BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab II ini akan dibahas dasar-dasar teori yang digunakan dalam penulisan skripsi, yaitu mengenai regresi linear, penaksiran *maximum likelihood* dan uji rasio *likelihood.*

2.1 Penaksiran *Maximum Likelihood*

Misal $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah variabel random yang *iid* dengan pdf $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$ dimana θ merupakan suatu parameter yang tidak diketahui dan Ω adalah ruang parameter. Dalam melakukan penaksiran *maximum likelihood* ada beberapa tahapan yang harus dilakukan.

Pertama, cari pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ yaitu $f(x_1, x_2, ..., x_n;\theta)$. Karena $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah peubah acak yang *iid* maka

$$f(x_1, x_2, ..., x_n;\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) ... f(x_n;\theta)$$

Kedua, cari fungsi *likelihood*nya. Fungsi likelihood didefinisikan sebagai pdf bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ yang dapat dianggap sebagai fungsi dari θ. Misalkan fungsi likelihood $L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = L(\theta)$.

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) ... f(x_n;\theta) \quad , \ \theta \in \Omega$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

Ketiga, cari taksiran dari θ. Dalam metode penaksiran *maximum likelihood* taksiran dari θ diperoleh dengan menemukan nilai θ, sebut $\hat{\theta}$, yang memaksimumkan fungsi likelihood, $\hat{\theta}$ disebut taksiran *maximum likelihood* dari θ. Nilai θ yang memaksimumkan fungsi likelihood dapat diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan berikut :

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \ \text{ dan } \ \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

Adakalanya lebih mudah untuk memaksimumkan $\ln L(\theta)$ daripada $L(\theta)$. Mencari nilai θ yang memaksimumkan fungsi $\ln L(\theta)$, sebut $L^*(\theta)$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai θ yang memaksimumkan $L(\theta)$. Maka baik $L(\theta)$ atau $L^*(\theta)$ dapat digunakan untuk mencari nilai $\hat{\theta}$.

Nilai θ yang memaksimumkan $L^*(\theta)$ dapat diperoleh dengan mencari solusi dari persamaan

$$S(\theta) = \frac{\partial L^*(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \ \text{ dan } \ \frac{\partial^2 L^*(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$$

2.2 Uji *Rasio Likelihood*

Terdapat variabel random $X_1, X_2, ..., X_n$ yang *iid* dan memiliki *probability density function* $f_i(x_i;\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$ untuk $i = 1,2,...,n$. Parameter-parameter dari populasi $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$ dimisalkan berada dalam ruang parameter Ω.

Misalkan ω merupakan subset dari Ω dan akan diuji hipotesis berikut :

$H_0 : (\theta_1,\theta_2,...,\theta_m) \in \omega$
H_1 : tidak demikian

Didefinisikan fungsi likelihood :

$$L(\theta_1,\theta_2,...,\theta_m;x_1,x_2,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i;\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$$

Jika $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m \in \Omega$, notasikan fungsi likelihood sebagai berikut :

$L(\Omega)$.

Jika $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m \in \omega$, notasikan fungsi likelihood sebagai berikut :

$L(\omega)$.

Pandang rasio likelihood dari kedua fungsi *likelihood* diatas sebagai berikut :

$$\lambda^* = \frac{L(\omega)}{L(\Omega)}$$

Nilai λ^* tidak dapat digunakan sebagai statistik uji untuk menguji H_0 dan H_1 karena $L(\omega)$ dan $L(\Omega)$ pada umumnya tidak dapat ditetapkan secara lengkap.

Misalkan $\hat{\omega}$ merupakan taksiran *maximum likelihood* untuk ω dan $\hat{\Omega}$ merupakan taksiran *maximum likelihood* untuk Ω.

Pandang :

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}.$$

Nilai λ dapat dicari. λ dapat digunakan sebagai statistik uji untuk menguji hipotesis H_0 dan H_1.

