

## BAB III

### METODOLOGI PENELITIAN

#### 3.1. PERSIAPAN DAN PENGUJIAN MATERIAL

Material – material yang akan digunakan sebagai penyusun beton pada penelitian ini terlebih dahulu harus diteliti untuk mengetahui karakteristik dan unsur penyusun dari material tersebut.

##### 3.1.1. Agregat

Persiapan agregat yang akan digunakan antara lain melakukan penyucian dan pengeringan. Hal ini bertujuan untuk mendapatkan agregat yang bersih sehingga komposisi untuk agregat adalah murni berat dari agregat. Material-material yang menempel pada agregat seperti pasir dan lumpur dapat menyebabkan hasil yang didapat kurang optimal.

##### 3.1.2. Geopolimer

Bahan geopolimer dalam penelitian ini menggunakan *fly ash* sebagai prekursor nya dan campuran larutan sodium hidroksida [NaOH] dan sodium silikat [ $\text{Na}_2\text{Si}_3$ ] sebagai *alkali activator*. *Fly ash* yang digunakan di dalam penelitian ini merupakan *fly ash* hasil limbah buangan pembakaran batu bara pada PLTU Suralaya. Sedangkan larutan sodium silikat, atau biasa disebut *waterglass*, dan senyawa NaOH, didapatkan dengan membeli di toko kimia.

Pengujian material geopolimer yang perlu dilakukan adalah hanya untuk bahan prekursor, untuk mengetahui komposisi kandungan unsur – unsur di dalamnya, karena material *fly ash* di beberapa tempat pembangkit listrik mempunyai komposisi yang berbeda.

Pengujian yang dilakukan untuk mengetahui karakteristik *fly ash* adalah uji *X-Ray Fluorescence* (XRF) dan *X-Ray Diffraction* (XRD). Pengujian XRF berfungsi untuk mengetahui persentase komposisi unsur – unsur yang terkandung dalam *fly ash*, dimana diharapkan sebagian besar unsur penyusun dari *fly ash* adalah unsur alumina dan silika. Sedangkan pengujian XRD dilakukan untuk mencari sifat struktur dari *fly ash*.

Pengujian XRF dan XRD akan dilakukan pada Laboratorium Fisika Fakultas MIPA Universitas Indonesia.

### **3.2. PERHITUNGAN CAMPURAN BETON**

Penelitian ini menggunakan metode pendekatan desain beton geopolimer sesuai dengan beton semen konvensional. Hal ini berarti kedua jenis beton tersebut didesain dengan kuat tekan rencana yang sama menurut standar perhitungan beton konvensional. Karena sampai saat ini belum terdapat standar mengenai desain campuran (*mix design*) beton geopolimer, maka untuk mencapai target kuat tekan beton geopolimer tertentu, peran pasta semen pada beton semen diganti dengan pasta geopolimer. Begitupun dengan komposisi agregat murni sesuai dengan uji karakteristiknya, menjadi referensi komposisi agregat limbah beton dalam penelitian ini. Sehingga dibutuhkan pengujian terhadap beton semen dengan target kuat tekan yang sama, sebagai data pembandingan terhadap beton geopolimer.

#### **3.2.1. Perhitungan Komposisi Pasta Geopolimer**

Tahap pertama dalam menentukan campuran beton geopolimer adalah mencari komposisi yang tepat dari material geopolimer itu sendiri. Untuk mendapatkan komposisi yang tepat, penulis membuat sampel material geopolimer berukuran kecil dengan perhitungan desain campuran melalui metode *trial and error*. Metode *trial and error* dilakukan dengan memvariasikan komposisi prekursor dengan aktivator alkali untuk mencari komposisi yang paling optimal.

M. Fajar Hermansyah (2007) memperoleh komposisi pasta geopolimer berbahan dasar *fly ash* dari PLTU Suralaya dengan hasil kuat tekan paling optimal sebesar 45.1 MPa. Dari komposisi tersebut, terlihat rasio *fly ash* : air = 4.44 : 1.

Komposisi ini merupakan salah satu referensi utama, tetapi pada saat melakukan penelitian, penulis tetap akan melakukan metode *trial and error*, terlebih dalam variasi rasio H<sub>2</sub>O, untuk mendapatkan hasil paling optimal sesuai dengan kondisi lapangan saat melakukan produksi benda uji.

Detail perbandingan komposisi tiap material dan bahan kimia yang digunakan merupakan hak kekayaan intelektual peneliti, sehingga tidak ditampilkan dalam laporan skripsi ini.

### **3.2.2. Perhitungan *Mix Design* Beton**

Desain komposisi beton geopolimer selanjutnya adalah desain campuran material geopolimer dengan agregat (komposisi matriks-inklusi). Pada penelitian ini akan dibandingkan kekuatan beton geopolimer dengan beton semen dimana kedua beton tersebut memiliki perbandingan matriks-inklusi yang sama.

