

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 MICRO BUBBLE GENERATOR

Micro Bubble Generator (MBG) adalah suatu alat yang berfungsi untuk menghasilkan gelembung udara di dalam air dengan ukuran diameter kurang dari 200 μm .

Micro bubble dapat dihasilkan dengan beberapa metoda dengan karakteristik yang berbeda-beda. Metoda tersebut antara lain dengan *elektrolitic microbubble generator*, *porous plate* (PP), *ventury tube type bubble generator*, dan *spherical body in a flowing water tube*².

Pemanfaatan dari teknologi *micro bubble* ini telah meluas ke berbagai bidang industri. Pada industri perikanan alat ini digunakan untuk meningkatkan kadar oksigen pada tambak atau kolam. Manfaat lain adalah untuk meningkatkan kualitas air yang terpolusi buangan limbah pabrik. Di dunia kedokteran teknologi *micro bubbles* mulai dimanfaatkan untuk mendiagnosa luka yang diakibatkan oleh kanker, dengan cara menyuntikkan gelembung tersebut melalui peredaran darah. Di bidang perkapalan, MBG dengan metode elektrolisis digunakan untuk mengurangi efek gesekan antara dinding lambung kapal dengan air laut (*frictional drag reduction*) sehingga pergerakan kapal menjadi lebih efisien. Pada kehidupan sehari-hari, MBG sudah mulai diperkenalkan untuk di pasang pada bath up kamar mandi, karena gelembung mikro yang dihasilkannya dapat melakukan penetrasi ke dalam permukaan kulit sehingga memberikan efek gosokan yang baik tanpa harus menggunakan sabun.

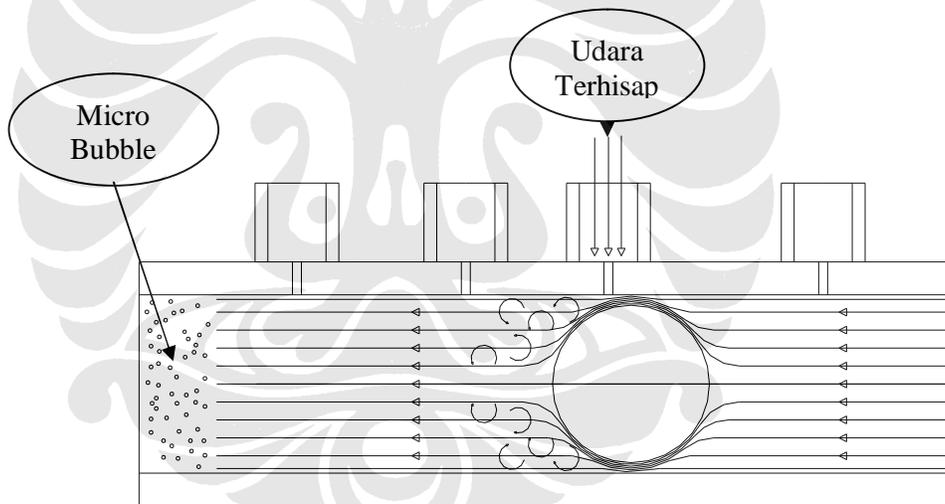
2.1.2 Prinsip Kerja MBG Metode Spherical Ball

Prinsip kerja utama dari MBG metode *spherical ball* adalah menciptakan beda tekanan antara tekanan udara luar dengan tekanan fluida dalam pipa sampai titik tekanan vakum sehingga udara (gas) terhisap masuk kedalam aliran fluida melalui lubang-lubang kecil pada dinding pipa.

Secara lebih jelas konstruksi dari alat ini dapat dilihat pada gambar 2.1. Apabila suatu aliran fluida bertekanan dialirkan melalui pipa tersebut maka akan

terjadi pertambahan kecepatan partikel fluida pada saat melewati daerah sekitar bola, pertambahan kecepatan ini dikarenakan penyempitan penampang saluran oleh bola dan pertambahan panjang lintasan partikel fluida saat menyusuri permukaan bola. Kecepatan tertinggi terjadi pada daerah puncak bola. Berdasarkan persamaan massa dan energi (persamaan Bernoulli), peningkatan kecepatan aliran akan diikuti dengan penurunan tekanan sehingga daerah sekitar puncak bola memiliki tekanan lebih rendah dari pada daerah inlet pipa.

