

## BAB II

### LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dalam teori graf dan pelabelan graf yang akan digunakan pada bab selanjutnya.

#### 2.1 Definisi dan Istilah Dalam Teori Graf

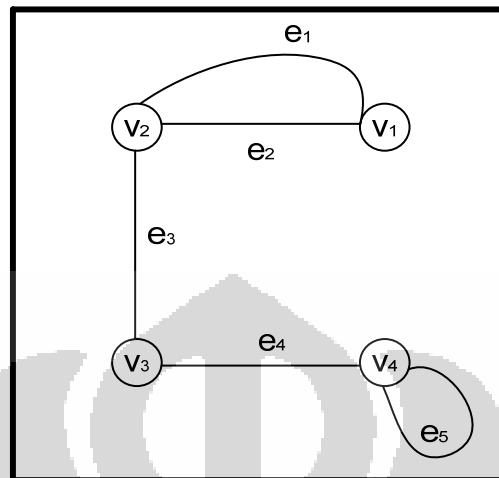
Suatu **graf**  $G = (V, E)$  terdiri dari gabungan himpunan simpul  $V(G)$  yang tidak kosong dan himpunan busur  $E(G)$ . Untuk penyederhanaan,  $G = (V, E)$  akan dinotasikan dengan  $G$ ,  $V(G)$  dengan  $V$  dan  $E(G)$  dengan  $E$ . Himpunan busur boleh kosong. Banyaknya simpul dan busur pada graf masing-masing dinyatakan sebagai  $n = |V|$  dan  $e = |E|$ . Graf  $G$  dikatakan graf hingga jika banyaknya simpul berhingga. Suatu busur menghubungkan dua simpul (boleh sama) pada graf, simpul tersebut disebut **titik ujung** (*endpoint*).

**Gelung** (*loop*) adalah busur yang memiliki titik ujung yang sama. Jika dua simpul dihubungkan oleh lebih dari satu busur, maka busur-busur tersebut disebut sebagai **busur berganda** (*multiple edge*). Graf yang tidak memiliki gelung dan busur berganda disebut sebagai **graf sederhana**.

Dua simpul dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) jika terdapat busur yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Simpul dan busur yang terhubung dengannya dikatakan **saling hadir** (*incident*). Dua busur dikatakan bertetangga jika keduanya hadir pada simpul yang sama. **Derajat** dari suatu simpul menyatakan banyaknya busur yang hadir pada simpul tersebut, dinotasikan sebagai  $\text{deg}(v)$ . **Simpul terisolasi** adalah simpul yang memiliki derajat 0. **Simpul akhir** atau **daun** (*leaf*) adalah simpul yang memiliki derajat 1. Jika pada graf  $G$  semua simpul memiliki derajat yang sama maka graf  $G$  disebut **graf beraturan**  $r$  dengan  $r$  adalah derajat simpul. Suatu graf  $G$  disebut **graf lengkap** dengan  $n$  simpul jika semua simpul saling bertetangga, sehingga graf lengkap juga merupakan graf beraturan dengan  $r=n-1$ .

Suatu graf dapat direpresentasikan dalam bentuk diagram. Simpulnya direpresentasikan dalam bentuk suatu lingkaran kecil, sedangkan busurnya direpresentasikan dalam bentuk garis. Simpul lazimnya ditulis sebagai  $u$  atau  $v$  atau dapat juga ditulis dalam huruf yang lain. Sedangkan busur dapat ditulis sebagai  $e$  atau sebagai pasangan kedua titik ujung,  $uv$ .

Gambar 2.1 memberikan contoh graf dengan himpunan simpul  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan himpunan busur  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = \{v_1v_2, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_4\}$ . Banyak simpul dan banyaknya busur masing-masing adalah  $n=4$  dan  $e=5$ . Busur berganda ditunjukkan oleh busur  $e_1, e_2$  dan gelung ditunjukkan oleh  $e_5$ . Oleh karena graf  $G$  memiliki busur