Beton geopolimer dan beton konvensional pada penelitian ini didesain dengan target kuat rencana K400 atau setaraf dengan kuat tekan  $f_c' = 40$  MPa. Perhitungan campuran beton geopolimer didesain sesuai dengan perhitungan *mix design* beton konvensional, menggunakan metode US Bureau, dengan mengganti jumlah pasta semen yang dibutuhkan menjadi pasta geopolimer, dan mengganti proporsi *well-graded aggregate* dengan agregat limbah beton semen.

### **3.3. PERHITUNGAN KEBUTUHAN BENDA UJI**

Hal selanjutnya yang harus dilakukan adalah menghitung jumlah benda uji yang dibutuhkan, agar dapat memperkirakan jumlah kebutuhan material dan besar biaya yang dikeluarkan.

Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan terhadap beberapa penelitian sebelumnya di Departemen Sipil FTUI mengenai properti material Beton Geopolimer. Pengujian yang akan dilakukan di dalam penelitian ini adalah

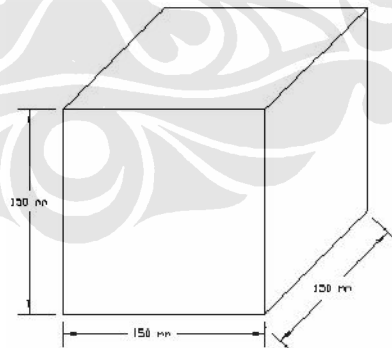
pengujian lendutan dan regangan balok beton akibat diberikan beban statis. Pengujian dilakukan dengan menggunakan balok beton bertulang ganda geopolimer.

Sebelum mencapai tahap pengujian lendutan dan regangan, terlebih dahulu akan dibuat sampel beton untuk 2 jenis beton, yaitu beton geopolimer dan beton konvensional, untuk ditelaah karakteristik materialnya dengan tes kuat tekan dan kuat tarik. Hal ini dilakukan untuk membuktikan hasil penelitian – penelitian sebelumnya.

### 3.3.1. Tes Kuat Tekan

Tes kuat tekan beton dilakukan ketika beton telah mengeras. Karena waktu yang dibutuhkan untuk beton mengeras pada beton geopolimer dan beton konvensional berbeda, maka pengujian kuat tekan akan dilakukan secara variasi waktu pada hari ke-3, ke-7, dan ke-28 setelah pembukaan cetakan. Untuk masing – masing pengujian dibuat 1 sampel untuk setiap jenis material.

Tes kuat tekan menggunakan benda uji kubus  $150 \times 150 \times 150 \text{ mm}^3$  sesuai dengan ASTM Designation: C 39 – 94 tahun 1996 untuk pengetesan terhadap material beton.



**Gambar 3.1.** Sample kubus beton

### 3.3.2. Tes Kuat Tarik

Tes kuat tarik dilakukan di cetakan angka 8 pada saat beton telah mengeras. Tes kuat tarik dilakukan hanya pada beton geopolimer untuk

membuktikan hipotesa awal bahwa kuat tarik beton geopolimer adalah dua kali lipat kuat tekannya<sup>[8]</sup>.

### 3.3.3. Uji Lendutan

Uji lendutan dan regangan dilakukan bersamaan pada sampel balok beton, menggunakan alat uji LVDT untuk uji lendutan. Sampel balok beton yang diuji berukuran 200 x 300 x 1500 mm<sup>3</sup>.

Dari hipotesa awal kekuatan tarik beton geopolimer dua kali lipat beton konvensional, maka akan ditinjau pengaruh *reinforcement* tulangan baja pada struktur beton geopolimer. Selain hipotesa tersebut, reaksi kimia antara unsur – unsur alumina dan silica akan memberikan reaksi korosif pada tulangan besi baja. Hal itu pulalah yang akan diamati pada ketiga jenis struktur balok beton di atas.

## 3.4. PRODUKSI BENDA UJI

Setelah diperoleh perhitungan desain campuran beton geopolimer dan beton konvensional, maka dilakukanlah proses produksi benda uji.

### 3.4.1. Persiapan

Tahap Persiapan merupakan tahap penunjang di awal proses produksi. Hal-hal yang termasuk di dalamnya diantaranya :

#### (1) Persiapan Peralatan

- a] *Concrete mixer*, dengan volume *concrete mixer* yang akan dipakai adalah  $\pm 1 \text{ m}^3$
- b] Bekisting, sesuai dengan ukuran benda uji yang telah disebutkan di atas. Sebelum pencetakan, dinding – dinding bekisting diberi pelumas agar mempermudah pembukaan bekisting. Khusus untuk pencetakan beton geopolimer, dinding bekisting harus dilapisi plastik agar mudah dibuka.
- c] 1 set peralatan *slump test*
- d] Sendok semen, wadah (baskom), dan peralatan penunjang lainnya

## (2) *Persiapan Bahan*

### a] Prekursor

Bahan prekursor yang digunakan adalah abu terbang (*fly ash*) yang berasal dari PLTU Suralaya. Sebelum digunakan untuk produksi, *fly ash* terlebih dahulu digiling untuk mendapatkan luas permukaan yang besar. Setelah digiling, *fly ash* disaring dengan menggunakan saringan No. 200. Hal ini bertujuan agar reaksi polimerisasi dapat berlangsung dengan baik.

