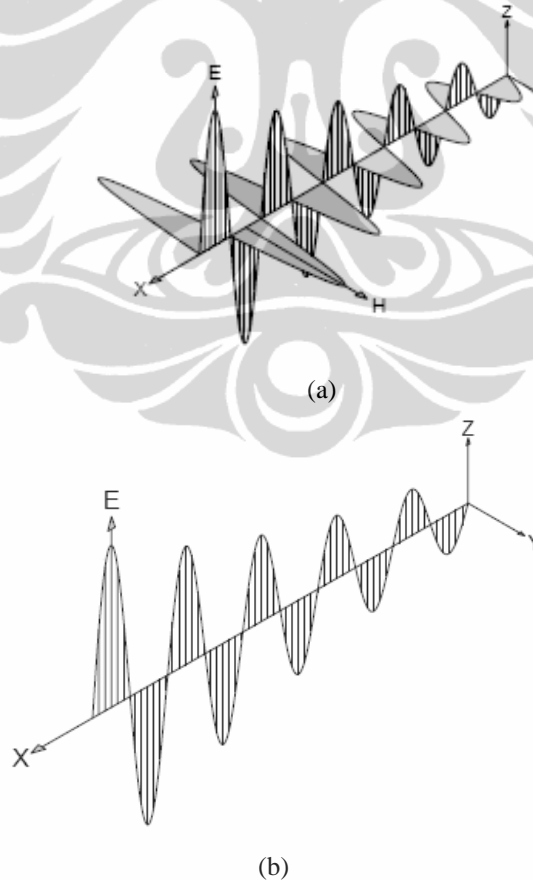


BAB 2

TEORI GELOMBANG, INTERFERENSI DAN INTERFEROMETER SAGNAC

2.1 Optik sebagai gelombang elektromagnetik

Berkas sinar monokromatik terkolimasi dengan polarisasi linier seperti terlihat pada Gambar 2.1. Pada gambar tersebut komponen gelombang elektrik digambarkan sebagai E_z di mana E_z berpropagasi searah sumbu x [3]. Seiring dengan E_z , akan terjadi H_z komponen gelombang elektromagnetik yang memiliki polarisasi tegak-lurus terhadap E_z seperti terlihat pada Gambar 2.1 (a). Komponen optik pada eksperimen ini hanya gelombang elektrik polarisasi vertikal saja [3] seperti terlihat pada Gambar 2.1 (b).



Gambar 2.1 Cahaya sebagai radiasi gelombang elektromagnetik dengan polarisasi E_x saja [3].

Persamaan gelombang umum dinyatakan sebagai

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\Psi(r, t) = C_i e^{-(j\omega t - kr)} \quad (2.1.2)$$

di mana

C : kecepatan cahaya pada medium

$$C = \frac{C_0}{n}$$

di mana

n : indeks refraksi

Gerak gelombang berdiri yang terjadi di layar adalah akibat adanya 2 gelombang yang berpropagasi berlawanan arah pada *ring resonator* sebagai gelombang harmonik dengan frekuensi yang sama tetapi berbeda lintasan dan diperlihatkan oleh persamaan (2.1.3).

$$\psi(r, t) = C_L \Psi_L(r - vt) + C_R \Psi(r + vt) \quad (2.1.3)$$

di mana

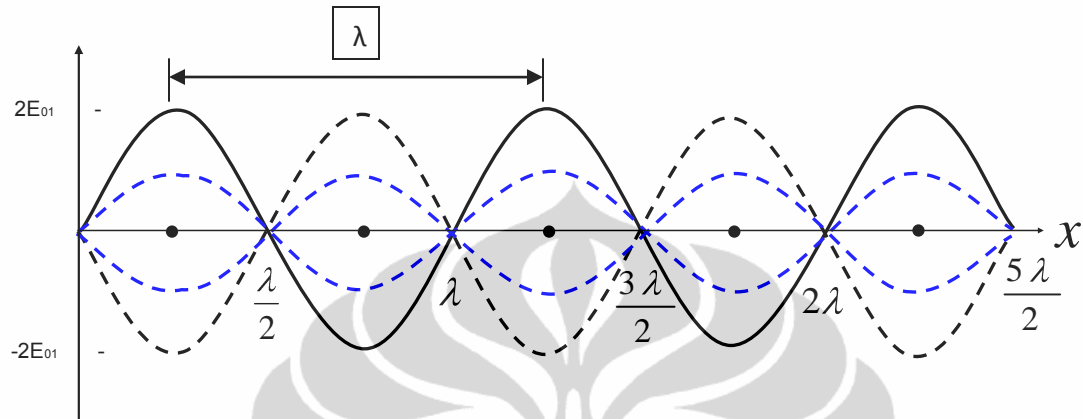
x : jarak pada sumbu x

v : frekuensi

t : waktu

C_1, C_2 : di *set* berharga sama untuk mendapatkan pola interferensi frinji yang ideal

Persamaan (2.1.3) diperlihatkan oleh Gambar 2.2 di bawah ini.



