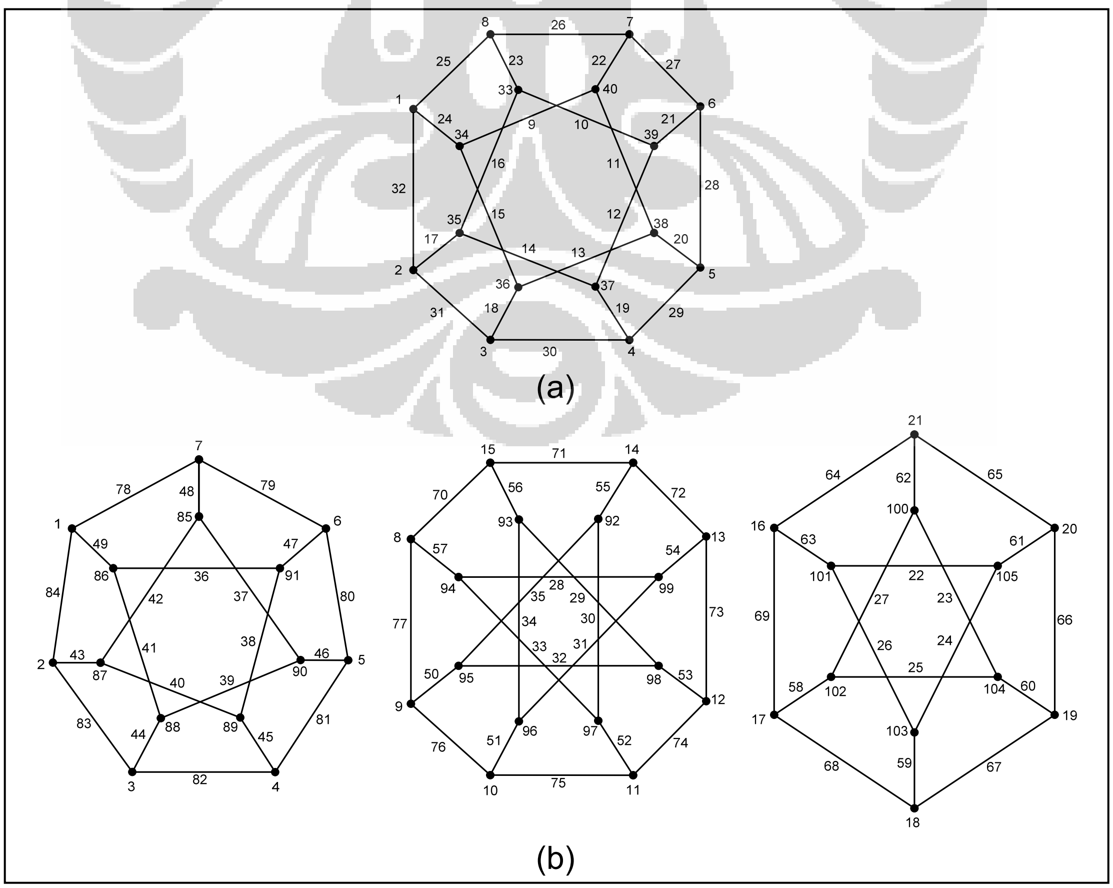
$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+2.$$

Apabila i = 2, 3, …, n_j, nilai $\alpha\left(1,i-1\right)=1$. Sehingga bobot dari simpul u_i^j adalah,

$$
\begin{aligned}
w_{\lambda_7}\left(u_i^j\right) &= \lambda_7\left(u_i^j\right)+\lambda_7\left(u_{i-1}^j u_i^j\right)+\lambda_7\left(u_i^j u_{i+1}^j\right)+\lambda_7\left(u_i^j v_i^j\right) \\
&= \left(\left(n_j+1-i\right)+1+\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right)+\left(\left(i-1\right)+4\sum_{l=1}^{t} n_l-\sum_{l=1}^{j} n_l\right)+ \\
&\quad \left(i+4\sum_{l=1}^{t} n_l-\sum_{l=1}^{j} n_l\right)+\left(\left(n_j+1-i\right)+2\sum_{l=1}^{t} n_l+\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) \\
&= 10\sum_{l=1}^{t} n_l+\left(2\sum_{l=1}^{j-1} n_l+2n_j-2\sum_{l=1}^{t} n_l\right)+2 \\
&= 10\sum_{l=1}^{t} n_l+2.
\end{aligned}
$$

Terlihat bahwa bobot semua simpul dalam v_i^j dan simpul luar u_i^j

bernilai konstan, yaitu $10\sum_{l=1}^{t} n_l+2.$ Pelabelan λ_7 merupakan PTSA gabungan



