

BAB II

PEMULIHAN SOLUSI METODE REP DAN ERROR ESTIMATOR Z^2

2.1. UMUM

2.1.1 Kesalahan Solusi Metode Elemen Hingga

Error yang terjadi merupakan selisih antara solusi eksak dengan solusi pendekatan dan dapat diekspresikan dalam bentuk peralihan, tegangan maupun gaya dalam. Dengan mengikutsertakan estimator error pada analisa struktur, berarti kita berupaya terus untuk meningkatkan ketelitian solusi elemen hingga dan estimator error ini akan memberi indikator perlu atau tidaknya analisis berulang. Dengan demikian suatu pencapaian batas standar ketelitian dapat diterima dalam aplikasi teknik.

Bentuk kesalahan solusi elemen hingga bisa dalam bentuk kesalahan peralihan,

$$e_U = u^{ek} - u^h \quad (2.1a)$$

kesalahan gaya dalam,

$$e_M = M^{ek} - M^h \quad e_T = T^{ek} - T^h \quad (2.1b)$$

atau kesalahan tegangan,

$$e_\sigma = \sigma^{ek} - \sigma^h \quad (2.1c)$$

dimana,

e_U, e_M, e_T, e_σ = error eksak untuk peralihan, momen, gaya geser, dan tegangan

u^h, M^h, T^h, σ^h = solusi MEH untuk peralihan, momen, gaya geser, dan tegangan

$u^{ek}, M^{ek}, T^{ek}, \sigma^{ek}$ = solusi eksak untuk peralihan, momen, gaya geser, tegangan

Persentase error yang terjadi akan mereduksi apabila ukuran elemen diperkecil (memperbanyak jumlah elemen) atau dengan menambah derajat fungsi aproksimasi polinomial tiap elemen. Hal ini mengakibatkan tingkat konvergensi dan akseptibilitas tiap elemen hingga berbeda-beda karena tiap elemen mendefinisikan sendiri ukuran dan orde fungsi aproksimasi polinomialnya. Namun intinya adalah bagaimana kita menentukan besarnya error yang terjadi dalam batasan error dan proses diskritisasi yang diberikan. Hal ini menuntut kita untuk menentukan :

- Error yang muncul dari solusi metode elemen hingga (estimasi error *a posteriori*)
- Cara memperbaiki solusi untuk memperoleh hasil dengan tingkat akurasi yang diinginkan secara ekonomis.

2.1.2 Estimasi Error *A Posteriori*

Metode estimasi error terbagi dalam dua tipe yaitu :

a. Estimasi error *a priori*

Estimasi error *a priori* berdasarkan kecepatan konvergensi asimtotik selama ukuran jaringan cenderung nol dan selama derajat dari fungsi aproksimasi polinomial cenderung tak berhingga. Metode ini dapat memprediksikan kecepatan konvergensi, tetapi sedikit menyatakan tentang error.

b. Estimasi error *a posteriori*

Estimasi error *a posteriori* menggunakan sepenuhnya informasi solusi dari hasil analisa metode elemen hingga dalam formulasinya.

Parameter yang digunakan estimasi error *a posteriori* terdiri dari estimator kesalahan, indeks efektifitas, error relatif (indikator error), dan indikator penghalusan. Parameter ini akan menentukan lokasi jaringan yang perlu diperhalus untuk menghasilkan error yang lebih kecil berdasarkan indikasi error relatifnya.

Indeks efektifitas menyatakan tingkat konvergensi estimasi error terhadap error eksak, yang secara umum dirumuskan sebagai rasio error yang diestimasi dalam bentuk norma energi terhadap error eksaknya sebagai berikut :

$$\Theta^* = \frac{\left[\sum \|e^*\|_i^2 \right]^{1/2}}{\|e\|} \quad \text{atau} \quad \Theta^h = \frac{\left[\sum \|e^h\|_i^2 \right]^{1/2}}{\|e\|} \quad (2.2)$$

Dari indeks efektifitas tersebut kita mengharapkan agar Θ^* atau $\Theta^h \rightarrow 1$ dan error eksak mendekati nol sehingga estimasi error kita dapat dikatakan asimtotik eksak.