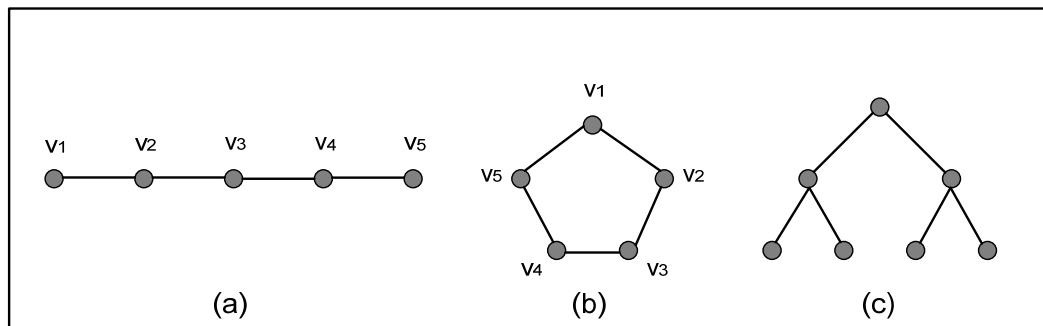
Gambar 2.1 Contoh Graf

berganda dan gelung maka graf  $G$  bukan graf sederhana. Simpul  $v_2$  dan  $v_3$  saling bertetangga karena keduanya dihubungkan oleh busur  $e_3$ . Busur  $e_3$  dan  $e_4$  saling bertetangga karena keduanya hadir pada simpul yang sama, yakni  $v_3$ . Derajat setiap simpul pada Gambar 2.1  $\deg(v_1)=2$ ,  $\deg(v_2)=3$ ,  $\deg(v_3)=2$  dan  $\deg(v_4)=3$ .

Graf  $G$  dikatakan **graf berarah** jika  $G$  terdiri dari himpunan simpul dan himpunan pasangan terurut simpul yang disebut **busur berarah** (*arcs*). Semua graf yang akan dibahas pada bab selanjutnya adalah graf tidak berarah. Pada subbab selanjutnya akan diberikan beberapa definisi jenis-jenis graf.

## 2.2 Jenis-Jenis Graf

Graf **lintasan** (*path graph*),  $P_n$ , adalah graf dengan  $n$  simpul dengan busur  $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$  atau dapat juga dinotasikan dalam  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1}$ . Simpul  $v_1$  disebut sebagai simpul awal dan  $v_n$  adalah simpul akhir. Semua simpul berderajat 2 kecuali untuk simpul awal dan simpul akhir berderajat 1. Graf **lingkaran** (*cycle graph*),  $C_n$ , adalah graf lintasan dengan  $n$  simpul yang diberi tambahan busur antara simpul awal dan simpul terakhir, sehingga pada graf lingkaran semua simpul memiliki derajat 2. Suatu graf dikatakan **terhubung** jika untuk setiap pasang simpul  $u$  dan  $v$  terdapat lintasan dari  $u$  ke  $v$ . Graf terhubung yang tidak memiliki subgraf lingkaran disebut graf **pohon** (*tree*). Gambar 2.2 (a) memberikan contoh graf lintasan,  $P_5$ , (b) graf lingkaran,  $C_5$ , dan (c) graf pohon. Suatu graf  $G$  dikatakan graf **unicycle** jika terdapat satu subgraf lingkaran pada graf tersebut. Sehingga graf lingkaran termasuk graf *unicycle*. Contoh graf *unicycle* yang lain adalah graf matahari dan graf korona yang definisinya akan diberikan kemudian.



Gambar 2.2 (a)  $P_5$ , (b)  $C_5$  dan (c) Graf Pohon

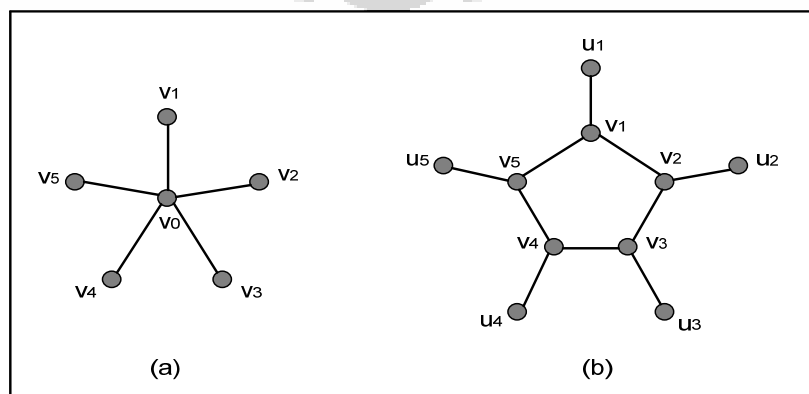
Graf **bintang** (*star graph*),  $S_n$ , adalah graf dengan  $n+1$  simpul, memiliki satu simpul pusat  $v_0$  yang terhubung dengan  $n$  simpul lainnya. Derajat dari simpul  $v_0$  adalah  $n$  sedangkan derajat semua simpul lain yang adalah 1. Graf **matahari** (*sun graph*),  $C_n \bullet \overline{K_1}$ , merupakan graf lingkaran dengan  $n$  simpul yang pada setiap simpulnya diberi tambahan satu daun. Derajat simpul pada lingkarannya akan menjadi 3, sedangkan derajat simpul lainnya adalah 1. Himpunan simpul pada graf matahari adalah

