BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas dasar-dasar teori yang akan digunakan dalam penulisan skripsi ini, yaitu model regresi dua level, metode penaksiran *maximum likelihood*, matriks partisi, *kronecker product*, dekomposisi *Cholesky*, dan *Gauss Hermite Quadrature*.

2.1 MODEL REGRESI DUA LEVEL

Model regresi dua level merupakan model regresi yang mengasumsikan bahwa terdapat sehimpunan data hirarki atau data bersarang dengan satu variabel respon yang diukur pada level rendah saja, sedangkan variabel penjelasnya diukur baik pada level rendah maupun level tinggi. Secara konseptual, model regresi dua level ditampilkan sebagai sistem hirarki dari persamaan regresi, artinya pertama-tama dibuat model regresi linier untuk level rendah, selanjutnya efek dari level rendah tersebut dimasukkan dalam model regresi pada level yang lebih tinggi.

Misalkan pada data dua-level ingin dianalisis hubungan antara variabel respon kontinu y dengan variabel-variabel penjelasnya. Notasi $i = 1, 2, \ldots, N$ menyatakan unit-unit di level dua dan $k = 1, 2, \ldots, n_i$ menyatakan unit-unit di level satu yang bersarang dalam tiap unit level-2. Dalam hal ini, ukuran sampel dalam setiap *cluster* tidak harus sama. Jumlah total observasi level satu dalam unit-unit level dua adalah :

$$n = \sum_{i=1}^{N} n_i$$

Sebagai contoh, misalkan terdapat data yang dikumpulkan dari N sekolah, dengan banyaknya siswa pada tiap sekolah berbeda-beda (n_i, i = 1, 2, ..., N). Dalam kasus ini, digunakan struktur data dua level di mana siswa bersarang atau ter*cluster* dalam sekolah. Pada level satu (siswa) terdapat variabel respon 'prestasi sekolah' (y), serta variabel penjelas 'SES'($x_{(1)}$) dan '*gender*' ($w_{(1)}$). Pada level 2 (sekolah), terdapat variabel penjelas 'status sekolah' ($w_{(2)}$). Pada model regresi dua level, pertama-tama dibuat model regresi untuk level satu terlebih dahulu, yaitu antara variabel respon y dan variabel penjelas $x_{(1)}$ dan $w_{(1)}$ sebagai berikut:

$$y_{ik} = b_{0i} + b_{1i} x_{(1)ik} + \alpha_{(1)} w_{(1)ik} + \varepsilon_{ik}, \quad (2.1.1)$$

dengan,

y_{ik} = variabel respon pada level satu untuk siswa ke-k dalam sekolah ke-i, k = 1, 2,..., n_i; i = 1, 2, ..., N

b_{0i} = nilai *intercept* (perpotongan) dengan sumbu-y untuk sekolah ke-i.

b_{1i} = koefisien dari variabel penjelas di level satu untuk sekolah ke-i.

$\alpha_{(1)}$ = koefisien dari variabel penjelas level-1, diasumsikan bernilai *fixed* untuk setiap sekolah.

ε_{ik} = *error* dari model level-1 ke-ik, i = 1, 2,..., N; k = 1, 2, ..., n_i, diasumsikan berdistribusi i.i.d $N(0,\sigma^2)$

Sepintas, model ini terlihat sama seperti model regresi berganda biasa. Namun, subskrip i pada koefisien b_{0i} dan b_{1i} menunjukkan bahwa setiap sekolah akan mempunyai nilai *intercept* dan *slope* yang berbeda-beda. Dalam model regresi dua level, kedua koefisien ini sering disebut dengan *random coefficient* (koefisien acak). Model regresi dua level biasa dikenal dengan *random coefficient model* atau *random slope model*.