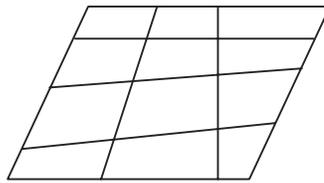
Untuk dapat menunjukkan lokasi yang memerlukan perbaikan solusi, kita dapat menggunakan besaran yang dinamakan error relatif dan indikator penghalusan. Dengan menggunakan kedua besaran tersebut kita harus meninjau apakah konvergensi asimtotik tercapai, yaitu Θ^* atau $\Theta^h \rightarrow 1$ jika $h(\text{ukuran elemen}) \rightarrow 0$ atau $p(\text{derajat polinomial}) \rightarrow \infty$.

2.1.3 Penghalusan Jaringan

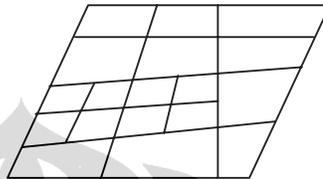
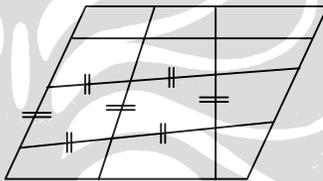
Dalam meregenerasi mesh (jaringan) kita memiliki pilihan untuk menghemat proses perhitungan error dengan mempertahankan bentuk mesh awal dan kemudian diperhalus secara lokal. Hal ini dapat dilakukan dengan cara :

- a) Menambah elemen yang bertipe sama dengan elemen yang digunakan dalam mesh awal tetapi dengan ukuran (h) yang lebih kecil, atau
- b) Menggunakan bentuk elemen yang sama, tetapi dengan menambah jumlah derajat fungsi polinomial (p), dalam hal ini menambah nodal baru untuk tiap elemen, atau
- c) Kombinasi a) dan b)

Cara a) kita kenal sebagai penghalusan metode- h sedangkan cara b) kita kenal sebagai penghalusan metode- p yang diilustrasikan seperti pada Gambar dibawah ini :



Mesh awal

Penghalusan metode h secara lokalPenghalusan metode p **Gambar 2.1** Penghalusan jaringan metode- h dan p