Gambar 2.2 Gelombang berdiri pada saat yang berbeda [4].

2.2 Cahaya gelombang monokromatik pada *ring resonator*

Pemisah berkas menghasilkan 2 berkas gelombang cahaya dengan intensitas seimbang yang saling berpropagasi pada arah gerak yang saling berlawanan di mana propagasi berkas cahaya monokromatik bergerak sejajar di lengan-lengan cermin datar *ring resonator* sehingga terjadi interferensi longitudinal. Analisis data *image* dan *video* pola interferensi frinji pada *setup* Interferometer *Sagnac* pasif konfigurasi *free space gyro* mempunyai *ring resonator* berbentuk bujursangkar 12 cm x 12 cm dengan luas (A). Analisis data pada interferensi transversal di layar menggunakan algoritma *FFT* untuk menghitung *PSD* dan beda fasa absolut (ϕ).

2.3 Frekuensi *beat*

Superposisi dari 2 gelombang harmonik dengan frekuensi berbeda menghasilkan *beat frequency* di mana gelombang bergerak translasi dengan frekuensi (ω) yang berubah terhadap waktu (t). Fenomena ini menjelaskan terjadinya *beat frequency* pada *setup* Interferometer *Sagnac* pasif konfigurasi 3 cermin datar (*triangle*). *Envelope* pada *beat frequency* keadaan stasioner membentuk pola translasi

frinji pada setiap waktu (t). *Beat frequency* mempunyai harga yang berbeda-beda akibat gerak rotasi *platform* yang berubah setiap saat. Terjadi gerak translasi pola transversal frinji di layar. Kondisi resonansi gelombang monokromatik tergantung dari pada panjang gelombang (λ) dari sumber cahaya. Pada eksperimen ini sumber cahaya menggunakan *laser* gas He Ne dengan panjang gelombang (λ) = 632.8 nm. Persamaan gelombang harmonik secara umum adalah

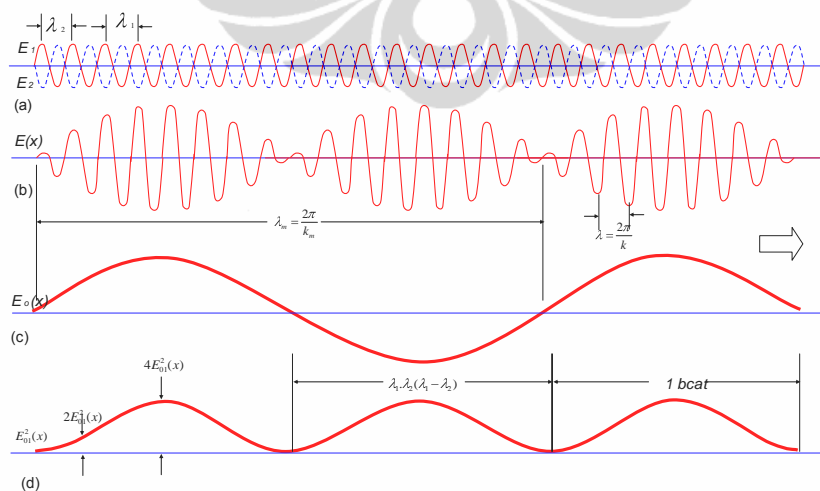
$$E_0^2(x, t) = 2E_{01}^2 [1 + \cos(2k_m x - 2\omega_m t)] \quad (2.3.1)$$

di mana

$$f_b = (\omega_1 - \omega_2) : \textit{beat frequency} \quad (2.3.2)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} : \textit{bilangan gelombang} \quad (2.3.3)$$

Pada Gambar 2.3 (a), (b), (c) dan (d) terlihat proses superposisi dari 2 gelombang monokromatik yang bergerak berlawanan arah menghasilkan gelombang berdiri.