### b] Aktivator alkali

Aktivator yang digunakan pada percobaan ini adalah campuran sodium silikat dengan sodium hidroksida. Sodium hidroksida yang berbentuk pelet dilarutkan dalam sodium silikat yang berbentuk cairan. Komposisi sodium hidroksida dan sodium silikat pada saat pencampuran dihitung agar didapatkan komposisi larutan dengan molaritas tertentu. Hal ini berpengaruh dalam reaksi polimerisasi yang akan terjadi.

### c] Agregat

Agregat mineral yang digunakan berupa agregat kasar dan agregat halus dari hasil *crushing* dan penyaringan limbah sisa beton semen.

### d] Air

Air yang digunakan harus memenuhi syarat untuk bahan beton pada umumnya, yaitu air dengan kualitas air minum.

## 3.4.2. **Pembuatan Campuran Beton (*Mixing*) & Uji Slump Beton**

Proses pencampuran dilakukan setelah melakukan proses desain, dimana komposisi berat tiap bahan beton telah ditentukan sesuai dengan kriteria yang diinginkan menurut standart desain beton konvensional. Proses pencampuran meliputi rangkaian kegiatan berikut ini :

- (1) Mencampur agregat kasar dan agregat halus dalam keadaan kering. Masukkan hasil pencampuran ke dalam *concrete mixer*.
- (2) Membuat larutan aktivator alkali dalam wadah. Setelah terjadi reaksi dalam larutan (ditandai dengan kenaikan suhu), masukkan *fly ash* dan air ke dalam larutan kemudian aduk merata, sehingga setiap butiran *fly ash* bersentuhan

dengan larutan. Bahan ini merupakan material geopolimer yang berfungsi sebagai matriks (mortar).

- (3) Masukkan mortar dan air ke dalam *concrete mixer* dan aduk sampai mendapatkan kondisi homogen.
- (4) Melakukan tes slump untuk mengetahui besar slump yang didapat.

### 3.4.3. Pencetakan (*Moulding*)

Metode pencetakan berperan dalam menentukan kepadatan dan homogenitas beton pada saat keras, serta besar pori yang timbul. Proses pencetakan meliputi rangkaian kegiatan berikut ini:

- (1) Pastikan dinding-dinding bekisting telah diberi pelumas (plastik untuk bekisting beton geopolimer), dan bekisting telah bersih dari segala macam benda asing.
- (2) Beton segar yang telah tercampur dengan baik dimasukkan ke dalam bekisting. Proses pencetakan dibagi menjadi tiga lapisan, tiap lapisan dipadatkan dengan menggunakan batang besi sebanyak 25 kali tusukan. Pada bekisting lentur, banyak tusukan yang diberikan ditentukan sampai kondisi beton terlihat padat.
- (3) Setelah bekisting terisi penuh, tut up permukaan beton segar dengan film. Film yang digunakan dapat berupa bahan plastik termoset yang tahan panas  $100^{\circ}$  -  $120^{\circ}$  C. Hal ini bertujuan untuk menjaga terlepasnya air melalui proses penguapan. Penguapan air yang berlebihan akan mengganggu proses polimerisasi serta menyebabkan *thermal shrinkage*.

### 3.4.4. Proses Pengerasan (*Hardening*)

Berbeda dengan material semen yang menghasilkan panas hidrasi tinggi, material geopolimer membutuhkan energi aktivasi tambahan untuk mempercepat proses polimerisasi. Hal ini disebabkan karena panas yang dihasilkan kurang tinggi. Agar proses perkerasan berlangsung cepat, benda uji yang telah dicetak dimasukkan ke dalam oven dengan suhu  $\pm 70^{\circ}$  C selama  $\pm 24$  jam sampai

mengeras, dimana beton yang telah mengeras diindikasikan dengan kondisi pada saat pelepasan bekisting beton tidak mengalami keruntuhan.

#### **3.4.5. Perawatan (*Curing*)**

Proses perawatan beton geopolimer berbeda dengan beton semen, yaitu setelah pembukaan bekisting, sampel uji dibiarkan pada suhu kamar.

### **3.5. PENGUJIAN BENDA UJI**

Pengujian yang dilakukan adalah pengujian lendutan dan regangan pada balok, untuk menganalisa kekuatan struktural dan hubungan *stress – strain* dari material beton geopolimer jika dibandingkan dengan material beton konvensional.

Sebelum pengujian balok struktural, terlebih dahulu akan dilakukan pengujian kuat tekan dan kuat tarik terhadap sampel material.

#### **3.5.1. Pengujian Sampel Tekan**

Tes ini didasarkan pada ASTM Designation: C 39 – 94 tahun 1996 (*Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens*). Seperti telah dibahas di atas, pada pengujian kuat tekan digunakan sampel kubus, oleh karena itu agar mengikuti standar pengujian ASTM akan dilakukan pengkonversian benda uji kubus ke dalam silinder. Hasil yang diperoleh dalam pengujian ini adalah kuat tekan optimal dari material beton geopolimer.

