BAB III

PENAKSIRAN *MEAN SQUARED ERROR* (MSE) *EMPIRICAL BEST LINEAR UNBIASED PREDICTION* (EBLUP) PADA *GENERAL LINEAR MIXED MODEL*

Pada bab III ini akan dibahas mengenai *mean squared error* (MSE) *best linear unbiased prediction* (BLUP), MSE *empirical best linear unbiased prediction* (EBLUP) beserta penaksiran MSE EBLUP.

3.1 *Mean Squared Error* (MSE) *Best Linear Unbiased Prediction* (BLUP)

Pada metode BLUP, diasumsikan bahwa parameter dari variansi efek *random* (δ) diketahui nilainya sehingga berdasarkan **(2.4.f)**, maka BLUP dari $\boldsymbol{\tau}$ diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\tau}}(\delta, y) &= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\delta, y) + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\delta, y) \\ &= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)\end{aligned}$$

Setelah taksiran BLUP diperoleh, selanjutnya akan dibahas mengenai MSE BLUP. Hal ini dilakukan karena MSE BLUP ini akan sangat berguna dalam hal mengukur seberapa baik taksiran dari efek *fixed* dan *random* yang diperoleh. Sebelum mencari MSE BLUP, terlebih dahulu persamaan **(2.4.f)** dinyatakan dengan bentuk lain. Hal ini dilakukan untuk mempermudah mendapatkan formula MSE BLUP. Bentuk lain dari persamaan **(2.4.f)** adalah:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\delta}, y) &= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\delta}) \\
&= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta})\right) \\
&= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y} - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) \\
&= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y} - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) + \\
&\quad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} \\
&= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y} - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} - \\
&\quad - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} \\
&= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\alpha}\right) - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\alpha}\right) \\
&= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}) + \left(\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\alpha}\right) \\
&= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{d}^{T}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\alpha}\right) \\
&= \hat{\boldsymbol{\tau}}^{*}(\delta, \boldsymbol{\alpha}, y) + \mathbf{d}^{T}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\alpha}\right) \qquad \textbf{(3.1.a)}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, bentuk lain dari

$\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta})\right)$ adalah

$\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{y}) = \hat{\boldsymbol{\tau}}^{*}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{y}) + \mathbf{d}^{T}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{\alpha}\right)$.

dengan

$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{*}(\delta, \boldsymbol{\alpha}, y) = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha})$;

$$\mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1};\ \text{dan}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{T} &= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^{T}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X} \\ &= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan **(3.1.a)**, $\hat{\tau}^{*}(\delta,\alpha,\mathbf{y})-t$ dan $\mathbf{d}^{T}(\hat{\alpha}-\alpha)$ tidak berkorelasi (dibuktikan pada lampiran 10), sehingga berdasarkan **(2.4.c)**, **(2.6),** dan **(3.1.a),** MSE dari $\hat{\tau}(\delta)$ diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\delta,\mathrm{y})\right] &= E\left[\hat{\tau}(\delta,\mathrm{y})-t\right]^2 \\ &= E\left[\hat{\tau}^{*}(\delta,\alpha,\mathrm{y})+d^{T}(\hat{\alpha}-\alpha)-t\right]^2 \\ &= E\left[\left(\hat{\tau}^{*}(\delta,\alpha,\mathrm{y})-t\right)+d^{T}(\hat{\alpha}-\alpha)\right]^2 \\ &= E\left[\hat{\tau}^{*}(\delta,\alpha,\mathrm{y})-t\right]^2+E\left[d^{T}(\hat{\alpha}-\alpha)\right]^2+2\,\mathrm{cov}\left[\left(\hat{\tau}^{*}(\delta,\alpha,\mathrm{y})-t\right),d^{T}(\hat{\alpha}-\alpha)\right] \\ &= E\left[\hat{\tau}^{*}(\delta,\alpha,\mathrm{y})-t\right]^2+E\left[d^{T}(\hat{\alpha}-\alpha)\right]^2 \qquad \textbf{(3.1.b)}\end{aligned}$$

Selanjutnya, karena $\hat{\tau}^{*}(\delta,\alpha,\mathrm{y})$ unbiased terhadap t dan $\hat{\alpha}$ unbiased terhadap α (dibuktikan pada lampiran 11), maka **(3.1.b)** menjadi:

$$\begin{aligned}\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\delta,\mathrm{y})\right] &= \mathrm{var}\left[\hat{\tau}^{*}(\delta,\alpha,\mathrm{y})-t\right]+\mathrm{var}\left[d^{T}(\hat{\alpha}-\alpha)\right] \\ &= g_1(\delta)+g_2(\delta)\end{aligned}$$

(3.1.c)

dimana

$$g_1(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{G}\right)\boldsymbol{\omega}$$

dan

$$g_2(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{d}$$

(bukti persamaan **(3.1.c)** diberikan pada lampiran 12).