$$V(C_n \bullet \overline{K_1}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

dengan  $u_i$  menyatakan simpul yang terhubung dengan simpul  $v_i$ , dan himpunan busurnya adalah

$$E(C_n \bullet \overline{K_1}) = \{v_i v_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_i u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

dengan  $i=n+1$ , diambil modulo  $n$ . Gambar 2.3 (a) memberikan contoh graf bintang  $S_5$  dan (b) adalah contoh graf matahari  $C_5 \bullet \overline{K_1}$ .



Gambar 2.3 (a) Graf Bintang  $S_5$  dan (b) Graf Matahari  $C_5 \bullet \overline{K_1}$

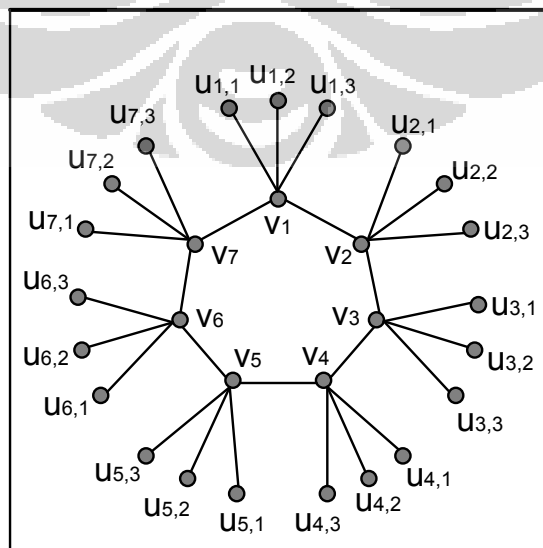
Bentuk umum dari graf matahari dinamakan graf **korona** (*corona graph*). Graf korona ditulis sebagai  $C_n \bullet \overline{K_r}$ , artinya graf korona terdiri dari graf lingkaran dengan  $n$  simpul dan pada setiap simpulnya ditambahkan sebanyak  $r$  daun. Derajat setiap simpul pada graf lingkarannya menjadi  $2+r$  dan derajat simpul lainnya adalah 1. Pada Gambar 2.4 diberikan contoh graf korona  $C_7 \bullet \overline{K_3}$ . Himpunan simpul pada korona adalah

$$V(C_n \bullet \overline{K_r}) = \{v_i \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{u_{i,j} \mid j = 1, 2, \dots, r\}$$

dan himpunan busurnya adalah

$$E(C_n \bullet \overline{K_r}) = \{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{v_i u_{i,j} \mid j = 1, 2, \dots, r\}$$

dengan  $v_i$  menyatakan **simpul dalam**, yaitu simpul pada lingkaran dan  $u_{i,j}$  menyatakan **simpul luar** ke  $j$  yang terhubung dengan simpul dalam ke  $i$ .

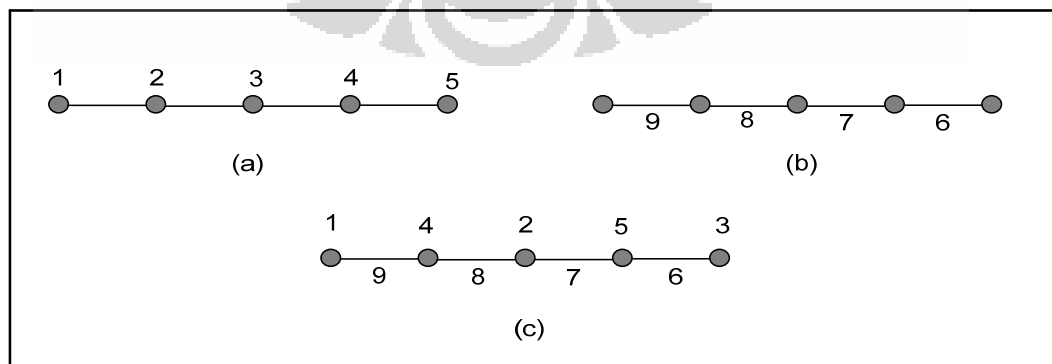


Gambar 2.4 Graf korona  $C_7 \bullet \overline{K_3}$

Pada subbab sebelumnya telah diberikan definisi-definisi dalam teori graf dan pada subbab ini telah diberikan beberapa contoh graf. Seperti telah disebutkan pada bab sebelumnya, graf yang akan digunakan dalam skripsi ini adalah graf bintang, graf lingkaran, graf matahari dan graf korona. Kemudian pada subbab selanjutnya akan diberikan definisi-definisi dan istilah dalam pelabelan graf.