Gambar 4.1.1: PTSA dari $P(8,2)$ (a); PTSA dari $P(7,2)\cup P(8,3)\cup P(6,2)$ (b).

tak-terhubung t graf Petersen diperumum. Dengan demikian telah terbukti gabungan tak-terhubung t graf Petersen diperumum $P(n_1,m_1)\cup P(n_2,m_2)\cup \cdots \cup P(n_t,m_t)$ memiliki PTSA dengan konstanta ajaib $k=10\sum_{l=1}^{t} n_l + 2$, dimana $n_j \geq 3$, $1 \leq m_j \leq \left\lfloor \frac{n_j - 1}{2} \right\rfloor$ untuk setiap $j = 1,2,...,t$ dan $t \geq 1$. □

Pada Gambar 4.1.1.a diberikan contoh PTSA dari graf $P(8,2)$ dengan konstanta ajaib k = 10(8) + 2 = 82. Gambar 4.1.1.b merupakan contoh PTSA dari gabungan 3 graf Petersen diperumum $P(7,2)\cup P(8,3)\cup P(6,2)$ dengan konstanta ajaib k = 10(7+8+6) + 2 = 212.

Pada bagian selanjutnya akan dibahas (a,d)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf Petersen diperumum untuk nilai-nilai d = 2 dan 3.

4.2 (*a,d*)-PTSAA dari Graf Petersen Diperumum

Suatu pelabelan disebut (a,d)-PTSAA dari graf $G(V,E)$ bila himpunan semua bobot simpul membentuk suatu barisan aritmatika dengan suku awal a dan beda d, dimana a > 0 dan $d \geq 0$. Konstruksi (a,0)-PTSAA telah diberikan pada pembuktian teorema 4.1.1. Dalam bagian ini akan dibahas teorema mengenai konstruksi (*a,d*)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung *t* graf Petersen diperumum yang tidak harus saling isomorfik.

Teorema berikut menyatakan bahwa gabungan gaf Petersen diperumum memiliki (*a,d*)-PTSAA untuk *d* = 2.

Teorema 4.2.1 Untuk $n_j \geq 3$, $1 \leq m_j \leq \left\lfloor \frac{n_j - 1}{2} \right\rfloor$ dan $t \geq 1$, gabungan tak-terhubung *t* graf Petersen diperumum $P(n_1,m_1) \cup P(n_2,m_2) \cup \cdots \cup P(n_t,m_t)$ memiliki suatu (*a*,2)-PTSAA untuk $a = 8\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$.

Bukti. Misalkan v_i^j merupakan simpul dalam, u_i^j merupakan simpul luar, $v_i^j v_{i+m}^j$ merupakan busur dalam, $u_i^j v_i^j$ merupakan jeruji, dan $u_i^j u_{i+1}^j$ merupakan busur dalam. Didefinisikan pelabelan λ_8 pada semua simpul dan semua busur $P(n_1,m_1) \cup P(n_2,m_2) \cup \cdots \cup P(n_t,m_t)$ sebagai berikut,

$$\lambda_8(u_i^j) = \left(n_j + 1 - i\right)\alpha\left(1, i-1\right) + 1 + 4\sum_{l=1}^{t} n_l - \sum_{l=1}^{j} n_l$$

$$\lambda_8(v_i^j) = \left(m_j + 1 - i\right)\alpha\left(i, m_j\right) + \left(n_j + m_j + 1 - i\right)\alpha\left(m_j + 1, i\right) + 2\sum_{l=1}^{t} n_l - \sum_{l=1}^{j} n_l$$

$$\lambda_8(u_i^j u_{i+1}^j) = i + \sum_{l=1}^{j-1} n_l$$

$$\lambda_8(u_i^j v_i^j) = i + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4\sum_{l=1}^{t} n_l$$

$$\lambda_8(v_i^j v_{i+m_j}^j) = i + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2\sum_{l=1}^{t} n_l$$

dimana $\alpha(x,y)=\begin{cases}1 & ,x\le y\\ 0 & ,x>y\end{cases}.$

Berdasarkan pelabelan λ_8 dapat dibuktikan bahwa gabungan tak-terhubung graf Petersen diperumum memiliki (a,2)-PTSAA dengan nilai $a=8\sum_{l=1}^{t}n_l+3$.

