

**IMPLEMENTASI METODE  
REP - IBP DALAM ESTIMASI ERROR PADA  
PELAT LENTUR DENGAN ELEMEN DKMQ**

**TESIS**

**Oleh**

**ALMUFID  
64 05 01 0243**



**TESIS INI DIAJUKAN UNTUK MELENGKAPI SEBAGIAN  
PERSYARATAN MENJADI MAGISTER TEKNIK**

**KEKHUSUSAN STRUKTUR  
PROGRAM STUDI TEKNIK SIPIL  
PROGRAM PASCASARJANA BIDANG ILMU TEKNIK  
UNIVERSITAS INDONESIA  
GANJIL 2007/2008**

# PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : ALMUFID  
NPM : 6405010243

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis dengan judul ;

## **IMPLEMENTASI METODE REP - IBP DALAM ESTIMASI ERROR PADA PELAT LENTUR DENGAN ELEMENT DKMQ**

Yang disusun untuk melengkapi persyaratan untuk memperoleh gelar Magister Teknik pada Program Pasca Sarjana Bidang Ilmu Teknik Universitas Indonesia, merupakan ide dan hasil karya bimbingan Prof. Dr. Ir. Irwan Katili , DEA dengan mengambil referensi yang diberikan oleh pembimbing dan sejauh yang saya ketahui bukan merupakan tiruan atau duplikasi dari seminar / tesis yang telah dipublikasikan dan atau pernah dipakai untuk mendapatkan gelar magister dilingkungan Universitas Indonesia maupun perguruan tinggi atau instansi manapun, kecuali pada bagian yang sumber informasinya ditentukan sebagaimana mestinya.

Semua hasil penelitian ini menjadi hak dan tanggung jawab pembimbing.

Depok, 08 Januari 2008

**( ALMUFID )**  
**6405010243**

# PENGESAHAN

Tesis dengan Judul :

## **IMPLEMENTASI METODE REP - IBP DALAM ESTIMASI ERROR PADA PELAT LENTUR DENGAN ELEMENT DKMQ**

dibuat untuk melengkapi sebagian persyaratan menjadi Magister pada Program Pascasarjana Bidang Ilmu Teknik Program Studi Kekhususan Struktur Universitas Indonesia. Tesis ini telah diujikan pada sidang ujian tesis pada tanggal 8 Januari 2008 dan dinyatakan memenuhi syarat/sah sebagai tesis pada Departemen Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Indonesia.

Depok, 8 Januari 2008

Dosen Pembimbing,

Prof. Dr. Ir. Irwan Katili, DEA

**FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS INDONESIA**  
**DEPARTEMEN TEKNIK SIPIL**

**ABSTRAK**

xvii + 142 halaman + lampiran

ALMUFID

6405010243

**IMPLEMENTASI METODE  
REP - NBP DALAM ESTIMASI ERROR PADA  
PELAT LENTUR DENGAN ELEMEN DKMQ**

Dalam tulisan ini akan dibahas penerapan metode pemulihan gaya dalam yaitu *REP (Recovery By Equilibrium In Patches)* yang diperkenalkan oleh Zienkiewicz-Zhu untuk problem pelat lentur dengan menggunakan elemen DKMQ (Discrete Kirchoff Mindlin Quadrilateral). Penulisan kali ini akan menggunakan metode *Interfaced Base Patch* sebagai cara untuk pembentukan patch. Metode ini digunakan untuk memperoleh solusi gaya dalam yang lebih baik dengan memanfaatkan konsep titik superkonvergen. Untuk elemen quadrilateral titik superkonvergen ini berimpit dengan titik integrasi Gauss. Metode *REP-Interfaced Based Patch* ini kemudian memanfaatkan metode Least Square Fit terhadap titik superkonvergen tersebut untuk memperoleh peningkatan akurasi solusi gaya dalam. Dalam tulisan ini akan disertai pula uji numerik di mana penulis menggunakan tiga metode pemulihan gaya dalam lainnya yaitu metode rata-rata langsung, metode proyeksi dan *REP- Interfaced Based Patch* sebagai perbandingan.