Langkah selanjutnya adalah memprediksi koefisien regresi $\mathbf{b}_i = (b_{0i}, b_{1i})$ dengan membuat model regresi sebagai berikut:

$$\mathrm{b}_{0i} = \mu_0 + \alpha_{(2)01} w_{(2)1i} + \delta_{0i} \qquad (2.1.2)$$

dan

$$\mathrm{b}_{1i} = \mu_1 + \alpha_{(2)11} w_{(2)1i} + \delta_{1i} \qquad (2.1.3)$$

dengan,

$\mu_0, \mu_1, \alpha_{(2)01}, \alpha_{(2)11}$: parameter-parameter regresi dari level dua

$\boldsymbol{\delta}_i = (\delta_{0i}, \delta_{1i})$: error level dua (efek *random*), diasumsikan berdistribusi

$$N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta}} = \begin{pmatrix}\sigma_{\delta_0^2} & \sigma_{\delta_0\delta_1}\\ \sigma_{\delta_1\delta_0} & \sigma_{\delta_1^2}\end{pmatrix}\right)$$

Asumsi: variabel *random* ε_{ik} dan $\boldsymbol{\delta}_i = (\delta_{0i}, \delta_{1i})$ saling bebas.

Persamaan (2.1.2) menyatakan bahwa tingkat prestasi suatu sekolah secara umum (*intercept* b_{0i}) dapat diprediksi oleh variabel status sekolah

($w_{(2)}$). Persamaan (2.1.3) menyatakan bahwa hubungan antara prestasi sekolah (y) dan tingkat SES($x_{(1)}$) dari siswa bergantung pada status sekolah ($w_{(2)}$).

Persamaan (2.1.1), (2.1.2), dan (2.1.3) dapat ditulis kembali kedalam persamaan tunggal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{ik} &= \left(\mu_0 + \alpha_{(2)01} w_{(2)1i} + \delta_{0i} \right) + \left(\mu_1 + \alpha_{(2)11} w_{(2)1i} + \delta_{1i} \right) x_{(1)ik} + \alpha_{(1)} w_{(1)ik} + \varepsilon_{ik} \\ &= \underbrace{\mu_0 + \mu_1 x_{(1)ik} + \alpha_{(1)} w_{(1)ik} + \alpha_{(2)01} w_{(2)1i} + \alpha_{(2)11} w_{(2)1i} x_{(1)ik}}_{\textit{fixed part}} + \underbrace{\delta_{1i} x_{(1)ik} + \delta_{0i} + \varepsilon_{ik}}_{\textit{random part}} \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa efek *random* δ_{1i} terhubung dengan variabel $x_{(1)ik}$. Karena efek *random* δ_{1i} dikali dengan variabel penjelas $x_{(1)ik}$, maëa total *error* yang dihasilkan akan memiliki nilai yang berbeda untuk nilai $x_{(1)ik}$ yang berbeda. Pada model regresi berganda biasa, situasi seperti ini dinamakan heteroskedastik.

Secara umum, untuk R + 1 efek *random*, model regresi dua level dapat dinyatakan sebagai berikut:

- Untuk model level-1:

$$y_{ik} = b_{0i} + \sum_{j=1}^{R} b_{ji} x_{(1)jik} + \sum_{s=1}^{S} \alpha_{(1)s} w_{(1)sik} + \varepsilon_{ik} \qquad (2.1.4)$$

dengan,

b_{0i} = *intercept* (perpotongan) dengan sumbu-y, diasumsikan mempunyai nilai yang berbeda-beda untuk setiap unit ke-i level dua, i = 1, ...,N.

b_{ji} = koefisien dari variabel penjelas level satu ke-j, j = 1, ...,R yang mempunyai nilai yang berbeda untuk setiap unit level dua ke-i.

$\alpha_{(1)s}$ = koefisien dari variabel penjelas level satu ke-s, s = 1,2, ..., S, diasumsikan mempunyai nilai yang sama (*fixed*) untuk setiap unit level dua.

$x_{(1)jik}$ = variabel penjelas level satu ke-j, j = 1,...,R., mempunyai efek yang berbeda untuk setiap unit level dua ke-i.

