BAB III

PELABELAN *a*-SBBA PADA GABUNGAN DUA GRAF DARI KELAS YANG SAMA

Pada bab ini akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan dua graf bintang, graf lingkaran dan graf matahari serta menentukan banyaknya simpul terisolasi pada gabungan graf – graf tersebut. Seluruh pembuktian pada bab ini akan dilakukan dengan alur sebagai berikut: pembuktian akan dilakukan dengan terlebih dahulu memberikan aturan pemberian label untuk setiap simpul dan busur, menunjukkan bahwa pelabelan tersebut merupakan pelabelan busur ajaib bagi masing-masing graf dan pada gabungan graf, serta akan ditunjukkan pula banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan dua graf. Pada akhirnya akan ditunjukkan bahwa pelabelan tersebut adalah pelabelan simpul berurutan.

Pada bab ini akan diberikan pula konstruksi pelabelan *a*-SBBA bagi gabungan graf yang mengandung *unicycle*. Oleh karena pelabelan berurutan adalah pengembangan dari pelabelan super ajaib, maka untuk selanjutnya pada setiap graf yang mengandung *unicycle* yang akan dipertimbangkan hanya lingkaran yang berukuran ganjil. Hal ini berdasarkan teorema yang diberikan oleh Enomoto, Llado, dan Nakamigawa.

Teorema 3.1 [Enomoto, Llado, Nakamigawa]

Graf lingkaran C_n memiliki pelabelan busur super ajaib jika dan hanya jika *n* bilangan ganjil.

3. 1 Gabungan Dua Graf Bintang

Sugeng dan Miller [4] telah memberikan batas minimal simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan dua graf pohon yaitu 1. Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa gabungan dua graf bintang agar memiliki pelabelan *a*-SBBA hanya membutuhkan 1 simpul terisolasi.

Teorema 3.2

Graf gabungan dari dua graf bintang $S_n \cup S_m$ memiliki pelabelan total *a*-Simpul Berurutan Busur Ajaib (*a*-SBBA) dengan banyak simpul terisolasi adalah satu untuk $a = m$ atau $a = n$.

Bukti

Misalkan ambil *a*=*m* dan *x* adalah banyak simpul terisolasi,

label simpul $v_i^1, i = 0,1,2,...,n$ pada S_n dengan

$$\gamma_1(v_i^1) = m + i + 1 \qquad , i = 0,1,2,...,n$$

dan busur pada S_n dengan

$$\gamma_1(v_0^1 v_i^1) = 2m + 2n + x + 3 - i \quad , \; i = 1,2,...,n.$$

Kemudian label simpul $v_i^2, i = 0,1,2,...,m$ pada S_m dengan

$$\gamma_1(v_i^2) = m + n + 1 + x + i \quad , \; i = 0,1,2,...,m$$

dan busur pada S_m dengan

$$\gamma_1(v_0^2 v_i^2) = m + 1 - i \quad , \; i = 1,2,...,m.$$

Label juga simpul terisolasi dengan

$$\gamma_1(u_i) = m + n + 1 + i \quad , i = 1,2,...,x.$$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_1 adalah pelabelan busur ajaib pada masing-masing graf S_n dan S_m.

Untuk S_n, bobot setiap busur adalah

$$\begin{aligned} w_{\gamma_1}(v_0^1 v_i^1) &= \gamma_1(v_0^1) + \gamma_1(v_0^1 v_i^1) + \gamma_1(v_i^1) \\ &= (m+1) + (2m + 2n + x + 3 - i) + (m + i + 1) \\ &= 4m + 2n + x + 5 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Terlihat bahwa bobot busur pada S_n adalah konstan karena hanya bergantung pada banyaknya simpul pada gabungan graf S_n dan S_m. Dengan demikian γ_1 adalah pelabelan total busur ajaib pada S_n dengan bilangan ajaib $4m + 2n + x + 5$.

Kemudian untuk S_m, bobot setiap busur adalah

$$w_{\gamma_1}(v_0^2 v_j^2) = \gamma_1(v_0^2) + \gamma_1(v_0^2 v_j^2) + \gamma_1(v_j^2)$$

$$= (2m + n + 2 + x) + (m + 1 - j\ ) + (m + n + 1 + x + j)$$

$$= 4m + 2n + 2x + 4 \qquad (3.2)$$

Pada S_m juga terlihat bahwa bobot busur adalah konstan, sehingga γ_1 juga merupakan pelabelan total busur ajaib pada S_m dengan bilangan ajaib $4m + 2n + 2x + 4$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_1 adalah pelabelan total busur ajaib pada gabungan graf S_n dan S_m sekaligus akan membuktikan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan graf S_m dan S_m. Supaya γ_1 menjadi pelabelan total busur ajaib, maka (3.1) harus sama dengan (3.2). Oleh karena itu, $4m + 2n + x + 5 = 4m + 2n + 2x + 4$, sehingga akan diperoleh $x = 1$. Dengan demikian, graf $S_n \cup S_m$ memiliki pelabelan total busur ajaib γ_1 dengan banyak simpul terisolasi adalah 1.

Sekarang akan dibuktikan bahwa label simpul pada graf $S_n \cup S_m$ adalah berurutan.

$$\gamma_1(V) = \{\gamma_1(V(S_n))\} \cup \{\gamma_1(u_i)\} \cup \{\gamma_1(V(S_m))\}$$

$$= \{m+1, m+2, \ldots, m+n+1\} \cup \{m+n+1+1\}$$

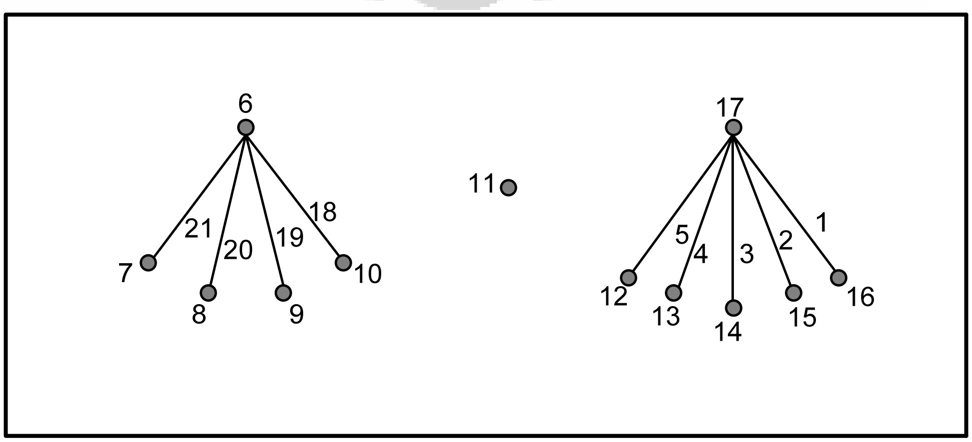
$$\cup \{m+n+1+1+1, m+n+1+1+2, \ldots, m+n+1+1+m+1\}$$

$$=\{m+1, m+2, m+3, \ldots, m+(m+1)+(n+1)+1\}.$$

Terlihat bahwa label simpul pada graf $S_n \cup S_m$ berurutan, sehingga γ_1 adalah pelabelan simpul berurutan.

Telah ditunjukkan bahwa γ_1 adalah pelabelan total busur ajaib dengan $k = 4m + 2n + 6$ dan γ_1 adalah pelabelan simpul berurutan dengan *a*=*m*, maka γ_1 adalah pelabelan total *a*-SBBA pada graf $S_n \cup S_m$. Jadi gabungan dari dua graf bintang $S_n \cup S_m$ memiliki pelabelan total *m*- SBBA dengan banyak simpul terisolasi adalah satu. Dengan menggunakan pelabelan dual (Definisi 2.2) dan berdasarkan Teorema 2.2 dapat diperoleh pelabelan *n*-SBBA. Bilangan ajaib yang akan diperoleh untuk pelabelan *n*-SBBA adalah $k' = 4n + 2m + 6$ dengan banyak simpul terisolasi adalah satu.

Jadi terbukti bahwa gabungan dari dua graf bintang $S_n \cup S_m$ memiliki pelabelan total *a*-Simpul Berurutan Busur Ajaib (*a*-SBBA) dengan banyak simpul terisolasi adalah satu untuk $a = m$ atau $a = n$. ■



Gambar 3.1 Pelabelan 5-SBBA pada $S_4 \cup S_5$, *k*=34 dan *x*=1

Pada Gambar 3.1 diberikan contoh pelabelan *a*-SBBA pada gabungan dua graf bintang untuk $S_4 \cup S_5$, dengan menggunakan pelabelan 5-SBBA, bilangan ajaib yang diperoleh dari pelabelan ini adalah 34 dan simpul terisolasi yang dibutuhkan adalah satu simpul.