Apabila tekanan didalam pipa lebih rendah dibandingkan dengan tekanan atmosfer, maka udara secara otomatis akan terhisap kedalam aliran fuida, melalui lubang-lubang kecil pada *Test Section* yaitu daerah yang bertekanan rendah. Dikarenakan aliran yang terjadi pada daerah *downstream* adalah turbulen dan terdapat tegangan geser, udara yang masuk tersebut akan terpecah menjadi *micro-bubble* dengan jumlah yang sangat banyak.



Gambar.2.1 Konstruksi Micro Bubble Generator Type Spherical Ball

Ilustrasi di atas menggambarkan aliran air bertekanan masuk dari sisi inlet pipa. Aliran air akan bertambah kecepatannya saat melewati bola karena penyempitan penampang aliran dan pertambahan panjang lintasan partikel air saat menyusuri dinding bola. Pertambahan kecepatan menyebabkan tekanan disekitar bola menurun dan lebih rendah dari tekanan udara luar, sehingga udara

luar terhisap masuk melalui lubang intake disekitar bola dan membentuk gelembung-gelembung kecil yang keluar dari sisi outlet pipa.

2.2 TEORI MEKANIKA FLUIDA

Mekanika fluida adalah ilmu yang mengkaji perilaku dari zat-zat cair dan gas dalam keadaan diam ataupun bergerak. Secara khusus, fluida didefinisikan sebagai zat yang berdeformasi secara terus-menerus selama dipengaruhi suatu tegangan geser. Tegangan geser terbentuk oleh gaya tangensial yang bekerja pada sebuah permukaan.

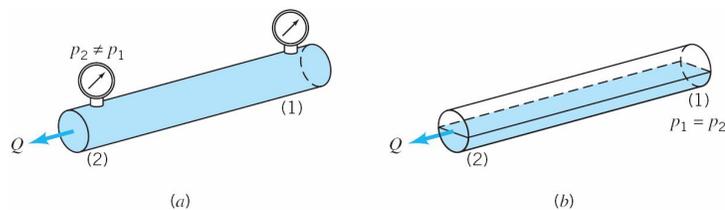
Banyak kriteria yang digunakan untuk mengklasifikasikan aliran fluida. Sebagai contoh; aliran dapat digolongkan sebagai aliran steady dan unsteady, satu – dua – atau tiga dimensi, aliran compressible atau incompressible, dan salah satu klasifikasi yang terpenting adalah klasifikasi yang menggolongkan apakah aliran itu laminar atau turbulen.

2.2.1 Aliran Viskos Dalam Pipa

Perbedaan utama antara saluran tertutup dan terbuka adalah : mekanisme dasar yang menggerakkan fluida

(a) untuk aliran tertutup, gravitasi mungkin memiliki arti penting jika pipa tidak horizontal, namun gaya penggerak utamanya adalah gradien tekanan sepanjang pipa. Jika pipa tidak terisi penuh, tdk mungkin untuk menjaga perbedaan tekanan, $p_1 - p_2$.

(b) untuk saluran terbuka, hanya gravitasi yang menjadi gaya penggeraknya



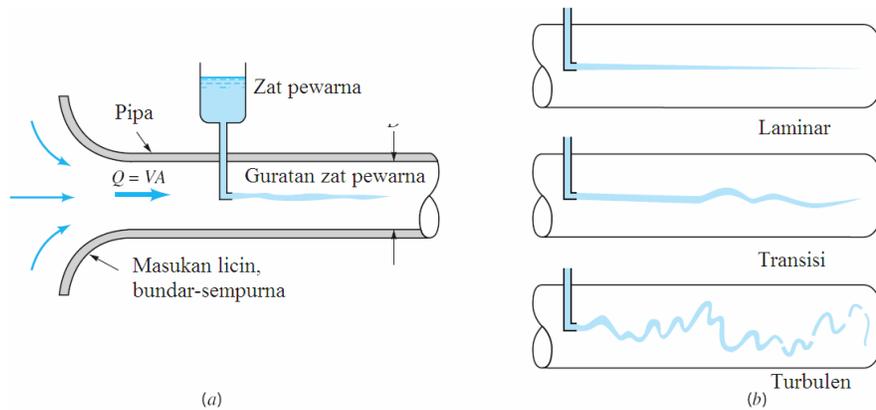
Gambar 2.2 (a) Aliran Pipa. (b) Aliran kanal-terbuka^[2]