$w_{(1)sik}$ = variabel penjelas level satu ke-s, s = 1,..., S yang mempunyai efek yang *fixed* untuk setiap unit level dua.

ε_{ik} = *error* dari model level-1 ke-ik, i = 1, 2,..., N; k = 1, 2, ..., n_i, diasumsikan berdistribusi i.i.d $N(0,\sigma^2)$

- Untuk model level-2:

$$b_{ri} = \mu_r + \sum_{q=1}^{Q} \alpha_{(2)rq} w_{(2)qi} + \delta_{ri}, \quad r = 0,1,\ldots,R \tag{2.1.5}$$

Dengan,

μ_r = *intercept* level-2

$\alpha_{(2)rq}$ = koefisien dari variabel penjelas level dua ke-q, q = 1,2, ..., Q, diasumsikan mempunyai nilai yang *fixed* untuk setiap unit level dua.

$w_{(2)qi}$ = *fixed* kovariat atau variabel penjelas *fixed* level dua ke-q, q = 1,2,...,Q, untuk unit ke-i level-2, i = 1,2,..., N.

$\left(\delta_{0i},\delta_{1i},...,\delta_{Ri}\right)$ = vektor ukuran 1 x (R+1) berisi efek *random*, diasumsikan

$$\text{berdistribusi } N_{R+1}\left(\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\delta}}=\begin{pmatrix}\sigma^2_{\delta_0} & \sigma_{\delta_0\delta_1} & \cdots & \sigma_{\delta_0\delta_R}\\ \sigma_{\delta_1\delta_0} & \sigma^2_{\delta_1} & \cdots & \sigma_{\delta_1\delta_R}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{\delta_R\delta_0} & \sigma_{\delta_R\delta_1} & \cdots & \sigma^2_{\delta_R}\end{pmatrix}\right).$$

Persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) dapat ditulis kembali kedalam persamaan tunggal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{ik} &= \left(\mu_0+\alpha_{(2)01}w_{(2)1i}+\cdots+\alpha_{(2)0Q}w_{(2)Qi}+\delta_{0i}\right)+\sum_{j=1}^{R}\left(\mu_j+\sum_{q=1}^{Q}\alpha_{(2)jq}w_{(2)qi}+\delta_{ji}\right)x_{(1)rik}+\sum_{s=1}^{S}\alpha_{(1)s0}w_{(1)sik}+\varepsilon_{ik}\\ &= \mu_0+\sum_{q=1}^{Q}\alpha_{(2)0q}w_{(2)qi}+\delta_{0i}+\sum_{j=1}^{R}\mu_j x_{(1)rik}+\sum_{j=1}^{R}\sum_{q=1}^{Q}\alpha_{(2)jq}w_{(2)qi}x_{(1)jik}+\sum_{j=1}^{R}\delta_{ji}x_{(1)jik}+\sum_{s=1}^{S}\alpha_{(1)s0}w_{(1)sik}+\varepsilon_{ik}\\ &= \underbrace{\mu_0+\sum_{s=1}^{S}\alpha_{(1)s0}w_{(1)sik}+\sum_{q=1}^{Q}\alpha_{(2)0q}w_{(2)qi}+\sum_{j=1}^{R}\mu_j x_{(1)jik}+\sum_{j=1}^{R}\sum_{q=1}^{Q}\alpha_{(2)jq}w_{(2)qi}x_{(1)jik}}_{fixed\ part}+\underbrace{\sum_{j=1}^{R}\delta_{ji}x_{(1)jik}+\delta_{0i}+\varepsilon_{ik}}_{random\ part} \end{aligned}$$