Perhatikan :

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}.$$

$L(\hat{\omega})$ dan $L(\hat{\Omega})$ bernilai positif sehingga λ juga akan bernilai positif atau $\lambda \geq 0$. Kemudian karena $\hat{\omega} \subset \hat{\Omega}$ maka $L(\hat{\omega}) \leq L(\hat{\Omega})$. Karena $L(\hat{\omega}) \leq L(\hat{\Omega})$ maka nilai $\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \leq 1$. Sehingga diperoleh $0 \leq \lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \leq 1$. Apabila $\lambda = 0$ maka $L(\hat{\omega}) = 0$, H_0 akan ditolak.

Jadi H_0 akan ditolak apabila λ bernilai kecil (mendekati 0). Misalkan λ_0 suatu bilangan pecahan positif sedemikian sehingga H_0 akan ditolak apabila $0 \le \lambda \le \lambda_0$.

Misal α adalah tingkat signifikansi yang dipilih.

$$\alpha = \Pr\left(\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le \lambda_0; H_0\right)$$

Apabila *pdf* dari statistik $\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ dapat diketahui untuk H_0 benar maka konstanta λ_0 dapat ditentukan, sedemikian sehingga :

$$\alpha = \Pr\left(\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le \lambda_0; H_0\right).$$

Namun terkadang, dibawah H_0 benar, sulit untuk menentukan distribusi dari statistik $\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. Karena itu tidak dimungkinkan untuk memperoleh λ_0 yang memenuhi :

$$\alpha = \Pr\left(\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le \lambda_0; H_0\right)$$

Karena distribusi dari statistik $\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ sulit diketahui, maka dicari statistik lain yaitu $G = -2\ln\lambda$.

Dalam pengujian-pengujian yang menggunakan asumsi-asumsi tertentu dapat ditunjukkan bahwa $G = -2\ln\lambda$ akan berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas dimensi $\Omega -$ dimensi ω (A Course in Mathematical Statistics by George G. Roussas, 362).

2.3 Model Regresi Linear

Analisis regresi merupakan salah satu metode untuk melihat hubungan antara variabel penjelas dengan variabel *dependent* yang dinyatakan dalam model regresi.

2.3.1 Regresi Linear Sederhana

Regresi linear sederhana merupakan model regresi yang melibatkan satu variabel penjelas dan satu variabel *dependent*.

Bentuk model sebagai berikut:

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + e_j$$

dengan :

y_j : variabel *dependent* untuk pengamatan ke-*j*

β_0, β_1 : parameter-parameter model yang akan ditaksir

x_j : variabel penjelas untuk pengamatan ke-*j*

e_j : komponen *error*; $e_j \sim N\left(0, \sigma^2\right)$

$j = 1, 2, \ldots, n$; n merupakan banyak pengamatan.

2.3.2 Regresi Linear Berganda

Model regresi linear yang melibatkan lebih dari satu variabel penjelas $X_1, X_2, ..., X_p$ dengan satu variabel *dependent* disebut model regresi linier berganda. Bentuk model dituliskan sebagai berikut :

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \beta_2 x_{j2} + ... + \beta_p x_{jp} + e_j$$

$j = 1, 2, ..., n$; n merupakan banyak pengamatan.

Apabila model dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi :

$$\mathbf{y = x\boldsymbol{\beta} + e}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Model regresi linear berganda di atas memiliki asumsi sebagai berikut :

- $E(e_j) = 0, \quad \text{untuk } j = 1, 2, ..., n$
- $E(e_i e_j) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } i \neq j \\ \sigma^2, & \text{untuk } i = j \end{cases}$
- $e_j \sim N(0, \sigma^2)$

dan apabila dinyatakan dalam notasi matriks menjadi :

- $E(\mathbf{e}) = \mathbf{0}$, dengan $\mathbf{0}$ adalah matriks nol berukuran $n \times 1$
- $E(\mathbf{ee}^T) = \boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{I}$, dengan $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas berukuran $n \times n$
- $\mathbf{e}$ memiliki distribusi normal dengan mean $\mathbf{0}$ dan variansi $\sigma^2\mathbf{I}$.