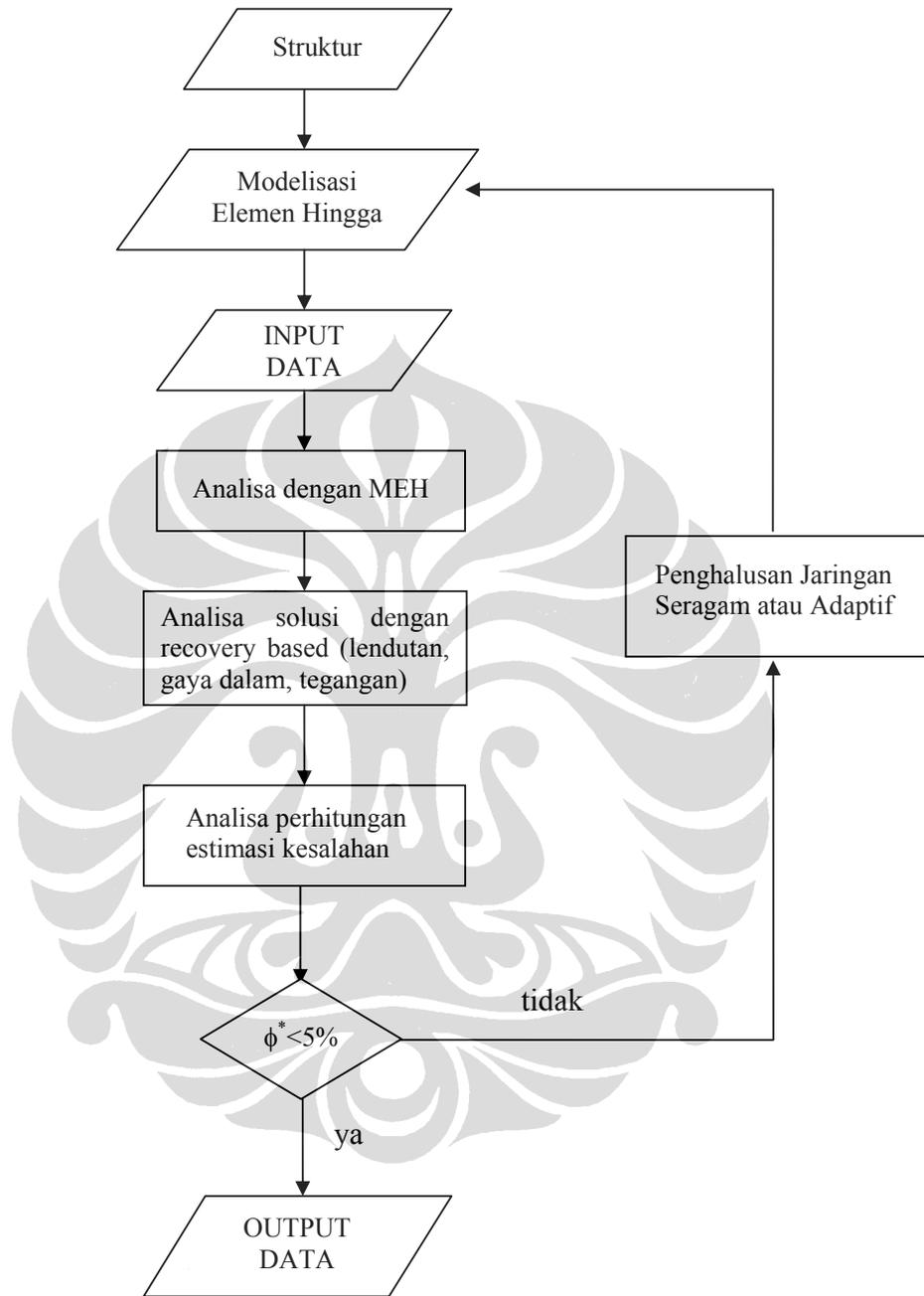
Gambar diatas menunjukkan bahwa penghalusan jaringan dapat dilakukan dengan dua metode yaitu metode h dan metode p . Metode h sendiri dapat dilakukan secara seragam dan adaptif.

Penghalusan jaringan secara adaptif memiliki keunggulan dibandingkan dengan penghalusan seragam. Error yang terjadi biasanya tidak sama untuk setiap elemen, hal ini disebabkan beberapa faktor yaitu pola pembebanan, kondisi perletakan, dan bentuk geometrinya sendiri. Penghalusan adaptif dapat melakukan perhitungan dalam waktu yang singkat dan penyimpanan memori yang lebih kecil karena dapat membentuk jaringan yang optimal dengan tingkat akurasi yang diinginkan baik secara global maupun lokal.

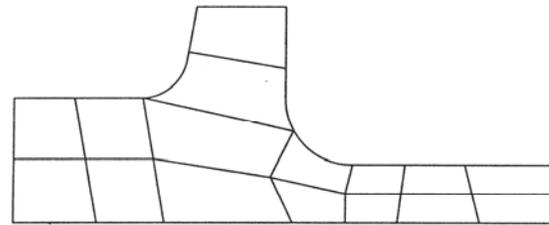
Proses ini merupakan proses iteratif dengan informasi error solusi elemen hingga sebagai kemudi prosesnya. Secara umum algoritma penghalusan adaptif meliputi langkah-langkah sebagai berikut :