Saluran pipa tertutup lebih sering digunakan aplikasinya dalam bidang mechanical engineering. Misalnya sistim pamipaan dalam jaringan transportasi pertambangan minyak. Sedangkan untuk saluran pipa terbuka lebih sering digunakan pada bidang civil engineering.

2.2.2 Aliran Laminar dan Turbulen

Aliran fluida di dalam sebuah pipa mungkin merupakan aliran laminar atau turbulen. **Osborne Reynolds** (1842-1912), ilmuwan dan ahli matematika Inggris, adalah orang yang pertama kali membedakan dua klasifikasi aliran ini dengan menggunakan sebuah peralatan sederhana seperti pada ilustrasi gambar dibawah.

Sifat-sifat laminar dan turbulen ini dapat diamati dengan menginjeksikan zat pewarna yang mengambang dalam sebuah pipa beraliran seperti ditunjukkan pada gambar. Untuk "laju aliran yang cukup kecil" guratan zat pewarna (sebuah garis-gurat) akan tetap berupa garis yang terlihat jelas selama mengalir, dengan hanya sedikit saja menjadi kabur karena difusi molekuler dari zat pewarna ke air di sekelilingnya. Untuk suatu "laju aliran sedang" yang lebih besar, guratan zat pewarna berfluktuasi menurut waktu, ruang dan olakan putus-putus dengan perilaku tak beraturan muncul di sepanjang guratan. Sementara itu, untuk "laju aliran yang cukup besar" guratan zat pewarna akan segera kabur dan menyebar di seluruh pipa dengan pola yang acak. Ketiga karakteristik ini, yang masing-masing disebut sebagai aliran *laminar*, *transisi* dan *turbulen*. Bisa disebut juga aliran turbulen dicirikan dari adanya ketidakteraturan lokal dalam medan aliran yang dipengaruhi oleh sifat-sifat mekanik seperti kecepatan, tekanan atau temperatur.



Gambar 2.3 ilustrasi jenis aliran^[2].

Salah satu parameter tak berdimensi yang biasanya juga digunakan untuk mensifati tipe aliran adalah bilangan Reynolds (Re), Re adalah perbandingan antara efek inersia dan viskos dalam aliran. Dari hasil analisa, dapat diketahui bahwa aliran pada pipa tergantung terhadap angka Reynolds (*Reynolds number*),

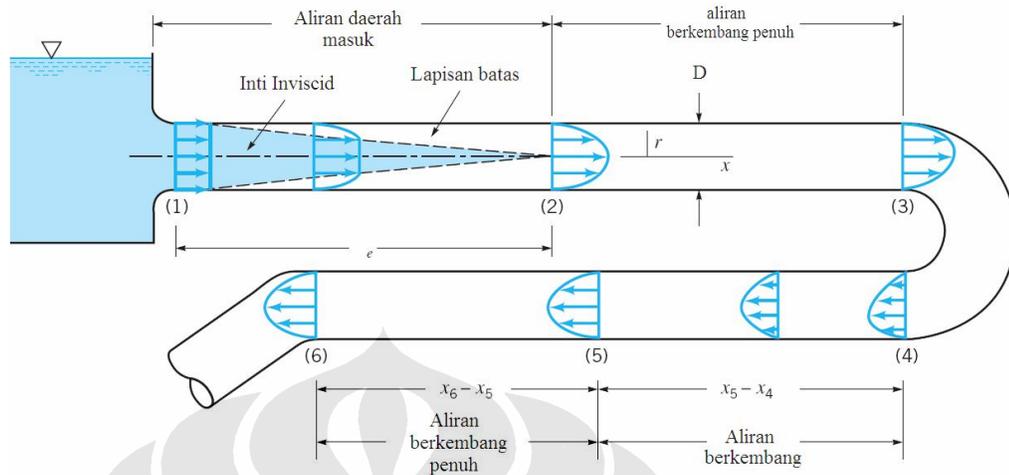
$$R_e = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} \dots\dots\dots [2.1]^{[2]}$$

Dimana V adalah kecepatan rata-rata di dalam pipa. Artinya, aliran di dalam sebuah pipa adalah laminar, transisi atau turbulen jika bilangan Reynoldsnnya "Cukup kecil", "Sedang" atau "Cukup Besar"; D adalah diameter dalam pipa.