Penelitian akan dilanjutkan dengan menggunakan keempat metode pemulihan gaya dalam yang telah disebutkan di atas sebagai pembentuk estimator error Zienkiewicz-Zhu ( $Z^2$ ) untuk mengestimasi error solusi elemen hingga. Pada bagian ini dengan didukung hasil uji numerik kita akan mencoba membuktikan bahwa metode pemulihan gaya dalam REP- *Interfaced Based Patch*, akan selalu menunjukkan estimasi error yang asimtotik eksak pada contoh kasus yang memiliki solusi eksak maupun yang tidak. Dalam uji numerik tersebut proses modelisasi struktur dilakukan dengan penghalusan jaringan elemen (*mesh*) tipe-*h* secara seragam maupun adaptif.

Dalam penelitian ini penulis menggunakan program Finite Element Analysis Program (FEAP) v7.1 sebagai program utama untuk melakukan uji numerik. Dalam program tersebut telah disertai subrutin formulasi elemen DKMQ dan Error Estimator  $Z^2$  yang ditulis dalam bahasa FORTRAN yang penulis dapatkan dari hasil penelitian sebelumnya. Dalam hal ini penulis cukup menambahkan subrutin yang terkait dengan perhitungan metode REP.

**Kata Kunci : Pelat Lentur, Elemen DKMQ, *Recovery By Equilibrium in Patch*, *Interfaced Based Patch*, Error Estimator, penghalusan tipe-*h*, penghalusan seragam dan adaptif, FEAP.**

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena berkat cinta, rahmat, kebesaran, dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan Tesis yang berjudul **IMPLEMENTASI METODE REP - IBP DALAM ESTIMASI ERROR PADA PELAT LENTUR DENGAN ELEMENT DKMQ** dengan baik.

Penulis menyadari pula bahwa penulisan ini dapat terselesaikan berkat bantuan dari berbagai pihak, sehingga sudah selayaknyalah penulis mengucapkan terima kasih yang mendalam kepada Allah SWT dan ;

1. Bapak Prof. Dr. Ir. Irwan Katili. DEA sebagai pembimbing dan pengajar yang telah memberikan saran, pengetahuan, waktu dan perhatian, motivasi, serta kesabarannya selama penyusunan Tesis ini.
2. Keluarga tercinta Istri Ku Hesty Erviani Zulaecha, Anaku Maritza Sherene Aquila, Papa, Mama, Bapak Mertua, Ibu Mertua, Kakak, Adikku dan seluruh keluarga tercinta yang telah memberikan kasih sayang, dukungan moral, material, semangat, doa dan restunya sehingga Tesis ini selesai dengan baik.
3. Kepada teman-teman Pasca Sarjana Teknik Sipil angkatan '05-'07 yang sudah menjadi teman baik.
4. Kepada staf departemen, perpustakaan, laboran yang telah membantu penulis dalam masa perkuliahan di sipil.
5. Dan kepada pihak lain yang tidak sempat penulis sebutkan satu persatu, namun mempunyai andil yang berarti.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa Tesis ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu Penulis membuka diri untuk menerima berbagai kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan Tesis ini.

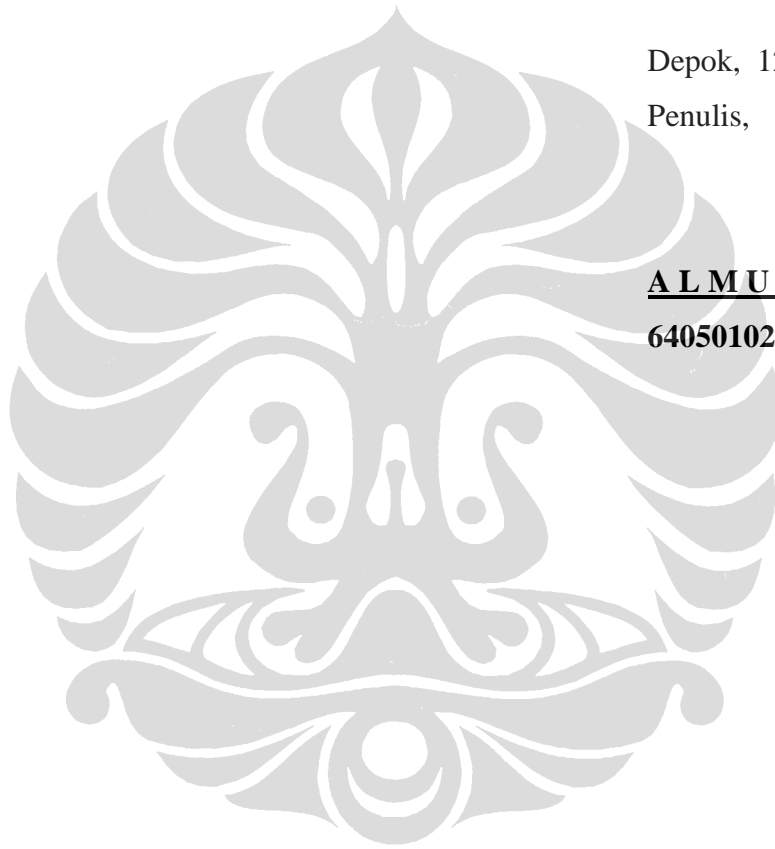
Akhirnya, atas kritik, saran, dan dorongan dari semua pihak, Penulis mengucapkan terima kasih.