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa pelabelan λ_8 merupakan pemetaan bijektif dari $V\cup E$ ke $1,2,\ldots,5\sum_{l=1}^{t}n_l$. Berdasarkan pelabelan λ_8 diperoleh bahwa label semua simpul dan semua busur dari gabungan tak-terhubung t graf Petersen diperumum $P(n_1,m_1)\cup P(n_2,m_2)\cup\cdots\cup P(n_t,m_t)$ adalah

$\lambda_8(V)=\{\sum_{l=1}^{t}n_l+1,\sum_{l=1}^{t}n_l+2,\ldots,2\sum_{l=1}^{t}n_l\}\cup\{3\sum_{l=1}^{t}n_l+1,3\sum_{l=1}^{t}n_l+2,\ldots,4\sum_{l=1}^{t}n_l\}$ dan

$\lambda_8(E)=\{1,2,\ldots,\sum_{l=1}^{t}n_l\}\cup\{2\sum_{l=1}^{t}n_l+1,2\sum_{l=1}^{t}n_l+2,\ldots,3\sum_{l=1}^{t}n_l\}\cup\{4\sum_{l=1}^{t}n_l+1,4\sum_{l=1}^{t}n_l+2,$ $\ldots,5\sum_{l=1}^{t}n_l\}$. Terlihat bahwa label dari semua simpul dan busur adalah berbeda dan kedua himpunan saling melengkapi, sehingga telah terbukti bahwa pemetaan bijektif dari $V\cup E$ ke $1,\ 2,\ldots,\ 5\sum_{l=1}^{t}n_l$.

Bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j atas pelabelan λ_8 dinyatakan sebagai berikut,

$$w_{\lambda_8}\left(v_i^j\right)=\lambda_8\left(v_i^j\right)+\lambda_8\left(v_{i-m_j}^j v_i^j\right)+\lambda_8\left(v_i^j v_{i+m_j}^j\right)+\lambda_8\left(u_i^j v_i^j\right)$$

dan

$$w_{\lambda_8}\left(u_i^j\right) = \lambda_8\left(u_i^j\right) + \lambda_8\left(u_{i-1}^j u_i^j\right) + \lambda_8\left(u_i^j u_{i+1}^j\right) + \lambda_8\left(u_i^j v_i^j\right).$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa semua bobot simpul dalam dan simpul luar membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 8\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$ dan beda d = 2.

Pembuktian untuk bobot dari semua simpul luar dibedakan menjadi dua kasus, yaitu kasus $i \le m_j$ dan $i > m_j$. Hal ini dikarenakan label dari simpul dalam juga dibagi menjadi dua kasus, yaitu kasus $i \le m_j$ dan $i > m_j$. Untuk kasus $i \le m_j$, nilai $\alpha(i,m_j) = 1$ dan $\alpha(m_j+1,i) = 0$, sehingga bobot dari simpul dalam v_i^j adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} w_{\lambda_8}\left(v_i^j\right) &= \lambda_8\left(v_i^j\right) + \lambda_8\left(v_{i-m_j}^j v_i^j\right) + \lambda_8\left(v_i^j v_{i+m_j}^j\right) + \lambda_8\left(u_i^j v_i^j\right) \\ &= \left(\left(m_j + 1 - i\right) + 2\sum_{l=1}^{t} n_l - \sum_{l=1}^{j} n_l\right) + \left(\left(n_j - m_j + i\right) + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2\sum_{l=1}^{t} n_l\right) + \\ &\quad \left(i + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2\sum_{l=1}^{t} n_l\right) + \left(i + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 4\sum_{l=1}^{t} n_l\right) \\ &= 10\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + \left(-\sum_{l=1}^{j} n_l + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + n_j\right) + 1 + 2i \\ &= 10\sum_{l=1}^{t} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 1 + 2i. \end{aligned}$$

Untuk kasus $i > m_j$ diperoleh nilai $\alpha(i,m_j) = 0$ dan $\alpha(m_j+1,i) = 1$. Sehingga bobot dari simpul dalam v_i^j adalah sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
w_{\lambda_8}\left(v_i^j\right) &= \lambda_8\left(v_i^j\right)+\lambda_8\left(v_{i-m_j}^j v_i^j\right)+\lambda_8\left(v_i^j v_{i+m_j}^j\right)+\lambda_8\left(u_i^j v_i^j\right)\\
&=\left(\left(n_j+m_j+1-i\right)+2\sum_{l=1}^{t} n_l-\sum_{l=1}^{j} n_l\right)+\left(\left(i-m_j\right)+\sum_{l=1}^{j-1} n_l+2\sum_{l=1}^{t} n_l\right)+\\
&\quad\left(i+\sum_{l=1}^{j-1} n_l+2\sum_{l=1}^{t} n_l\right)+\left(i+\sum_{l=1}^{j-1} n_l+4\sum_{l=1}^{t} n_l\right)\\
&=10\sum_{l=1}^{t} n_l+2\sum_{l=1}^{j-1} n_l+\left(-\sum_{l=1}^{j} n_l+\sum_{l=1}^{j-1} n_l+n_j\right)+1+2i\\
&=10\sum_{l=1}^{t} n_l+2\sum_{l=1}^{j-1} n_l+1+2i.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya pembuktian untuk bobot simpul luar dibedakan menjadi dua kasus pelabelan, yaitu untuk *i* = 1 dan *i* = 2, 3, …, n_j. Nilai $\alpha(1, i-1)=0$ bila *i* = 1, dan dengan demikian bobot dari simpul u_1^j ialah,