2.3.3 Penaksiran Parameter dalam Model Regresi Linear

Parameter-parameter pada model regresi linear biasanya ditaksir dengan menggunakan taksiran kuadrat terkecil atau dengan menggunakan taksiran *maximum likelihood*. Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai penaksiran parameter dalam model regresi dengan menggunakan taksiran *maximum likelihood*.

Dari model regresi berganda dan asumsi $e \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ didapatkan bahwa y_i berdistribusi normal dengan mean $\left[\beta_0+\beta_1 x_{j1}+\ldots+\beta_p x_{jp}\right]$ dan variansi σ^2:

$$f\left(y_j;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{y_j-\left[\beta_0+\beta_1 x_{j1}+\ldots+\beta_p x_{jp}\right]}{2\sigma^2}\right\}$$

Kemudian akan dicari taksiran *maximum likelihood* untuk parameter-parameter pada model.

Pertama, cari pdf bersama dari $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ yaitu $f\left(y_1,y_2,\ldots,y_n;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p\right)$.

Karena $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ adalah peubah acak yang *iid* maka

$$f\left(y_1,y_2,\ldots,y_n;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p\right)=f\left(y_1;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p\right)f\left(y_2;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p\right)\ldots f\left(y_n;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p\right).$$

Kemudian akan dicari fungsi likelihood. Fungsi likelihood didefinisikan sebagai pdf bersama dari $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$. Fungsi likelihood $L\left(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p\right)$

diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} L(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p) &= f(y_1,y_2,\ldots,y_n;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p) \\ &= f(y_1;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)f(y_2;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)\ldots f(y_n;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p) \\ &= \prod_{j=1}^{n} f(y_j;\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{\left[y_j - (\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp})\right]^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \left[y_j - (\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp})\right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Mencari nilai $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ yang memaksimumkan fungsi $L(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$, akan memberikan hasil yang sama dengan mencari nilai $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ yang memaksimumkan fungsi $\ln L(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$, sebut $L^*(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$. Untuk memaksimumkan $L(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$ sama saja dengan meminimumkan fungsi $-L^*(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_p)$, maka digunakan bentuk $L^* = -\ln L$:

$$L^* = -\ln L$$
$$= -\ln\left\{\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp}\right)\right]^2\right\}\right\}$$
$$= -\left\{\ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} + \ln\left\{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp}\right)\right]^2\right\}\right\}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{n}{2}\ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right) + \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp}\right)\right]^2\right\}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{n}{2}\left(\ln 1 - \ln 2\pi\sigma^2\right) + \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp}\right)\right]^2\right\}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{n}{2}\left(0 - \ln 2\pi\sigma^2\right) + \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp}\right)\right]^2\right\}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{n}{2}\left(-\ln 2\pi\sigma^2\right) + \left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp}\right)\right]^2\right\}\right\}$$
$$= \frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) + \frac{\sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp}\right)\right]^2}{2\sigma^2}$$

Untuk mendapatkan $L^*\left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p\right)$ yang minimum, diperlukan $\left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p\right)$

yang meminimumkan fungsi $\sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \ldots + \beta_p x_{jp}\right)\right]^2$.

Sekarang akan dicari taksiran untuk $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ yang meminimumkan fungsi :

$$H(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p) = \sum_{j=1}^{n}\left[y_j - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{1j} + \ldots + \beta_p x_{pj}\right)\right]^2.$$

Nilai $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ yang meminimumkan $H\left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p\right)$ dapat diperoleh

dengan mencari solusi dari persamaan berikut :

$$\frac{\partial H(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_p)}{\partial\beta_0}=0,$$
$$\frac{\partial H(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_p)}{\partial\beta_1}=0,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial H(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_p)}{\partial\beta_p}=0.$$

dimana masing-masing turunan parsialnya adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial H(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_p)}{\partial\beta_0}=2\sum_{j=1}^{n}\left[y_j-\left(\beta_0+\beta_1x_{j1}+\dots+\beta_px_{jp}\right)\right](-1)$$
$$\frac{\partial H(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_p)}{\partial\beta_1}=2\sum_{j=1}^{n}\left[y_j-\left(\beta_0+\beta_1x_{j1}+\dots+\beta_px_{jp}\right)\right](-x_{j1})$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial H(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_p)}{\partial\beta_p}=2\sum_{j=1}^{n}\left[y_j-\left(\beta_0+\beta_1x_{j1}+\dots+\beta_px_{jp}\right)\right](-x_{jp})$$