Depok, 12 -12- 2007

Penulis,

**ALMUFID**

**6405010243**



## DAFTAR ISI

<b>PERNYATAAN KEASLIAN TESIS</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PERSETUJUAN</b>	<b>ii</b>
<b>ABSTRAK</b>	<b>iii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b>	<b>v</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR NOTASI</b>	<b>x</b>
<b>Daftar Pustaka</b>	<b>xv</b>
<b>Lampiran</b>	
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1. 1 Umum	1
1. 1. 1 Metode Elemen Hingga	1
1. 1. 2 Estimasi Kesalahan dan Penghalusan Jaringan Elemen	2
1. 2 Latar Belakang Historis	4
1. 3 Error Estimator Saat Ini	6
1. 4 Teknik Pemulihan Solusi	7
1. 5 Tujuan Dan Metodologi Penulisan	8
1. 6 Pembatasan Masalah	9
<b>BAB II PEMULIHAN SOLUSI DENGAN METODE RECOVERY BY EQUILIBRIUM IN PATCHES DAN ERROR ESTIMATOR <math>Z^2</math></b>	
2. 1 Umum	10
2. 1. 1 Kesalahan Solusi Metode Elemen Hingga	10
2. 1. 2 Estimasi Error <i>A Posteriori</i>	11
2. 1. 3 Penghalusan Jaringan	12



2.2	Estimasi Error Zienkiewicz-Zhu	17
2.2.1	Norma Error dan Tingkat Konvergensi	17
2.2.2	Teknik Pemulihan Solusi	20
2.2.3	<i>Superconvergent Patch Recovery</i> – SPR	24
2.2.4	Recovery by Equilibrium in Patched (REP)	32
2.2.5	Gaya Dalam pada Nodal Struktur	35
2.2.6	Estimasi Error dengan Pemulihan Solusi Gaya Dalam	36
2.3	Indikator Error Dan Penghalusan	37
<b>BAB III</b>	<b>ASPEK PROGRAMASI DENGAN FEAP</b>	<b>41</b>
3.1	Umum	41
3.2	Modifikasi Subrutin FEAP	41
3.2.1	Daftar Subrutin Terkait Dengan Error Estimator Dan REP	42
3.2.2	Penjelasan Kode Fortran Subrutin REP	45
3.2.2.1	Mengalokasikan Memori Array-array REP	46
3.2.2.2	Data Base Patch	51
3.2.2.3	Komputasi Gaya dengan Metode REP	54
3.2.3	Contoh Data Input Metode REP dan Error Estimasi	64
3.2.4	Contoh Data Output	66
<b>BAB IV</b>	<b>UJI NUMERIK</b>	<b>73</b>
4.1	Umum	73
4.1.1	Problem Error REP	75
4.2	Uji Konvergensi Gaya Dalam Dan Estimasi Error	77
4.2.1	Pelat Khusus	
4.2.1.1	Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit dengan Beban Merata	77
4.2.1.2	Pelat Bujursangkar Perletakan Sederhana dengan Beban merata	82
4.2.1.3	Pelat Bujursangkar Perletakan Sederhana	85

dengan Beban Terpusat

4.2.1.4 Pelat Melingkar Perletakan Sederhana dengan Beban Merata	87
4.2.1.5 Distribusi Gaya Geser dan Momen Lentur Pada Pelat Lentur	100
4.2.2 Pelat Umum	108
4.2.2.1 Pelat Busur Berlubang $180^\circ$	108
4.2.2.2 Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat	112
4.2.2.3 Pelat Miring $30^\circ$ ( Morley Acute Skew Plate)	115
4.2.2.4 Pelat Miring $60^\circ$ (Razzaque's Skew Plate)	123
4.2.2.5 Pelat L	127
4.2.2.6 Pelat Hexagonal Berlubang	133
4.2.2.7 Pelat Persegi Panjang Berlubang	139
<b>BAB V KESIMPULAN</b>	<b>141</b>

