BAB II

TEORI GRAF DAN PELABELAN GRAF

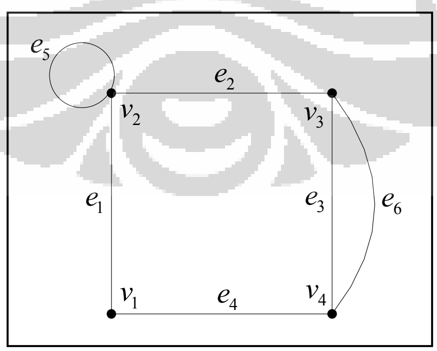
Dalam bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari teori graf, serta akan dijelaskan beberapa jenis pelabelan graf yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya.

2.1 Teori Graf

Suatu **graf** $G = (V,E)$ terdiri atas himpunan $V = \{v_1, v_2, ...\}$ yang disebut **himpunan simpul**, dan himpunan $E = \{e_1, e_2, ...\}$, dimana anggotanya disebut **busur** yang dinyatakan sebagai pasangan tak-terurut dari simpul-simpul pada V. Himpunan busur dapat berupa himpunan kosong (disebut juga graf kosong). Banyak simpul yang ada pada graf G dinyatakan sebagai $|V(G)|$ atau $|V|$. Banyak busur yang ada pada graf G dinyatakan sebagai $|E(G)|$ atau $|E|$. Apabila $|V|$ berhingga, maka graf G disebut **graf berhingga**. Suatu graf G disebut **graf berarah** bila anggota himpunan busur dari graf G merupakan pasangan terurut dari simpul-simpul di $V(G)$. Apabila anggota himpunan busur dari graf G bukan merupakan pasangan terurut dari simpul, maka graf G disebut **graf tak-berarah**.

Pada suatu graf, dua simpul dikatakan **bertetangga** bila terdapat satu atau lebih busur yang menghubungkan keduanya. Suatu busur dikatakan hadir pada suatu simpul bila simpul itu merupakan salah satu ujung dari busur tersebut. Suatu busur yang memiliki simpul ujung yang sama disebut **gelang**. Dua busur pada suatu graf dikatakan **busur ganda** bila kedua busur tersebut memiliki simpul ujung yang sama. Graf yang tidak mengandung gelang dan busur ganda disebut sebagai **graf sederhana**.

Suatu graf secara umum direpresentasikan dalam bentuk gambar, dimana simpul-simpul direpresentasikan sebagai titik-titik dan busur-busur direpresentasikan sebagai segmen garis yang menghubungkan simpul-simpul. Pada Gambar 2.1.1 diberikan graf G_1 yang mempunyai $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, dimana e_5 merupakan gelang dan $\{e_3, e_6\}$ merupakan busur ganda dari G_1. Jumlah simpul dan busur pada graf G_1 adalah $n = 4$ dan $e = 6$.



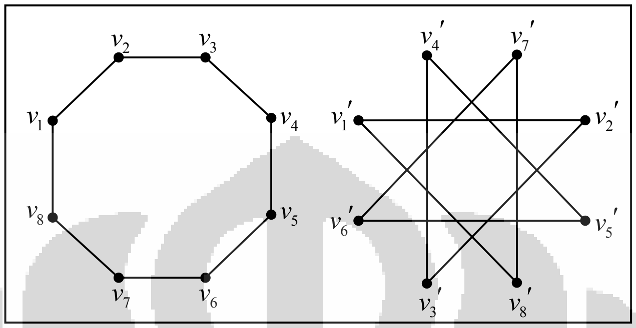
Gambar 2.1.1: Contoh Graf.

Jumlah busur yang hadir pada suatu simpul v disebut sebagai **derajat** (*degree*) dari simpul v (ditulis d(v)). Simpul dengan d(v) = 0 disebut **simpul terpencil** (*isolated vertex*) dan simpul dengan d(v) = 1 disebut **simpul**

terminal (*terminal vertex*). Derajat terkecil dari suatu graf *G* dinyatakan sebagai $\delta = \delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$ dan derajat terbesar dinyatakan sebagai $\Delta = \Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$. Apabila $\delta = \Delta = r$, maka graf *G* disebut **graf teratur berderajat *r*** (*r-regular graph*). Pada Gambar 2.1.1, graf G_1 memiliki $\delta = 2\ (d(v_1))$ dan $\Delta = 4\ (d(v_2))$, dimana graf G_1 bukan graf teratur.