Oleh karena pada metode BLUP diasumsikan bahwa $\boldsymbol{\delta}$ diketahui nilainya, maka MSE BLUP pada persamaan **(3.1.c)** diatas bergantung pada $\boldsymbol{\delta}$ yang diketahui nilainya sehingga nilai dari MSE BLUP dapat dicari (diketahui). Namun pada kenyataannya $\boldsymbol{\delta}$ tidak diketahui nilainya, sehingga hal tersebut akan berpengaruh pada nilai MSE pada *General Linear Mixed Model*. Oleh sebab itu pada subbab selanjutnya akan dibahas mengenai MSE EBLUP.

3.2 *Mean Squared Error* (MSE) *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)

Seperti telah dijelaskan sebelumnya, metode BLUP memiliki asumsi bahwa $\boldsymbol{\delta}$ diketahui nilainya, sehingga tidak ada permasalahan dalam mencari taksiran efek *fixed* dan *random* serta MSE pada *General* LMM. Namun, pada kenyataannya $\boldsymbol{\delta}$ tidak diketahui nilainya, sehingga untuk mendapatkan taksiran dari efek *fixed* dan *random* harus dilakukan penaksiran terlebih dahulu tehadap $\boldsymbol{\delta}$ dan pada Tugas Akhir ini akan digunakan taksiran

δ yang diperoleh dari metode *Maximum Likelihood* (ML). Selanjutnya, taksiran efek *fixed* dan *random* pada *General Linear Mixed Model* dapat diperoleh dengan mengganti δ dengan $\hat{\delta}$ pada persamaan taksiran BLUP. Metode tersebut dikenal dengan metode EBLUP.

Berdasarkan persamaan **(2.4.l)**, EBLUP dari $\boldsymbol{\tau}$ diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right) &= \boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)+\boldsymbol{\omega}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\\ &= \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}+\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{Z}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\right)\end{aligned}$$

Oleh karena adanya penaksiran δ pada metode EBLUP, maka MSE pada *General* LMM pun perlu dicari kembali. Secara langsung, MSE BLUP pada persamaan **(3.1.c)** dapat digunakan sebagai MSE EBLUP dengan asumsi bahwa δ tidak diketahui nilainya, yaitu:

$$\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\boldsymbol{\delta},\mathrm{y})\right]=g_1(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta}) \qquad \textbf{(3.2.a)}$$

dengan

$$g_1(\boldsymbol{\delta})=\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{G}-\mathbf{G}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{G}\right)\boldsymbol{\omega}$$

dan

$$g_2(\boldsymbol{\delta})=\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{d}$$

Namun, jika menggunakan persamaan MSE BLUP sebagai MSE EBLUP maka variasi dari δ tidak diikutsertakan, di mana hal tersebut merupakan bagian penting dari metode EBLUP. Dengan demikian perlu dicari MSE EBLUP yang telah memperhitungkan variasi dari δ. Berdasarkan **(2.4.c), (2.6),** dan **(2.4.l)**, didapatkan MSE EBLUP sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)\right] &= E\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-t\right]^2 \\
&= E\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-t+\hat{\tau}(\delta)-\hat{\tau}(\delta)\right]^2 \\
&= E\left[\left(\hat{\tau}(\delta)-t\right)+\left(\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-\hat{\tau}(\delta)\right)\right]^2 \\
&= E\left[\hat{\tau}(\delta)-t\right]^2+E\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-\hat{\tau}(\delta)\right]^2+2E\left[\hat{\tau}(\delta)-t\right]\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-\hat{\tau}(\delta)\right] \\
&= \mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\delta)\right]+E\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-\hat{\tau}(\delta)\right]^2+2E\left[\hat{\tau}(\delta)-t\right]\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-\hat{\tau}(\delta)\right]
\end{aligned} \qquad \textbf{(3.2.b)}$$