## DAFTAR NOTASI

### SIMBOL MATEMATIKA

$[ ]$  = matriks persegi dan bujursangkar

$\{ \}$  = matriks kolom

$\langle \rangle$  = matriks baris

$[ ]^{-1}$  = matriks invers

$| |$  = determinan invers

$\sum$  = penjumlahan/jumlah

$\approx$  = kira-kira sama dengan

$\int$  = integral

$\| \|$  = ukuran atau norma

### SIMBOL LATIN

$[A]^{-1}$  = invers matrik  $[A]$

$[A]^T$  = transpose matrik  $[A]$

$D_b, D_s$  = koefisien kekakuan lentur dan geser

$E$  = modulus young

$f_z$  = beban merata arah vertikal

$[H_b]$  = matriks Hooke lentur

$[H_s]$  = matriks Hooke geser

$[J]$  = matriks Jacobian

$|J|$  = determinan matriks Jacobian

$[j]$  = invers matriks Jacobian

$k$  = koefisien koreksi geser

$R$  = jari-jari lingkaran

$h, t$  = tebal elemen/pelat

$\|e^{ek}\|$  = error eksak dalam norma energi total untuk seluruh daerah (*domain*) struktur (global)

$\|e^{ek}\|_i$  = error eksak dalam norma energi total untuk elemen  $i$  (lokal)

$e_M$  = error ditinjau terhadap momen lentur

$e_\sigma$  = error ditinjau terhadap tegangan

$e_T$  = error ditinjau terhadap gaya geser transversal

$\|e_M^{ek}\|_i$  = error eksak dalam norma energi lentur untuk elemen  $i$

$\|e_T^{ek}\|_i$  = error eksak dalam norma energi geser untuk elemen  $i$

$e_U$  = error ditinjau terhadap peralihan untuk elemen  $i$

$\|e^*\|$  = estimator error global dalam norma energi dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam

$\|e^*\|_i$  = estimator error lokal dalam norma energi untuk elemen  $i$  dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam

$\|e^a\|$  = estimator error global dalam norma energi dengan menggunakan metode rata2

$\|e^{pr}\|$  = estimator error global dalam norma energi dengan menggunakan metode proyeksi

$\|e^{SPR}\|$  = estimator error global dalam norma energi dengan menggunakan metode SPR

$\|e_M^*\|_i$  = estimator error lokal dalam norma energi lentur untuk elemen  $i$  dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam

- $\|e_T^*\|_i$  = estimator error lokal dalam norma energi geser untuk elemen  $i$  dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam
- $\|\hat{e}\|$  = error izin norma energi global dalam norma energi
- $\|\hat{e}\|_i$  = error izin dalam norma energi yang diprediksikan untuk masing-masing elemen
- $\|\bar{e}\|$  = error solusi yang diperbaiki dalam norma energi
- $p$  = jumlah derajat polinomial aproksimasi elemen
- $L$  = operator diferensial linier
- $[k]$  = matriks kekakuan struktur
- $[k_b]$  = matriks kekakuan lentur
- $[k_s]$  = matriks kekakuan geser
- $\langle M^{ek} \rangle$  = fungsi gaya dalam momen lentur eksak
- $\langle T^{ek} \rangle$  = fungsi gaya dalam lintang eksak
- $\langle M_h \rangle$  = fungsi gaya dalam momen lentur solusi metode elemen hingga
- $\langle T_h \rangle$  = fungsi gaya dalam lintang solusi metode elemen hingga
- $O(h^p)$  = tingkat konvergensi error solusi metode elemen hingga
- $S$  = operator differensial
- $M^*$  = medan solusi gaya dalam momen kontinu
- $M_p^{SPR}$  = medan solusi gaya dalam dengan metode SPR
- $u^{ek}$  = vektor peralihan eksak
- $u^h$  = vektor peralihan metode elemen hingga
- $u^*$  = vector solusi peralihan yang diperbaiki
- $P$  = vektor fungsi polinomial  $p$
- $a$  = vektor least square pada patch lokal
- $A$  = matriks simetris hasil perkalian vektor  $P$
- $b$  = vektor hasil perkalian vektor  $P$  dan nilai gaya dalam pada titik Gauss
- $M_x^{pr}$  = fungsi momen  $x$  setelah pemulihan dengan metode proyeksi