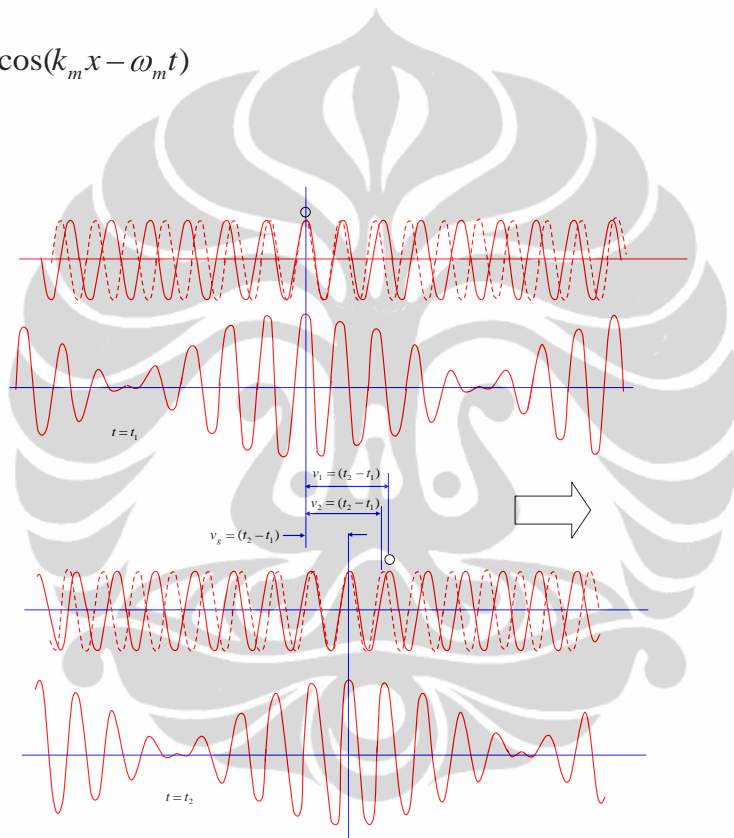


Gambar 2.3 Superposisi dari 2 gelombang harmonik dengan frekuensi berbeda [4].

2.4 Kecepatan Grup

Efek *Sagnac* yang terjadi pada *ring resonator* dari *setup* Interferometer *Sagnac* adalah bersifat dispersif. Efek *Sagnac* yang terjadi akibat adanya perbedaan frekuensi dari 2 gelombang cahaya monokromatik yang bergerak berlawanan arah [11]. Kecepatan grup seperti terlihat pada Gambar 2.4 sedangkan persamaan gelombang secara umum adalah

$$E_0(x, t) = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t) \quad (2.4.1)$$



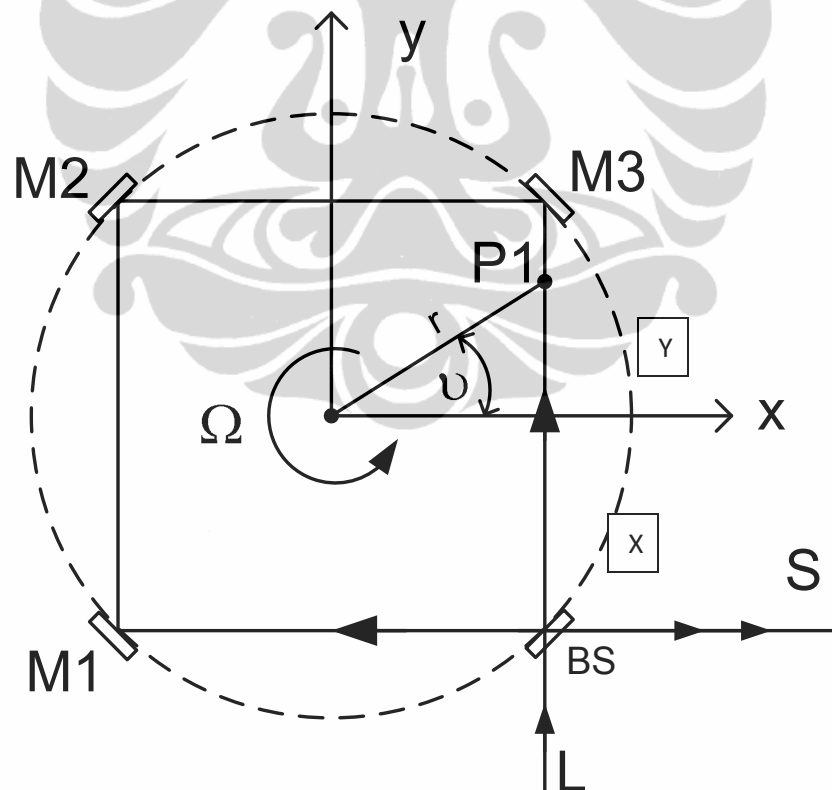
Gambar 2.4 Kecepatan grup dan fasa [4].

Perubahan pada *envelope* modulasi dikenal dengan istilah kecepatan grup (v_g) di mana modulasi tergantung dari perubahan *envelope* fase ($k_m x - \omega_m t$) dan $v_g = \frac{\omega_m}{k_m}$. Hubungan dispersi (*group velocity* = v_g) diperlihatkan oleh persamaan sebagai berikut

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.4.2)$$

2.5 Persamaan matematika berkas lintasan pada Interferometer Sagnac

Sistem Interferometer Sagnac pasif dengan konfigurasi *free space gyro* pada *ring resonator* lingkaran tertutup terdiri dari sumber *laser*, kolimator, cermin datar dan pemisah berkas. Interferensi frinji terjadi apabila sumber cahaya memiliki sifat koherensi. Kecepatan sudut rotasi *platform* (Ω) merupakan arah vektor sepanjang lintasan rotasi yang selalu tegak lurus terhadap garis radial lintasan atau tegak lurus vektor normal bidang rotasi. Lintasan berkas cahaya monokromatik *cw* dan *ccw* dengan indikasi posisi pemisah berkas (*BS*) di titik X dan Y sepanjang sumbu tegak lurus *platform* gerak rotasi diperlihatkan oleh Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Bentuk *ring resonator* pada Interferometer Sagnac pasif [11].