$$
\begin{aligned}
w_{\lambda_8}\left(u_1^j\right) &= \lambda_8\left(u_1^j\right)+\lambda_8\left(u_{n_j}^j u_1^j\right)+\lambda_8\left(u_1^j u_2^j\right)+\lambda_8\left(u_1^j v_1^j\right)\\
&=\left(1+4\sum_{l=1}^{t} n_l-\sum_{l=1}^{j} n_l\right)+\left(n_j+\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right)+\\
&\quad\left(1+\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right)+\left(1+\sum_{l=1}^{j-1} n_l+4\sum_{l=1}^{t} n_l\right)\\
&=8\sum_{l=1}^{t} n_l+2\sum_{l=1}^{j-1} n_l+\left(-\sum_{l=1}^{j} n_l+\sum_{l=1}^{j-1} n_l+n_j\right)+3\\
&=8\sum_{l=1}^{t} n_l+2\sum_{l=1}^{j-1} n_l+3.
\end{aligned}
$$

Apabila *i* = 2, 3, …, n_j, maka nilai $\alpha(1, i-1)=1$ dan bobot dari simpul u_i^j adalah,

$$w_{\lambda_8}\left(u_i^j\right)=\lambda_8\left(u_i^j\right)+\lambda_8\left(u_{i-1}^j u_i^j\right)+\lambda_8\left(u_i^j u_{i+1}^j\right)+\lambda_8\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$=\left(\left(n_j+1-i\right)+1+4\sum_{l=1}^{t}n_l-\sum_{l=1}^{j}n_l\right)+\left(\left(i-1\right)+\sum_{l=1}^{j-1}n_l\right)+$$

$$\left(i+\sum_{l=1}^{j-1}n_l\right)+\left(i+\sum_{l=1}^{j-1}n_l+4\sum_{l=1}^{t}n_l\right)$$

$$=8\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+\left(-\sum_{l=1}^{j}n_l+\sum_{l=1}^{j-1}n_l+n_j\right)+1+2i$$