Jika $R_e \leq 2100$ biasanya Aliran bersifat Laminar. Jika $2100 \leq R_e \leq 4000$ biasanya Aliran bersifat Transisi, sifat aliran dengan bilangan Reynolds diantara kedua batas ini mungkin berubah dari keadaan Laminar menjadi Turbulen dengan perilaku acak yang jelas. Dan jika $R_e \geq 4000$ biasanya Aliran bersifat Turbulen.

2.2.3 Daerah Masuk dan Aliran Berkembang Penuh

Setiap fluida yang mengalir dalam sebuah pipa harus memasuki pipa pada suatu lokasi. Daerah aliran di dekat lokasi fluida memasuki pipa disebut sebagai daerah masuk (*entrance region*) dan diilustrasikan pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.4 Daerah aliran sedang berkembang dan aliran berkembang penuh^[2].

Aliran di daerah masuk sebuah pipa sangat kompleks, fluida biasanya memasuki pipa dengan profil kecepatan yang hampir seragam pada bagian (1). Pada saat fluida mulai bergerak melewati pipa, efek viskos menyebabkannya tetap menempel pada dinding pipa (kondisi lapisan batas tanpa slip). Hal ini berlaku jika fluidanya adalah udara yang relatif inviscid ataupun minyak yang sangat viskos. Jadi, sebuah *lapisan batas* (*boundary layer*) dimana efek viskos menjadi penting timbul di sepanjang dinding pipa sedemikian hingga profil kecepatan awal berubah menurut jarak sepanjang pipa x , sampai fluida mencapai ujung akhir dari panjang daerah masuk, bagian (2), dimana setelah di luar itu profil kecepatan tidak berubah lagi menurut x .

Lapisan batas telah tumbuh ketebalannya sehingga memenuhi pipa secara menyeluruh. Efek viskos sangat penting di dalam lapisan batas. Untuk fluida di luar lapisan batas [di dalam inti inviscid (*inviscid core*) yang mengelilingi garis sumbu dari (1) dan (2)], efek viskos dapat diabaikan.

Bentuk dari profil kecepatan di dalam pipa dan panjang daerah masuk (λ_e) tergantung pada tipe aliran, apakah aliran tersebut laminar atau turbulen.

Seperti pada banyak sifat lainnya dari aliran pipa, *panjang masuk* tak berdimensi, λ_e / D , berkorelasi cukup baik dengan bilangan Reynolds. Panjang masuk pada umumnya diberikan hubungan :

$$\frac{\lambda_e}{D} = 0,06 \text{ Re} \dots\dots\dots [2.2]^{[2]} \text{ (untuk aliran laminar)}$$

Dan

$$\frac{\lambda_e}{D} = 4,4 (\text{Re})^{1/6} \dots\dots\dots [2.3] \text{ (untuk aliran turbulen)}$$

Untuk aliran-aliran dengan bilangan Reynolds Sangat rendah panjang masuk dapat sangat pendek ($\lambda_e = 0,6D$ jika $\text{Re} = 10$), sementara untuk aliran-aliran dengan bilangan Reynolds besar daerah masuk tersebut dapat sepanjang berkali-kali diameter pipa sebelum ujung akhir dari daerah masuk dicapai ($\lambda_e = 120D$ untuk $\text{Re} = 2000$). Untuk banyak masalah-masalah teknik praktis $10^4 < \text{Re} < 10^5$ sehingga $20D < \lambda_e < 30D$.