- a. Memodelkan struktur dengan sejumlah elemen hingga
- b. Memasukkan input data yaitu karakteristik material struktur, pembebanan, dan kondisi batas
- c. Analisa dengan metode elemen hingga
- d. Analisa error solusi elemen hingga
- e. Melakukan proses penghalusan jaringan, dan analisa pascaproses secara iteratif

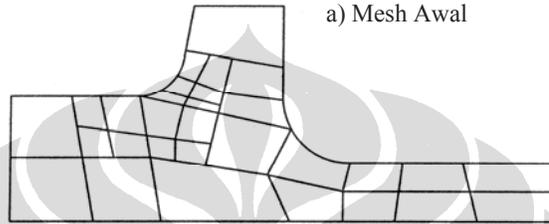
Algoritma penghalusan adaptif secara ilustratif dapat dilihat pada bagan alir proses penghalusan jaringan elemen dengan menggunakan error estimator (Gambar 2.2). Sedangkan langkah-langkah adaptif secara ilustratif dapat kita lihat pada Gambar 2.3.



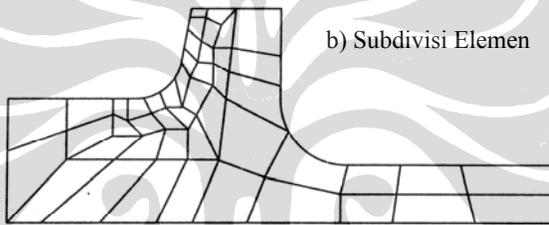
Gambar 2.2 Diagram alir proses penghalusan jaringan dengan estimator error



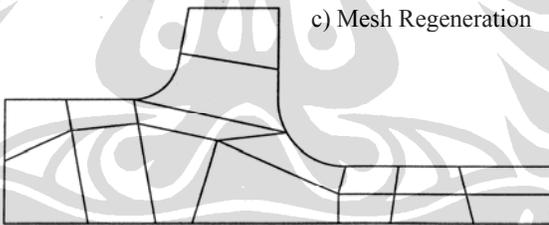
a) Mesh Awal



b) Subdivisi Elemen



c) Mesh Regeneration



d) Penghalusan Tipe-r

Gambar 2.3 Penghalusan Adaptif Tipe-h

Penghalusan jaringan adaptif metode- h dikelompokkan lagi menjadi 3 macam berdasarkan cara penghalusan yang dilakukan yaitu :

1. Subdivisi elemen dengan mempertahankan bentuk mesh awal Gambar 2.3b). Disini elemen-elemen yang menunjukkan error yang besar dibagi-bagi menjadi elemen-elemen lebih kecil dengan mempertahankan perbatasan antar elemen sebelumnya. Metode penghalusan ini melibatkan banyak perhitungan sehingga kurang efisien.

2. *Mesh Regeneration* (Gambar 2.3c). Struktur didiskritisasi ulang dengan ukuran elemen yang berbeda pada seluruh domain.
3. Penghalusan tipe-*r* (Gambar 2.3d). Jumlah elemen (jumlah nodal/dof) konstan/tetap, yang diubah hanya posisi dari nodal-nodal tersebut.

2.2 ESTIMASI ERROR Zienkiewicz-Zhu

Error estimator yang dikembangkan oleh **Zienkiewicz-Zhu** [Z4] berdasarkan estimasi error *a posteriori* dengan teknik pemulihan (*recovery*) solusi (lendutan, gaya dalam, dan tegangan) metode elemen hingga. Sifatnya yang mudah, efisien dan *cost effective* dalam perhitungannya membuatnya relatif lebih unggul dibandingkan metode lainnya.

2.2.1 Norma Error dan Tingkat Konvergensi

Didalam perhitungan struktur dikenal fenomena singularitas dimana terjadi kenaikan tegangan secara lokal mencapai nilai tak hingga akibat dibebani beban terpusat. Secara global solusi yang dihasilkan masih dapat diterima, tetapi secara lokal solusinya jelas jauh dari kriteria hasil. Untuk alasan ini berbagai bentuk integral skalar yang dinamakan sebagai norma digunakan untuk mengestimasi error.