### 2.3 Pelabelan Pada Graf

**Pelabelan** pada graf merupakan suatu pemetaan  $\gamma$  dari setiap elemen graf ke suatu bilangan bulat positif. Bilangan-bilangan tersebut disebut **label**. Jika yang diberi label hanya simpul (busur) saja, maka pelabelannya disebut pelabelan simpul (busur). Jika simpul dan busur keduanya diberi label maka pelabelannya disebut **pelabelan total**. Selanjutnya setiap pelabelan yang



Gambar 2.5 (a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan busur dan (c) Pelabelan total

dimaksud adalah pelabelan total. Gambar 2.5 memberikan contoh graf dengan pelabelan simpul (a), pelabelan busur (b), dan pelabelan total (c) pada graf lintasan  $P_5$ .

Jumlah label yang terkait dengan elemen graf disebut bobot. **Bobot busur** pada suatu pelabelan  $\gamma$ ,  $w_\gamma(xy)$  didefinisikan sebagai jumlah label busur dengan label pada kedua simpul yang dihubungkan oleh busur tersebut,

$$w_\gamma(xy) = \gamma(x) + \gamma(xy) + \gamma(y), \quad \forall x, y \in V \text{ dan } \forall xy \in E.$$

Sedangkan **bobot simpul** pada suatu pelabelan  $\gamma$ ,  $w_\gamma(x)$  didefinisikan sebagai jumlah dari label simpul dengan label semua busur yang hadir pada simpul tersebut,

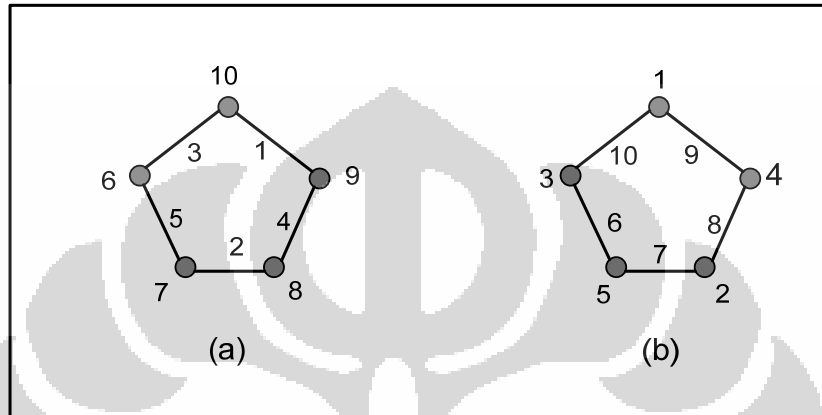
$$w_\gamma(x) = \gamma(x) + \sum_{y \in N(x)} \gamma(xy),$$

dengan  $N(x)$  adalah himpunan semua simpul yang bertetangga dengan  $x$ .

Suatu pelabelan  $\gamma$  dikatakan **pelabelan ajaib** jika terdapat suatu bilangan  $k$  sedemikian sehingga bobot untuk semua simpul atau busurnya adalah  $k$ . Bilangan  $k$  ini disebut sebagai konstanta ajaib atau **bilangan ajaib**. Apabila  $w_\gamma(x) = k, \forall x \in V$  maka pelabelan  $\gamma$  disebut sebagai **pelabelan simpul ajaib**, dan jika  $w_\gamma(xy) = k, \forall xy \in E$  maka pelabelan  $\gamma$  disebut



**pelabelan busur ajaib.** Jika label simpul adalah  $\gamma(V) = \{1, 2, \dots, n\}$  maka pelabelan disebut **pelabelan total super ajaib**.