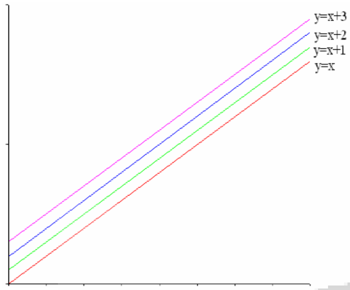
Pada kasus di mana koefisien regresi yang berbeda untuk setiap unit level dua hanya pada perpotongannya dengan sumbu-y (*intercept*) saja, sedangkan koefisien dari variabel penjelas level satu mempunyai nilai yang *fixed*, maka model di atas menjadi:

$$y_{ik}=\underbrace{\mu_0+\sum_{s=1}^{S}\alpha_{(1)s}w_{(1)sik}+\sum_{q=1}^{Q}\alpha_{(2)0q}w_{(2)qi}}_{fixed\ part}+\underbrace{\delta_{0i}+\varepsilon_{ik}}_{random\ part}$$

Model ini biasa dikenal dengan *random intercept model*, dan merupakan kasus yang paling sederhana dari model regresi dua level.

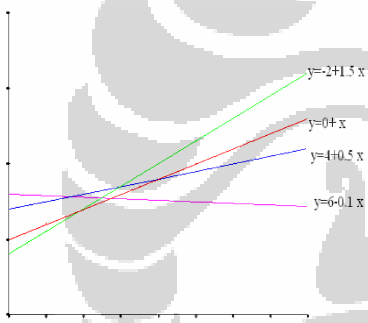
Gambar berikut menunjukkan ilustrasi sederhana dari perbedaan antara *random intercept model* dan *random slope model*.

Misalkan empat sekolah diambil secara acak.



Pada gambar di samping, ke empat sekolah mempunyai kemiringan (*slope*) yang sama, tetapi *intercept* yang berbeda.

Gambar 2.1.a.
Ilustrasi *random intercept model*



Pada gambar di samping, ke empat sekolah mempunyai *intercept* dan kemiringan (*slope*) yang berbeda.

Gambar 2.1.b.
Ilustrasi *random slope model*

Sumber: (Kazemi, Iraj dan Berridge, Damon, 2005)

2.1.1 *Intra Class Correlation*

Pada *random intercept model*, dapat dicari korelasi antara dua unit level-1dalam unit level-2 yang sama atau *intra class correlation* (ICC). Istilah "*class*" mengacu pada unit level-2 dalam sistem klasifikasi yang diperhatikan.

Korelasi antara dua unit level-1 yang diambil secara acak dalam sembarang unit level-2 yang sama atau *intra class correlation* (ICC) dinyatakan dengan

$$\rho = \frac{\sigma^2_{\delta o}}{\sigma^2_{\delta o} + \sigma^2_{\varepsilon}}, \qquad 0 \le \rho \le 1 \tag{2.1.1.6}$$

Parameter ρ dalam persamaan di atas dinamakan koefisien *intra-level-2-unit correlation* atau koefisien *intra class correlation*. Persamaan (2.1.1.6) menyatakan bahwa *intra class correlation* (ICC) sama dengan proporsi variansi antar unit level-2 terhadap variansi total. Semakin tinggi nilai korelasi ini menunjukkan semakin miripnya dua unit level-1 dari unit level-2 yang sama, dibandingkan dengan dua unit level-1 yang diambil dari dua unit level-2 yang berbeda. Sehingga, nilai ρ yang semakin besar pada suatu data dua-level mengindikasikan semakin pentingnya melakukan analisis yang memperhatikan struktur hirarki dari data. Berdasarkan jurnal yang ditulis oleh Hedeker, Gibbons, dan Flay (1994), nilai ICC dikatakan cukup besar jika berada antara rentang 5% sampai 12%.

2. 2 METODE ESTIMASI *MAXIMUM LIKELIHOOD*

Misal $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)^T$ adalah vektor yang berisi variabel *random* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan pdf $f\left(\mathbf{x};\theta\right)$, $\theta \in \Omega \in \mathbb{R}^p$ di mana θ merupakan suatu vektor dari *p*-parameter yang tidak diketahui. Dalam melakukan penaksiran *Maximum Likelihood* ada beberapa tahapan yang harus dilakukan.