Perhitungan profil kecepatan dan distribusi tekanan di dalam daerah masuk sangat rumit. Namun, apabila fluida telah mencapai ujung akhir dari daerah masuk, bagian (2) dari gambar di atas, aliran lebih mudah digambarkan karena kecepatan hanyalah fungsi jarak dari sumbu pipa, r , dan tidak tergantung pada x . Hal ini berlaku sampai sifat dari pipa berubah karena sesuatu hal, misalnya perubahan diameter, atau sampai fluida mengalir melalui sebuah belokan, katup, atau komponen lainnya pada bagian (3). Aliran antara (2) dan (3) disebut *berkembang penuh (fully developed)*. Setelah gangguan atas aliran berkembang penuh [pada bagian (4)], aliran secara bertahap mulai kembali ke sifat berkembang penuhnya [bagian (5)] dan terus dengan profil ini sampai komponen pipa berikutnya dicapai [bagian (6)]. Dalam banyak kasus pipa cukup panjang sehingga terdapat panjang aliran berkembang penuh yang lebih besar dibandingkan dengan panjang aliran yang sedang berkembang.

2.2.4 Persamaan Bernoulli

Pressure drop

Dalam penulisan Tugas Akhir kali ini, persamaan Bernoulli dimanfaatkan untuk mendapatkan *pressure drop* (penurunan tekanan), agar dapat memanfaatkan perbedaan tekanan untuk menyedot udara. Perhitungan dilakukan pada sebuah aliran air di pipa, dengan bola terdapat didalamnya sesuai dengan ilustrasi pada Gambar, sehingga formula untuk perhitungan *pressure drop* adalah ;

Persamaan dasar Bernoulli^[1] :

$$\frac{P_1}{\gamma_1} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma_2} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + Z_2 \dots\dots\dots[2.4]$$

Asumsi $Z_1 = Z_2$; dan $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$\frac{P_1}{\rho_1 \cdot g} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2}{\rho_2 \cdot g} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\frac{V_1^2}{2 \cdot g} - \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2}{\rho_2 \cdot g} - \frac{P_1}{\rho_1 \cdot g}$$

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2 \cdot g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho \cdot g}$$

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{20} = \frac{P_2 - P_1}{1000 \cdot 10}$$

$$\frac{(V_1^2 - V_2^2) \cdot 10000}{20} = |P_2 - P_1|$$

Jadi persamaan *pressure drop* adalah :

$$|P_2 - P_1| = \frac{(V_1^2 - V_2^2) \cdot 10000}{20} \dots\dots\dots [2.5]$$

Dari persamaan tersebut dapat diketahui bahwa tekanan pada diameter kecil yang tepat berada di tengah – tengah puncak bola akan lebih kecil daripada tekanan atmosfer, hal ini berakibat udara luar akan terhisap masuk kedalam pipa.

Aliran incompressible

Untuk perhitungan kecepatan aliran udara, harus diperhatikan bahwa sifat udara adalah tak mampu mampat (incompressible). Sehingga persamaan Bernoulli

diturunkan dengan mempertimbangkan sifat fluida gas yang secara umum mempunyai ρ (massa jenis) tidak konstan.

Untuk aliran dari suatu gas sempurna yang tunak, inviscid dan isothermal, persamaan menjadi :

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = C \dots\dots\dots[2.6]$$

$p = \rho RT$, dimana T adalah konstan

$$RT \int \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}v^2 + gz = C$$

$$\frac{RT}{g} \ln(p_1) + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{RT}{g} \ln(p_2) + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{RT}{g} \ln(p_2) - \frac{RT}{g} \ln(p_1) + z_2 - z_1$$

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{RT}{g} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + z_2 - z_1 \dots\dots\dots[2.7]$$

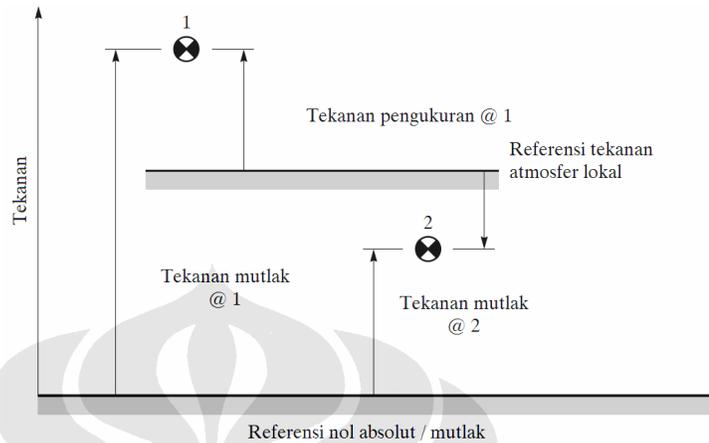
Untuk aliran udara dengan kecepatan rendah (bilangan Mach kurang dari 0,3), efek incompressibilitas dapat diabaikan dan penurunan persamaan Bernoulli sama dengan fluida compressible.