$$=8\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+1+2i.$$

Dengan demikian diperoleh bahwa untuk i = 1, 2, …, n_j

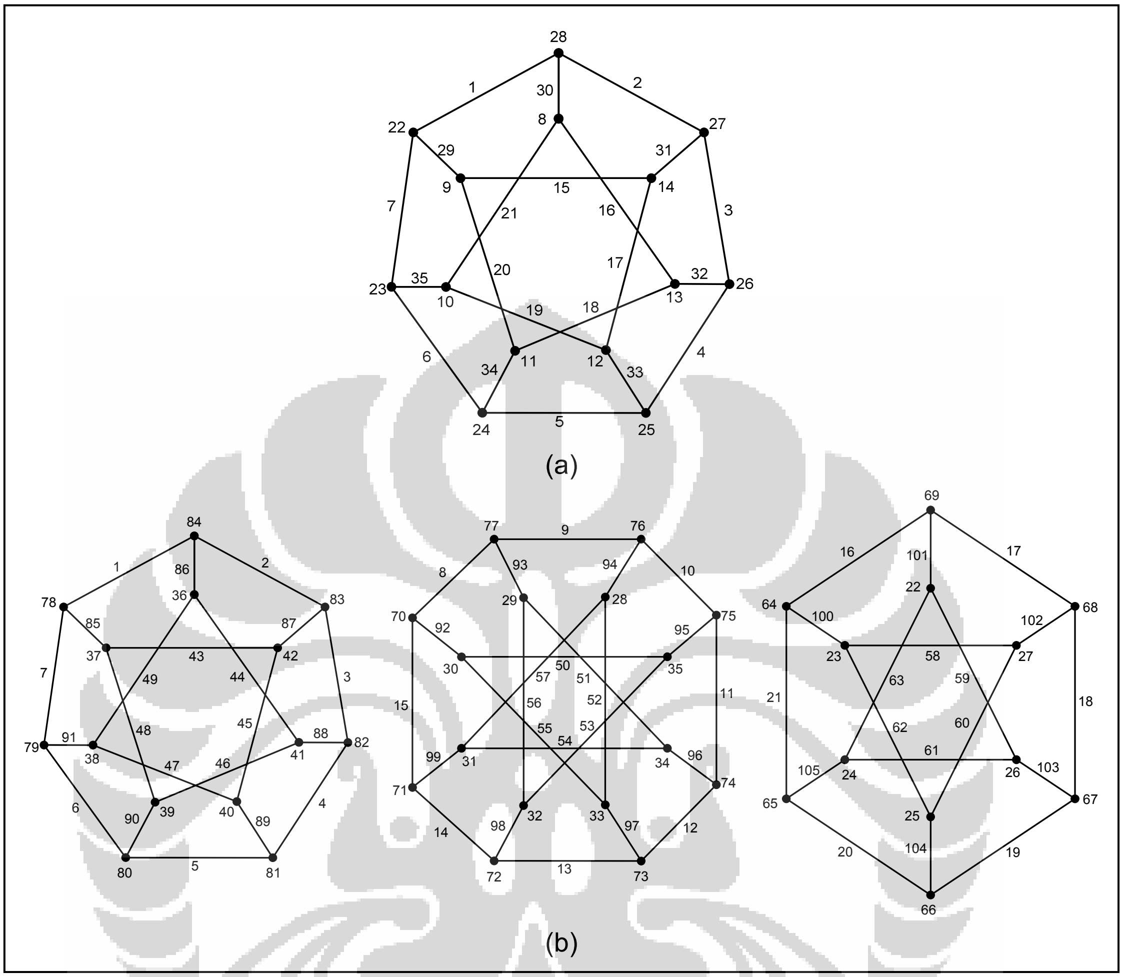
$$w_{\lambda_8}\left(v_i^j\right)=10\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+1+2i$$

dan

$$w_{\lambda_8}\left(u_i^j\right)=8\sum_{l=1}^{t}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+1+2i,$$

dimana bobot terkecil terdapat pada simpul u_1^1, yaitu $8\sum_{l=1}^{t}n_l+3$. Himpunan bobot dari semua simpul ialah $W=\{w_{\lambda_8}\left(v_i^j\right)\mid v_i^j\in V_j\}\cup\{w_{\lambda_8}\left(u_i^j\right)\mid u_i^j\in V_j\}=$ $\{10\sum_{l=1}^{t}n_l+3,\ 10\sum_{l=1}^{t}n_l+5,\ldots,\ 12\sum_{l=1}^{t}n_l+1\}\cup\{8\sum_{l=1}^{t}n_l+3, 8\sum_{l=1}^{t}n_l+5,\ldots,10\sum_{l=1}^{t}n_l+1\}$.

Terlihat bahwa bobot dari semua simpul membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a=8\sum_{l=1}^{t}n_l+3$ dan beda d = 2. Jadi, pelabelan λ_8 adalah pelabelan ($8\sum_{l=1}^{t}n_l+3$, 2)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung t graf Petersen diperumum. □



Gambar 4.2.1: (59,2)-PTSAA dari $P(7,2)$ (a); (171,2)-PTSAA dari $P(7,2) \cup P(8,3) \cup P(6,2)$ (b).

Gambar 4.2.1.a merupakan (59,2)-PTSAA dari graf $P(7,2)$. Dan Gambar 4.2.1.b merupakan (171,2)-PTSAA dari gabungan 3 graf Petersen diperumum $P(7,2) \cup P(8,3) \cup P(6,2)$. Pada teorema berikut akan diberikan $(a,3)$-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf Petersen diperumum beserta konstruksi pelabelannya.

Teorema 4.2.2 Gabungan tak-terhubung *t* graf Petersen diperumum $P(n_1,m_1) \cup P(n_2,m_2) \cup \cdots \cup P(n_t,m_t)$ memiliki (*a*,3)-PTSAA dengan $a = 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$ untuk $n_j \geq 3$, $1 \leq m_j \leq \left\lfloor \frac{n_j - 1}{2} \right\rfloor$, *j* = 1, 2, ..., *t* dan $t \geq 1$.