Pertama, cari pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ yaitu $f(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta})$.

Karena $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah peubah acak yang iid maka

$$f(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta}) = f(x_1; \boldsymbol{\theta}) f(x_2; \boldsymbol{\theta}) ... f(x_n; \boldsymbol{\theta}) \quad .$$

Selanjutnya, cari fungsi *likelihood*nya. Fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ yang dapat dianggap sebagai fungsi dari $\boldsymbol{\theta}$. Misalkan fungsi *likelihood* $L(\boldsymbol{\theta}; x_1, x_2, ..., x_n) = L(\boldsymbol{\theta})$, maka

$$L(\boldsymbol{\theta}) = f(x_1, x_2, ..., x_n; \boldsymbol{\theta}) = f(x_1; \boldsymbol{\theta}) f(x_2; \boldsymbol{\theta}) ... f(x_n; \boldsymbol{\theta}) \quad , \ \boldsymbol{\theta} \in \Omega$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \boldsymbol{\theta})$$

Kemudian, cari taksiran dari $\boldsymbol{\theta}$. Dalam metode estimasi *maximum likelihood*, taksiran dari $\boldsymbol{\theta}$ diperoleh dengan menemukan nilai $\boldsymbol{\theta}$, sebut $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, yang memaksimumkan fungsi likelihood. Maka $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ disebut taksiran *maximum likelihood* dari $\boldsymbol{\theta}$.

Mencari nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi $\ln L(\boldsymbol{\theta})$, sebut $l(\boldsymbol{\theta})$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan $L(\boldsymbol{\theta})$. Maka baik $L(\boldsymbol{\theta})$ atau $l(\boldsymbol{\theta})$ dapat digunakan untuk mencari nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (Bukti terlampir di lampiran 1).

Nilai $\boldsymbol{\theta}$ yang memaksimumkan $l(\boldsymbol{\theta})$ dapat diperoleh dengan mencari solusi simultan dari persamaan

$$S_j(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\boldsymbol{\theta}), \text{ untuk } j = 1,...,p$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\boldsymbol{\theta})$$

$$= \frac{1}{L(\boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} L(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Adakalanya sistem persamaan ini dapat diselesaikan secara *analitik*. Jika tidak, suatu prosedur numerik (misal metode *Newton Raphson*) dapat digunakan.

2.3 MATRIKS PARTISI

Setiap matriks dapat dibagi atau dipartisi menjadi matriks-matriks yang lebih kecil dengan menyelipkan garis *horizontal* dan vertikal di antara baris dan kolom yang ditentukan. Misalnya di bawah ini adalah tiga partisi yang mungkin dari sebuah matriks umum **A** ukuran 3 x 4, yaitu:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4\end{bmatrix}$$

2.4 *KRONECKER PRODUCT*

Misalkan **A** = (a_{ij}) dan **B** = (b_{ij}) merupakan matriks berukuran (m x n) dan (p x q). Maka,

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

merupakan *kronecker product* dari matriks **A** dan **B**.

Misalkan **a** = {a_i} dan **b** = {b_j} menyatakan vektor kolom dengan dimensi m dan n. Maka berdasarkan definisi *kronecker product* tersebut diperoleh:

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\begin{pmatrix} a_1\mathbf{b} \\ a_2\mathbf{b} \\ \vdots \\ a_m\mathbf{b} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{a}'\otimes\mathbf{b}'=\left(a_1\mathbf{b}', a_2\mathbf{b}', \ldots, a_m\mathbf{b}'\right)$$

2. 5 DEKOMPOSISI *CHOLESKY*

Definisi 1

Misalkan **A** suatu matriks simetris ukuran $n \times n$ (yang memiliki sifat **A** = **A**').