Gabungan dua graf bintang memiliki pelabelan *a*-SBBA dengan banyak simpul terisolasi adalah satu. Banyaknya simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan dua graf bintang tidak bergantung pada ukuran graf bintang. Pada subbab selanjutnya akan diberikan pelabelan *a*-SBBA untuk gabungan dua graf lingkaran.

3.2 Gabungan Dua Graf Lingkaran

Pada [4], Sugeng dan Miller juga telah memberikan batas minimal simpul terisolasi yang dibutuhkan oleh graf yang terdiri dari dua graf yang mengandung *unicycle*, yaitu sebanyak tiga simpul. Seperti telah dijelaskan pada bab II, graf lingkaran adalah salah satu graf dengan unicycle. Pada subbab ini akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan dua graf yang terdiri dari dua graf lingkaran dan seperti telah disebutkan pada awal bab ini, yang akan dibahas adalah pelabelan *a*-SBBA untuk gabungan dua graf lingkaran yang masing-masing berukuran ganjil.

Teorema 3.3

Graf gabungan dari dua graf lingkaran $C_n \cup C_m$ (*m* dan *n* adalah bilangan ganjil) memiliki pelabelan total *a*-Simpul Berurutan Busur Ajaib (*a*-SBBA) dengan simpul terisolasi sebanyak $x = \frac{m+n}{2}$ untuk $a = m$ atau $a = n$.

Bukti

Misalkan *a*=*m*,

label simpul $v_i^1, i = 1,2,...,n$ pada C_n dengan

$$\gamma_2\left(v_i^1\right) = \begin{cases} m + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil} \\ m + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \frac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

dan busur pada C_n dengan

$$\gamma_2\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right) = 2m + n + x + n - i \qquad , i = 1,2,3,...,n,$$

dengan *i*+1 diambil modulo *n*.

Kemudian label simpul $v_i^2, i = 1,2,...,m$ pada C_m dengan

$$\gamma_2\left(v_i^2\right) = \begin{cases} m + n + x + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil} \\ m + n + x + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \frac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

dan label busur pada C_m dengan

$$\gamma_2\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right)=\begin{cases} m-i & , i=1,2,3,\ldots,m-1 \\ m & , i=m \end{cases}$$

dengan *i*+1 diambil modulo *m*.

Label juga simpul terisolasi dengan

$$\gamma_2\left(u_i\right)=m+n+i \qquad , i=1,2,\ldots,x$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_2 adalah pelabelan busur ajaib pada masing-masing graf C_n dan C_m.

Untuk graf C_n, bobot setiap busur adalah

$$w_{\gamma_2}\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right)=\gamma_2\left(v_i^1\right)+\gamma_2\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right)+\gamma_2\left(v_{i+1}^1\right)$$

misalkan i ganjil, maka i+1 genap,

$$w_{\gamma_2}\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right)=\left(m+\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil\right)+\left(2m+2n+x-i\right)+\left(m+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\frac{i+1}{2}\right)$$

$$=4m+2n+x+1+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \tag{3.3}$$

$$w_{\gamma_2}\left(v_1^1 v_n^1\right)=\gamma_2\left(v_1^1\right)+\gamma_2\left(v_1^1 v_n^1\right)+\gamma_2\left(v_n^1\right)$$

$$=\left(m+\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil\right)+\left(2m+2n+x\right)+\left(m+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)$$

$$=4m+2n+x+1+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \tag{3.4}$$

Bobot busur pada C_n adalah konstan, $4m+2n+x+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Sehingga γ_2 adalah pelabelan total busur ajaib pada graf C_n dengan bilangan ajaib $4m+2n+x+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Untuk graf C_m, bobot setiap busur adalah

$$w_{\gamma_2}\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) = \gamma_2\left(v_i^2\right) + \gamma_2\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) + \gamma_2\left(v_{i+1}^2\right)$$

$$= \left(m+n+x+\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil\right) + (m-i) + \left(m+n+x+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \frac{i+1}{2}\right)$$

$$= 3m+2n+2x+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \tag{3.5}$$

$$w_{\gamma_2}\left(v_1^2 v_m^2\right) = \gamma_2\left(v_1^2\right) + \gamma_2\left(v_1^2 v_m^2\right) + \gamma_2\left(v_m^2\right)$$

$$= \left(m+n+x+\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil\right) + m + \left(m+n+x+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil\right)$$

$$= 3m+2n+2x+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \tag{3.6}$$

Pada graf C_m juga diperoleh bobot busur pada graf C_m adalah konstan, $3m+2n+2x+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. Sehingga γ_2 adalah pelabelan total busur ajaib pada pada graf C_m dengan bilangan ajaib $3m+2n+2x+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_2 adalah pelabelan total busur ajaib pada gabungan graf $C_n \cup C_m$, dan sekaligus akan membuktikan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan graf $C_n \cup C_m$ tersebut. Supaya γ_2 menjadi pelabelan total busur ajaib, maka (3.3) dan (3.4) harus sama dengan (3.5) dan (3.6). Jadi,

$$4m + 2n + x + 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = 3m + 2n + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

$$m + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = x + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

$$x = m - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{m+n}{2}.$$

Dengan demikian $C_n \cup C_m$ memiliki pelabelan total busur ajaib γ_2 dengan banyak simpul terisolasi adalah $x = \dfrac{m+n}{2}$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa label simpul pada $C_n \cup C_m$ adalah berurutan.

$$\gamma_2(V) = \{\gamma_2(V(C_n))\} \cup \{\gamma_2(u_i)\} \cup \{\gamma_2(V(C_m))\}$$

$$= \{m+1, m+2, \ldots, m+n\} \cup \{m+n+1, m+n+2, \ldots, m+n+x\}$$

$$\cup \{m+n+x+1, m+n+x+2, \ldots, m+n+x+m\}$$

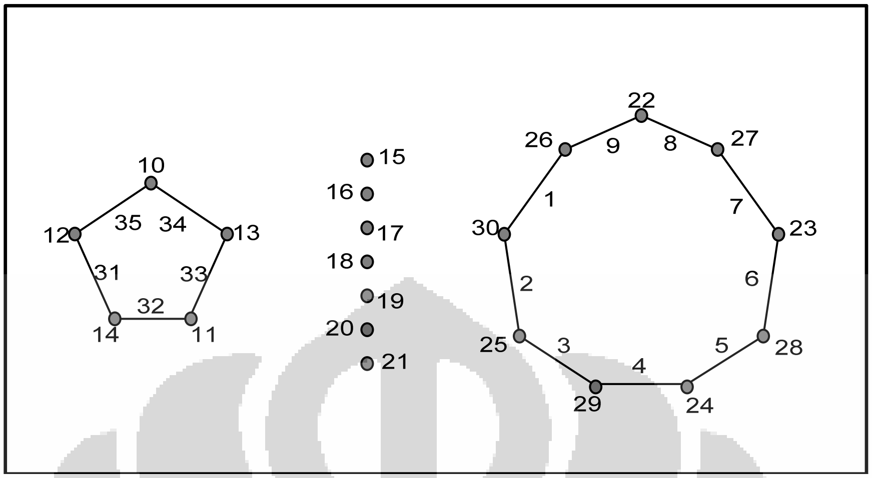
$$= \{m+1, m+2, \ldots, m+n+m+x\}$$

Terlihat bahwa label simpul pada graf $C_n \cup C_m$ berurutan, sehingga γ_2 adalah pelabelan simpul berurutan.

Telah ditunjukkan bahwa γ_2 adalah pelabelan total busur ajaib dengan $k = 4m + 3n + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan γ_2 adalah pelabelan simpul berurutan dengan $a = m$, maka γ_2 adalah pelabelan total *a*-SBBA pada graf $C_n \cup C_m$. Jadi gabungan dari dua buah graf lingkaran $C_n \cup C_m$ memiliki pelabelan total *a*-SBBA dengan simpul terisolasi sebanyak $x = \frac{m+n}{2}$ untuk $a = m$. Pelabelan *a*-SBBA dengan $a = n$ dapat diperoleh dengan menggunakan definisi pelabelan dual (Definisi 2.2) dan kemudian menerapkan Teorema 2.2. Bilangan ajaib yang diperoleh untuk pelabelan *n*-SBBA adalah $k = 4n + 3m + 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak $x = \frac{m+n}{2}$.

Jadi terbukti bahwa gabungan dari dua graf lingkaran $C_n \cup C_m$ (*m* dan *n* adalah bilangan ganjil) memiliki pelabelan total *a*-Simpul Berurutan Busur Ajaib (*a*-SBBA) dengan simpul terisolasi sebanyak $x = \frac{m+n}{2}$ untuk $a = m$ atau $a = n$.