Suatu deretan busur-busur yang membentuk suatu sambungan yang tidak putus pada *G* disebut **jalan** (*walk*). Apabila pada jalan memiliki deretan busur-busur yang tidak berulang, maka jalan tersebut adalah **jalur** (*trail*). Jalur dengan deretan simpul-simpul yang tidak berulang disebut juga **lintasan** (*path*). Suatu lintasan dari dua simpul ialah barisan busur yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Suatu graf tak-berarah *G* disebut **graf terhubung** (*connected graph*) bila terdapat suatu lintasan yang menghubungkan setiap pasang simpul di *G.* Apabila tidak terdapat suatu lintasan yang menghubungkan satu pasang atau lebih simpul di *G,* maka graf *G* disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

Dua graf *G* dan *G'* disebut **isomorfik** (*isomorphic*) bila terdapat pemetaan satu-satu *f* dari *G* ke *G'* dan memenuhi syarat bahwa $f(v_1)$ dan $f(v_2)$ bertetangga jika dan hanya jika v_1 dan v_2 bertetangga, dimana hal ini berlaku untuk semua simpul di *G* dan *G'.* Kedua graf pada Gambar 2.1.2 dikatakan isomorfik karena terdapat pemetaan satu-satu *f* : $\{(v_1,v_1'),(v_2,v_2'),(v_3,v_3'),$ $(v_4,v_4'),(v_5,v_5'),(v_6,v_6'),(v_7,v_7'),(v_8,v_8')\}$, dimana terlihat bahwa jika kedua simpul v_i dan v_j bertetangga pada graf *G*, peta dari kedua simpul tersebut, v_i' dan v_j' juga bertetangga untuk $i = 1, 2, \ldots, 8$, $j = 1, 2, \ldots, 8$, dan $i \neq j$.

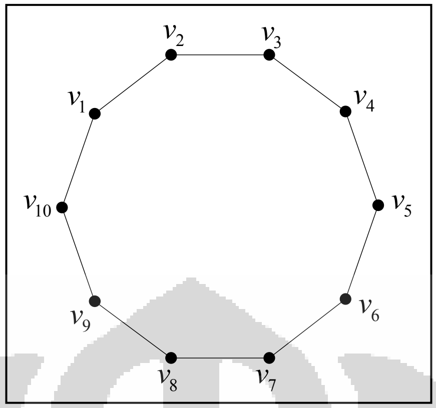


Gambar 2.1.2: Contoh dua graf isomorfik.

Dalam skripsi ini akan digunakan graf berhingga, sederhana, dan tak-berarah. Gabungan graf yang akan dibahas pada bab selanjutnya merupakan graf tak-terhubung yang terdiri dari komponen terhubung yang isomorfik atau tak-isomorfik. Pada bagian berikut akan diberikan jenis-jenis graf yang ada hubungannya dengan pembahasan selanjutnya.