Gambar 2.6 (a) Pelabelan simpul ajaib dan (b) Pelabelan busur ajaib

Gambar 2.6 (a) merupakan contoh pelabelan total simpul ajaib pada graf  $C_5$  dengan bilangan ajaib  $k=14$  dan (b) merupakan contoh pelabelan total busur ajaib dengan bilangan ajaib  $k=14$  untuk graf  $C_5$ . Untuk selanjutnya, pelabelan yang akan dibahas hanya pelabelan total busur ajaib yang didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.1** [Enomoto, 1998]

Misalkan  $\gamma$  merupakan suatu pemetaan bijektif pada graf  $G$ ,

$\gamma : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$ . Jika bobot busur pada  $G$  dengan pelabelan  $\gamma$

adalah  $w_\gamma(xy) = \gamma(x) + \gamma(xy) + \gamma(y) = k$ ,  $\forall xy \in E$  maka  $\gamma$  disebut sebagai

pelabelan total busur ajaib.

Kemudian jika label untuk simpul  $\gamma(V) = \{1, 2, \dots, n\}$  maka pelabelan  $\gamma$  disebut pelabelan total busur super ajaib. Contoh pelabelan total busur super ajaib dapat dilihat pada Gambar 2.6 (b).

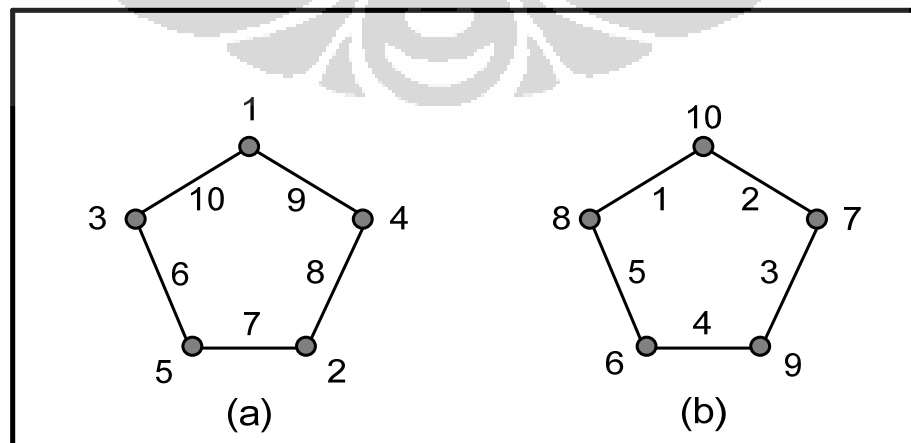
Pada pelabelan total busur ajaib didefinisikan **pelabelan dual** sebagai berikut:

**Definisi 2.2** [Wallis, 2001]

Misalkan pelabelan  $\gamma : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$  merupakan pelabelan total busur ajaib pada graf  $G$ . Definisikan pelabelan  $\gamma' : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\gamma'(x) &: n + e + 1 - \gamma(x), \quad \forall x \in V \\ \gamma'(xy) &: n + e + 1 - \gamma(xy), \quad \forall xy \in E\end{aligned}$$

Maka  $\gamma'$  disebut **dual** dari  $\gamma$ .



Gambar 2.7 (a) Pelabelan  $\gamma$  dan (b) pelabelan  $\gamma'$  pada  $C_5$

Gambar 2.7 memberikan contoh pelabelan  $\gamma$  dan pelabelan dual  $\gamma'$  pada  $C_5$ . Berhubungan dengan pelabelan dual, diberikan teorema berikut:

**Teorema 2.1** [Wallis, 2001]

Pelabelan dual dari suatu pelabelan total busur ajaib merupakan pelabelan total busur ajaib.

Seperti telah dijelaskan pada bab I, **pelabelan berurutan** merupakan pengembangan dari pelabelan super ajaib. Label yang berurutan dapat diberikan pada himpunan simpul atau busur. Jika label yang berurutan diberikan pada himpunan simpul maka pelabelan disebut pelabelan simpul berurutan dan jika label yang berurutan diberikan pada himpunan busur maka pelabelan disebut pelabelan busur berurutan. Pada skripsi ini yang akan dibahas hanya pelabelan simpul berurutan busur ajaib yang akan dijelaskan pada subbab selanjutnya.