■



Gambar 3.2 Pelabelan 9-SBBA pada $C_5 \cup C_9$, *k*=57 dan *x*=7

Gambar 3.2 memperlihatkan contoh pelabelan *a*-SBBA pada graf $C_5 \cup C_9$, dengan $a = 9$, bilangan ajaib yang diperoleh dari pelabelan ini adalah 57 dan simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak tujuh simpul. Pada pelabelan *a*-SBBA untuk gabungan dua graf lingkaran, banyak simpul terisolasi sangat bergantung pada ukuran kedua lingkaran. Semakin banyak jumlah simpul pada kedua lingkaran maka semakin banyak pula simpul terisolasi yang diperlukan. Pada subbab selanjutnya akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan graf yang dibangun dari graf lingkaran yaitu gabungan dua graf matahari.

3.3 Gabungan Dua Graf Matahari

Graf matahari adalah salah satu graf yang memiliki graf dasar berupa graf lingkaran. Seperti telah dijelaskan pada bab sebelumnya, graf matahari diperoleh dengan menambahkan satu daun pada setiap simpul graf lingkaran. Pada subbab ini akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan dua graf matahari dan menunjukkan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan. Oleh karena graf matahari memiliki dasar graf lingkaran, maka yang akan dibahas pada subbab ini hanya graf matahari yang dibangun dari graf lingkaran berukuran ganjil.

Teorema 3.4

Graf gabungan dari dua graf matahari ($C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$) (*m* dan *n* adalah bilangan ganjil) memiliki pelabelan total *a*-Simpul Berurutan Busur Ajaib (*a*-SBBA) dengan simpul terisolasi sebanyak $x = \dfrac{m+n}{2}$ untuk $a = 2m$ atau $a = 2n$.

Bukti

Misalkan *a=2m*, dan *x* menyatakan banyak simpul terisolasi,

untuk graf $C_n \bullet \overline{K_1}$, label simpul v_i^1, $i = 1, 2, \ldots, n$ dengan

$$\gamma_3\left(v_i^1\right)=\begin{cases}2m+\left\lceil \dfrac{i}{2}\right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil}\\ 2m+\left\lceil \dfrac{n}{2}\right\rceil+\dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap}\end{cases}$$

dan label simpul u_i^1, $i=1,2,...,n$ dengan

$$\gamma_3\left(u_i^1\right)=\begin{cases}2m+n+\dfrac{n+i}{2} & \text{, jika } i \text{ ganjil}\\ 2m+n+\dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap}\end{cases}$$

Kemudian label busur dengan

$$\gamma\left(v_i^1v_{i+1}^1\right)=4m+2n+x+2n-i \qquad , \; i=1,2,...,n-1$$

$$\gamma\left(v_1^1v_n^1\right)=4m+2n+x+2n \qquad , i=n$$

dan

$$\gamma\left(v_i^1u_i^1\right)=4m+2n+x+n-(i-1) \qquad , \; i=1,2,...,n.$$

Selanjutnya untuk graf $C_m \bullet \overline{K_1}$, label simpul v_i^2, $i=1,2,...,m$ dengan

$$\gamma_3\left(v_i^2\right)=\begin{cases}2m+2n+x+m+\dfrac{m+i}{2} & \text{, jika } i \text{ ganjil}\\ 2m+2n+x+m+\dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap}\end{cases}$$

dan simpul u_i^2, $i=1,2,...,m$ dengan

$$\gamma_3\left(u_i^2\right)=\begin{cases}2m+2n+x+\left\lceil \dfrac{i}{2}\right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil}\\ 2m+2n+x+m+\left\lceil \dfrac{m}{2}\right\rceil+\dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap}\end{cases}$$

serta label busur dengan

$$\gamma_3\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) = m-(i-1) \qquad , \ i=1,2,\ldots,m$$

dan

$$\gamma_3\left(v_i^2 u_i^2\right) = 2m-(i-1) \qquad , \ i=1,2,\ldots,m.$$

Label juga simpul terisolasi dengan

$$\gamma_3(t_i) = 2m+2n+i \qquad , \ i=1,2,\ldots,x.$$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_3 adalah pelabelan busur ajaib pada masing-masing graf $C_n \bullet \overline{K_1}$ dan $C_m \bullet \overline{K_1}$.

Bobot setiap busur pada $C_n \bullet \overline{K_1}$ adalah

$$\begin{aligned} w_{\gamma_3}\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right) &= \gamma_3\left(v_i^1\right)+\gamma_3\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right)+\gamma_3\left(v_{i+1}^1\right) \\ &= \left(2m+\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil\right)+\left(4m+2n+x+2n-i\right)+\left(2m+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil+\frac{i+1}{2}\right) \\ &= 8m+4n+x+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} w_{\gamma_3}\left(v_1^1 v_n^1\right) &= \gamma_3\left(v_1^1\right)+\gamma_3\left(v_1^1 v_n^1\right)+\gamma_3\left(v_n^1\right) \\ &= \left(2m+\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil\right)+\left(4m+2n+x+2n\right)+\left(2m+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \\ &= 8m+4n+x+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \end{aligned} \tag{3.8}$$

dan

$$w_{\gamma_3}\left(v_i^1u_i^1\right)=\gamma_3\left(v_i^1\right)+\gamma_3\left(v_i^1u_i^1\right)+\gamma_3\left(u_i^1\right),\quad \text{untuk } i \text{ ganjil}$$

$$=\left(2m+\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil\right)+\left(4m+2n+x+n-(i-1)\right)+\left(2m+n+\frac{n+i}{2}\right)$$

$$=8m+4n+x+1+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \tag{3.9}$$

$$w_{\gamma_3}\left(v_i^1u_i^1\right)=\gamma_3\left(v_i^1\right)+\gamma_3\left(v_i^1u_i^1\right)+\gamma_3\left(u_i^1\right),\quad \text{untuk } i \text{ genap}$$

$$=\left(2m+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\frac{i}{2}\right)+\left(4m+2n+x+n-(i-1)\right)+\left(2m+n+\frac{i}{2}\right)$$

$$=8m+4n+x+1+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \tag{3.10}$$

Kemudian untuk $C_m \bullet \overline{K_1}$, bobot setiap busur adalah

$$w_{\gamma_3}\left(v_i^2v_{i+1}^2\right)=\gamma_3\left(v_i^2\right)+\gamma_3\left(v_i^2v_{i+1}^2\right)+\gamma_3\left(v_{i+1}^2\right)$$

$$=\left(2m+2n+x+m+\frac{m+i}{2}\right)+\left(m-(i-1)\right)+\left(2m+2n+x+m+\frac{i+1}{2}\right)$$

$$=7m+4n+2x+1+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil \tag{3.11}$$

$$w_{\gamma_3}\left(v_1^2v_m^2\right)=\gamma_3\left(v_1^2\right)+\gamma_3\left(v_1^2v_n^2\right)+\gamma_3\left(v_m^2\right)$$

$$=\left(2m+2n+x+m+\frac{m+1}{2}\right)+\left(m-(m-1)\right)+\left(2m+2n+x+m+\frac{m+m}{2}\right)$$

$$= 7m + 4n + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \tag{3.12}$$

dan

$w_{\gamma_3}\left(v_i^2 u_i^2\right) = \gamma_3\left(v_i^2\right) + \gamma_3\left(v_i^2 u_i^2\right) + \gamma_3\left(u_i^2\right)$, untuk i ganjil

$$= \left(2m + 2n + x + m + \frac{m+i}{2}\right) + \left(2m - (i-1)\right) + \left(2m + 2n + x + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil\right)$$

$$= 7m + 4n + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \tag{3.13}$$

$w_{\gamma_3}\left(v_i^2 u_i^2\right) = \gamma_3\left(v_i^2\right) + \gamma_3\left(v_i^2 u_i^2\right) + \gamma_3\left(u_i^2\right)$, untuk i genap

$$= \left(2m + 2n + x + m + \frac{i}{2}\right) + \left(2m - (i-1)\right) + \left(2m + 2n + x + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \frac{i}{2}\right)$$

$$= 7m + 4n + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \tag{3.14}$$

Oleh karena persamaan (3.7), (3.8), (3.9) dan (3.10) sama maka γ_3 adalah pelabelan busur ajaib pada $C_n \bullet \overline{K_1}$ dengan bobot busur $k_1 = 8m + 4n + x + 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Kemudian karena persamaan (3.11), (3.12), (3.13) dan (3.14) juga sama, maka γ_3 juga merupakan pelabelan busur ajaib pada graf $C_m \bullet \overline{K_1}$ dengan bobot busur $k_2 = 7m + 4n + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_3 adalah pelabelan total busur ajaib pada gabungan graf $C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ dan sekaligus akan menunjukkan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan graf $C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$. Supaya γ_3 menjadi pelabelan total busur ajaib, maka k_1 harus sama dengan k_2. Jadi,

$$8m + 4n + x + 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = 7m + 4n + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

$$m + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = x + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

$$x = m - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{m+n}{2}$$

Dengan demikian γ_3 adalah pelabelan total busur ajaib pada $C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ dengan bilangan ajaib $k = 8m + 5n + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan adalah $x = \frac{m+n}{2}$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa label simpul pada $C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ adalah berurutan.