Selanjutnya, karena diberikan $\hat{\delta}$ *translation invariant*, serta diasumsikan **b** dan **e** berdistribusi normal, maka $\left[\hat{\tau}(\delta)-t\right]$ dan $\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-\hat{\tau}(\delta)\right]$ *independent* (dibuktikan pada lampiran 13) dan oleh karena itu, $\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)\right]$ pada persamaan **(3.2.b)** menjadi:

$$\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)\right]=\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\delta)\right]+E\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)-\hat{\tau}(\delta)\right]^2 \qquad \textbf{(3.2.c)}$$

di mana

$\mathbf{MSE}\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\delta})\right]$ merupakan bentuk dari MSE BLUP; dan

$E\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\delta})\right]^2$ bernilai nonnegatif

(bukti persamaan **(3.2.c)** diberikan pada lampiran 14)

Berdasarkan persamaan **(3.2.c)** terlihat bahwa MSE EBLUP lebih besar dari MSE BLUP. Hal ini terjadi karena adanya penaksiran $\boldsymbol{\delta}$ pada Metode EBLUP. Jadi, dengan adanya penambahan penaksiran $\boldsymbol{\delta}$ ini mengakibatkan MSE EBLUP lebih besar dari MSE BLUP.

Selanjutnya, pada bagian kedua pada sisi kanan persamaan **(3.2.c)** yaitu $E\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\delta})\right]^2$, nilainya sangat sulit dicari, sehingga untuk mencari hasil dari $E\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\delta})\right]^2$ digunakan aproksimasi. Adapun aproksimasi yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah aproksimasi Taylor, sehingga bagian kedua pada sisi kanan persamaan **(3.2.c)** menjadi:

$$\begin{aligned} E\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-\hat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\delta})\right]^2 &\approx tr\left[\left(\partial\mathbf{a}^T/\partial\boldsymbol{\delta}\right)\boldsymbol{\Omega}\left(\partial\mathbf{a}^T/\partial\boldsymbol{\delta}\right)^T I_{\boldsymbol{\delta}}^{-1}(\boldsymbol{\delta})\right] \\ &=: g_3(\boldsymbol{\delta}) \end{aligned} \quad \textbf{(3.2.d)}$$

(bukti persamaan **(3.2.d)** diberikan pada lampiran 14)

di mana

$$I_{\boldsymbol{\delta}}^{-1}(\boldsymbol{\delta}) = \mathrm{var}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) = \frac{1}{2} tr\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{(\mathrm{j})}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{(\mathrm{k})}\right)$$

dengan

$$\mathbf{\Omega}_{(j)} = \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_j} \text{; dan}$$

$$\mathbf{\Omega}_{(k)} = \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_k}.$$

Berdasarkan **(3.1.c)** dan **(3.2.d)** didapatkan aproksimasi order kedua untuk $\mathbf{MSE}\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ pada persamaan **(3.2.c),** yaitu sebagai berikut:

$$\mathbf{MSE}\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \approx g_1(\boldsymbol{\delta}) + g_2(\boldsymbol{\delta}) + g_3(\boldsymbol{\delta}) \qquad \textbf{(3.2.e)}$$

dengan

$$g_1(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{G}\right)\boldsymbol{\omega};$$

$$g_2(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{d} \text{; dan}$$

$$g_3(\boldsymbol{\delta}) \approx tr\left[\left(\partial \mathbf{a}^T / \partial \boldsymbol{\delta}\right)\mathbf{\Omega}\left(\partial \mathbf{a}^T / \partial \boldsymbol{\delta}\right)^T I_{\boldsymbol{\delta}}^{-1}(\boldsymbol{\delta})\right].$$

Selanjutnya, oleh karena pada metode EBLUP diasumsikan bahwa $\boldsymbol{\delta}$ tidak diketahui nilainya, maka MSE EBLUP pada persamaan **(3.2.a)** dan **(3.2.e)** bergantung pada $\boldsymbol{\delta}$ yang tidak diketahui nilainya sehingga nilai dari MSE EBLUP tidak dapat dicari. Oleh karena itu, perlu dilakukan penaksiran MSE EBLUP yang akan dibahas pada subbab selanjutnya.