2.2.5 PENGUKURAN TEKANAN

Tekanan (*pressure*) dinyatakan sebagai gaya per satuan luas. Dengan demikian, satuan tekanan sama dengan tegangan (*stress*), dan pada umumnya tekanan dapat dianggap sebagai sejenis tegangan juga. Tekanan absolut (*absolute pressure*) diukur relatif terhadap suatu keadaan hampa sempurna (tekanan nol mutlak), atau gaya per satuan luas yang bekerja pada dinding penampung fluida. Tekanan relatif atau tekanan pengukuran (*gage pressure*) adalah selisih antara tekanan absolut dan tekanan atmosfer setempat.

Tekanan mutlak selalu positif, tetapi tekanan pengukuran dapat positif maupun negatif, tergantung pada apakah tekanan tersebut di atas tekanan atmosfer (bernilai positif) atau dibawah tekanan atmosfer (bernilai negatif). Sebuah tekanan negatif disebut juga sebagai tekanan *hisap* atau *hampa*. Misalnya, tekanan mutlak

10 psi (abs) dapat dinyatakan sebagai pengukuran -4,7 psi (gage), jika tekanan atmosfer setempat adalah 14,7 psi, atau dengan cara lain dinyatakan sebagai tekanan hisap 4,7 psi atau tekanan hampa 4,7 psi.

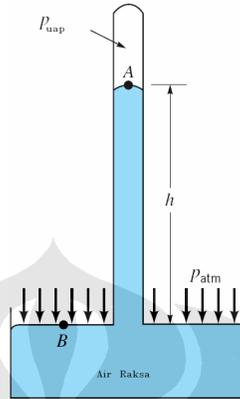


Gambar 2.5 Grafik tekanan pengukuran dan tekanan mutlak^[1]

Pengukuran tekanan atmosfer biasanya dilakukan dengan sebuah *barometer* air raksa, yang bentuk paling sederhananya terdiri dari sebuah tabung gelas tertutup pada satu ujungnya dan ujung terbukan lainnya tercelup dalam sebuah bejana berisi penuh dengan air raksa seperti ditunjukkan pada gambar 2.6 Tabung tersebut mulai diisi penuh dengan air raksa (pada posisi terbalik dengan sisi terbukanya menghadap ke atas) dan kemudian diputar ke bawah (ujung terbuka ke bawah) sehingga ujung terbuka didalam bejana air raksa. Ketinggian kolom air raksa akan mencapai suatu posisi kesetimbangan di mana beratnya ditambah dengan gaya akibat tekanan uap (yang terbentuk pada ruang di atas kolom) mengimbangi gaya karena tekanan atmosfer. Jadi

$$P_{atm} = \gamma h + P_{uap} \dots\dots\dots[2.8]$$

Di mana γ adalah berat jenis air raksa. Untuk kebanyakan tujuan praktis, pengaruh tekanan uap dapat diabaikan karena nilainya sangat kecil [untuk air raksa $P_{uap} = 0,000023 \text{ lb/in}^2$. (abs) pada temperatur $68^\circ F$. Ini merupakan cara yang konvensional untuk menyatakan tekanan atmosfer dengan ketinggian h dalam milimeter atau inci air raksa. Perlu dicatat jika air digunakan sebagai pengganti air raksa, maka ketinggian kolom akan mencapai kira-kira 34 ft , dibandingkan dengan air raksa yang hanya $29,9 \text{ in}$. Konsep barometer air raksa diciptakan oleh Evangelista Torricelli pada tahun 1644.



Gambar 2.6 Barometer air raksa^[1].

