BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Variabel Random

Definisi 2.1.1

Variabel random adalah sebuah fungsi X yang memetakan setiap elemen dalam ruang sampel $c \in$ □ , pada satu dan hanya satu bilangan riil $X(c)=x$, dimana ruang sampel dari X adalah bilangan riil A ={x:x=X(c),c ε □ }.

Dengan □ adalah ruang sampel dari eksperimen random

2.2 Ekspektasi

Definisi 2.2

misalkan X adalah variabel random dan memiliki pdf f(x) sedemikian sehingga memiliki konvergen absolut. Pada kasus X variabel random diskrit

$$\sum_{x} |x| \, f(x) \,, \qquad \text{limitnya konvergen menuju nilai tertentu}$$

atau pada kasus X variabel random kontinu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) \; dx \;, \qquad \text{limitnya konvergen menuju nilai tertentu}$$

sehingga ekspektasi X adalah

$E(X) = \sum_X xf(x)$, apabila X adalah variabel random diskrit

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx$, apabila X adalah variabel random kontinu

Sifat 2.2.1

$E(aX) = aE(X)$

Bukti: a. $E(aX) = \sum_X axf(x)$ definisi ekspektasi untuk X variabel random diskrit

$= a\sum_X xf(x)$ sifat penjumlahan

b. $E(aX) = \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)\ \ dx$ definisi ekspektasi untuk X variabel random kontinu

$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ \ dx$ sifat integral

2.3 Variansi

Simbol : σ^2

Definisi 2.3.1

$\sigma^2 = E[(x-\mu\ )^2] = E\left(X^2 - 2\mu\ E(X) + \mu^2\right)$

Karena E adalah operator linier, maka

$$\sigma^2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

Sifat 2.3.1

$\mathrm{var}(aX) = a^2\,\mathrm{var}(X)$, dengan a adalah sebuah konstanta

Bukti: $\mathrm{var}(aX) = E([aX - a\mu]^2)$ Definisi variansi

$= E([a\{X - \mu\}]^2)$ sifat bilangan riil

$= E([a^2\{X - \mu\}^2])$ sifat pangkat

$= a^2 E([\{X - \mu\}^2])$ sifat ekspektasi

$= a^2\,\mathrm{var}(X)$ definisi variansi

2.4 Regresi linier sederhana

Regresi linier sedehana adalah salah satu cara untuk mencari hubungan antara 2 variabel sehingga dapat dicari besarnya pengaruh kenaikan nilai X terhadap kenaikan nilai Y, terdapat beberapa asumsi untuk menggunakan regresi linier ini.

Asumsi : 1. Errornya berdistribusi normal

2. Errornya saling independen

3. Errornya memiliki variansi yang sama

4. Errornya linier independent

Metode : Metode penaksiran parameter yang akan dipakai pada skripsi ini adalah least square.

Taksiran: **1.Taksiran parameter**

Misalkan Y adalah variabel dependen dan X adalah variabel independen, maka model regresinya adalah $y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$.

Karena metode yang digunakan adalah least square atau kuadrat terkecil, maka untuk mencari taksiran-taksiran parameter akan dicari melalui kuadrat errornya terkecil, dimana kuadrat errornya adalah $\sum_{i=1}^{n}[y-\hat{y}]^2$,

dengan $\hat{y}$ adalah taksiran dari y.

Misalkan $H(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}[y-\hat{y}]^2$, untuk mencari taksiran dari α dan β , maka $H(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}[y-\hat{y}]^2$ diturunkan secara parsial terhadap α menjadi

$$\frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \alpha - \beta(x_i - \overline{x})][-1]$$

dan diturunkan terhadap β menjadi

$$\frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \alpha - \beta(x_i - \overline{x})][-(x_i - \overline{x})]$$

oleh karena itu ingin meminumkan kuadrat errornya maka dibuat $\frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = 0$ dan

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(2\sum_{i=1}^{n}[y_i-\alpha-\beta(x_i-\overline{x})][-1]\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-2\sum_{i=1}^{n}y_i+2n\alpha+2\sum_{i=1}^{n}\beta(x_i-\overline{x})\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-2\sum_{i=1}^{n}y_i\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(2n\alpha)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(2\sum_{i=1}^{n}\beta(x_i-\overline{x})\right)=2n>0$$