#### **3.5.2. Pengujian Sampel Tarik**

Tes ini menggunakan cetakan angka delapan, kemudian cetakan ditarik dengan mesin *direct tension*. Nilai kuat tarik diperoleh hingga sampel beton angka delapan putus.

### **3.6. HUBUNGAN MOMEN LENTUR DAN KURVATUR**

Pengertian tentang deformasi pada balok diawali dengan hubungan antara momen lentur dan kurvatur. Terdapat hubungan differensial dan integral antara kurvatur dengan deformasi yang berupa rotasi dan lendutan.

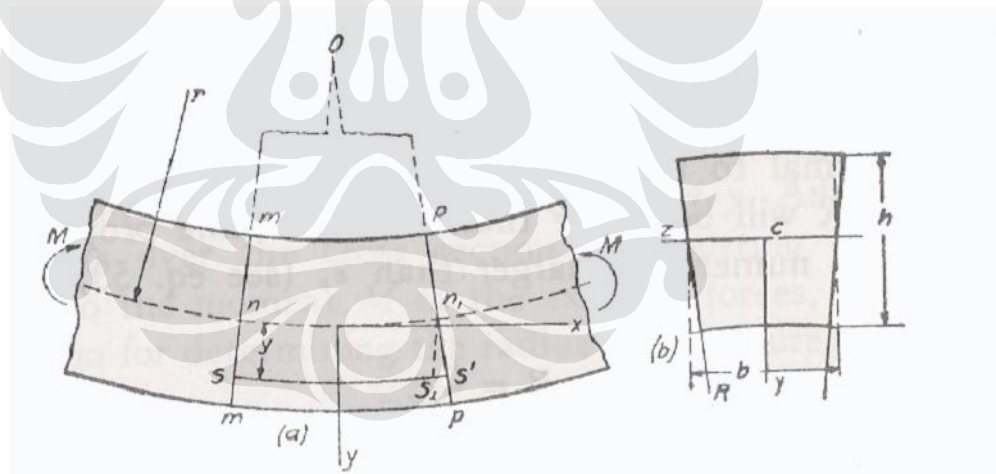


Kurvatur pada balok disebabkan oleh momen lentur. Kurvatur akan menimbulkan deformasi sepanjang bentang balok. Gaya geser juga menimbulkan deformasi pada balok, tetapi kecuali untuk balok yang sangat pendek dan tebal, deformasi yang disebabkan oleh geser dapat diabaikan karena sangat kecil dibandingkan dengan deformasi yang disebabkan oleh momen lentur

Balok sangat flexibel, sehingga deformasinya kadang-kadang merupakan faktor kontrol pada perencanaan struktur. Sebagai contoh, plafon dapat retak jika balok tumpuannya sangat fleksibel, walaupun balok tersebut memenuhi syarat tegangan. Pelat atap yang bertumpu pada balok yang sangat fleksibel dapat mengalami deformasi yang sangat berlebihan, sehingga saat hujan dapat menyebabkan terjadinya genangan. Kasus-kasus tersebut menggambarkan perlunya informasi mengenai deformasi balok, khususnya lendutan yang terjadi.

### 3.6.1. Deformasi Elastis yang Disebabkan oleh Momen Lentur

Akibat momen lentur, elemen pendek (*panjang*  $\Delta x$ ) dari sebuah balok lurus berdeformasi menjadi bentuk circular, ditunjukkan pada gambar 3.2



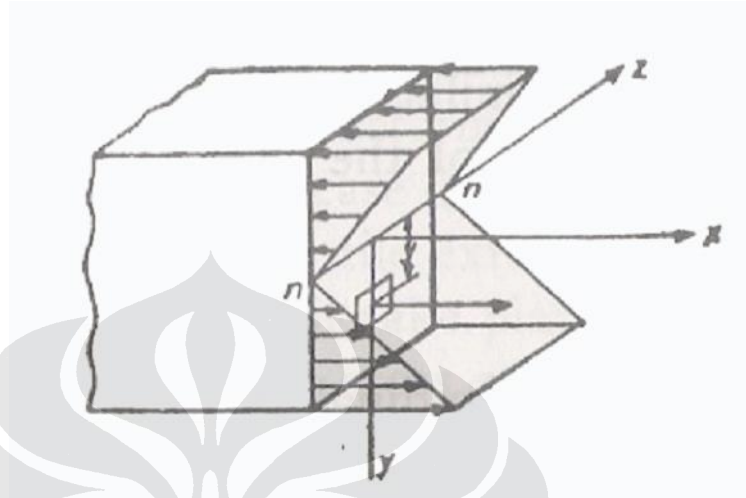
**Gambar 3.2** Elemen balok berdeformasi menjadi bentuk circular akibat momen lentur

Besarnya tegangan akibat regangan pada fiber longitudinal berdasarkan Hukum Hooke adalah :

$$\sigma_x = \frac{E y}{r} \dots \dots \dots (3.1)$$

Dimana :  $\sigma_x$  = Tegangan beton

- E = Modulus Young
- y = Jarak dari serat terluar ke sumbu yang ditinjau
- r = Radius kurvatur