2.3.4 Pengujian Hipotesis dalam Regresi Linear Berganda

Setelah diperoleh taksiran dari parameter-parameter dalam model selanjutnya dilakukan pengujian hipotesis terhadap parameter dalam model. Pengujian terbagi ke dalam dua bagian yaitu pengujian kegunaan model dan pengujian terhadap masing-masing koefisien regresi.

2.3.4.1 Pengujian kegunaan model

Pengujian kegunaan atau kecocokan model adalah pengujian untuk menentukan apakah ada hubungan linear antara variabel *dependent* dan variabel penjelas $X_1, X_2, ..., X_p$.

Hipotesis :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \exists \beta_i \neq 0 , \quad untuk\ i = 1,2,...,p$$

Jika H_0 ditolak, berarti paling tidak ada satu dari variabel penjelas $X_1, X_2, ..., X_p$ mempunyai kontribusi yang signifikan pada model. Atau dengan perkataan lain setidaknya ada satu variabel penjelas yang dapat digunakan untuk memprediksi variabel *dependent*.

Dalam pengujian model di atas akan dilakukan pengujian dengan menggunakan Uji Rasio *Likelihood.*

Statistik uji sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G &= -2\ln\lambda \\ &= -2\ln\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \end{aligned}$$

dengan G akan berdistribusi χ^2 (Hosmer & Lemeshow 2000 : 13).

2.3.4.2 Pengujian terhadap masing-masing koefisien regresi (β)

Pengujian ini dilakukan untuk menentukan variabel penjelas mana yang signifikan memberikan kontribusi pada model atau dengan perkataan lain memberikan kontribusi yang signifikan dalam memprediksi variabel *dependent*.

Hipotesis sebagai berikut :

$H_0 : \beta_i = 0$

Variabel X_i tidak memberikan kontribusi yang signifikan dalam memprediksi variabel *dependent*.

$H_1 : \beta_i \neq 0$

Variabel X_i memberikan kontribusi yang signifikan dalam memprediksi variabel *dependent*.

untuk $i = 1, 2, ..., p$.

$\hat{\beta}_i$ adalah taksiran untuk parameter β_i pada model dengan menggunakan metode *maximum likelihood*. $\hat{\beta}_i$ adalah taksiran yang tak bias untuk β_i dengan taksiran variansi $s_{\hat{\beta}_i}$ merupakan taksiran variansi yang bernilai lebih rendah (*underestimate*) daripada variansi yang sesungguhnya. Akan tetapi untuk jumlah sampel yang besar, nilai dari $s_{\hat{\beta}_i}$ akan mendekati nilai yang sebenarnya.

Maka :

$$z = \frac{\hat{\beta}_i}{s_{\hat{\beta}_i}} \rightarrow N(0,1)$$

Jadi untuk pengujian di atas digunakan statistik uji sebagai berikut :

$$z = \frac{\hat{\beta}_i}{s_{\hat{\beta}_i}}$$

dengan $z \sim N(0,1)$.

Aturan keputusan : H_0 akan ditolak pada tingkat signifikansi α apabila $|z| > z_{\alpha/2}$.

Apabila keputusannya H_0 ditolak, yang memberi arti bahwa pada tingkat signifikansi α parameter β_i tidak sama dengan nol, maka artinya variabel penjelas X_i memberikan kontribusi yang signifikan dalam memprediksi variabel *dependent*.

2.3.5 Mengukur Kecocokan Model

Selain melakukan pengujian seperti dijelaskan di atas ada beberapa metode untuk mengukur kecocokan model, salah satunya adalah dengan koefisien determinasi R^2.

R^2 merupakan proporsi variasi dari variabel *dependent* yang dapat dijelaskan oleh variabel penjelas melalui model ($0 \le R^2 \le 1$). Semakin besar R^2, maka menunjukkan model yang terbentuk semakin baik.