Bukti. Pada semua simpul dan busur pada graf Petersen diperumum ke-*j* didefinisikan pelabelan λ_9 sebagai berikut,

$$\lambda_9(u_i^j) = 2\left(n_j + 1 - i\right)\alpha\left(1, i-1\right) + 2 - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 5\sum_{l=1}^{t} n_l$$

$$\lambda_9(v_i^j) = 2\left(m_j + 1 - i\right)\alpha\left(i, m_j\right) + 2\left(n_j + m_j + 1 - i\right)\alpha\left(m_j + 1, i\right) - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2\sum_{l=1}^{t} n_l$$

$$\lambda_9(u_i^j u_{i+1}^j) = \left(2i - 1\right) + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l$$

$$\lambda_9(u_i^j v_i^j) = i + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2\sum_{l=1}^{t} n_l$$

$$\lambda_9(v_i^j v_{i+m_j}^j) = \left(2i - 1\right) + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 3\sum_{l=1}^{t} n_l$$

dimana $\alpha\left(x,y\right) = \begin{cases} 1 & , x \leq y \\ 0 & , x > y \end{cases}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pelabelan λ_9 merupakan (*a*,*d*)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf Petersen diperumum, dimana $a = 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$ dan *d* = 3. Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa pelabelan λ_9 merupakan pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke $1, 2, \ldots, 5\sum_{l=1}^{t} n_l$.

Berdasarkan pelabelan λ_9 diperoleh bahwa label semua simpul dan semua busur dari gabungan tak-terhubung *t* graf Petersen diperumum adalah

$\lambda_9(V) = \{2,4,\ldots,2\sum_{l=1}^{t} n_l\} \cup \{3\sum_{l=1}^{t} n_l + 2, 3\sum_{l=1}^{t} n_l + 4, \ldots, 5\sum_{l=1}^{t} n_l\}$ dan $\lambda_9(E) = \{1,3,\ldots,$

$2\sum_{l=1}^{t} n_l - 1\} \cup \{2\sum_{l=1}^{t} n_l + 1, 2\sum_{l=1}^{t} n_l + 2, \ldots, 3\sum_{l=1}^{t} n_l\} \cup \{3\sum_{l=1}^{t} n_l + 1, 3\sum_{l=1}^{t} n_l + 3, \ldots, 5\sum_{l=1}^{t} n_l - 1\}$.

Semua simpul dan busur memiliki label yang berbeda dan saling melengkapi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pelabelan λ_9 merupakan suatu pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke $1,2,\ldots,5\sum_{l=1}^{t} n_l$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa bobot semua simpul dalam dan simpul luar berdasarkan definisi pelabelan λ_9 membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$ dan beda 3.

Pelabelan λ_9 menghasilkan bobot dari sembarang simpul dalam v_i^j dan sembarang simpul luar u_i^j sebagai berikut,

$$w_{\lambda_9}(v_i^j) = \lambda_9(v_i^j) + \lambda_9(v_{i-m_j}^j v_i^j) + \lambda_9(v_i^j v_{i+m_j}^j) + \lambda_9(u_i^j v_i^j)$$

dan

$$w_{\lambda_9}(u_i^j) = \lambda_9(u_i^j) + \lambda_9(u_{i-1}^j u_i^j) + \lambda_9(u_i^j u_{i+1}^j) + \lambda_9(u_i^j v_i^j).$$

Karena label dari simpul dalam dibagi menjadi dua kasus, yaitu kasus $i \le m_j$ dan $i > m_j$, maka pembuktian untuk bobot simpul dalam akan dibedakan menjadi dua bagian. Ketika $i \le m_j$ diperoleh nilai $\alpha(i,m_j) = 1$ dan $\alpha(m_j+1,i) = 0$. Sehingga diperoleh bobot simpul dalam v_i^j adalah sebagai berikut,

$$w_{\lambda_9}\left(v_i^j\right)=\lambda_9\left(v_i^j\right)+\lambda_9\left(v_{i-m_j}^j v_i^j\right)+\lambda_9\left(v_i^j v_{i+m_j}^j\right)+\lambda_9\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$=\left(2\left(n_j+m_j+1-i\right)-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l\right)+\left(\left(2\left(n_j-m_j+i\right)-1\right)+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+\right.$$

$$\left.3\sum_{l=1}^{t}n_l\right)+\left((2i-1)+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+3\sum_{l=1}^{t}n_l\right)+\left(i+\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l\right)$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+3\sum_{l=1}^{j-1}n_l+\left(-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2n_j\right)+3i$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+3\sum_{l=1}^{j-1}n_l+3i.$$