3.3 Penaksiran *Mean Squared Error* (MSE) *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (EBLUP)

Pada subbab 3.2 telah dijelaskan bahwa MSE EBLUP, yaitu

$\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\boldsymbol{\delta}, \mathrm{y})\right] = g_1(\boldsymbol{\delta}) + g_2(\boldsymbol{\delta})$ dan

$\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\hat{\boldsymbol{\delta}})\right] \approx g_1(\boldsymbol{\delta}) + g_2(\boldsymbol{\delta}) + g_3(\boldsymbol{\delta})$ bergantung pada $\boldsymbol{\delta}$ yang tidak diketahui nilainya, sehingga MSE EBLUP perlu ditaksir. Penaksiran dari MSE EBLUP ($\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\hat{\boldsymbol{\delta}})\right]$) dilakukan agar didapatkan nilai dari $\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}(\hat{\boldsymbol{\delta}})\right]$ sehingga dapat digunakan untuk aplikasinya.

Ada dua cara untuk menaksir MSE EBLUP. Namun, sebelum membahas penaksiran MSE EBLUP, telah diketahui bahwa taksiran EBLUP dapat diperoleh dengan cara mengganti $\boldsymbol{\delta}$ dengan $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ pada taksiran efek *fixed* dan *random* pada taksiran BLUP. Hal yang sama juga dapat dilakukan dalam penaksiran MSE EBLUP. Jadi, cara pertama yang dilakukan untuk menaksir MSE EBLUP adalah dengan cara mengganti $\boldsymbol{\delta}$ dengan $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ pada persamaan MSE BLUP yaitu pada persamaan **(3.1.c)**. Taksiran MSE EBLUP ini dinamakan *naive estimator*. Sehingga, *Naive estimator* untuk MSE EBLUP dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{mse}_{\mathbf{N}}\left[\hat{\tau}(\hat{\boldsymbol{\delta}})\right] = g_1(\hat{\boldsymbol{\delta}}) + g_2(\hat{\boldsymbol{\delta}}) \qquad \textbf{(3.3.a)}$$

Naive estimator pada persamaan **(3.3.a)** dapat digunakan sebagai taksiran MSE EBLUP, namun *naive estimator* ini merupakan taksiran yang tidak sesuai dengan yang diharapkan karena pada metode EBLUP selain dilakukan penaksiran pada efek *fixed* dan *random* juga dilakukan penaksiran pada δ, sehingga jika menggunakan *naive estimator* ini maka variasi dari δ tidak diikutsertakan. Variasi yang berkaitan dengan penaksiran δ tersebut direpresentasikan pada sisi kanan bagian kedua persamaan **(3.2.c)**. Oleh karena *naive estimator* pada persamaan **(3.3.a)** tidak mengikutsertakan penambahan variasi yang berkaitan dengan penaksiran δ, maka digunakan cara kedua dalam menaksir MSE EBLUP, yaitu dengan mensubstitusikan $\hat{\delta}$ ke δ pada aproksimasi MSE **(3.2.e)**, yang kemudian dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{mse}_1\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] = g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) + g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) + g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) \qquad \textbf{(3.3.b)}$$

Taksiran MSE EBLUP di atas adalah taksiran yang mengikutsertakan penambahan variasi yang berkaitan dengan penaksiran δ. Jadi, terlihat jelas bahwa *naive estimator* pada **(3.3.a)** akan *underestimate* ke $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ **(3.3.b)**. Oleh karena itu, untuk mendapatkan nilai MSE EBLUP maka digunakan $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ sebagai taksiran MSE EBLUP, karena $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ telah memperhitungkan variasi yang berkaitan dengan penaksiran δ .

Selanjutnya, karena dilakukan penaksiran pada MSE EBLUP, maka diharapkan taksiran MSE EBLUP yang didapat *unbiased* terhadap MSE EBLUP. Oleh karena itu, akan dilakukan pemeriksaan ekspektasi terhadap $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ dan karena pada Tugas Akhir ini hanya memakai taksiran $\boldsymbol{\delta}$ yang didapat dengan menggunakan Metode ML, maka berdasarkan **(3.3.b)** didapatkan bahwa:

$$E\left[g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \approx g_1(\boldsymbol{\delta}) + c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1(\boldsymbol{\delta}) - g_3(\boldsymbol{\delta}) \quad \textbf{(3.3.c)}$$

$$E\left[g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \approx g_2(\boldsymbol{\delta}) \quad \textbf{(3.3.d)}$$

$$E\left[g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \approx g_3(\boldsymbol{\delta}), \quad \textbf{(3..3.e)}$$

dengan

$\nabla g_1(\boldsymbol{\delta})$ adalah vektor dari turunan pertama $g_1(\boldsymbol{\delta})$ terhadap $\boldsymbol{\delta}$.