$\{M_{x_i}^{pr}\}$  = nilai momen x pada nodal  $i$  setelah pemulihan dengan metode proyeksi

$\{M_{y_i}^{pr}\}$  = nilai momen y pada nodal  $i$  setelah pemulihan dengan metode proyeksi

$\{M_{xy_i}^{pr}\}$  = nilai momen xy pada nodal  $i$  setelah pemulihan dengan metode proyeksi

$\{T_{xz_i}^{pr}\}$  = nilai gaya lintang xz pada nodal  $i$  setelah pemulihan dengan metode proyeksi

$\{T_{yz_i}^{pr}\}$  = nilai gaya lintang yz pada nodal  $i$  setelah pemulihan dengan metode proyeksi

$[P]$  = matriks proyeksi tergumpal

$\langle \bar{M}^* \rangle_i = \langle \bar{M}_x^* \quad \bar{M}_y^* \quad \bar{M}_{xy}^* \rangle_i$  = gaya dalam momen pada nodal struktur

$\langle \bar{T}^* \rangle_i = \langle \bar{T}_{xz}^* \quad \bar{T}_{yz}^* \rangle_i$  = gaya dalam lintang pada nodal struktur

$\langle M^* \rangle_i = \langle M_x^* \quad M_y^* \quad M_{xy}^* \rangle_i$  = nilai pemulihan gaya dalam momen dari setiap elemen yang bertemu pada nodal  $i$

$\langle T^* \rangle_i = \langle T_{xz}^* \quad T_{yz}^* \rangle_i$  = nilai pemulihan gaya dalam lintang dari setiap elemen yang bertemu pada nodal  $i$

$M_{1_i}^*$  = momen prinsipal maksimum

$M_{2_i}^*$  = momen prinsipal minimum

$\|u^{ek}\|$  = dua kali energi regangan eksak struktur secara global

$\|u^{ek}\|_i$  = dua kali energi regangan eksak per elemen

$\|u^*\|_i$  = dua kali energi regangan elemen secara lokal yang diestimasi dengan metode pemulihan gaya dalam

$\|u^*\|$  = dua kali energi regangan elemen secara global yang diestimasi dengan metode pemulihan gaya dalam

$\|u^h\|_i$  = dua kali energi regangan tiap elemen  $i$  dari solusi MEH

$\|u^h\|$  = dua kali energi regangan secara global dari solusi MEH

$\langle N \rangle$  = matriks baris dari fungsi bentuk

$m$  = jumlah elemen yang digunakan

$w$  = translasi arah vertikal

### SIMBOL YUNANI

$\phi$  = indikator error eksak struktur (dalam norma energi)

$\phi^*$  = indikator error relatif struktur (dalam norma energi) dengan yang diestimasi dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam

$\bar{\phi}$  = indikator error izin struktur (dalam norma energi)

$\phi^h$  = indikator error relatif struktur (dalam norma energi) dengan yang diestimasi dengan menggunakan metode rata2

$\phi^{pr}$  = indikator error relatif struktur (dalam norma energi) dengan yang diestimasi dengan menggunakan metode proyeksi

$\phi^{SPR}$  = indikator error relatif struktur (dalam norma energi) dengan yang diestimasi dengan menggunakan metode SPR

$\xi, \eta$  = variabel dalam koordinat natural

$\xi_i, \eta_i$  = koordinat natural dari titik  $i$  yang ditinjau

$\Omega$  = daerah (*domain*) dari masalah yang ditinjau, yang dapat berupa volume, luas, dan sebagainya

$\zeta_k$  = indikator penghalusan tiap elemen dalam norma energi dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam

$\sigma^{ek}$  = fungsi tegangan eksak

$\sigma^h$  = fungsi tegangan elemen hingga

$\Theta^*$  = indikator efektifitas

$\beta_x, \beta_y$  = rotasi bidang  $z-x$  dan  $z-y$

$\Phi$  = energi potensial total

$\nu$  = konstanta rasio poisson