2.2 Jenis-jenis Graf

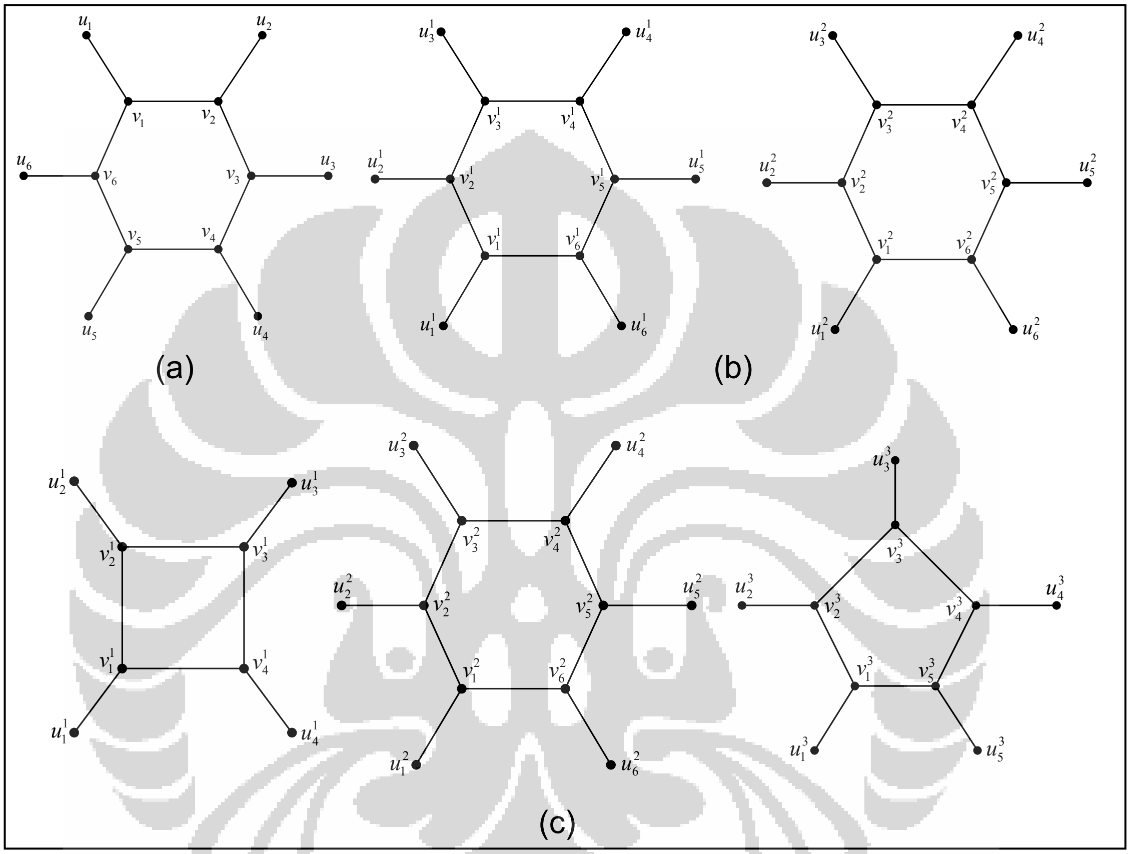
Suatu graf terhubung yang teratur dan berderajat 2 disebut **graf lingkaran** (*cycle graph*). Graf lingkaran dengan *n* simpul, $n \geq 3$ dinyatakan sebagai C_n. Dalam graf lingkaran C_n berlaku $|V(C_n)| = |E(C_n)|$. Pada Gambar 2.2.1 diberikan graf lingkaran dengan 10 simpul (C_{10}).



Gambar 2.2.1: Graf C_{10}.

Graf matahari (*sun graph*) adalah suatu graf lingkaran C_n yang ditambahkan satu simpul terminal pada setiap simpul di C_n. Graf matahari dinyatakan sebagai S_n dengan $V(S_n) = \{v_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{u_i \mid 1 \le i \le n\}$ dan $E(S_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \le i \le n\} \cup \{u_i v_i \mid 1 \le i \le n\}$, dimana v_i adalah **simpul dalam** (*inner vertex*) dan u_i adalah **simpul luar** (*outer vertex*) dari S_n, serta indeks merupakan modulo n. Nilai n menyatakan ukuran dari graf matahari dan mengarah pada banyaknya simpul pada graf lingkaran yang digunakan untuk membentuk graf matahari tersebut. Dalam graf matahari S_n berlaku $|V(S_n)| = |E(S_n)| = 2n$. Gabungan berhingga graf matahari dinyatakan sebagai $S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t}$ dengan $V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t}) = \{v_i^j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le t\} \cup \{u_i^j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le t\}$ dan $E(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t}) = \{v_i^j v_{i+1}^j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le t\} \cup \{u_i^j v_i^j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le t\}$. Dalam gabungan *t* graf matahari $S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t}$ berlaku $\left|V(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t})\right| = \left|E(S_{n_1} \cup S_{n_2} \cup \ldots \cup S_{n_t})\right| = 2\sum_{l=1}^{t} n_l$.

Pada Gambar 2.2.2.a diberikan graf matahari S_6 dengan banyak simpul (dan busur) adalah 2*n* = 2(6) = 12. Pada Gambar 2.2.2.b diberikan