Persamaan **(3.3.c)**, **(3.3.d)**, dan **(3.3.e)** dibuktikan pada lampiran 15, dimana $c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})$ merupakan bias dari $\hat{\boldsymbol{\delta}}$, yaitu:

$$c_{\hat{\boldsymbol{\delta}}}^T(\boldsymbol{\delta}) \approx \frac{1}{2} I_{\delta}^{-1}(\delta)\, col_{1\le d\le q}\, tr\left[I_{\beta}^{-1}(\delta)\frac{\partial}{\partial \delta_d} I_{\beta}(\delta)\right],$$

dengan

$$I_{\boldsymbol{\delta}}^{-1}(\boldsymbol{\delta}) = \operatorname{var}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) = \frac{1}{2} tr\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{(\mathrm{j})}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_{(\mathrm{k})}\right),$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{(j)} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{\delta}_j};$$

$\mathbf{\Omega}_{(k)} = \frac{\partial \mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_k}$;dan

$I_{\beta}^{-1}(\delta) = \text{var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{X}\right)^{-1}$.

(bias dari $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ di atas merujuk pada [2] dan [10]).

Berdasarkan persamaan **(3.3.c)** terlihat bahwa $g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)$ bias terhadap $g_1(\boldsymbol{\delta})$ (bukti dapat dilihat pada lampiran 15), sehingga jika menggunakan $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ sebagai taksiran MSE EBLUP, maka $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ bias terhadap MSE EBLUP.

Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ bias terhadap MSE EBLUP.

Bukti:

Berdasarkan **(3.3.b)**, **(3.3.c)**, **(3.3.d)**, dan **(3.3.e)** diketahui bahwa:

$\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] = g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) + g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right) + g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)$;

$E\left[g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \approx g_1(\boldsymbol{\delta}) + c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta}) \nabla g_1(\boldsymbol{\delta}) - g_3(\boldsymbol{\delta})$;

$E\left[g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \approx g_2(\boldsymbol{\delta})$; dan

$E\left[g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \approx g_3(\boldsymbol{\delta})$.

Sehingga,

$$
\begin{aligned}
E\left\{\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]\right\} &= E\left\{g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right\} \\
&= E\left[g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]+E\left[g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]+E\left[g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \\
&\approx g_1(\boldsymbol{\delta})+c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1(\boldsymbol{\delta})-g_3(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \\
&\approx g_1(\boldsymbol{\delta})+c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)\right]$ bias terhadap MSE EBLUP , yaitu

$\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)\right] \approx g_1(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta})$.

Oleh karena $\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\delta}\right)\right]$ bias terhadap MSE EBLUP, selanjutnya akan dicari taksiran MSE EBLUP yang *unbiased* terhadap MSE EBLUP. Berdasarkan persamaan **(3.3.b)**, **(3.3.c)**, **(3.3.d)**, dan **(3.3.e)** maka didapatkan:

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]\right\} = E\left\{g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right\} \\
&E\left\{\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]\right\} = E\left[g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]+E\left[g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]+E\left[g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \\
&E\left\{\mathbf{mse}_1\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]\right\} \approx g_1(\boldsymbol{\delta})+c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1(\boldsymbol{\delta})-g_3(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \\
&E\left\{g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right\} \approx g_1(\boldsymbol{\delta})+c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1(\boldsymbol{\delta})-g_3(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \\
&E\left\{g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right\}-c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \approx g_1(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \\
&E\left\{g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right\}-c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \approx g_1(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \\
&E\left\{g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-c_{\hat{\delta}}^T\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\nabla g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right\} \approx g_1(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \\
&E\left\{g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+2g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-c_{\hat{\delta}}^T\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\nabla g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right\} \approx g_1(\boldsymbol{\delta})+g_2(\boldsymbol{\delta})+g_3(\boldsymbol{\delta}) \\
&E\left[g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+2g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-c_{\hat{\delta}}^T\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\nabla g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right] \approx \mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

(3.3.f)

Dengan demikian, $\mathbf{mse}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]=g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+2g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)$ adalah taksiran yang tepat (dalam hal ini taksiran yang *unbiased*) untuk $\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$ sedemikian sehingga $E\left\{mse\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]\right\}\approx\mathbf{MSE}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]$. Jadi, $\mathbf{mse}\left[\hat{\tau}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)\right]=g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+g_2\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)+2g_3\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)-c_{\hat{\delta}}^T(\boldsymbol{\delta})\nabla g_1\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}\right)$ ini yang akan digunakan dalam aplikasinya untuk taksiran δ yang didapat dari Metode *Maximum Likelihood* (ML).