Waktu perpindahan (t) dalam satu putaran penuh pada *ring resonator* adalah tetap dan identik seperti dinyatakan oleh persamaan (2.5.1) di bawah ini.

$$t = \frac{2\pi R}{c} \quad (2.5.1)$$

di mana

c : kecepatan cahaya = 3×10^8 m/det

Apabila pemisah berkas bergerak menuju posisi Y maka gelombang cahaya monokromatik menempuh jarak lebih pendek pada arah putaran jarum jam (+) (*cw*) dan berpindah lebih dahulu dengan jarak tempuh lebih singkat dibandingkan dengan berkas cahaya yang bergerak berlawanan arah (-) (*ccw*). Persamaan matematika keadaan tersebut di atas diperlihatkan oleh

$$t_1 = \frac{2\pi R + \Delta L_+}{c} \quad (2.5.2)$$

$$t_2 = \frac{2\pi R - \Delta L_-}{c} \quad (2.5.3)$$

di mana

R : jari-jari lingkaran

t_1 : waktu tempuh berkas cahaya pada lintasan searah putaran jarum jam (+)

t_2 : waktu tempuh berkas cahaya pada lintasan berlawanan arah putaran jarum jam (-)

Beda lintasan $\Delta L_+ = R\Omega t_1$ dan $\Delta L_- = R\Omega t_2$ terjadi akibat perambatan gelombang dalam bentuk penambahan (+) dan pengurangan (-) dari lintasan gelombang cahaya monokromatik pada *ring resonator*. Aronowitz menginterpretasikan bahwa kecepatan cahaya gelombang monokromatik berpropagasi saling berlawanan arah dan selalu *invariant* tidak berubah terhadap waktu (t). Perbedaan waktu lintasan (Δt) berkas *laser* diperoleh melalui persamaan [6]

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 2\pi R \left[\frac{1}{c - \Omega_L R} - \frac{1}{c + \Omega_L R} \right] \quad (2.5.4)$$

Aproksmasi orde pertama menghasilkan

$$\Delta t = \frac{4\pi R^2 \Omega_L}{c^2} = \frac{4\Omega_L A}{c^2} \quad (2.5.5)$$

di mana

$$A = \pi R^2$$

Ω_L : kecepatan sudut pola interferensi frinji pada kurva *lock in*

Perbedaan lintasan cahaya optik sebesar $\Delta L = c \Delta t$ menghasilkan persamaan [6]

$$\Delta L = \frac{4\pi R^2 \Omega_L}{c} \quad (2.5.6)$$

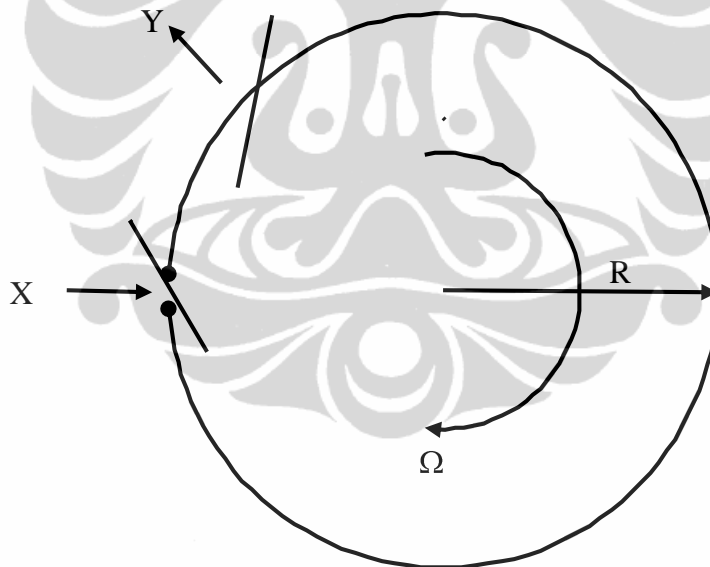
Persamaan (2.5.6) adalah perbedaan lintasan dari 2 gelombang monokromatik yang bergerak berlawanan arah putaran jarum jam (*counter clock wise = ccw*) dan searah putaran jarum jam (*clock wise = cw*) pada *ring resonator* Interferometer *Sagnac*

setiap kali putaran rotasi *platform*. Luas (A) sepanjang lintasan adalah πR^2 . Beda lintasan ΔL pada persamaan (2.5.6) ditulis menjadi

$$\Delta L = \frac{4A\Omega_L}{c} \quad (2.5.7)$$

2.5.1 Perbedaan fasa absolut (φ)

Sistem Interferometer *Sagnac* bergerak rotasi yang mengakibatkan perbedaan lintasan pada ke dua lengan cermin datar. Pemisah berkas ikut bergerak rotasi bersama *platform* di mana titik X dijadikan sebagai titik acuan pertama. Titik Y merupakan titik acuan ke dua sebagai kedudukan pemisah berkas berikutnya seperti terlihat pada Gambar 2.6 di bawah ini.