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks simetris **A** dikatakan definit positif jika memenuhi $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, untuk semua kemungkinan vektor **x** berdimensi n (kecuali **x** = **0**).

Suatu matriks simetris dan definit positif dapat didekomposisikan menjadi matriks segitiga bawah dan transpos dari matriks segitiga bawah tersebut. Matriks segitiga bawah tersebut merupakan segitiga *Cholesky* atau faktor *Cholesky* dari matriks asli (matriks definit positif).

Berdasarkan dekomposisi *Cholesky*, matriks definit positif **A** dapat didekomposisikan sebagai :

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\,\mathbf{T}' \qquad (2.5.7)$$

dengan $\mathbf{T}'$ merupakan matriks segitiga bawah nonsingular.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Contoh persamaan (2.5.7) untuk matriks ukuran 3 x 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ 0 & t_{22} & t_{32} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$$

Dengan mengalikan kedua matriks pada persamaan di atas, di dapat persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} t_{11}^2 &= a_{11} & \qquad t_{21}^2 + t_{22}^2 &= a_{22} \\ t_{11}t_{21} &= a_{12} & \qquad t_{21}t_{31} + t_{22}t_{32} &= a_{23} \\ t_{11}t_{31} &= a_{13} & \qquad t_{31}^2 + t_{32}^2 + t_{33}^2 &= a_{33} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$t_{21} = \frac{a_{12}}{t_{11}}$$

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - t_{21}^2}$$

$$t_{31} = \frac{a_{13}}{t_{11}}$$

$$t_{32} = \frac{a_{23} - t_{21}t_{31}}{t_{22}}$$

$$t_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(t_{31}^2 + t_{32}^2\right)}$$

Secara umum, entri entri matriks **T** diperoleh dengan rumus:

- $t_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- $t_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{t_{11}}$, $2 \le i \le$ n
- $t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}^2}$, $2 \le i \le$ n

- $t_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik} t_{jk}}{t_{jj}}$, $\quad 2 \le j < i \le n$

- $t_{ij} = 0$, $\quad 1 \le j < i \le n$

Sebagai contoh, misalkan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Maka, dengan metode dekomposisi *Cholesky*, didapatkan :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{1.5} & \sqrt{1.5} \end{pmatrix}$$

dan, $\mathbf{TT}' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{1.5} & \sqrt{1.5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{1.5} \\ 0 & 0 & \sqrt{1.5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$

2. 4 *GAUSS HERMITE QUADRATURE*

Gauss Hermite Quadrature digunakan untuk menghitung integral dari bentuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \exp\left(-x^2\right) dx$$

secara numerik. Dengan *Gauss Hermite Quadrature*, bentuk integral di atas akan diaproksimasi dengan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x})\exp\left(-x^2\right)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

dengan,

n adalah banyaknya *quadrature point*.

x_i adalah *grid* atau *quadrature point*, yaitu akar ke-i dari *Hermite polynomial* *$H_n(x)$*. *Hermite Polynomial* didefinisikan sebagai:

$$H_n(x) = \left(-1\right)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$$

atau $$H_n(x) = \left(-1\right)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

w_i adalah bobot yang bersesuaian dengan setiap *grid point*, diberikan oleh formula,

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 H_{n-1}\left(x_i\right)^2}$$

Dalam dimensi yang lebih tinggi, formula *Gauss Hermite Quadrature* dapat dibangun dengan membentuk suatu grid dari titik-titik *quadrature* (*quadrature points*) dan bobot-bobotnya. Untuk d -dimensi parameter $\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_d\right)$, d-dimensi *quadrature point* dapat ditulis:

$$\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_d}\right) \qquad \text{untuk} \qquad i_1, i_2, \ldots, i_d = 1, 2, \ldots, n$$

Bobot yang bersesuaian untuk setiap *quadrature point* tersebut adalah $w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_d}$. Jadi, integral dengan d-dimensi memerlukan fungsi evaluasi sebanyak n^d .