$$\gamma_3(V) = \left\{\gamma_3(V(C_n \bullet \overline{K_1}))\right\} \cup \left\{\gamma_3(t_i)\right\} \cup \left\{\gamma_3(V(C_m \bullet \overline{K_1}))\right\}$$

$$= \{2m+1, 2m+2, \ldots, 2m+2n\} \cup \{2m+2n+1, 2m+2n+2, \ldots, 2m+2n+x\}$$

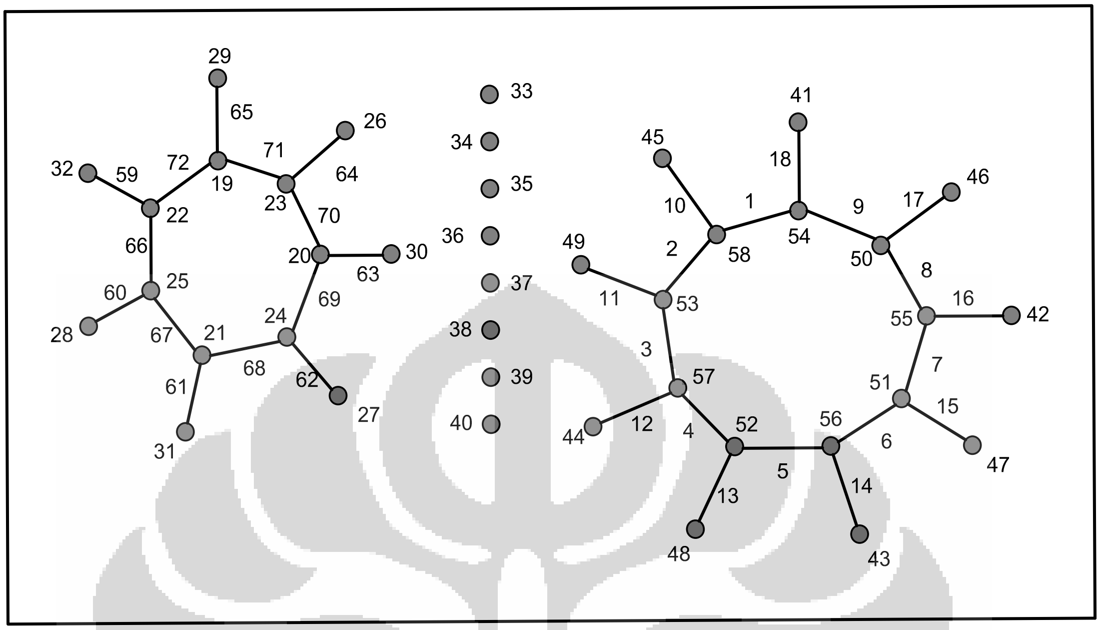
$$\cup \{2m+2n+x+1, 2m+2n+x+2, \ldots, 2m+2n+x+2m\}$$

$$= \{2m+1, 2m+2, \ldots, 2m+2n+2m+x\}$$

Terlihat bahwa label simpul pada graf $C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ berurutan, sehingga γ_3 adalah pelabelan simpul berurutan.

Telah ditunjukkan bahwa γ_3 adalah pelabelan total busur ajaib dengan bilangan ajaib $8m+5n+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan γ_3 pelabelan simpul berurutan, maka γ_3 adalah pelabelan total *2m*-SBBA pada graf $C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$. Jadi gabungan dua graf matahari $C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ memiliki pelabelan total *a*-SBBA dengan simpul terisolasi sebanyak $\frac{m+n}{2}$ untuk $a = 2m$. Kemudian untuk memperoleh pelabelan γ_3' yang merupakan pelabelan *a*-SBBA dengan $a = 2n$ dapat dipergunakan definisi pelabelan dual dan menerapkan Teorema 2.2. Bilangan ajaib untuk pelabelan γ_3' adalah $8n+5m+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan adalah $x = \frac{m+n}{2}$.

Jadi terbukti bahwa gabungan dua graf matahari ($C_n \bullet \overline{K_1} \cup C_m \bullet \overline{K_1}$) (*m* dan *n* adalah bilangan ganjil) memiliki pelabelan total *a*-Simpul Berurutan Busur Ajaib (*a*-SBBA) dengan simpul terisolasi sebanyak $x = \frac{m+n}{2}$ untuk $a = 2m$ atau $a = 2n$. ■



Gambar 3.3 Pelabelan 18-SBBA pada graf $C_7 \bullet \overline{K_1} \cup C_9 \bullet \overline{K_1}$, k=113 dan x=8

Gambar 3.3 memberikan contoh pelabelan *a*-SBBA pada gabungan dua graf matahari, $C_7 \bullet \overline{K_1} \cup C_9 \bullet \overline{K_1}$ dengan $a = 18$, bilangan ajaib yang diperoleh dari pelabelan ini adalah 113 dan simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak 8 simpul. Pada pelabelan a-SBBA untuk gabungan dua graf matahari, banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan tergantung pada ukuran kedua subgraf lingkaran, dan tidak dipengaruhi oleh penambahan satu daun pada setiap simpul lingkaran. Banyak simpul terisolasi akan bertambah seiring dengan bertambahnya jumlah simpul dalam lingkaran. Selanjutnya akan diberikan konstruksi pelabelan *a*-SBBA untuk gabungan dua graf korona.

3.4 Gabungan Dua Graf Korona

Pada subbab ini akan diberikan pelabelan *a*-SBBA untuk gabungan dua graf korona. Oleh karena graf korona juga dibangun dari graf lingkaran, dan merupakan bentuk umum dari graf matahari, pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa sifat-sifat yang berlaku pada graf lingkaran dan graf matahari akan berlaku pula pada graf korona.

Teorema 3.5

Graf gabungan dari dua graf korona $\left(C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}\right)$(*m* dan *n* adalah bilangan ganjil) memiliki pelabelan total *a*-Simpul Berurutan Busur Ajaib (*a*-SBBA) dengan simpul terisolasi sebanyak $\frac{m+n}{2}$ untuk $a = m + mr_2$ atau $a = n + nr_1$.

Bukti

Misalkan $a = m + mr_2$ dan *x* menyatakan banyak simpul terisolasi,

untuk graf $C_n \bullet \overline{K_{r_1}}$,

label simpul v_i^1 dan $u_{i,j}^1$, $i = 1,2,...,n$ dan $j = 1,2,...,r_1$ dengan

$$\gamma_4\left(v_i^1\right)=\begin{cases} m+mr_2+\left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil & ,i \text{ ganjil} \\ m+mr_2+\left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil+\dfrac{i}{2} & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\gamma_4\left(u_{i,j}^1\right)=\begin{cases} m+mr_2+n+\dfrac{n+i}{2}+(j-1)n & ,i \text{ ganjil} \\ m+mr_2+n+\dfrac{i}{2}+(j-1)n & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

Kemudian label busur dengan

$$\gamma_4\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right)=\begin{cases} 2(m+mr_2)+2(n+nr_1)+x-i & ,i=1,2,...,n-1 \\ 2(m+mr_2)+2(n+nr_1)+x & ,i=n \end{cases}$$

dan

$$\gamma_4\left(v_i^1 u_{i,j}^1\right)=2(m+mr_2)+2(n+nr_1)+x+1-nj-i\ .$$

Selanjutnya untuk graf $C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$,

label simpul v_i^2 dan $u_{i,j}^2$, $i=1,2,...,m$ dan $j=1,2,...,r_2$ dengan

$$\gamma_4\left(v_i^2\right)=\begin{cases} m(1+2r_2)+n(1+r_1)+x+\dfrac{m+i}{2} & ,i \text{ ganjil} \\ m(1+2r_2)+n(1+r_1)+x+\dfrac{i}{2} & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\gamma_4\left(u_{i,j}^2\right)=\begin{cases} m(r_2+j)+n(1+r_1)+x+\left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil & ,i \text{ ganjil} \\ m(r_2+j)+n(1+r_1)+x+\left\lceil \dfrac{m}{2} \right\rceil+\dfrac{i}{2} & ,i \text{ genap} \end{cases}$$

Serta label busur dengan

$$\gamma_4\left(v_i^2 u_{i,j}^2\right) = \left(r_2 + 2 - j\right)m - \left(i-1\right) \text{ , } i = 1,2,\ldots,m \text{ dan } j = 1,2,\ldots,r_2$$

dan

$$\gamma\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) = m - \left(i-1\right) \text{ ,} i = 1,2,\ldots,m \text{ .}$$

Label juga simpul terisolasi dengan

$$\gamma_4(t_i) = m\left(1+r_2\right) + n\left(1+r_1\right) + i \qquad , \ i = 1,2,\ldots,x.$$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_4 adalah pelabelan busur ajaib pada masing-masing graf $C_n \bullet \overline{K_{r_1}}$ dan $C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$.