**Gambar 3.3** Gaya tarik-tekan yang berkerja pada balok

Distribusi tegangan di atas ditunjukkan pada gambar 3.3. Tegangan pada setiap serat proporsional terhadap jaraknya terhadap sumbu netral *nn*. Anggap *dA* sebagai elemen area perpotongan pada sejarak *y* dari sumbu netral. Gaya yang bekerja pada elemen area adalah hasil dari tegangan (persamaan 3.1) dan area *dA*,  $(E y / r) dA$ . Dikarenakan fakta bahwa semua gaya didistribusikan melalui perpotongan menggambarkan suatu sistem equivalen, resultan dari gaya-gaya ini pada arah *x* harus sama dengan nol dan kita menemukan

$$\int \frac{E y}{r} dA = \frac{E}{r} \int y dA = 0$$

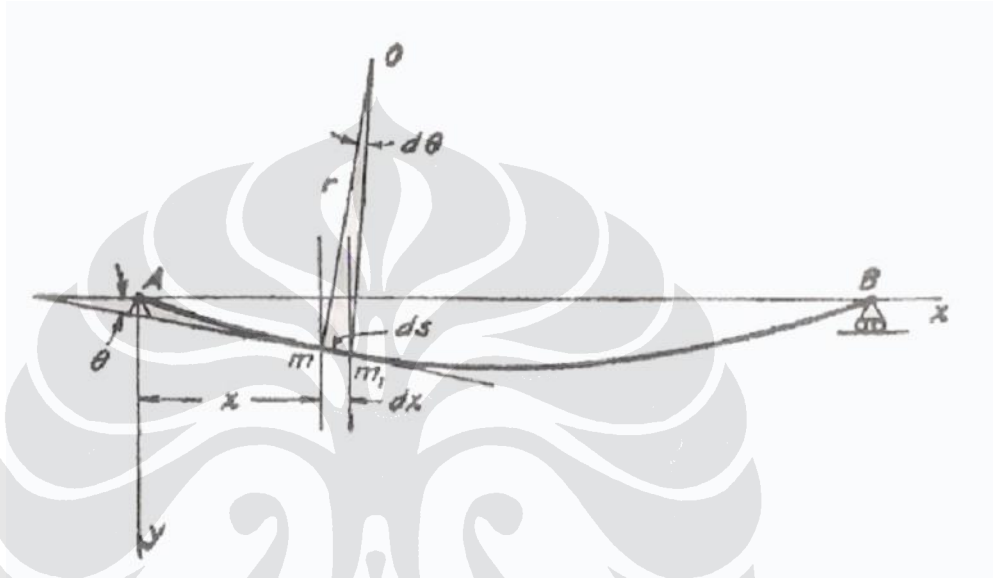
Momen akibat gaya bekerja pada elemen *dA*, terhadap sumbu netral adalah  $(E y / r) \cdot dA \cdot y$ . Menambahkan semua momen yang disalurkan pada perpotongan dan meletakkan resultannya sama dengan momen *M* akibat gaya luar, persamaan tersebut dapat digunakan untuk mencari radius kurvatur *r*

$$\int \frac{E}{r} y^2 dA = \frac{E I_z}{r} = M \quad \text{atau} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{E I_z} \dots\dots\dots (3.2)$$

Dengan membandingkan persamaan (3.1) dengan (3.2) dan menghilangkan nilai *r*, maka akan didapatkan persamaan tegangan yang lain

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} \dots\dots\dots(3.3)$$

Sesuai teori balok Timoshenko, di dalam mendesain suatu balok, perhatian biasanya tidak hanya ditunjukkan kepada tegangan-tegangan yang timbul akibat aksi beban, tetapi juga kepada defleksi yang ditimbulkan oleh beban ini.



**Gambar 3.4.** Rotasi balok akibat pembebanan

Misalkan kurva AmB pada gambar 3.4 mewakili bentuk sumbu batang setelah melendut. Lendutan terjadi pada bidang simetri oleh karena gaya-gaya lintang yang bekerja pada bidang tersebut. Kurva ini dinamakan kurva defleksi (*deflection curve*). Untuk mendapatkan persamaan differensial kuva ini, kita tarik sumbu-sumbu koordinat seperti pada gambar dan asumsikan bahwa kurvatur dari defleksi pada setiap titik bergantung hanya pada besarnya momen M di titik tersebut. Pada kasus seperti ini, hubungan antara kurvatur dan bending momen adalah :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z} \dots\dots\dots(a)$$

Untuk mendapatkan suatu persamaan yang menyatakan hubungan antara lengkungan dan bentuk kurva, kita perhatikan titik \$m\$ dan \$m\_1\$ yang terletak pada kurva defleksi dan dipisahkan dengan jarak \$ds\$. Jika sudut yang dibentuk oleh

sumbu  $x$  dan garis singgung di titik  $m$  adalah  $\theta$ , maka sudut antara normal-normal terhadap kurva di titik  $m$  dan  $m_1$  adalah  $d\theta$ . Titik perpotongan  $O$  dari normal-normal ini merupakan pusat kurvatur dan menentukan panjang  $r$  dari jari-jari kurvatur. Maka :

$$ds = r d\theta \quad \text{dan} \quad \frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \dots\dots\dots(b)$$