Dapat kita lihat pada persamaan linier umum sebagai berikut :

$$Lu + p = 0 \quad \text{dalam } \Omega \quad (2.3)$$

Dimana,

L = operator diferensial linier

Ω = domain dari masalah yang ditinjau, dapat berupa volume, luas, dan sebagainya

Kemudian kita dapat mendefinisikan error dalam bentuk norma energi sebagai berikut :

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e^T L e \, d\Omega \right)^{1/2} = \left[\int_{\Omega} (u - \hat{u})^T L (u - \hat{u}) \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

dimana :

$\|e\|$ = error eksak global dalam norma energi

Untuk masalah lentur pada suatu luasan A , norma error untuk gaya dalam momen M adalah :

$$\|e_M\|_i^2 = \int_A \langle e_u \rangle [k_b] \{e_u\} \, dA \quad (2.5)$$

dimana :

$$[k_b] = \int_A [B_b]^T [H_b] [B_b] \, dA$$

= matriks kekakuan lentur

Persamaan hubungan regangan dan gaya dalam untuk lentur didefinisikan sebagai :

$$\{\chi^h\} = [B_b] \{u_n\} \quad \text{dan} \quad \{M^h\} = [H_b] \{\chi^h\} \quad (2.6a-b)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.1a) dan (2.6a-b), persamaan (2.5) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \|e_M\|_i^2 &= \int_A \langle e_u \rangle ([B_b]^T [H_b] [B_b]) \{e_u\} \, dA \\ &= \int_A (\langle u^{ek} \rangle - \langle u^h \rangle) [B_b]^T [H_b] ([B_b] (\{u^{ek}\} - \{u^h\})) \, dA \\ &= \int_A (\langle u^{ek} \rangle [B_b]^T - \langle u^h \rangle [B_b]^T) [H_b] ([B_b] \{u^{ek}\} - [B_b] \{u^h\}) \, dA \\ &= \int_A (\langle \chi^{ek} \rangle - \langle \chi^h \rangle) [H_b] (\{\chi^{ek}\} - \{\chi^h\}) \, dA \\ &= \int_A (\langle \chi^{ek} \rangle - \langle \chi^h \rangle) (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) \, dA \\ &= \int_A (\langle \chi^{ek} \rangle - \langle \chi^h \rangle) [H_b] [H_b]^{-1} (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) \, dA \\ &= \int_A (\langle \chi^{ek} \rangle [H_b]^T - \langle \chi^h \rangle [H_b]^T) [H_b]^{-1} (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) \, dA \quad ; \quad [H_b]^T = [H_b] \\ &= \int_A (\langle M^{ek} \rangle - \langle M^h \rangle) [H_b]^{-1} (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) \, dA \end{aligned} \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) dapat dinyatakan secara identik untuk gaya dalam geser T sebagai berikut :

$$\|e_T\|_i^2 = \int_A (\langle T^{ek} \rangle - \langle T^h \rangle) [H_s]^{-1} (\{T^{ek}\} - \{T^h\}) dA \quad (2.8)$$

dimana :

$\|e_M\|$, $\|e_T\|$ = error eksak dalam norma energi lentur, dan geser untuk elemen i

Error eksak total dalam norma energi untuk elemen i diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.7) dan (2.8) menjadi :

$$\begin{aligned} \|e\|_i^2 &= \|e_M\|_i^2 + \|e_T\|_i^2 \\ &= \int_A (\langle e_M \rangle [H_b]^{-1} \{e_M\}) dA + \int_A (\langle e_T \rangle [H_s]^{-1} \{e_T\}) dA \end{aligned} \quad (2.9)$$

dimana :

$$\langle e_M \rangle = \langle M^{ek} \rangle - \langle M^h \rangle \quad ; \quad \langle e_T \rangle = \langle T^{ek} \rangle - \langle T^h \rangle$$