## 2.4 Pelabelan Total $a$ -Simpul Berurutan Busur Ajaib

### **Pelabelan total $a$ -Simpul Berurutan Busur Ajaib ( $a$ -SBBA)**

didefinisikan sebagai suatu pemetaan  $\gamma : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n + e\}$  dengan label simpul

$$\gamma(V) = \{a+1, a+2, \dots, a+n\}, \quad 0 \leq a \leq e$$

dan label busur

$$\gamma(E) = \{1, 2, \dots, a\} \cup \{a+n+1, a+n+2, \dots, n+e\}$$

serta mempunyai sifat bobot busur semua busur bernilai sama atau konstan,

$$w_{\gamma}(xy) = \gamma(x) + \gamma(xy) + \gamma(y) = k, \quad \forall xy \in E.$$

Berhubungan dengan pelabelan dual (Definisi 2.2), pada pelabelan total  $a$ -SBBA, Sugeng dan Miller pada [4] telah membuktikan bahwa pelabelan dual dari pelabelan  $a$ -SBBA merupakan pelabelan  $(e-a)$ -SBBA.

**Teorema 2.2** [Sugeng dan Miller, 2008]

Pelabelan dual dari pelabelan  $a$ -SBBA pada graf  $G$  merupakan pelabelan total  $(e-a)$ -SBBA.

**Bukti**

Misalkan graf  $G$  memiliki pelabelan  $a$ -SBBA  $\gamma$  dengan bilangan ajaib  $k$ .

Sehingga,  $\gamma(V) = \{a+1, a+2, \dots, a+n\}$ . Definisikan pelabelan

$\gamma' : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, n+e\}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &: n+e+1-\gamma(x), \quad \forall x \in V \\ \gamma'(xy) &: n+e+1-\gamma(xy), \quad \forall xy \in E \end{aligned}$$

sehingga,

$$\gamma'(V) = \{e-a+1, e-a+2, \dots, e-a+n\}$$

dan

$$\gamma'(E) = \{1, 2, \dots, e-a\} \cup \{e-a+n+1, e-a+n+2, \dots, n+e\}.$$

Dari Teorema 2.1, pelabelan dual dari pelabelan total busur ajaib juga merupakan pelabelan total busur ajaib, sehingga  $\gamma'$  juga merupakan pelabelan  $(e-a)$ -SBBA. ■

Sugeng dan Miller pada [4] juga telah membuktikan bahwa graf yang memiliki pelabelan  $a$ -SBBA adalah graf tidak terhubung.

**Teorema 2.3** [Sugeng dan Miller, 2008]

Jika graf  $G$  memiliki pelabelan total  $a$ -Simpul Berurutan Busur Ajaib ( $a$ -SBBA),  $a \neq 0$  dan  $a \neq e$  maka graf  $G$  adalah graf tidak terhubung.

Pada pembuktian teorema ini disebutkan bahwa banyak busur maksimum agar suatu graf dapat diberi pelabelan  $a$ -SBBA adalah  $e=n-3$ . Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf yang memiliki pelabelan  $a$ -SBBA adalah graf tidak terhubung.

Suatu graf terhubung dapat diberi pelabelan total  $a$ -SBBA dengan menambahkan simpul terisolasi. Oleh karena itu, pada pelabelan  $a$ -SBBA yang menjadi perhatian bukan hanya konstruksi pelabelannya saja, tetapi juga banyak simpul terisolasi yang harus ditambahkan agar graf  $G$  memiliki

pelabelan  $a$ -SBBA. Sugeng dan Miller [4] juga telah memberikan batas minimal simpul terisolasi yang dibutuhkan pada pelabelan beberapa graf tertentu, yaitu:

- Jika  $G$  terdiri dari dua graf pohon maka dibutuhkan minimal satu simpul terisolasi;
- Jika  $G$  terdiri satu graf pohon dan satu graf yang mengandung *unicycle* maka dibutuhkan minimal dua simpul terisolasi;
- Jika  $G$  terdiri dari dua graf yang mengandung *unicycle* maka dibutuhkan minimal tiga simpul terisolasi;
- Untuk kasus  $G$  yang lain, maka dibutuhkan minimal tiga simpul terisolasi.

Pada makalah yang sama juga telah dibuktikan bahwa untuk setiap pasang  $a$  dan  $n$ , selalu dapat dibuat graf yang memiliki pelabelan  $a$ -SBBA.

Pada bab selanjutnya akan ditunjukkan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan dua graf bintang, dua graf lingkaran, dua graf matahari dan dua graf korona. Dan pada bab IV akan ditunjukkan banyak simpul terisolasi yang dibutuhkan pada gabungan graf bintang dengan graf lingkaran, graf bintang dengan graf matahari, dan graf lingkaran dengan graf matahari.