Bobot setiap busur pada $C_n \bullet \overline{K_{r_1}}$ adalah

$$w_{\gamma_4}\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right) = \gamma_4\left(v_i^1\right) + \gamma_4\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right) + \gamma_4\left(v_{i+1}^1\right)$$

$$= 4\left(m + mr_2\right) + 2\left(n + nr_1\right) + 1 + x + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{3.15}$$

$$w_{\gamma_4}\left(v_1^1 v_n^1\right) = \gamma_4\left(v_1^1\right) + \gamma_4\left(v_1^1 v_n^1\right) + \gamma_4\left(v_n^1\right)$$

$$= 4\left(m + mr_2\right) + 2\left(n + nr_1\right) + 1 + x + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{3.16}$$

dan

$$w_{\gamma_4}\left(v_i^1 u_{i,j}^1\right) = \gamma_4\left(v_i^1\right) + \gamma_4\left(v_i^1 u_{i,j}^1\right) + \gamma_4\left(u_{i,j}^1\right), \qquad i \text{ ganjil}$$

$$= 4\left(m + mr_2\right) + 2\left(n + nr_1\right) + 1 + x + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{3.17}$$

$$w_{\gamma_4}\left(v_i^1 u_{i,j}^1\right) = \gamma_4\left(v_i^1\right) + \gamma_4\left(v_i^1 u_{i,j}^1\right) + \gamma_4\left(u_{i,j}^1\right), \qquad i \text{ genap}$$

$$= 4\left(m + mr_2\right) + 2\left(n + nr_1\right) + 1 + x + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad (3.18)$$

Kemudian untuk $C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$, bobot setiap busur adalah

$$w_{\gamma_4}\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) = \gamma_4\left(v_i^2\right) + \gamma_4\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) + \gamma_4\left(v_{i+1}^2\right)$$

$$= 2m\left(1 + 2r_2\right) + 2n\left(1 + r_1\right) + m + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \quad (3.19)$$

$$w_{\gamma_4}\left(v_1^2 v_m^2\right) = \gamma_4\left(v_1^2\right) + \gamma_4\left(v_1^2 v_n^2\right) + \gamma_4\left(v_m^2\right)$$

$$= 2m(1 + 2r_2) + 2n\left(1 + r_1\right) + m + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \quad (3.20)$$

dan

$$w_{\gamma_4}\left(v_i^2 u_{i,j}^2\right) = \gamma_4\left(v_i^2\right) + \gamma_4\left(v_i^2 u_{i,j}^2\right) + \gamma_4\left(u_{i,j}^2\right), \qquad i \text{ ganjil}$$

$$= 2m\left(1 + 2r_2\right) + 2n\left(1 + r_1\right) + m + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \quad (3.21)$$

$$w_{\gamma_4}\left(v_i^2 u_{i,j}^2\right) = \gamma_4\left(v_i^2\right) + \gamma_4\left(v_i^2 u_{i,j}^2\right) + \gamma_4\left(u_{i,j}^2\right), \qquad i \text{ genap}$$

$$= 2m\left(1 + 2r_2\right) + 2n\left(1 + r_1\right) + m + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \quad (3.22)$$

Bobot busur pada graf $C_n \bullet \overline{K_{r_1}}$ adalah konstan karena persamaan (3.15), (3.16), (3.17) dan (3.18) sama. Kemudian persamaan (3.19), (3.20), (3.21) dan (3.22) juga sama, sehingga $C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$ juga memiliki bobot busur yang konstan. Oleh karena itu, γ_4 adalah pelabelan total busur ajaib pada masing-masing graf, dengan bilangan ajaib untuk $C_n \bullet \overline{K_{r_1}}$ adalah

$k_1 = 4(m + mr_2) + 2(n + nr_1) + 1 + x + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan bilangan ajaib untuk $C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$

adalah $k_2 = 2m(1 + 2r_2) + 2n(1 + r_1) + m + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.

Dengan menunjukkan γ_4 adalah pelabelan total busur ajaib pada gabungan graf $C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$, akan diperoleh juga banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan oleh $C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$. Jika γ_4 menjadi pelabelan total busur ajaib, maka *k₁* harus sama dengan *k₂*. Jadi,

$$4(m + mr_2) + 2(n + nr_1) + 1 + x + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = 2m(1 + 2r_2) + 2n(1 + r_1) + m + 2x + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

$$x = m - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{m+n}{2}.$$

Sehingga $C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$ memiliki pelabelan total busur ajaib γ_4 dengan bilangan ajaib banyak simpul terisolasi adalah $x = \frac{m+n}{2}$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa label simpul pada $C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$ adalah berurutan.

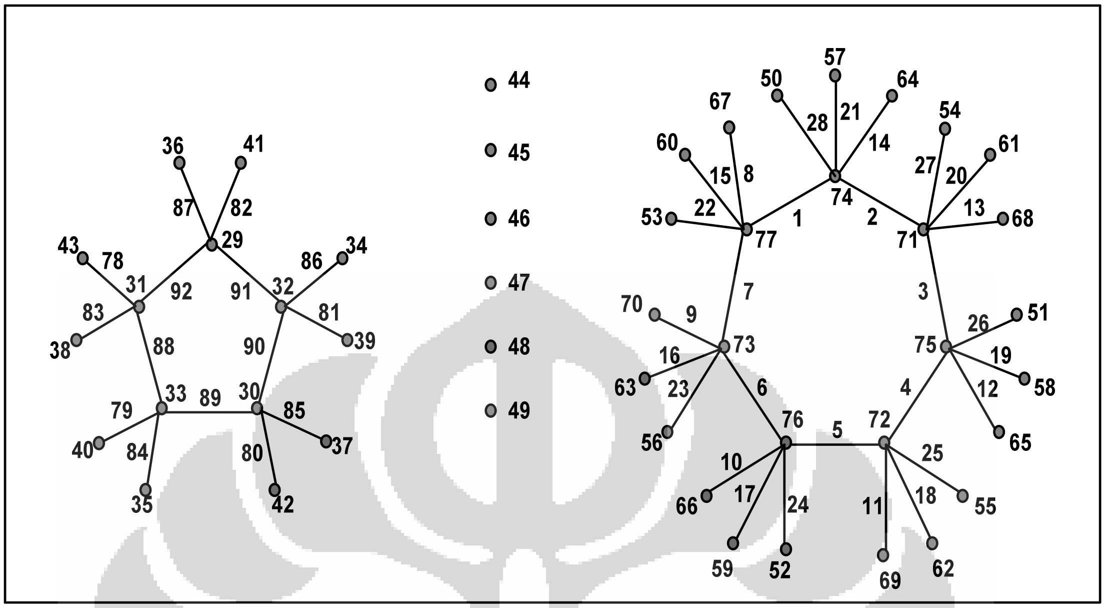
$$\gamma_4(V) = \left\{\gamma_4(V(C_n \bullet \overline{K_{r_1}}))\right\} \cup \{\gamma_4(t_i)\} \cup \left\{\gamma_4(V(C_m \bullet \overline{K_{r_2}}))\right\}$$

$$= \{m + mr_2 + 1, m + mr_2 + 2, \ldots, m + mr_2 + n + nr_1 + m + mr_2 + x\}$$

Label simpul pada graf $C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$ adalah berurutan, sehingga γ_4 adalah pelabelan simpul berurutan.

Telah ditunjukkan bahwa γ_4 adalah pelabelan total busur ajaib dengan bilangan ajaib $4m(1+r_2)+n(3+2r_1)+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan γ_4 adalah pelabelan simpul berurutan, maka γ_4 adalah pelabelan total ($m+mr_2$)-SBBA pada graf $C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$. Jadi gabungan dua graf korona $C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}$ memiliki pelabelan total *a*-SBBA dengan simpul terisolasi sebanyak $\frac{m+n}{2}$ dan $a = m + mr_2$. Pelabelan γ_4' merupakan pelabelan ($n+nr_1$)-SBBA dan dapat diperoleh dengan menggunakan Definisi 2.2. Bilangan ajaib yang diperoleh dari γ_4' adalah $4n(1+r_1)+m(3+2r_2)+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak $\frac{m+n}{2}$ simpul.

Jadi terbukti bahwa gabungan dua graf korona $\left(C_n \bullet \overline{K_{r_1}} \cup C_m \bullet \overline{K_{r_2}}\right)$($m$ dan n adalah bilangan ganjil) memiliki pelabelan total *a*-Simpul Berurutan Busur Ajaib (*a*-SBBA) dengan simpul terisolasi sebanyak $\frac{m+n}{2}$ untuk $a = m + mr_2$ atau $a = n + nr_1$. ■



Gambar 3.4 Pelabelan 28-SBBA pada graf $C_5 \bullet \overline{K_2} \cup C_7 \bullet \overline{K_3}$, k=152 dan x=6

Gambar 3.4 memberikan contoh pelabelan *a*-SBBA pada graf gabungan dua graf korona, $C_5 \bullet \overline{K_2} \cup C_7 \bullet \overline{K_3}$ dengan $a = 28$, bilangan ajaib yang diperoleh dari pelabelan ini adalah 152 dan simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak enam simpul. Gabungan dua graf korona dapat diberi pelabelan *a*-SBBA. Banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan oleh gabungan graf ini bergantung pada ukuran kedua subgraf lingkaran dan tidak dipengaruhi oleh banyak daun pada setiap simpul lingkaran. Seperti pada gabungan dua graf lingkaran dan dua graf matahari, pada gabungan dua graf korona banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan akan bertambah seiring dengan bertambahnya jumlah simpul lingkaran pada kedua graf korona. Pelabelan a-SBBA ini tidak hanya dapat diberikan pada dua korona teratur yang memiliki banyak daun yang sama tetapi juga dapat diberikan pada dua korona teratur dengan banyak daun yang berbeda.