Garis-garis tanda mutlak menandakan bahwa kita hanya memperhitungkan harga numerik kurvatur. Memperhatikan tanda, maka momen lentur kita anggap positif dalam persamaan (a). Kurvatur positif apabila pusat kurvatur berada di atas kurva seperti pada gambar, namun bila dilihat bahwa pada lengkungan seperti ini sudut  $\theta$  menjadi semakin kecil seiring dengan perpindahan titik  $m$  sepanjang kurva dari A ke B. Dengan demikian suatu pertambahan  $ds$  yang positif berhubungan dengan suatu  $d\theta$  yang negatif. Jadi untuk mendapatkan tanda yang tepat, persamaan (b) sebaiknya dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{1}{r} = - \frac{d\theta}{ds} \dots\dots\dots(c)$$

Pada prakteknya, defleksi batang yang diijinkan biasanya kecil sekali dan kurva defleksi sangat datar. Dalam keadaan-keadaan seperti ini kita dapat membuat asumsi yang cukup akurat bahwa :

$$ds \approx dx \quad \text{dan} \quad \theta \approx \tan \theta = dy / dx \dots\dots\dots(d)$$

Dengan mensubstitusi harga-harga  $ds$  dan  $\theta$  dalam persamaan (c), kita dapatkan :

$$\frac{1}{r} = - \frac{d^2 y}{dx^2} \dots\dots\dots(e)$$

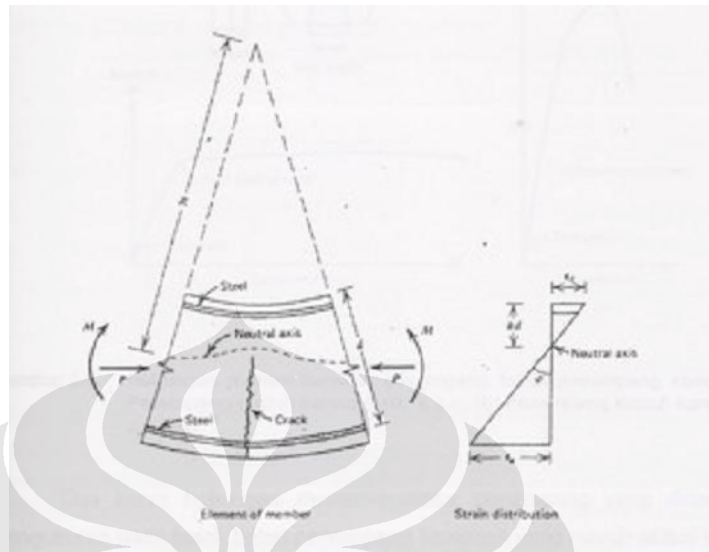
Maka persamaan (a) menjadi :

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \dots\dots\dots (3.4)$$

### 3.6.2. Kurvatur Pada Balok

Pada gambar 3.5 diperlihatkan elemen penampang balok dengan momen ujung dan gaya aksial yang sama besar. Jari-jari kurvatur  $r$  diukur sampai dengan sumbu netral. Jari-jari kurvatur, jarak sumbu netral  $kd$ , regangan beton pada serat

tekan terluar  $\epsilon_c$ , dan regangan tulangan baja tarik  $\epsilon_s$  akan bervariasi sepanjang bentang karena saat retak, beton sedikit ikut menahan tarik.



**Gambar 3.5** Deformasi balok akibat lentur

Dengan memperhatikan elemen kecil (panjang  $dx$ ) dan menggunakan notasi dari gambar 3.5, rotasi antara ujung-ujung elemen dirumuskan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{\epsilon_c dx}{kd} = \frac{\epsilon_s dx}{d(1-k)}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d(1-k)}$$

$\frac{1}{\rho}$  adalah kurvatur pada elemen tersebut (rotasi per unit panjang balok), diberi

simbol  $\phi$ . Maka :

$$\phi = \frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d(1-k)} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d} \dots\dots\dots(3.5)$$

Hubungan antara momen lentur  $M$  dan kurvatur  $\phi$  dinyatakan dengan persamaan berikut :

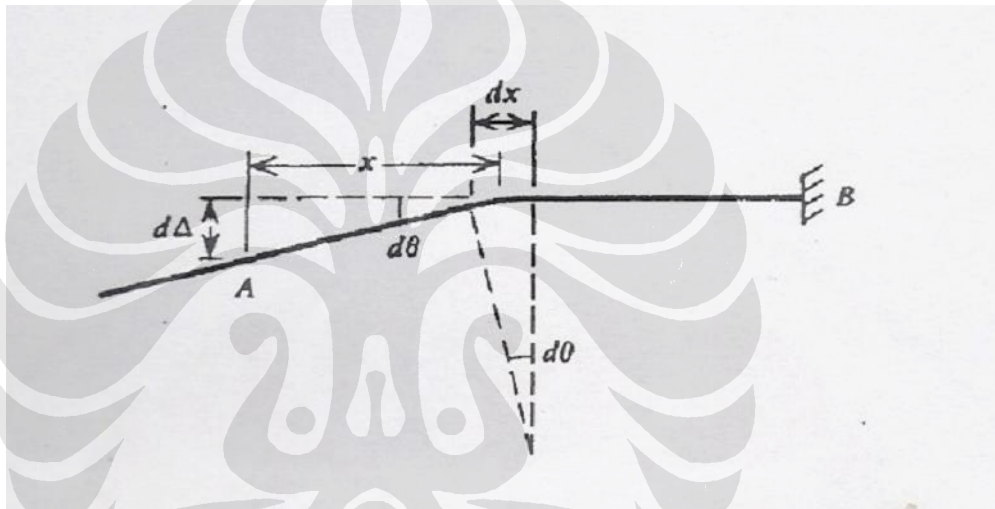
$$EI = M\rho = \frac{M}{\phi} \dots\dots\dots(3.6)$$