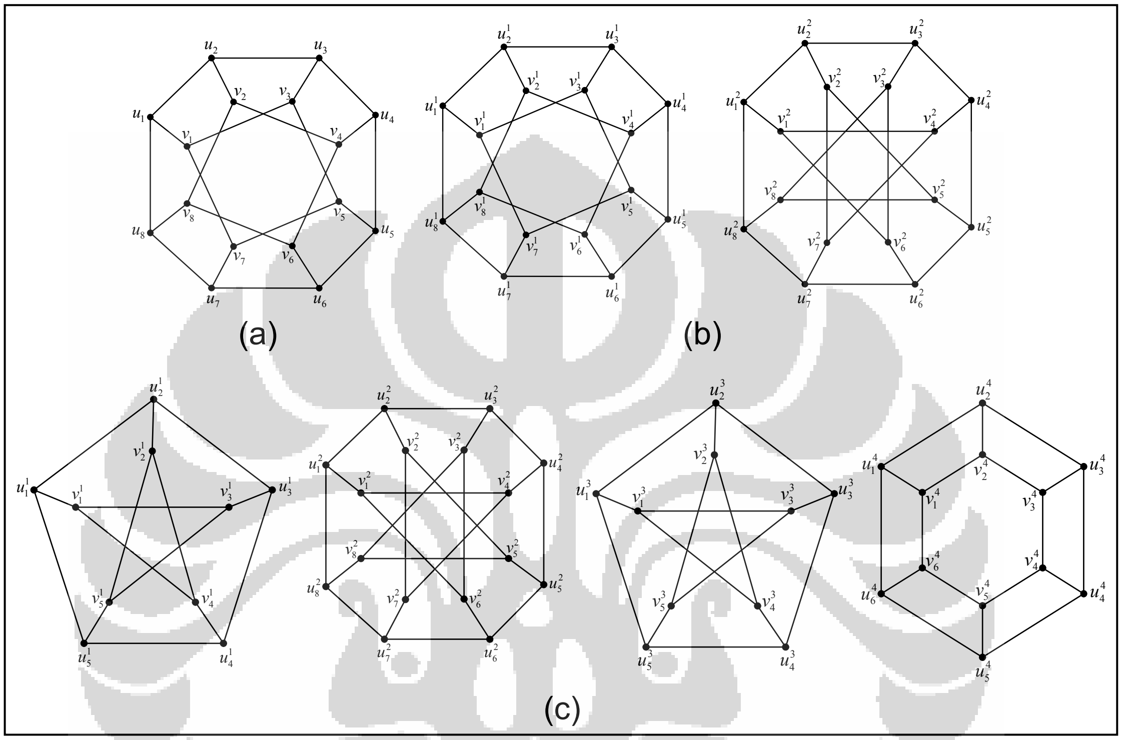
Gambar 2.2.2: Graf S_6 (a); Gabungan isomorfik $S_6 \cup S_6$ (b); Gabungan tak-isomorfik $S_4 \cup S_6 \cup S_5$ (c).

contoh gabungan isomorfik dua graf matahari $S_6 \cup S_6$ dengan banyak simpul (dan busur) adalah 2(2*n*) = 2(2(6)) = 2(12) = 24. Pada Gambar 2.2.2.c diberikan contoh gabungan tak-isomorfik tiga graf matahari $S_4 \cup S_6 \cup S_5$ dengan banyak simpul (dan busur) adalah $2(2\sum_{l=1}^{3} n_l)$ = 2(2(4+6+5)) = 2(30) = 60.

Graf petersen diperumum (*generalized petersen graph*) merupakan graf yang terdiri dari *n* simpul luar u_i, *n* busur luar u_iu_{i+1}, *n* jeruji u_iv_i, *n* simpul dalam v_i dan *n* busur dalam v_iv_{i+m}, $1 \le i \le n$ dengan indeks merupakan modulo dari *n*. Bentuk standar dari graf petersen diperumum adalah *P*(5,2). Graf petersen diperumum dinyatakan sebagai *P*(*n,m*) dengan nilai *n* menyatakan banyaknya simpul luar (sama dengan banyak simpul dalam) dan nilai *m* menyatakan lompatan busur dalam, dimana $n \ge 3,\ 1 \le m \le \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Graf petersen diperumum memiliki $V(P(n,m)) = \{v_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{u_i \mid 1 \le i \le n\}$ dan $E(P(n,m)) = \{u_iu_{i+1} \mid 1 \le i \le n\} \cup \{u_iv_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{v_iv_{i+m} \mid 1 \le i \le n\}$. Graf petersen diperumum merupakan graf teratur berderajat 3 (*r* = 3). Dalam graf petersen diperumum *P*(*n,m*) berlaku $|V(P(n,m))| = \frac{3}{2}|E(P(n,m))|$.