Hasil yang diperoleh pada bab ini secara ringkas dapat dilihat pada Tabel 3.1. Untuk bab selanjutnya akan diberikan pelabelan *a*-SBBA untuk gabungan dua graf yang berasal dari kelas yang berbeda, yaitu gabungan graf bintang dengan graf lingkaran, graf bintang dengan graf matahari dan graf lingkaran dengan graf matahari.

Tabel 3.1 Ringkasan hasil pelabelan a-SBBA untuk gabungan dua graf dari kelas yang sama

Kelas Graf	***a***	**Bilangan Ajaib *k***	**Banyak Simpul Terisolasi**	**Keterangan**
Bintang $S_n \cup S_m$	m	$4m+2n+6$	1	Banyak simpul terisolasi tidak dipengaruhi oleh ukuran kedua graf bintang
	n	$4n+2m+6$		
Lingkaran $C_n \cup C_m$	m	$4m+3n+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$	$\frac{m+n}{2}$	Banyak simpul terisolasi hanya dipengaruhi oleh ukuran kedua subgraf lingkaran. Makin besar jumlah simpul kedua lingkaran, makin banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan. Pada graf matahari dan graf korona, penambahan daun di setiap simpul lingkaran tidak mempengaruhi banyak simpul terisolasi yang diperlukan.
	n	$4n+3m+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$		
Matahari $C_n \bullet \bar{K}_1 \cup C_m \bullet \bar{K}_1$	$2m$	$8m+5n+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$		
	$2n$	$8n+5m+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$		
Korona $C_n \bullet \bar{K}_{r_1} \cup C_m \bullet \bar{K}_{r_2}$	$m+mr_1$	$4m(1+r_2)+n(3+2r_1)+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$		
	$n+nr_2$	$4n(1+r_1)+m(3+2r_2)+1+\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$		

BAB IV

PELABELAN *a*-SBBA PADA GABUNGAN DUA GRAF DARI KELAS YANG BERBEDA

Pada bab ini akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan dua graf yang berbeda, yaitu gabungan graf bintang dengan graf lingkaran dan graf matahari serta gabungan graf lingkaran dengan graf matahari. Dengan menggunakan pelabelan ini, akan ditunjukkan pula banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan agar gabungan dua graf memiliki pelabelan *a*-SBBA.

Seluruh pembuktian dalam bab ini akan menggunakan alur yang sama dengan yang telah dijelaskan pada bab III, yaitu dengan memberikan aturan pemberian label untuk setiap simpul dan busur, menunjukkan bahwa pelabelan tersebut merupakan pelabelan busur ajaib bagi masing-masing graf, dan pada gabungan graf, sekaligus menunjukkan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan. Pada akhirnya akan ditunjukkan bahwa pelabelan ini adalah pelabelan simpul berurutan. Berdasarkan Teorema 3.1 yang telah diberikan pada bab III mengenai pelabelan super ajaib pada graf lingkaran, pada bab ini setiap graf *unicycle* yang akan dibahas merupakan graf yang memiliki subgraf lingkaran dengan banyak simpul ganjil.

4. 1 Graf Bintang dengan Graf Lingkaran

Sugeng dan Miller pada [4] telah memberikan batas minimal simpul terisolasi yang dibutuhkan oleh gabungan dua graf yang terdiri dari graf pohon dan graf *unicycle* yaitu sebanyak dua simpul. Pada subbab ini akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan graf bintang dan graf lingkaran. Di sini akan dibuktikan pula bahwa banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada graf ini hanya bergantung pada ukuran graf lingkaran.

Teorema 4.1

Graf gabungan yang terdiri dari graf bintang dan graf lingkaran ($S_n \cup C_m$) dengan *m* adalah bilangan ganjil, memiliki pelabelan total *a*- SBBA dengan banyak simpul terisolasi adalah $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ untuk *a*=*m* atau *a*=*n*.

Bukti

Misalkan *a*=*m* dan *x* menyatakan banyak simpul terisolasi,

label simpul $v_i^1, i = 0,1,2,...,n$ pada S_n dengan

$$\gamma_5\left(v_i^1\right) = m + i + 1 \quad , \ i = 0,1,2,...,n$$

dan busur pada S_n dengan

$$\gamma_5\left(v_0^1 v_i^1\right) = 2\left(m + n + 1\right) + x - i \quad , \text{untuk } i = 1,2,...,n.$$

Kemudian label simpul $v_i^2,\ i = 1,2,...,m$ pada C_m dengan

$$\gamma_5\left(v_i^2\right) = \begin{cases} m + (n+1) + x + \left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil} \\ m + (n+1) + x + \left\lceil \dfrac{m}{2} \right\rceil + \dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

dan busur pada C_m dengan

$$\gamma_5\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) = \begin{cases} m - i & \text{, untuk } i = 1,2,3,...,m-1 \\ m & \text{, untuk } i = m \end{cases}$$

dengan i+1 diambil modulo m.

Label juga simpul terisolasi dengan

$$\gamma_5(t_i) = m + n + i \quad \text{, untuk } i = 1,2,...,x.$$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_5 adalah pelabelan busur ajaib pada masing-masing graf S_n dan C_m.

Untuk S_n, bobot setiap busur adalah

$$w_{\gamma_5}\left(v_0^1 v_i^1\right) = \gamma_5\left(v_0^1\right) + \gamma_5\left(v_0^1 v_i^1\right) + \gamma_5\left(v_i^1\right)$$

$$= (m + 0 + 1) + \left(2(m + n + 1) + x - i\right) + (m + i + 1)$$

$$= 4m + 2n + x + 4 \qquad (4.1)$$

dan untuk C_m bobot busurnya adalah

$$w_{\gamma_5}\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right)=\gamma_5\left(v_i^2\right)+\gamma_5\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right)+\gamma_5\left(v_{i+1}^2\right)$$

Misalkan *i* ganjil, maka *i*+1 genap,

$$w_{\gamma_5}\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right)=\left(m+(n+1)+x+\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil\right)+(m-i)+\left(m+(n+1)+x+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil+\frac{i+1}{2}\right)$$

$$=3m+2n+2x+3+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil \qquad (4.2)$$

$$w_{\gamma_5}\left(v_1^2 v_n^2\right)=\left(m+(n+1)+x+\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil\right)+m-(1-1)+\left(m+(n+1)+x+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil\right)$$

$$=3m+2n+2x+3+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil \qquad (4.3)$$

Dari persamaan (4.1) terlihat bahwa bobot busur graf S_n adalah konstan, sehingga γ_5 adalah pelabelan total busur ajaib pada graf S_n dengan bilangan ajaib $4m+2n+x+4$. Dari persamaan (4.2) dan (4.3) dapat disimpulkan bahwa bobot busur graf C_m konstan, yaitu selalu $3m+2n+2x+3+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$. Sehingga γ_5 adalah pelabelan total busur ajaib pada masing-masing graf S_n dan C_m.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_5 adalah pelabelan total busur ajaib pada graf $S_n \cup C_m$ sekaligus akan menunjukkan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada graf $S_n \cup C_m$. Pelabelan γ_5 adalah pelabelan busur ajaib pada $S_n \cup C_m$ jika (4.1) sama dengan (4.2) dan (4.3).