Sedangkan ketika $i > m_j$ diperoleh nilai $\alpha(i,m_j) = 0$ dan $\alpha(m_j+1,i) = 1$. Dengan demikian bobot dari simpul dalam v_i^j adalah sebagai berikut,

$$w_{\lambda_9}\left(v_i^j\right)=\lambda_9\left(v_i^j\right)+\lambda_9\left(v_{i-m_j}^j v_i^j\right)+\lambda_9\left(v_i^j v_{i+m_j}^j\right)+\lambda_9\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$=\left(2\left(m_j+1-i\right)-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l\right)+\left(\left(2\left(i-m_j\right)-1\right)+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+\right.$$

$$\left.3\sum_{l=1}^{t}n_l\right)+\left((2i-1)+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+3\sum_{l=1}^{t}n_l\right)+\left(i+\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2\sum_{l=1}^{t}n_l\right)$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+3\sum_{l=1}^{j-1}n_l+\left(-2\sum_{l=1}^{j}n_l+2\sum_{l=1}^{j-1}n_l+2n_j\right)+3i$$

$$=10\sum_{l=1}^{t}n_l+3\sum_{l=1}^{j-1}n_l+3i.$$

Untuk pembuktian bobot simpul luar dibedakan menjadi dua kasus pelabelan, yaitu untuk $i = 1$ dan $i = 2, 3, \ldots, n_j$ sebab label simpul luar juga dibedakan sesuai dengan kedua kasus tersebut. Apabila $i = 1$, maka nilai $\alpha\left(1,i-1\right)=0$. Sehingga diperoleh bobot dari simpul luar u_1^j sebagai berikut,

$$w_{\lambda_9}\left(u_1^j\right) = \lambda_9\left(u_1^j\right) + \lambda_9\left(u_{n_j}^j u_1^j\right) + \lambda_9\left(u_1^j u_2^j\right) + \lambda_9\left(u_1^j v_1^j\right)$$

$$= \left(2 - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 5\sum_{l=1}^{t} n_l\right) + \left(\left(2n_j - 1\right) + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) +$$

$$\left(\left(2-1\right) + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) + \left(1 + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2\sum_{l=1}^{t} n_l\right)$$

$$= 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3\sum_{l=1}^{j-1} n_l + \left(-2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2n_j\right) + 3$$

$$= 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 3.$$

Sedangkan bila i = 2, 3, …, n_j, maka nilai $\alpha\left(1, i-1\right) = 1$ dan bobot dari simpul u_i^j adalah,

$$w_{\lambda_9}\left(u_i^j\right) = \lambda_9\left(u_i^j\right) + \lambda_9\left(u_{i-1}^j u_i^j\right) + \lambda_9\left(u_i^j u_{i+1}^j\right) + \lambda_9\left(u_i^j v_i^j\right)$$

$$= \left(2\left(n_j + 1 - i\right) + 2 - 2\sum_{l=1}^{j} n_l + 5\sum_{l=1}^{t} n_l\right) + \left(\left(2\left(i-1\right) - 1\right) + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) +$$

$$\left(\left(2i - 1\right) + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l\right) + \left(i + \sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2\sum_{l=1}^{t} n_l\right)$$

$$= 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3\sum_{l=1}^{j-1} n_l + \left(-2\sum_{l=1}^{j} n_l + 2\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 2n_j\right) + 3i$$