Gabungan sejumlah berhingga graf petersen diperumum dapat dinyatakan sebagai $P(n_1,m_1) \cup P(n_2,m_2) \cup \cdots \cup P(n_t,m_t)$ dengan $V(P(n_1,m_1) \cup P(n_2,m_2) \cup \cdots \cup P(n_t,m_t)) = \{v_i^j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le t\} \cup \{u_i^j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le t\}$ dan $E(P(n_1,m_1) \cup P(n_2,m_2) \cup \cdots \cup P(n_t,m_t)) = \{u_i^jv_i^j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le t\} \cup \{v_i^jv_{i+m}^j \mid 1 \le i \le n\}$. Gambar 2.2.3.a merupakan graf petersen diperumum *P*(8,2) yang terdiri dari 8 simpul luar, 8 busur luar, 8 jeruji, 8 simpul dalam dan 8 busur dalam dengan lompatan busur dalam ialah *m* = 2. Gambar 2.2.3.b ialah gabungan tak-isomorfik 2 graf petersen diperumum $P(8,2) \cup P(8,3)$. Gambar

2.2.3.c adalah contoh gabungan tak-isomorfik 4 graf petersen diperumum $P(5,2) \cup P(8,3) \cup P(5,2) \cup P(6,1)$.



Gambar 2.2.3: Contoh graf $P(8,2)$ (a); Gabungan graf $P(8,2) \cup P(8,3)$ (b); Gabungan graf $P(5,2) \cup P(8,3) \cup P(5,2) \cup P(6,1)$ (c).

Pada bagian selanjutnya akan diberikan beberapa definisi pelabelan graf yang akan digunakan dalam skripsi ini. Jenis-jenis graf yang akan dibahas dalam pembahasan selanjutnya adalah graf matahari dan graf petersen diperumum.

2.3 Pelabelan Graf

Suatu pelabelan dari graf $G(V, E)$ merupakan suatu pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke himpunan asli berurutan yang dimulai dari 1. Apabila daerah asal dari pelabelan berupa himpunan simpul (atau himpunan busur), maka pelabelan tersebut merupakan pelabelan simpul (atau pelabelan busur). Apabila daerah asal merupakan gabungan dari himpunan simpul dan busur, maka pelabelan disebut pelabelan total. Dalam pelabelan graf diperkenalkan juga pelabelan ajaib, pelabelan antiajaib, dan pelabelan (*a,d*)-antiajaib. [Bača dkk. 2003] memperkenalkan definisi pelabelan total simpul antiajaib (PTSAA) dan pelabelan total (*a,d*)-simpul antiajaib ((*a,d*)-PTSAA).

Jumlah dari label simpul dan semua label busur yang hadir pada simpul tersebut sebagai **bobot simpul** (*weight of vertex*). Secara matematis, suatu pemetaan λ dari $V \cup E$ ke $\{1,2,\ldots,|V|+|E|\}$ dengan bobot simpul *x* adalah $\lambda(x)+\sum_{y\in N(x)}\lambda(xy)$, dimana *N*(*x*) merupakan himpunan semua simpul yang bertetangga dengan *x*. Bobot simpul *x* atas pelabelan λ dinyatakan sebagai $w_\lambda(x)$. Pada PTSAA berlaku syarat bahwa semua bobot simpul berbeda nilai. Pada (*a,d*)-PTSAA berlaku syarat bahwa semua bobot simpul membentuk barisan aritmatika. Definisi dari PTSA dan (*a,d*)-PTSAA dari graf *G* didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.1 [Bača dkk. 2003] Suatu pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1,2,\ldots,|V|+|E|\}$ disebut PTSAA dari graf *G* = *G*(*V,E*) bila bobot simpul $w_\lambda(x), \forall x \in V$ saling berbeda nilai.

Definisi 2.2 [Bača dkk. 2003] Suatu pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1, 2, \ldots, |V| + |E|\}$ disebut (*a,d*)-PTSAA dari graf *G*(*V,E*) bila himpunan semua bobot simpul adalah $W = \{w_\lambda(x) | x \in V\} = \{a, a+d, \ldots, a+(n-1)d\}$ untuk suatu bilangan bulat positif *a* dan *d*, dimana *a* > 0 dan $d \geq 0$.