Jadi,

$$4m + 2n + x + 4 = 3m + 2n + 2x + 3 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

$$x = \frac{m+1}{2} = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$$

Dengan demikian pada $S_n \cup C_m$, γ_5 adalah pelabelan total busur ajaib dengan bilangan ajaib $4m + 2n + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 4$ dan banyak simpul terisolasi adalah $x = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa label simpul pada $S_n \cup C_m$ berurutan.

$$\gamma_4(V) = \{\gamma_4(V(S_n))\} \cup \{\gamma_4(V(u_i))\} \cup \{\gamma_4(V(C_m))\}$$

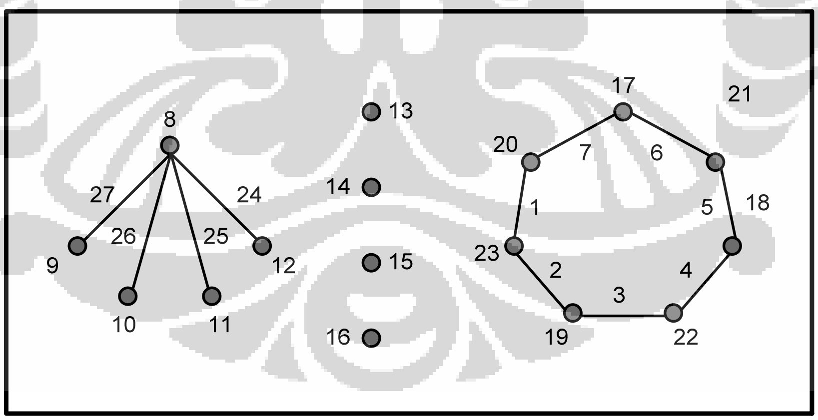
$$= \{m+1, m+2, ..., m+n+1\} \cup \{m+n+2, m+n+3, ..., m+n+x+1\}$$

$$\cup \{m+n+x+2, m+n+x+3, ..., m+n+x+m+1\}$$

$$= \{m+1, m+2, ..., m+n+x+m+1\}.$$

Oleh karena label simpul pada graf $S_n \cup C_m$ berurutan, mulai dari m+1 hingga m+n+1+x+m maka γ_5 merupakan pelabelan simpul berurutan.

Telah ditunjukkan bahwa γ_5 adalah pelabelan total busur ajaib dengan $k = 4m + 2n + 4 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan γ_5 adalah pelabelan simpul berurutan, maka γ_5 adalah pelabelan total *m*-SBBA pada graf $S_n \cup C_m$. Jadi gabungan dari graf bintang dan graf lingkaran ($S_n \cup C_m$) memiliki pelabelan *m*-SBBA dengan simpul terisolasi sebanyak $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. Dengan menggunakan Definisi 2.2 dan Teorema 2.2 dapat diperoleh palabelan dual dari γ_5, yang merupakan pelabelan *a*-SBBA dengan $a=n$. Bilangan ajaib yang akan diperoleh untuk pelabelan ini adalah $4n + 3m + 3$ dan simpul terisolasi sebanyak $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. ■



Gambar 4.1 Pelabelan 7-SBBA pada $S_4 \cup C_7$, k=44, x=4

Pada Gambar 4.1 diberikan contoh pelabelan a-SBBA pada graf $S_4 \cup C_7$ dengan *a*=7. Bilangan ajaib yang diperoleh dari pelabelan ini adalah 44 dan simpul terisolasi yang dibutuhkan adalah empat simpul. Pada gabungan graf bintang dan graf lingkaran, banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan agar graf tersebut memiliki pelabelan *a*-SBBA hanya bergantung pada ukuran graf lingkaran. Selanjutnya akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan graf bintang dan graf matahari.

4. 2 Graf Bintang dengan Graf Matahari

Pada subbab ini akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan graf $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$. Di sini juga akan ditunjukkan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan kedua graf tersebut dan akan diperlihatkan pula bahwa banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan tidak bergantung pada ukuran graf bintang.

Teorema 4.2

Graf gabungan yang terdiri dari graf bintang dan graf matahari $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ dengan *m* adalah bilangan ganjil, memiliki pelabelan total *a*-SBBA dengan banyak simpul terisolasi adalah $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ untuk *a*=2*m* atau *a*=*n*.

Bukti

Misalkan *a*=2*m* dan *x* adalah banyak simpul terisolasi,

label simpul $v_i^1, i = 0,1,2,...,n$ dan busur pada S_n dengan

$$\gamma_6\left(v_i^1\right) = 2m + i + 1$$

$$\gamma_6\left(v_0^1 v_i^1\right) = 4m + 2n + 2 + x - i.$$

Kemudian label simpul v_i^2 dan u_i^2, $i = 1,2,...,m$ serta busur pada $C_m \bullet \overline{K_1}$ dengan

$$\gamma_6\left(v_i^2\right) = \begin{cases} 3m + (n+1) + x + \dfrac{m+i}{2} & \text{, jika } i \text{ ganjil} \\ 3m + (n+1) + x + \dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\gamma_6\left(u_i^2\right) = \begin{cases} 2m + (n+1) + x + \left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil} \\ 2m + (n+1) + x + \left\lceil \dfrac{m}{2} \right\rceil + \dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\gamma_6\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) = m - (i-1) \qquad , i = 1,2,...,m$$

$$\gamma_6\left(u_i^2 v_i^2\right) = 2m - (i-1) \qquad , i = 1,2,...,m.$$

Label juga simpul terisolasi dengan

$$\gamma_6(t_i) = 2m + (n+1) + i \quad \text{, untuk } i = 1,2,...,x.$$

Akan ditunjukkan bahwa pelabelan γ_6 adalah pelabelan busur ajaib pada masing-masing graf S_n dan $C_m \bullet \overline{K_1}$.

Untuk S_n, bobot setiap busur adalah

$$k_1 = 8m + 2n + x + 4 \qquad (4.4)$$

dan bobot busur pada $C_m \bullet \overline{K_1}$ adalah

$$k_2 = 7m + 2n + 3 + 2x + \frac{m+1}{2}. \tag{4.5}$$

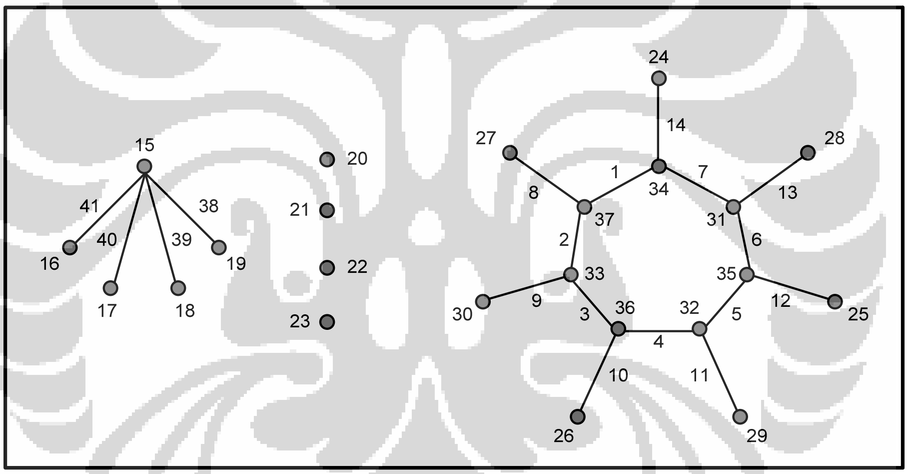
Bobot busur pada S_n dan $C_m \bullet \overline{K_1}$ adalah konstan, sehingga γ_6 adalah pelabelan busur ajaib pada masing-masing graf.

Pelabelan γ_6 adalah pelabelan total busur ajaib, jika bobot busur pada S_n dan $C_m \bullet \overline{K_1}$ sama. Dengan menyetarakan persamaan (4.4) dan (4.5) akan diperoleh $x = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. Dengan demikian γ_6 adalah pelabelan busur ajaib pada $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ dengan bilangan ajaib $4m + 2n + 4 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan adalah $x = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.

Selanjutnya, himpunan label simpul pada $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ adalah $\gamma_6(V) = \{2m+1, 2m+2, ..., 2m+n+x+2m+1\}$. Oleh karena label simpul $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ berurutan, maka γ_6 adalah pelabelan simpul berurutan.

Telah ditunjukkan bahwa γ_6 adalah pelabelan total busur ajaib dengan bilangan ajaib $8m + 2n + 4 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan γ_6 adalah pelabelan berurutan, maka γ_6 merupakan pelabelan total *a*-SBBA pada graf $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ dengan *a*=2*m*. Jadi gabungan graf bintang dan graf matahari $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ memiliki pelabelan total *2m*-SBBA dengan simpul terisolasi sebanyak $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan $a = 2m$.

Berdasarkan Definisi 2.2 dan Teorema 2.2, dapat diperoleh pelabelan γ_6' yang merupakan *a*-SBBA dengan *a*=*n*. Bilangan ajaib yang akan diperoleh dengan pelabelan γ_6' adalah $5m+4n+3$ dan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan tetap $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. ■



Gambar 4.2 Pelabelan 14-SBBA pada $S_4 \cup C_7 \bullet \overline{K_1}$, *k*=72 dan *x*=4

Gambar 4.2 memberikan contoh pelabelan *a*-SBBA pada $S_4 \cup C_7 \bullet \overline{K_1}$ dengan *a*=14. Bilangan ajaib yang diperoleh adalah 72 dan simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak empat simpul.

Seperti pada pembahasan sebelumnya, gabungan dari graf yang mengandung *unicycle*, banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan bergantung pada banyak simpul pada subgraf lingkaran. Pada gabungan $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$, banyak simpul terisolasi hanya dipengaruhi oleh ukuran lingkaran pada graf matahari dan seperti telah disebutkan pada awal subbab ini, banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada $S_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ tidak bergantung pada ukuran graf bintang. Pada subbab selanjutnya akan diberikan pelabelan *a*-SBBA pada gabungan graf lingkaran dan graf matahari.