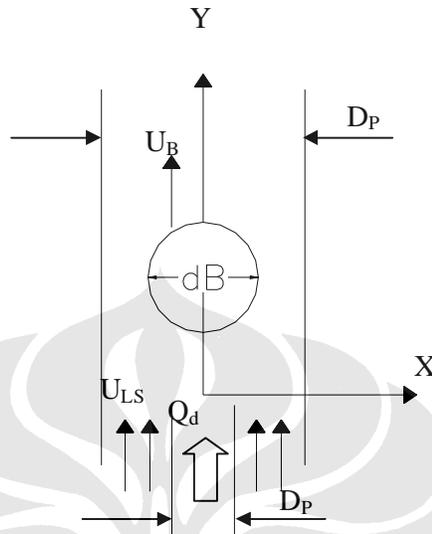
2.2.6 Pembentukan Gelembung (Bubble Formation)^[5].

Pembentukan gelembung ditentukan oleh banyak parameter seperti terlihat pada persamaan di bawah ini yang diusulkan oleh Salvatore Cesar Pais^[5].

$$D_B = f(\sigma, \mu_c, \mu_d, \rho_c, \rho_d, D_P, D_N, U_{LS}, Q_D, g) \dots \dots \dots [2.9]$$

Dimana :

- σ = Tegangan permukaan air
- μ_c = Viskositas dinamik air
- μ_d = Viskositas dinamik udara
- ρ_c = Densitas air
- ρ_d = Densitas udara
- D_P = Diameter pipa
- D_N = Diamater nozzle
- U_{LS} = Superficial liquid velocity
- Q_D = Debit udara
- G = Percepatan gravitasi



Gambar 2.7 Diagram skematik pembentukan gelembung

Gaya yang bekerja pada pembentukan gelembung adalah :

- Gaya apung (Bouyancy Force) (F_B)
- Gaya tegangan permukaan cairan (Surface Tension Force) (F_σ)
- Momentum flux udara (Inersia Force) (F_I)
- Gaya seret (Drag Force) (F_D)

Dari hukum Newton kedua mengenai gerak, pada pembentukan gelembung berlaku persamaan gaya yaitu :

$$F_B + F_M + F_\sigma + F_I + F_D + = 0 \dots\dots\dots[2.10]$$

Persamaan ini berlaku baik untuk gelembung bergerak baik pada air yang diam atau air yang mengalir. Gaya tersebut yaitu

1. Gaya Apung (Bouyant Force) (F_B)

$$F_B = (\rho_c - \rho_d) g V_B \dots\dots\dots[2.11]$$

Dimana:

- ρ_c = Densitas air
- ρ_d = Densitas udara

- G = Percepatan gravitasi bumi
- V_B = Volume Gelembung

2. Momentum Flux (F_M)

$$F_M = \rho_d \frac{Q_d^2}{\frac{\pi}{4} D_N^2} \dots\dots\dots[2.12]$$

Dimana :

- ρ_d = Densitas udara
- Q_d = Debit udara
- D_N = Diameter nozzle

3. Gaya Tegangan Permukaan (F_σ)

$$F_\sigma = \sigma \pi D_N \dots\dots\dots[2.13]$$

Dimana ;

- σ = Tegangan Permukaan air
- D_N = Diameter Nozzle

4. Gaya Inersia (F_I)

$$F_I = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\rho_d V_B \frac{ds}{dt} \right)}_{\text{gaya inersia bubble}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\rho_c V_B C_{MC} \left(\frac{ds}{dt} - U_{LS} \right) \right]}_{\text{gaya inersia air}} \dots\dots[2.14]$$

gaya inersia bubble gaya inersia air

Dimana:

- ρ_c = Densitas air
- ρ_d = Densitas udara
- C_{MC} = Koefisien pertambahan massa air
- V_B = volume gelembung
- $\frac{ds}{dt} = U_B$ = kecepatan pusat bubble dari nozzle
- U_{LS} = Kecepatan superficial liquid

5. gaya Seret (F_D)

$$F_D = \frac{1}{2} S_D C_{DW} \rho_c U_{eff}^2 A_{eff} \dots\dots\dots[2.14]$$

Dimana :