Definisi :

Koefisien determinasi R^2 didefinisikan sebagai berikut :

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SS(Total)} \; ; \; 0 \le R^2 \le 1$$
$$= \frac{SS_{(Total)} - SSE}{SS_{(Total)}}$$

dengan

$$SSE = \sum \left(y_j - \hat{y}_j \right)^2$$

$$SS_{(Total)} = \sum \left(y_j - \bar{y} \right)^2$$

$$SS_{(Model)} = SS_{(Total)} - SSE$$
$$= \sum \left(\hat{y}_j - \bar{y} \right)^2$$

di mana $\hat{y}_i$ merupakan nilai prediksi dari y_i.

Interpretasi dari R^2 :

Sebesar $100(R^2)\%$ dari variasi sampel y dapat dijelaskan melalui variabel-variabel penjelas dalam model regresi yang terbentuk.

Pandang :

$$e_j = \left(y_j - \hat{y}_j\right)$$

$$SSE = \sum_j e_j^{\ 2}$$

Akan dibuktikan bahwa $\frac{\sum_j e_j^2}{n}$ konvergen menuju σ^2 secara probabilitas .

Ada beberapa teorema yang digunakan untuk membuktikan bahwa $\frac{\sum_j e_j^2}{n}$ konvergen menuju σ^2 secara probabilitas yaitu :

*) Teorema 1 :

Jika variabel X memiliki distribusi $N \sim \left(\mu, \sigma^2\right)$; $\sigma^2 > 0$ maka

$$V = \frac{\left(X - \mu\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}.$$

*) Teorema 2 :

Jika terdapat variabel-variabel yang *independent* $X_1, X_2, ..., X_n$ yang memiliki distribusi $\chi^2_{(r_1)}, \chi^2_{(r_2)}, ..., \chi^2_{(r_n)}$, maka variabel random

$$Y = X_1 + X_2 + ... + X_n \sim \chi^2_{(r_1+r_2+...+r_n)}.$$

Pembuktian $\frac{\sum_j e_j^2}{n}$ konvergen menuju σ^2 secara probabilitas :

Diketahui bahwa $e_j \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.

Berdasarkan teorema 1 diperoleh :

$$\frac{\left(e_j - 0\right)^2}{\sigma^2}$$
$$= \frac{\left(e_j\right)^2}{\sigma^2}$$
$$= \frac{e_j^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}$$

Dengan perkataan lain $\frac{e_1^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}$, $\frac{e_2^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}, \ldots,$ $\frac{e_n^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1)}$.

Kemudian, berdasarkan teorema 2 didapatkan :

$$\frac{e_1^{\,2}}{\sigma^2} + \frac{e_2^{\,2}}{\sigma^2} + \ldots + \frac{e_n^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(1+1+\ldots+1)}$$

atau

$$\frac{\sum_j e_j^{\,2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$$

Sehingga $E\left(\frac{\sum_j e_j^{\,2}}{\sigma^2}\right) = n$ dan $Var\left(\frac{\sum_j e_j^{\,2}}{\sigma^2}\right) = 2n$.

Selanjutnya akan dicari ekspektasi dan variansi dari $\frac{\sum_j e_j^{\,2}}{n}$.

$$E\left(\frac{\sum_j e_j^{\,2}}{n}\right)=E\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2}\frac{\sum_j e_j^{\,2}}{n}\right)$$

$$=E\left(\frac{\sigma^2}{n}\frac{\sum_j e_j^{\,2}}{\sigma^2}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}E\left(\frac{\sum_j e_j^{\,2}}{\sigma^2}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}n$$

$$=\sigma^2$$

$$Var\left(\frac{\sum_i e_i^2}{n}\right)=E\left(\left(\frac{\sum_i e_i^2}{n}-E\left(\frac{\sum_i e_i^2}{n}\right)\right)^2\right)$$

$$=E\left(\left(\frac{\sum_i e_i^2}{n}-\left(\sigma^2\right)\right)^2\right)$$

$$=E\left(\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2}\frac{\sum_i e_i^2}{n}-\left(\sigma^2\right)\right)^2\right)$$