Karena n adalah bilangan asli maka n tidak mungkin negatif, maka 2n>0

sehingga $\frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}y_i-n\alpha-\sum_{i=1}^{n}\beta(x_i-\overline{x})=0$

karena $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})$ =0, maka $\sum_{i=1}^{n}y_i-n\alpha=0$, sehingga

$$E(\beta)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{Y})(x_i-\overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right)\sum_{i=1}^{n}y_i=n\alpha$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}=\alpha$$

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\right)=E(\alpha)$$

$$\overline{Y}=\widehat{\alpha}$$

dan apabila hasil $\widehat{\alpha}=\overline{Y}$ disubstitusi ke dalam persamaan

$\frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=0$, maka $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})-\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=0$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y})(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$E\left(\beta\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y})(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right)$$

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y})(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

dan karena $\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial H(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \alpha - \beta(x_i - \overline{x})][-(x_i - \overline{x})]\right)$

$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 > 0$

maka taksiran dari $\widehat{\beta}$ yang didapat telah memiliki kuadrat error minimum

2.Taksiran Variansi $\widehat{\beta}$

$$\text{var}(\widehat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right]^2 \text{var}(Y_i)$$

$$\text{var}(\widehat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right]^2 \sigma^2$$

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

2.5 Distribusi dari $\frac{nS^2}{\sigma^2}$

Misalkan terdapat distribusi gabungan

$$Y_i = \overline{X}, Y_2 = X_2 - \overline{X}, Y_3 = X_3 - \overline{X}, ..., Y_n = X_n - \overline{X}$$

Maka transformasi inversnya adalah

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3 - ... - y_n$$

$$x_2 = y_1 + y_2$$

.

.

.

$$x_n = y_1 + y_n$$

Invers distribusi gabungan tersebut memiliki jacobian n, sedangkan

$$\sum_{i}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i}^{n}(x_i - \overline{x} + \overline{x} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu)^2$$

Dan karena $2(\overline{x} - \mu)\sum_{1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$, pdf gabungan dari $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ dapat ditulis menjadi $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left[-\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{2\sigma^2} - n\left(\frac{n(\overline{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]$, dimana $\overline{x}$ mewakili

$\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_2}{n}\right)$ dan $-\infty < x_i < \infty$, i=1,2,..,n. Maka, dengan $y_1 = \bar{x}$ dan

$x_1 - \bar{x} = -y_2 - y_1 - ... - y_n$, pdf gabungan dari

$Y_1, Y_2, Y_3, ...Y_n$ adalah $(n)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \exp\left[-\frac{(-y_2 - ... - y_n)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sum_2^n y_i^2}{2\sigma^2} - \frac{n(y_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$,

$-\infty < y_i < \infty$, i=1,2,,…,n.

Maka Y_1 independent dari n-1 variabel random $Y_2, Y_3, ...Y_n$, sehingga bila

$Y_1 = \bar{X}$ maka $\frac{n(Y_1 - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} = W_1$ akan independent dari

$$\frac{(-Y_2 - Y_3 - ... - Y_n)^2 + Y_1}{\sigma^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = W_2$$

Karena W_1 adalah kuadrat dari distribusi normal standar, distribusinya adalah

${\chi^2}_1$. dan juga karena $W = \sum_1^n \left(\frac{(X_1 - \mu)^2}{\sigma}\right) = W_1 + W_2$ adalah ${\chi^2}_n$.

Karena W_1 dan W_2 independent, maka $E(e^{iW}) = E(e^{tW_1})E(e^{tW_2})$

atau $(1-2t)^{-\frac{n}{2}} = (1-2t)^{-1/2} E(e^{tW2})$, t<1/2

sehingga $E(e^{tW2}) = (1-2t)^{-(n-1)/2}$, t<1/2.

$W_2 = nS^2 / \sigma^2 \sim \chi^2 (n-1)$

2.6 S^2 adalah penaksir yang bias untuk bias untuk σ^2

Akan dibuktikan bahwa S^2 adalah penaksir yang bias untuk bias untuk σ^2

Bukti: $E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n}\frac{n}{\sigma^2}E(S^2)$

$$E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n}E(\frac{nS^2}{\sigma^2})$$

$$E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n}(n-1) \quad E(S^2) = \frac{\sigma^2(n-1)}{n}$$

$$E(S^2) = \frac{\sigma^2(n-1)}{n}$$