Gambar 2.6 Bentuk lintasan pemisah berkas pada Interferometer *Sagnac* pasif [6].

Persamaan beda fasa (φ) menjadi

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{8\pi\Omega A}{\lambda c} \quad (2.5.8)$$

di mana

A : luas *ring resonator*

2.5.2 Frekuensi Sagnac

Pergeseran frekuensi resonansi yang disebabkan oleh perubahan panjang lintasan dan keliling sebagai $\Delta v/v = \Delta S/S$ pada *ring resonator* adalah

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta S}{S} = \frac{2\overline{\Omega}A}{cS} \quad (2.5.9)$$

Maka persamaan *beat frequency* atau frekuensi *Sagnac* adalah

$$f_{beat} = f_{sagnac} = 2\Delta v = \frac{4\overline{\Omega}A}{\lambda S} = \frac{4\Omega_L A}{\lambda S} \quad (2.5.10)$$

2.5.3 Perubahan jumlah frinji saat *platform* bergerak rotasi

Menghitung perubahan jumlah pola interferensi frinji (ΔN) pada gelombang monokromatik dengan menggunakan harga perioda (Λ) = λ/c . Fraksi perubahan pola interferensi frinji (ΔN) = $\Delta t/\Lambda$. Apabila Ω dengan satuan putaran per menit adalah kecepatan sudut rotasi *platform* yang diukur oleh *tachometer* maka diperoleh persamaan fraksi perubahan pola interferensi frinji (ΔN) sebagai berikut [4]

$$\Delta N = \frac{4A\Omega}{c\lambda} \quad (2.5.11)$$

2.5.4 Perhitungan *Power Spectral Density* [20]

Gunakan transformasi *Fourier* pada hubungan $G(\tau)$ dan $S(f)$ sebagai

$$G(\tau) = I_0 g(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (2.5.12)$$

Sehingga diperoleh

$$I = 2 \int_0^{\infty} S(f) [1 + \cos(2\pi f\tau)] df \quad (2.5.13)$$

di mana

$S(f)$: *spectral density*

I : intensitas cahaya yang dibaca oleh Interferogram

G : *Power Spectral Density*

f : frekuensi fundamental

τ : waktu tunda

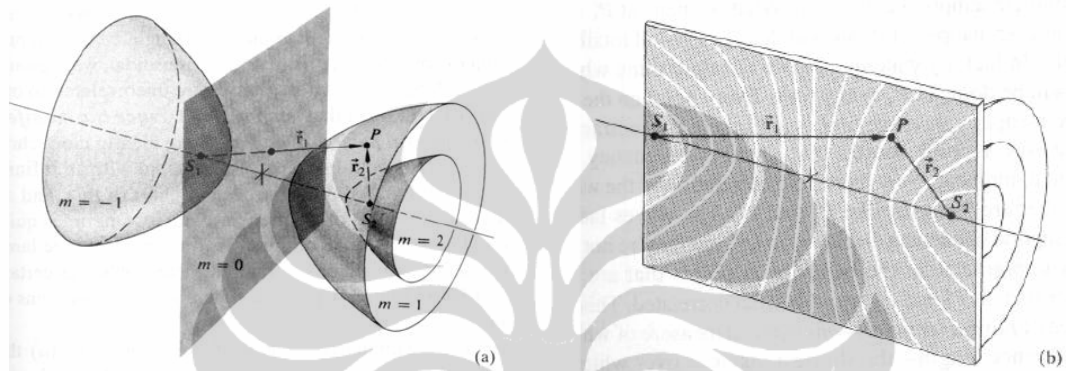
PSD dihitung untuk mengetahui *power* dari intensitas cahaya pola interferensi frinji versus frekuensi fundamental (f) yang terjadi di layar.