$$=E\left(\left(\frac{\sigma^2}{n}\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}-\left(\sigma^2\right)\right)^2\right)$$

$$=E\left(\left(\sigma^2\left(\frac{1}{n}\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}-(1)\right)\right)^2\right)$$

$$=E\left(\left(\sigma^2\right)^2\left(\frac{1}{n}\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}-(1)\right)^2\right)$$

$$=E\left(\left(\sigma^4\right)\left(\frac{1}{n}\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}-(1)\right)^2\right)$$

$$=\sigma^4E\left(\left(\frac{1}{n}\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}\right)^2-2\frac{1}{n}\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}+1\right)$$

$$=\sigma^4\left[E\left(\frac{1}{n}\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}\right)^2-2E\left(\frac{1}{n}\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}\right)+1\right]$$

$$=\sigma^4\left[\frac{1}{n^2}E\left(\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}\right)^2-2\frac{1}{n}E\left(\frac{\sum_i e_i^2}{\sigma^2}\right)+1\right]$$

dari $E\left(\frac{\sum_j e_j^2}{\sigma^2}\right)^2 = \left(\text{var}\left(\frac{\sum_j e_j^2}{\sigma^2}\right) + \left(E\left(\frac{\sum_j e_j^2}{\sigma^2}\right)\right)^2\right)$ diperoleh :

$$= \sigma^4\left[\frac{1}{n^2}\left(\text{var}\left(\frac{\sum_j e_j^2}{\sigma^2}\right) + \left(E\left(\frac{\sum_j e_j^2}{\sigma^2}\right)\right)^2\right) - 2\frac{1}{n}E\left(\frac{\sum_j e_j^2}{\sigma^2}\right) + 1\right]$$

dengan mensubstitusi $E\left(\frac{\sum_j e_j^2}{\sigma^2}\right) = n$ dan $\text{var}\left(\frac{\sum_j e_j^2}{\sigma^2}\right) = 2n$ didapatkan :

$$= \sigma^4\left[\frac{1}{n^2}\left(2n + n^2\right) - 2\frac{1}{n}n + 1\right]$$

$$= \sigma^4\left[\frac{1}{n^2}\left(2n + n^2\right) - 2 + 1\right]$$

$$= \sigma^4\left[\frac{1}{n^2}\left(2n + n^2\right) - 1\right]$$

$$= \sigma^4\left[\frac{2n + n^2 - n^2}{n^2}\right]$$

$$= \sigma^4\left[\frac{2n}{n^2}\right]$$

$$= \sigma^4\left[\frac{2}{n}\right]$$

Untuk membuktikan bahwa $\frac{\sum_j e_j^2}{n}$ konvergen menuju σ^2 secara probabilitas digunakan pertidaksamaan Chebyshev sebagai berikut :

$$\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \mu_{\frac{\sum_j e_j^2}{n}}\right| < k\sigma_{\frac{\sum_j e_j^2}{n}}\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \sigma^2\right| < k\sigma^2\sqrt{\frac{2}{n}}\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

dengan mensubstitusi $\varepsilon = k\sigma^2\sqrt{\frac{2}{n}}$,

$$\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \sigma^2\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{1}{\left(\varepsilon \Big/ \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2}$$

$$\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \sigma^2\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2 n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \sigma^2\right| < \varepsilon\right] \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2 n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \sigma^2\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2 n}$$

diperoleh : $\lim_{n\to\infty}\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \sigma^2\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - 0$

karena nilai probabilitas antara 0 dan 1 maka :

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \sigma^2\right| < \varepsilon\right] = 1$$

Berdasarkan definisi konvergen probabilitas persamaan :

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[\left|\frac{\sum_j e_j^2}{n} - \sigma^2\right| < \varepsilon\right] = 1$$

menunjukkan $\frac{\sum_j e_j^2}{n}$ konvergen menuju σ^2 secara probabilitas.

Jadi terbukti bahwa $\frac{\sum_j e_j^2}{n}$ konvergen menuju σ^2 secara probabilitas.