- C_{DW} = Koefisien Drag pengaruh dari dinding pipa

- ρ_c = Densitas air
 U_{eff} = Kecepatan efektif gelembung
 = $(ds/dt) - U_{LS}$
 A_{eff} = Luas frontal gelembung
 SD = Nilai variable
 = +1 jika $U_{eff} < 0$
 = -1 jika $U_{eff} > 0$

$$C_{MC} = \frac{1}{2} + 3 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} D_B^{*3}(t)$$

$$C_{DW} = C_D \frac{1}{(1 - D_B^{*2})}$$

$$C_D = \frac{24}{Re_B} \text{ untuk } Re_B < 2$$

$$C_D = \frac{18,5}{Re_B^{0,6}} \text{ untuk } 2 \leq Re_B \leq 500$$

$$C_D = 0,44 \text{ untuk } 500 \leq Re_B \leq 2000$$

$$Re_B = \frac{\rho_c U_{eff} D_B}{\mu_c}$$

$$A_{eff} = \frac{\pi}{4} D_B^2(t) \text{ untuk } U_{eff} > 0$$

$$A_{eff} = \frac{\pi}{4} (D_B^2(t) - D_N^2) \text{ untuk } U_{eff} < 0$$

$$D_B^* = \frac{D_B}{D_p}$$

Pada pembentukan gelembung seperti terlihat pada gambar keseimbangan gaya adalah sebagai berikut : gaya F_σ dan F_I berlawanan arah dengan gaya $F_B + F_M + F_D$. Gaya-gaya $F_B + F_M + F_D$ adalah gaya pada gelembung yang bergerak vertical keatas permukaan air. Gaya F_σ dan F_I adalah gaya yang menahan atau menghambat gelembung untuk bergerak ke atas permukaan air. Sehingga persamaan di atas menjadi :

$$F_B + F_M + F_D = F_\sigma + F_I$$

$$(\rho_c - \rho_d)g \frac{\pi}{6} D_B^3 + \frac{\rho_d Q_d^2}{\frac{\pi}{4} D_N^2} + \frac{1}{2} S_D C_{DW} \rho_c A_{eff} U_{eff}^2 = \pi D_N \sigma +$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\pi}{6} \rho_c D_B^3 \left\{ \frac{1}{2} + 3 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{D_B^3}{D_P^3} \right\} U_{eff} \right] \dots\dots\dots[2.15]$$

Pembentukan gelembung (*bubble*) terdiri dari 2 tahap :

1. Tahap pengembangan (Expansion Stage).
2. Tahap pelepasan (Detachment Stage).

Selama tahap pengembangan, gelembung mengembang ke arah radial sebagai hasil dari injeksi gas, melalui nosel tunggal, dimana jejak pembentukan gelembung dempet pada ujung nosel. Pada akhir tahap ekspansi ditentukan oleh besarnya gaya yang melepaskan dan menahan pada gaya-gaya keseimbangan.

Selama tingkat ekspansi yaitu :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dD_B(t)}{dt}$$

$$V_B = \frac{\pi}{6} D_B^3(t)$$

Persamaan gaya keseimbangan pada akhir tahap ekspansi :

$$(\rho_c - \rho_d)g \frac{\pi}{6} D_B^3 + \frac{\rho_d Q_d^2}{\frac{\pi}{4} D_N^2} + \frac{1}{2} S_D C_{DW} \rho_c A_{eff} \left(\frac{1}{2} \frac{dD_B(t)}{dt} - U_{LS} \right)^2 = \pi D_N \sigma +$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\pi}{6} \rho_c D_B^3 \frac{1}{2} \frac{dD_B(t)}{dt} \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{\pi}{6} \rho_c C_{MC} D_B^3(t) \left(\frac{1}{2} \frac{dD_B(t)}{dt} - U_{LS} \right) \right] \dots\dots[2.16]$$

Tahap pelepasan terjadi karena gelembung mendapatkan injeksi udara yang terus-menerus sehingga volume gelembung bertambah dan akhirnya terlepas. Jadi volume gelembung selama tahap pelepasan yaitu :

$$V_B = \frac{\pi}{6} D_{BE}^3 + Q_d t \dots\dots\dots[2.17]$$