2.6 Interferensi

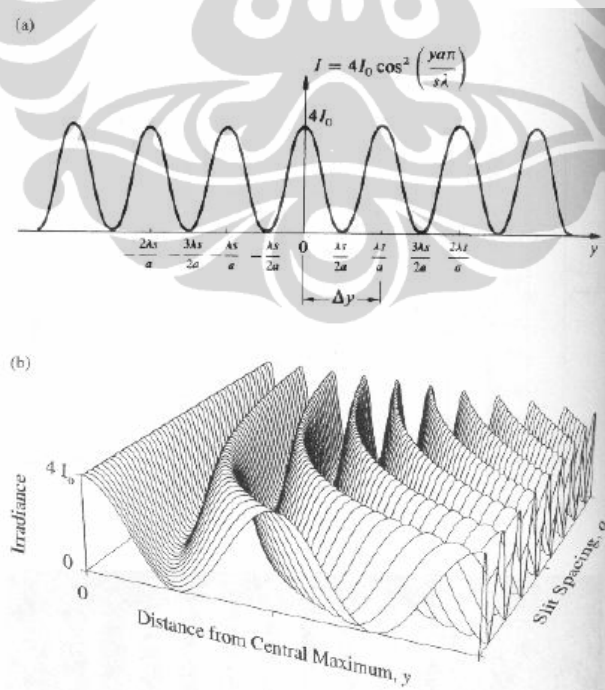
Pada saat interferensi terjadi fenomena yang disebut efek *Doppler* dan efek gelombang elektromagnetik dan menimbulkan *beat frequency* per kecepatan sudut rotasi *platform*. Berkas cahaya bergerak saling berlawanan arah tidak saling bertabrakan tetapi membentuk jalannya masing-masing pada *ring resonator*.

Perbedaan lintasan berkas cahaya gelombang berdiri yang terjadi pada *ring resonator* pada umumnya pendek sekitar 1 *nm*. Perbedaan lintasan sebesar $\lambda/4$ saja sudah menghasilkan interferensi [3]. Syarat terjadinya interferensi apabila frekuensi kedua gelombang tersebut sama dan ada wilayah terjadinya (*cross section*). Syarat kedua adanya prinsip superposisi dua gelombang cahaya monokromatik dengan frekuensi yang sama, *temporal coherence* dan mempunyai *coherence length* yang cukup panjang serta beda fasa absolut (φ_a) selalu konstan.

Pada Gambar 2.7 (a) dan Gambar 2.7 (b) terlihat terjadinya interferensi di mana dua muka gelombang saling bertemu dan menghasilkan interferensi transversal di layar. Gambar 2 Dimensi dan 3 Dimensi dari pola spasial interferensi transversal seperti pada Gambar 2.8 (a) dan Gambar 2.8 (b).



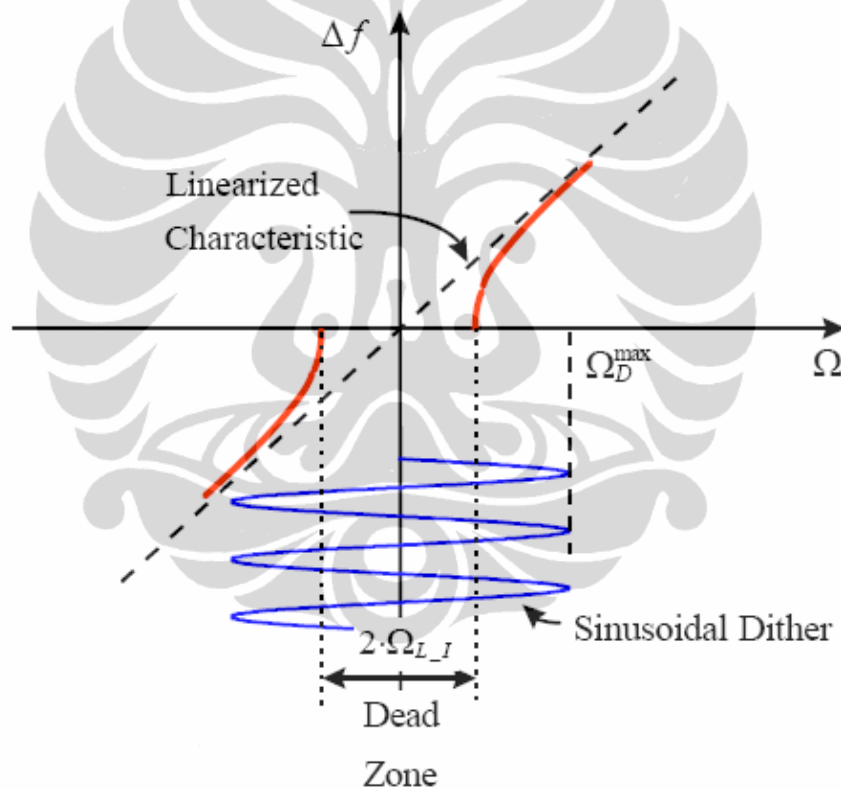
Gambar 2.7 Muka gelombang saat terjadinya interferensi [15].



Gambar 2.8 (a), (b) Pola spasial intensitas 2 D dan 3 D versus frekuensi fundamental (f) pola interferensi frinji [15].

2.7 Kurva *lock-in*

Kurva *lock in* merupakan karakteristik suatu sistem Interferometer *Sagnac* apabila *platform* bergerak rotasi yang menimbulkan gerak translasi pola frinji di layar. Kurva ini direpresentasikan oleh *beat frequency* versus kecepatan sudut pola interferensi frinji. *Beat frequency* terjadi akibat adanya 2 gelombang monokromatik yang bergerak berlawanan arah pada *ring resonator* sebagai efek *Doppler*. Gerak translasi pola interferensi frinji berbanding lurus dengan kecepatan sudut rotasi *platform* (Ω) [7]. Kurva *lock in* secara teoretikal diperlihatkan oleh Gambar 2.9.