### 3.6.3. Perhitungan Deformasi Balok dari Kurvatur

Rotasi dan lendutan balok dapat dihitung dengan mengintegalkan kurvatur pada sepanjang balok. Kurvatur didefinisikan sebagai rotasi per unit panjang balok. Maka rotasi antara dua titik A dan B pada balok dirumuskan sebagai berikut :

$$\theta_{AB} = \int_A^B \phi \, dx \dots\dots\dots(3.7)$$

Dimana  $dx$  adalah elemen dari panjang balok.



**Gambar 3.6** Lendutan yang disebabkan deformasi lentur elemen

Pada gambar 3.6 diperlihatkan kantilever dengan deformasi yang disebabkan oleh rotasi  $d\theta$  pada elemen dengan panjang  $dx$ . Rotasi  $d\theta$  sama dengan  $f \, dx$ , dimana  $f$  adalah kurvatur elemen tersebut. Lendutan transversal  $d\Delta$  di titik A adalah  $x \, d\theta$  atau  $x f \, dx$ . Karena itu lendutan transversal pada titik A yang disebabkan oleh kurvatur sepanjang balok antara titik A dan titik B ini adalah sebagai berikut :

$$\Delta_{AB} = \int_A^B x \phi \, dx \dots\dots\dots(3.8)$$

Dimana  $x$  adalah jarak elemen  $dx$  dari A.

Persamaan ini dapat digunakan untuk menghitung rotasi dan lendutan balok jika diketahui hubungan momen-kurvatur dan distribusi momen lentur sepanjang balok.

### 3.7. METODE INTEGRAL

Formula Newton-Cotes adalah bentuk integrasi numerik yang paling umum. Formula ini didasarkan pada strategi penempatan fungsi yang rumit dengan suatu pendekatan yang mudah untuk diingrasi

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_n(x) dx$$

Dimana  $f_n(x)$  adalah polinomial dari bentuk

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \dots\dots\dots(3.9)$$

#### 3.7.1. Aturan Trapesium Tunggal

Aturan Trapesium adalah formula integrasi tertutup pertama Newton-Cotes. Aturan ini digunakan untuk kasus dimana polinomial pada persamaan 3.9 adalah orde pertama

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_1(x) dx$$

Dengan persamaan garis lurus adalah

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Maka luas area dibawah garis lurus ini adalah hasil integral dari  $f(x)$  antara batas  $a$  dan  $b$

$$I \approx \int_a^b \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

Hasil dari integrasi tersebut adalah

$$I \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \dots\dots\dots(3.10)$$

### 3.7.2. Aturan Trapesium Majemuk

Salah satu cara untuk meningkatkan akurasi dari aturan trapesium adalah dengan membagi interval integral menjadi beberapa segmen dan menerapkan metode integral tunggal yang sama pada tiap-tiap segmen.

Bila terdapat  $n$  segmen maka,

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

Jika  $a$  dan  $b$  dinyatakan dengan  $x_0$  dan  $x_n$ , maka integral total dapat dinyatakan dengan

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

Substitusikan aturan trapesium pada setiap pembagian integral maka,

$$I \approx h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \dots \dots \dots (3.11)$$

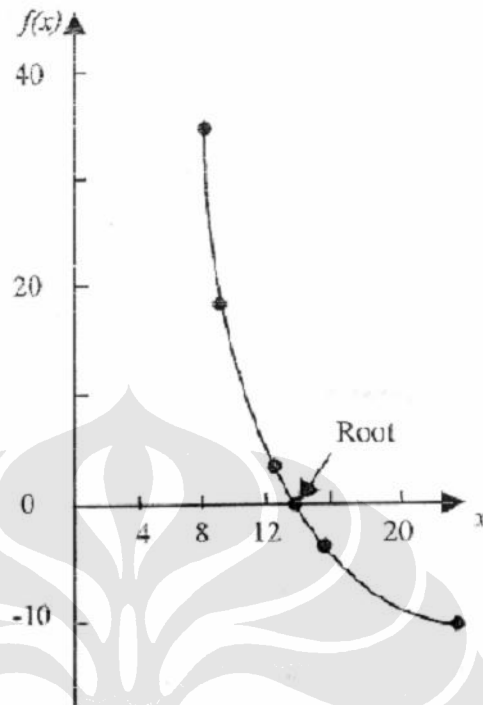
### 3.8. METODE BAGI DUA (*BISECTION METHOD*)