Misalkan suatu graf *G* mempunyai suatu (*a,d*)-PTSAA dan δ adalah derajat terkecil dari *G*, diperoleh bahwa kemungkinan bobot simpul terkecil terjadi pada simpul dengan derajat terkecil. Bobot simpul terkecil adalah 1+ 2 + ... + $(\delta+1)$ atau $(\delta+1)(\delta+2)/2$. Sehingga batas nilai *a* dari suatu (a,d)–PTSAA adalah sebagai berikut

$$a \geq \frac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}. \tag{2.1}$$

Jika Δ adalah derajat terbesar dari *G*, maka kemungkinan bobot terbesar adalah (|*V*| + |*E*| – Δ) + (|*V*| + |*E*| – Δ + 1) + ... + (|*V*| + |*E*| – 1) + (|*V*| + |*E*|). Sehingga diperoleh

$$a + (|V|-1)d \leq \frac{(\Delta+1)\big(2(|V|+|E|)-\Delta\big)}{2}. \tag{2.2}$$

Dari (2.1) dan (2.2), diperoleh batas dari *d* dari suatu (a,d)–PTSAA adalah sebagai berikut

$$d \leq \frac{(\Delta+1)\big(2(|V|+|E|)-\Delta\big)-(\delta+1)(\delta+2)}{2(|V|-1)}. \tag{2.3}$$

Nilai d yang terkecil pada suatu (a,d)-PTSAA adalah d = 0 yang disebut juga **pelabelan total simpul ajaib** (*vertex magic total labeling*) dan dapat disingkat PTSA. Pelabelan ini diperkenalkan oleh [MacDougall dkk. 2002] dan didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.3 [MacDougall dkk. 2002] Suatu pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1,2,\ldots, |V|+|E|\}$ disebut PTSA dari graf $G = G(V,E)$ bila terdapat suatu konstanta k sehingga semua bobot simpul bernilai k. Secara matematis,

$$\lambda(x) + \sum_{y \in N(x)} \lambda(xy) = k$$

dan k disebut konstanta ajaib dari pelabelan λ.

Jika suatu graf teratur memiliki suatu (a,d)-PTSAA, maka dapat dibentuk suatu pelabelan baru dari pelabelan tersebut. Misalkan pada $\lambda : V \cup E \to \{1,2,\ldots,|V|+|E|\}$ didefinisikan suatu pelabelan λ' pada $V \cup E$ seperti berikut

$$\lambda'(x) = |V| + |E| + 1 - \lambda(x), \qquad x \in V$$
$$\lambda'(xy) = |V| + |E| + 1 - \lambda(xy), \qquad xy \in E$$

Sehingga diperoleh $\lambda'(V \cup E) = |V| + |E| + 1 - \lambda(V \cup E) = \{1,2,\ldots,|V|+|E|\}$.

Terlihat bahwa pelabelan bersifat bijektif dari $V \cup E$ ke $\{1,2,\ldots,|V|+|E|\}$.

Pelabelan λ' disebut dual dari λ. Pelabelan dual dari suatu (a,d)-PTSAA mempunyai syarat yang harus dipenuhi, seperti yang diyatakan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.1 [Bača dkk. 2003] Dual dari suatu (*a,d*) - PTSAA pada graf adalah (*a‘,d*) - PTSAA untuk suatu nilai *a‘* jika dan hanya jika *G* adalah graf teratur.

Hasil-hasil penelitian yang telah dipublikasikan lebih banyak membahas tentang pelabelan simpul-ajaib total dari graf terhubung. Untuk graf tak-terhubung, [Wallis 2001] telah membuktikan teorema berikut

Teorema 2.1 [Wallis 2001] Misalkan *G* adalah suatu graf teratur berderajat *r* yang mempunyai suatu PTSA.

(i) Jika *r* genap, maka *tG* mempunyai PTSA untuk bilangan ganjil *t*.

(ii) Jika *r* ganjil, maka *tG* mempunyai PTSA untuk semua bilangan bulat positif *t*.

Pelabelan yang digunakan dalam skripsi ini adalah PTSA dan (*a,d*)-PTSAA dari suatu gabungan graf tak-terhubung yang dibedakan menjadi dua jenis gabungan, yaitu gabungan isomorfik dan gabungan tak-isomorfik dari suatu gabungan graf tak-terhubung.

Pada bab selajutnya akan diberikan beberapa teorema mengenai pelabelan dan konstruksi (*a,d*)-PTSAA dari gabungan tak-terhubung sejumlah berhingga graf matahari.