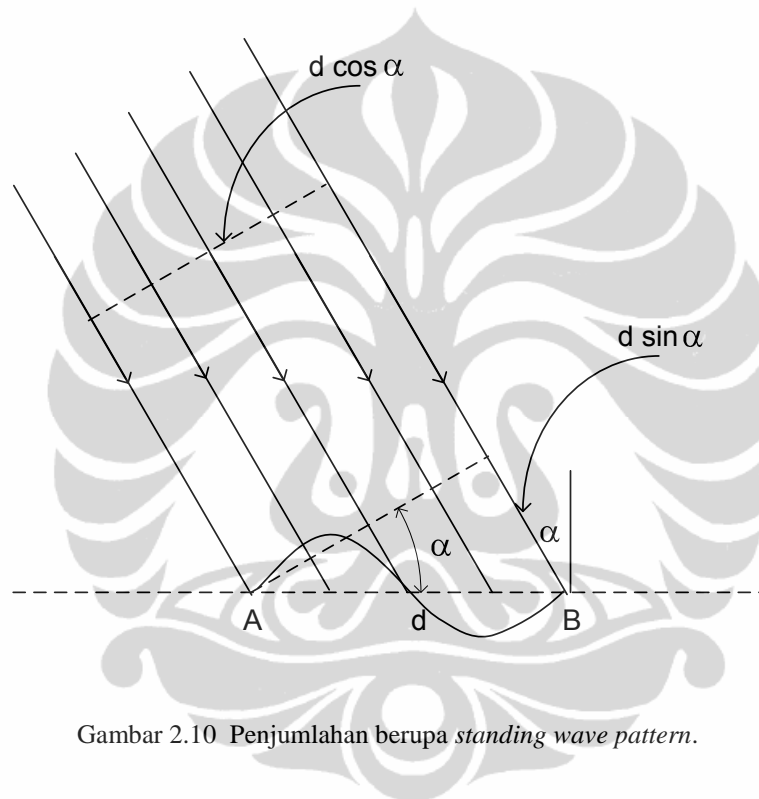


Gambar 2.9 Karakteristik kurva *lock-in* pada Interferometer *Sagnac* sumber *laser* gas He Ne [7].

Pada sumbu ordinat terdapat Δf atau *beat frequency* (f_b) dan pada sumbu absis terdapat kecepatan sudut pola interferensi frinji (Ω_L). Kurva *lock in* mempunyai harga $-\Omega_L$ sampai dengan $+\Omega_L$ disebut sebagai *dead zone*. Harga Ω_L diperoleh dari persamaan (4.2.1) pada Bab 4.

2.8 Pemodelan gelombang monokromatik pada interferensi transversal

Perhatikan Gambar 2.10 di mana terdapat 2 berkas cahaya monokromatik mendatangi bidang datar/ *screen*/ layar membentuk sudut α terhadap garis vertikal. Analisis geometri pada keadaan belum ada kecepatan sudut rotasi *platform* (Ω) sehingga pola frinji di layar tidak berubah (diam). Belum ada gerak translasi pola interferensi frinji di layar.



Gambar 2.10 Penjumlahan berupa *standing wave pattern*.

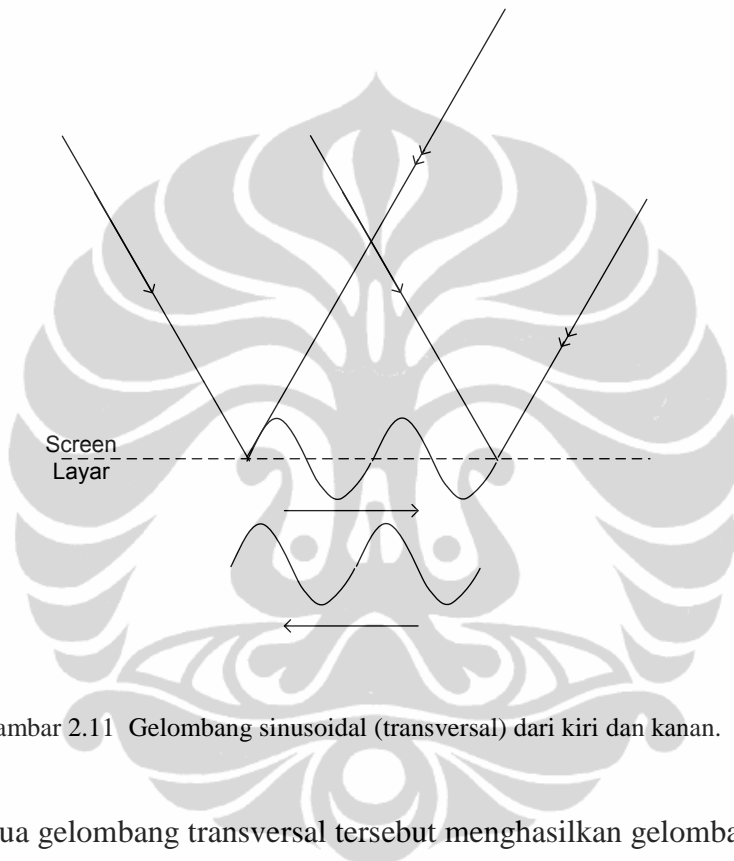
Selisih jarak optik $\underline{AB} = d \sin \alpha$