4.3 Graf Lingkaran dengan Graf Matahari

Graf lingkaran dan graf matahari adalah graf *unicycle*. Sugeng dan Miller [4] telah memberikan banyak minimal simpul terisolasi yang dibutuhkan agar gabungan dua graf yang mengandung *unicycle* memiliki pelabelan *a*-SBBA yaitu sebanyak tiga simpul. Pada subbab ini akan diberikan pelabelan *a*-SBBA untuk gabungan graf lingkaran dan graf matahari.

Teorema 4.3

Graf gabungan yang terdiri dari graf lingkaran dan graf matahari $\left(C_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}\right)$ (*m* dan *n* adalah bilangan ganjil), memiliki pelabelan total *a*-SBBA dengan simpul terisolasi sebanyak $\frac{m+n}{2}$ untuk $a = 2m$ atau $a = n$.

Bukti :

Misalkan a=2m, dan x adalah banyak simpul terisolasi label simpul v_i^1 dan busur $v_i^1 v_{i+1}^1,\ i = 1,2,...,n$ pada C_n dengan

$$\gamma_7\left(v_i^1\right) = \begin{cases} 2m + \left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil} \\ 2m + \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil + \dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\gamma_7\left(v_i^1 v_{i+1}^1\right) = \begin{cases} 4m + 2n + x - i & ,\ i = 1,2,...,n-1 \\ 4m + 2n + x & ,\ i = n \end{cases}$$

Kemudian label simpul v_i^2 dan u_i^2 serta busur $v_i^2 v_{i+1}^2$ dan $u_i^2 v_i^2$, $i = 1,2,...,m$

pada $C_m \bullet \overline{K_1}$ dengan

$$\gamma_7\left(v_i^2\right) = \begin{cases} 3m + n + x + \dfrac{m+i}{2} & \text{, jika } i \text{ ganjil} \\ 3m + n + x + \dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\gamma_7\left(u_i^2\right) = \begin{cases} 2m + n + x + \left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil} \\ 2m + n + x + \left\lceil \dfrac{m}{2} \right\rceil + \dfrac{i}{2} & \text{, jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\gamma_7\left(v_i^2 v_{i+1}^2\right) = m - (i-1)$$

$$\gamma_7\left(u_i^2 v_i^2\right) = 2m - (i-1)$$

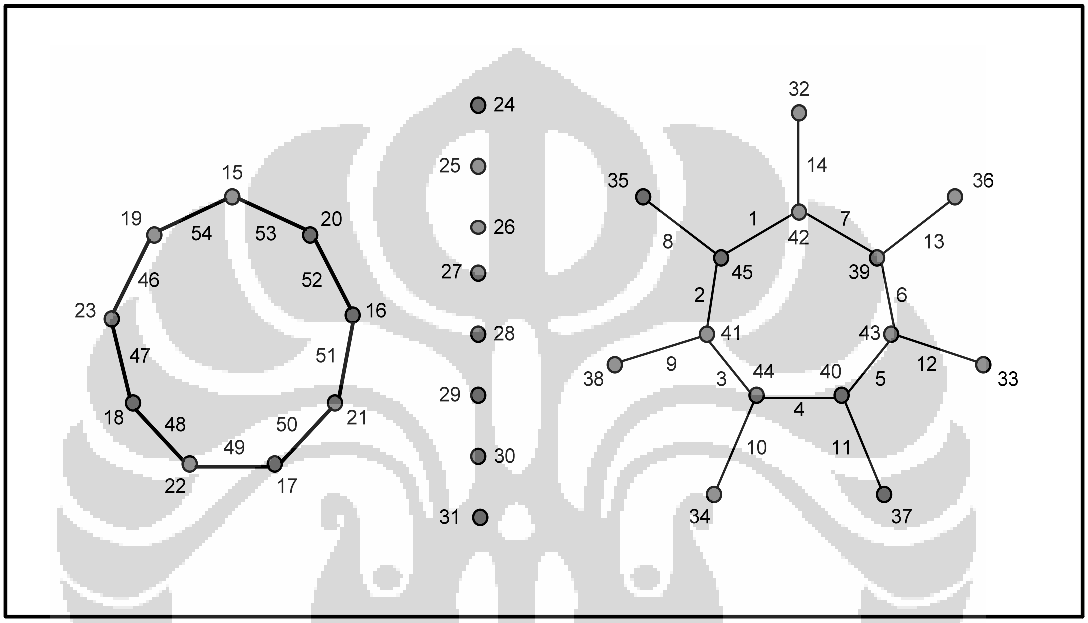
Label juga simpul terisolasi dengan

$$\gamma_7(t_i) = 2m + n + i \quad \text{, untuk } i = 1,2,...,x$$

Bobot busur pada C_n adalah $k_1 = 8m + 2n + x + 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan bobot busur pada $C_m \bullet \overline{K_1}$ adalah $k_2 = 7m + 2n + 1 + 2x + \frac{m+1}{2}$. Oleh karena bobot busur pada masing-masing graf bernilai konstan, maka γ_7 adalah pelabelan busur ajaib pada masing-masing graf. Jika $k_1 = k_2$, maka akan diperoleh $x = \frac{m+n}{2}$ dan γ_7 merupakan pelabelan busur ajaib pada gabungan graf $C_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$.

Kemudian, himpunan label simpul pada $C_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ adalah $\gamma_7(V) = \{2m+1, 2m+2, ..., 2m+n+x+2m\}$. Oleh karena label simpul dari $C_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ dengan pelabelan γ_7 adalah berurutan maka γ_7 merupakan pelabelan simpul berurutan.

Telah ditunjukkan bahwa γ_7 adalah pelabelan busur ajaib dan $\gamma_7(V)$ berurutan, maka γ_7 adalah pelabelan *a*-SBBA pada graf $C_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$. Jadi terbukti bahwa gabungan dari graf lingkaran dan graf matahari , $C_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ memiliki pelabelan total *a*-SBBA dengan simpul terisolasi sebanyak $\frac{m+n}{2}$ untuk $a = 2m$ dan memiliki bilangan ajaib $8m + 3n + 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. Berdasarkan Definisi 2.2 dan Teorema 2.2, dapat diperoleh pelabelan dual bagi γ_7 yang merupakan pelabelan *a*-SBBA dengan *a*=*n* dan mempunyai bilangan ajaib $5m+5n+2-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dan simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak $\frac{m+n}{2}$.



Gambar 4.3 : Contoh pelabelan a-SBBA pada $C_9 \cup C_7 \bullet \overline{K_1}$, *k*=88, x=8

Gambar 4.3 memberikan contoh pelabelan *a*-SBBA pada $C_9 \cup C_7 \bullet \overline{K_1}$ dengan *a*=14, bilangan ajaib yang diperoleh adalah 88 dan simpul terisolasi yang dibutuhkan sebanyak delapan simpul.

Seperti telah disebutkan pada awal subbab ini, graf lingkaran dan graf matahari adalah graf *unicycle*. Sehingga banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan $C_n \cup C_m \bullet \overline{K_1}$ juga hanya dipengaruhi oleh banyak simpul pada kedua subgraf lingkaran. Penambahan daun pada simpul lingkaran (menjadi graf matahari) tidak mempengaruhi banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan. Secara ringkas hasil yang telah diperoleh pada bab ini dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Ringkasan hasil pelabelan a-SBBA untuk gabungan dua graf dari kelas yang berbeda

Kelas Graf	***a***	**Bilangan Ajaib *k***	**Banyak Simpul Terisolasi**	**Keterangan**
Bintang Lingkaran $S_n \cup C_m$	m	$4m+2n+4+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$	Banyak simpul terisolasi hanya banyak simpul terisolasi bergantung pada ukuran subgraf lingkaran dan tidak dipengaruhi oleh ukuran graf bintang
	n	$4n+3m+3$		
Bintang Matahari $S_n \cup C_m \bullet \bar{K}_1$	$2m$	$8m+2n+4+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$		
	n	$5m+4n+3$		
Lingkaran Matahari $C_n \cup C_m \bullet \bar{K}_1$	$2m$	$8m+3n+1+\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$	$\frac{m+n}{2}$	Banyak simpul terisolasi hanya dipengaruhi oleh ukuran kedua subgraf lingkaran dan tidak dipengaruhi oleh penambahan daun pada graf lingkaran
	n	$5m+5n+2-\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$		

Pada skripsi ini tidak diberikan pelabelan untuk gabungan graf korona dengan graf lainnya (graf bintang, graf lingkaran, graf matahari), namun pelabelan untuk gabungan graf ini telah diperoleh dengan cara yang sama, dan dengan alur pembuktian yang sama dapat ditunjukkan bahwa sifat- sifat yang berlaku pada graf matahari akan berlaku pula bagi graf korona.