Dengan menerapkan teknik grafik dalam menentukan akar persamaan, dapat dilihat pada gambar 3.7 bahwa  $f(x)$  berubah tanda pada pihak yang berlawanan dari akar. Secara umum, jika  $f(x)$  bernilai nyata (*real*) dan menerus (*continuous*) dalam selang dari  $x_l$  hingga  $x_u$  serta  $f(x_l)$  dan  $f(x_u)$  berlawanan tanda, sehingga

$$f(x_l).f(x_u) < 0 \dots \dots \dots (3.12)$$

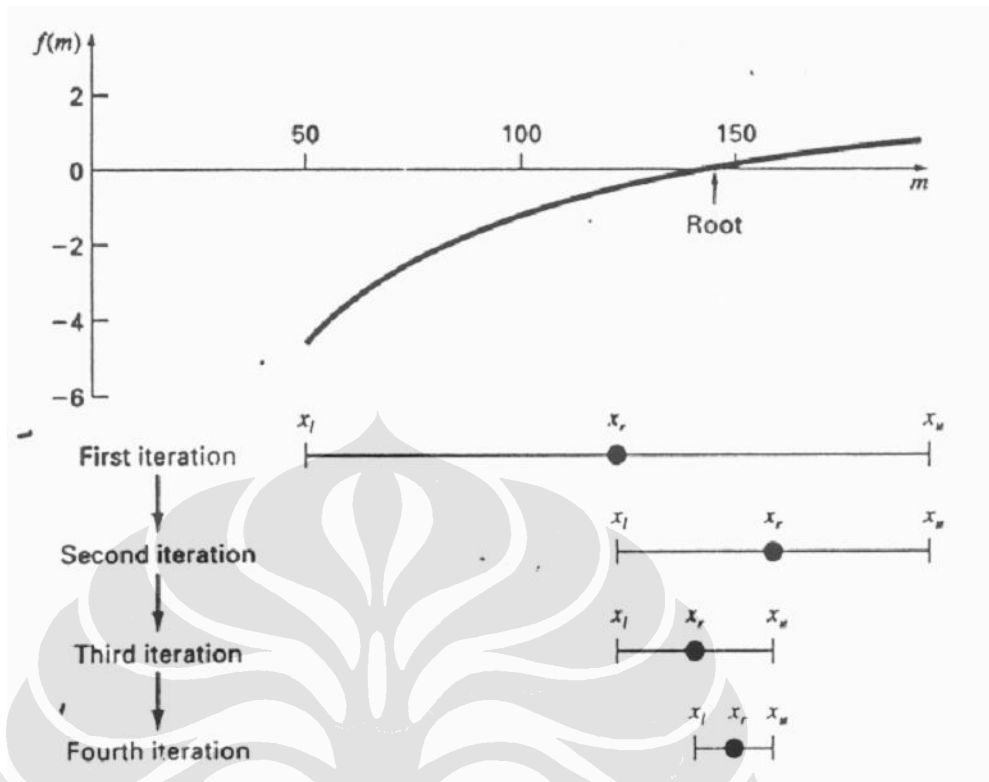
Maka terdapat paling sedikit satu akar nyata antara  $x_l$  dan  $x_u$ .





**Gambar 3.7.** Pendekatan grafis dalam menentukan akar persamaan.

Metode bagi-dua (*bisection method*), yang dinamakan pemenggalan biner (*binary chopping*), pamaruhan selang (*interval halving*), atau Metode Bolzano (*Bolzano's Method*), merupakan salah satu jenis *incremental search method* dimana selang selalu dibagi dua. Jika suatu fungsi berubah tanda pada suatu selang, maka nilai fungsi dihitung pada titik tengah. Kemudian lokasi akar ditentukan terletak pada titik tengah selang bagian tempat terjadinya perubahan tanda. Proses tersebut diulang untuk memperoleh taksiran yang lebih halus. Pelukisan grafis metode ini disajikan dalam gambar 3.8.



**Gambar 3.8.** Penggambaran grafis metode bagi-dua

Algoritma untuk metode bagi-dua ini adalah sebagai berikut :

Langkah pertama : Pilih  $x_l$  bawah dan  $x_u$  puncak taksiran untuk akar, sehingga perubahan fungsi mencakup seluruh interval. Hal ini dapat diperiksa dengan memastikan  $f(x_l).f(x_u) < 0$ .

Langkah kedua : Taksiran akar  $x_r$  ditentukan oleh

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Langkah ketiga : Buat evaluasi berikut untuk memastikan pada bagian interval mana akar berada :

- a. Jika  $f(x_l).f(x_r) < 0$ , akar berada pada bagian interval bawah, maka  $x_u = x_r$ , dan kembali pada langkah 2.
- b. Jika  $f(x_l).f(x_r) > 0$ , akar berada pada bagian interval atas, maka  $x_l = x_r$ , dan kembali pada langkah 2.
- c. Jika  $f(x_l).f(x_r) = 0$ , akar sama dengan  $x_r$ , maka komputasi dihentikan.