$$\text{Selisih fasa A dan B} = \frac{d \sin \alpha}{\lambda}$$

Masing-masing gelombang datang mempunyai bentuk gelombang sinusoidal yang berbeda fasa di mana gelombang datang bergerak translasi dari sebelah kiri dan kanan. Terjadi interferensi dalam bentuk gelombang berdiri di layar. Gelombang sinusoidal dari kiri ke kanan memiliki perioda sebesar $\Lambda_{lr} = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$. Begitu pula

gelombang sinusoidal dari kanan ke kiri memiliki perioda yang sama yaitu $\Lambda_{rl} = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$ di mana Λ adalah perioda.

Perhatikan Gambar 2.11 seperti di bawah ini.



Gambar 2.11 Gelombang sinusoidal (transversal) dari kiri dan kanan.

Interferensi kedua gelombang transversal tersebut menghasilkan gelombang berdiri di layar. Pemodelan persamaan matematika berdasarkan teori persamaan gelombang berdiri untuk kondisi *platform* diam (belum bergerak rotasi). Perhatikan persamaan awal dari gelombang monokromatik secara teoretikal pada persamaan (2.8.1).

Kasus pertama: *Platform* diam atau bergerak konstan.

Persamaan gelombang harmonik adalah

$$E^2(x, t) = [E^2_1 \sin(2\pi(\frac{c}{\Lambda_{lr}})t + kx) + E^2_2 \sin(2\pi(\frac{c}{\Lambda_{rl}})t - kx)]^2 \quad (2.8.1)$$

di mana

$$k = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

Sehingga

$$E^2(x,t) = E_1^2 \sin^2\left(2\pi \frac{c}{\Lambda_{lr}} t + kx\right) + E_2^2 \sin^2\left(2\pi \frac{c}{\Lambda_{rl}} t - kx\right) + 2E_1 E_2 \sin\left(2\pi \frac{c}{\Lambda_{lr}} t + kx\right) \sin\left(2\pi \frac{c}{\Lambda_{rl}} t - kx\right) \quad (2.8.2)$$

Atur sedemikian rupa sehingga : $E_1 = E_2 = E$; dan $\Lambda_{rl} = \Lambda_{lr} = \Lambda$

$$E^2(x,t) = E^2(rms) 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2kx \right) \quad (2.8.3)$$

Kasus kedua: Platform Laser gyro berputar ke arah kanan.

Ke arah kanan: $k - \Delta k$; ke arah kiri : $k + \Delta k$.

*) Superposisi medan longitudinal

$$E^2(x,t) = 2 \sin \omega t \cos \Delta k x \cos k x + 2 \cos \omega t \sin \Delta k x \cos k x$$

$$E^2(x,t) = 2 \cos k x (\sin(\omega t + \Delta k x)) \quad (2.8.4)$$

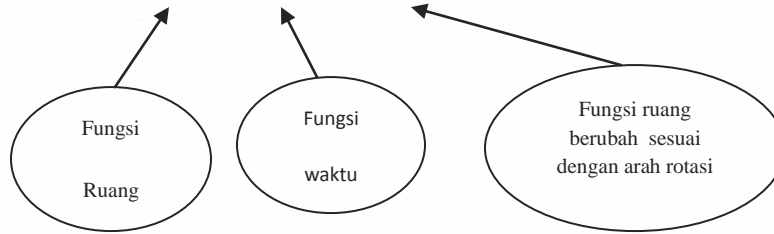
*) Superposisi Intensitas Longitudinal

$$E^2(x,t) = 4 \cos^2 k x (\sin^2 \omega t \cos^2 \Delta k x + 2 \sin \omega t \cos \omega t \sin \Delta k x \cos \Delta k x + \sin^2 \Delta k x \cos^2 \omega t) \quad (2.8.5)$$

Misalkan: $k \gg \Delta k$;
 $\lim_{\Delta k x \rightarrow 0} \sin \Delta k x \cong 0$

Aproksimasi

$$E^2(x,t) \cong 4 \cos^2 kx \sin^2 \omega t \cos^2 \Delta kx \quad (2.8.6)$$



$$E^2(x,t) = 2(1 + \cos 2(kx \pm \Delta kx)) \cdot \sin^2 \omega t \quad (2.8.7)$$