$$= 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 3i.$$

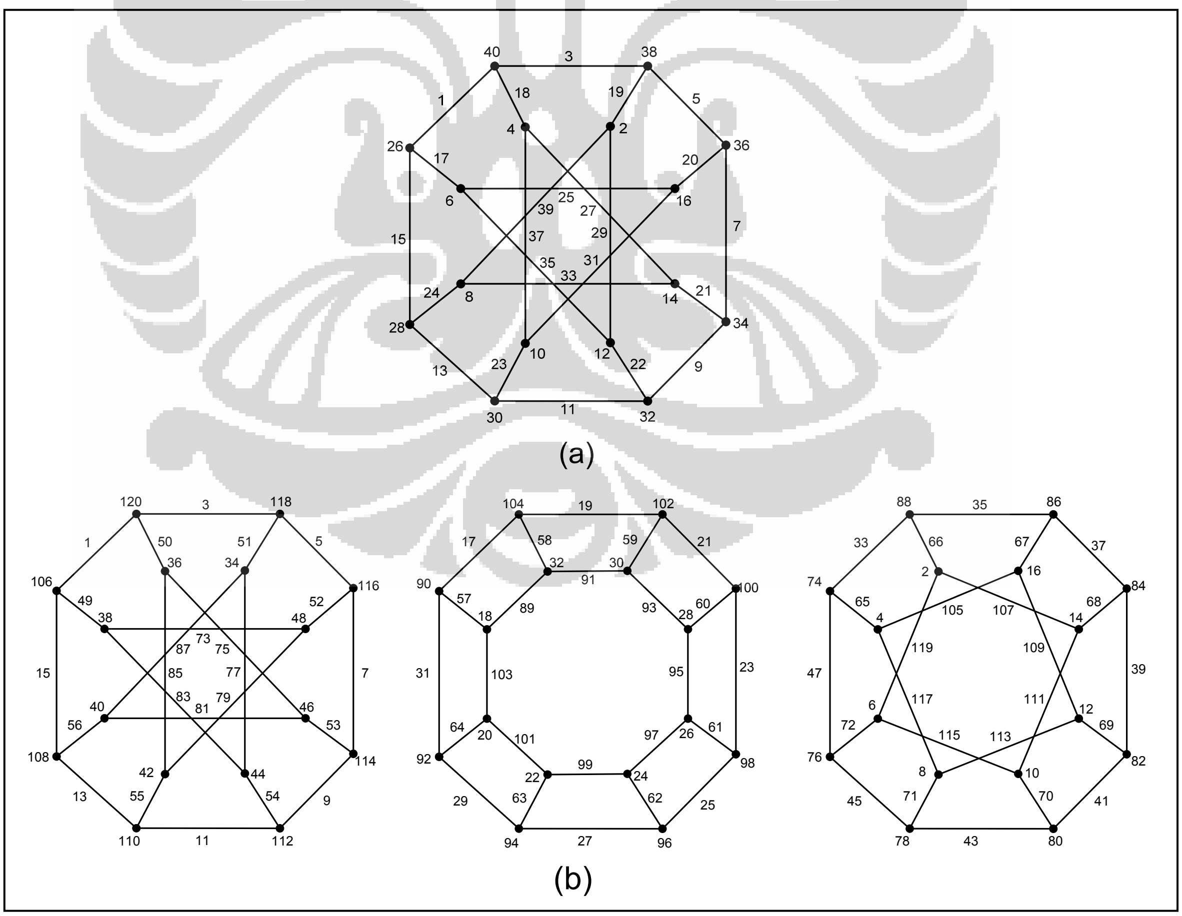
Sehingga bobot dari semua simpul dalam dan simpul luar, v_i^j dan u_i^j untuk i = 1, 2, …, n_j, dapat dinyatakan sebagai berikut ,

$$w_{\lambda_9}\left(v_i^j\right) = 10\sum_{l=1}^{t} n_l + 3\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 3i$$

dan

$$w_{\lambda_9}\left(u_i^j\right) = 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3\sum_{l=1}^{j-1} n_l + 3i$$

dengan bobot terkecil terdapat pada simpul u_1^1, yaitu $7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$. Himpunan bobot semua simpul dalam dan simpul luar dari gabungan tak-terhubung t graf Petersen diperumum atas pelabelan λ_9 adalah $W = \{w_{\lambda_9}\left(v_i^j\right) \mid v_i^j \in V_j\} \cup \{w_{\lambda_9}\left(u_i^j\right) \mid u_i^j \in V_j\} = \{10\sum_{l=1}^{t} n_l + 3, 10\sum_{l=1}^{t} n_l + 6, \ldots, 13\sum_{l=1}^{t} n_l\} \cup \{7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3, 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 6, \ldots, 10\sum_{l=1}^{t} n_l\}$. Terlihat bahwa bobot dari semua simpul membentuk barisan



Gambar 4.2.2: (59,3)-PTSAA dari $P(8,3)$ (a); (171,3)-PTSAA dari $P(8,3) \cup P(8,1) \cup P(8,2)$ (b).

aritmatika dengan suku awal $a = 7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$ dan beda d = 3. Jadi, pelabelan λ_8 adalah pelabelan ($7\sum_{l=1}^{t} n_l + 3$,3)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung t graf Petersen diperumum. □

Contoh dari (a,3)-PTSAA dapat dilihat pada Gambar 4.2.2. Pada Gambar 4.2.2.a merupakan contoh dari (a,3)-PTSAA pada graf P(7,2). Dan Gambar 4.2.2.b merupakan contoh (171,3)-PTSAA dari gabungan 3 graf Petersen diperumum $P(8,3) \cup P(8,1) \cup P(8,2)$.

Pada bab ini telah dibahas (a,d)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf Petersen diperumum untuk nilai $d \in \{0,2,3\}$. Hasil rangkuman pembahasan dari skripsi ini akan disimpulkan pada bab berikutnya.