Bentuk norma energi error pada persamaan (2.9) dievaluasi untuk subdomain atau elemen tunggal saja. Error total diseluruh domain struktur diperoleh dengan menjumlahkan kontribusi error dari tiap elemen i sebagai:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2 \quad (2.10)$$

dimana :

$\|e\|^2$ = error eksak total (global) dalam norma energi

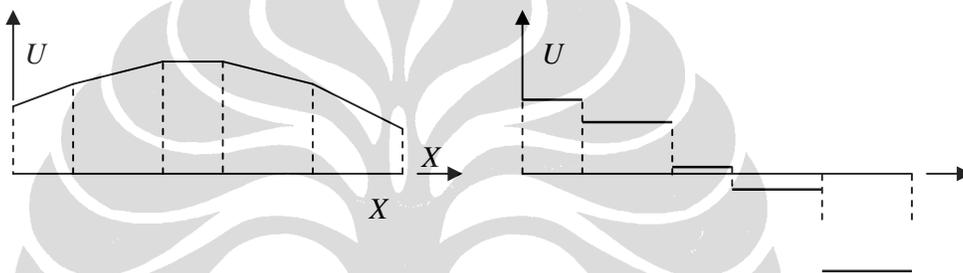
m = jumlah elemen pada struktur

Tingkat konvergensi error berbanding lurus terhadap eksponensial fungsi aproksimasi polinomial p dan dinyatakan dalam bentuk $O(h^p)$. Tingkat konvergensi ini berlaku untuk error dalam bentuk norma energi pada persamaan (2.10). Namun **Zienkiewicz** dan **Taylor** [Z5] menunjukkan bahwa

untuk kasus dimana singularitas terjadi umumnya tingkat konvergensi error akan berada dibawah orde $O(h^p)$ dan sama untuk elemen dengan fungsi linier, kuadratik, dan kubik.

2.2.2 Teknik Pemulihan Solusi

Kontinuitas peralihan yang diperlihatkan pada titik-titik nodal tidak berarti juga menghasilkan kontinuitas gaya dalam pada sisi pertemuan elemen yang berbatasan. Gaya-gaya dalam ini dihitung dari derivatif fungsi peralihan sehingga menimbulkan masalah kontinuitas dan akurasi.



(a) Kontinuitas peralihan u_h

(b) Diskontinuitas gaya dalam

Gambar 2.4 Ilustrasi aproksimasi problem 1D elemen linear

Secara teoritis maupun solusi analitik tidak didapati masalah ini, karena dan geometri mempertahankan keseragaman sifat dan bentuk. Masalah ini muncul di dalam metode elemen hingga yang kemudian justru dijadikan acuan dasar untuk mengestimasi error hasil perhitungan elemen hingga.

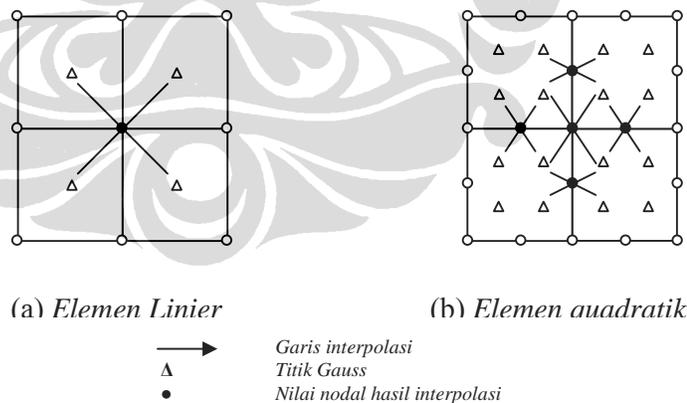
Walaupun hasil solusi yang diberikan metode elemen hingga mempunyai akurasi yang kurang baik untuk gaya dalam pada nodal-nodal struktur, tetapi tetap dimungkinkan dilakukan pemulihan (*recovery*) gaya dalam tersebut sehingga akan didapat gaya dalam yang baru yang mempunyai akurasi yang lebih baik dari sebelumnya dan kontinuitas bisa dihasilkan pada nodal-nodal struktur. Beberapa teknik pemulihan solusi yang tersedia adalah sebagai berikut:

➤ *Metode Interpolasi*

Berdasarkan solusi yang diberikan oleh metode elemen hingga, sejumlah peneliti menemukan fakta bahwa solusi-solusi gaya dalam, regangan, maupun tegangan memiliki tingkat konvergensi yang tinggi untuk titik-titik yang berada di dalam elemen, bukan pada nodal elemen. **Herrman** [H1] dengan teoremanya menunjukkan bahwa solusi-solusi tersebut menunjukkan nilai yang baik pada titik-titik integrasi **Gauss-Legendre** dan disebut sebagai *optimal sampling points*. Fenomena ini kemudian disebut sebagai *superconvergence*. Berdasarkan penemuan ini metode pemulihan solusi mengalami perkembangan. Salah satunya adalah metode interpolasi. Idennya adalah memperbaiki solusi, misalnya tegangan σ , dengan menghitung pada titik integrasi **Gauss** dan mengasumsikan untuk seluruh domain elemen solusi yang lebih baik σ^* dapat diperoleh dengan melakukan interpolasi yang sama untuk interpolasi peralihan

$$\sigma^* = N_u \tilde{\sigma}^* \tag{2.11}$$

Metode interpolasi ini dapat dilustrasikan pada Gambar 2.5.

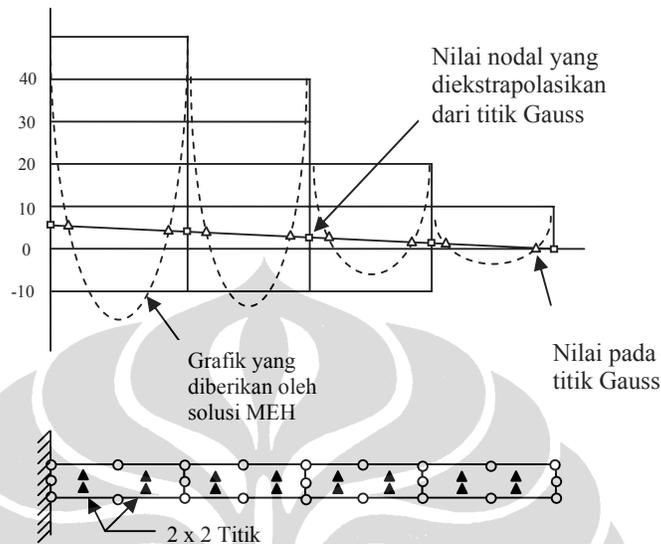


Gambar 2.5 Nilai gaya dalam pada nodal melalui interpolasi titik Gauss

➤ *Metode Ekstrapolasi*

Prosedur lain dikemukakan oleh **Hinton** dan **Campbell** [H2] yang menyarankan perhitungan tegangan pada semua nodal dilakukan dengan

mengekstrapolasi nilai solusi pada titik **Gauss**. Prosedur ini diilustrasikan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Balok Kantilever dengan elemen Q8

➤ *Metode Proyeksi Gaya*

Metode proyeksi merupakan salah satu metode pemulihan gaya dalam yang cukup sederhana untuk membangun kontinuitas gaya dalam pada nodal struktur. Pemulihan gaya dalam yang dilakukan pada metode ini adalah mengambil nilai proyeksi gaya dalam dari tiap-tiap elemen berdasarkan fungsi bentuk elemen ke dalam nodal struktur. Proyeksi gaya dalam kontinu pada nodal ini selanjutnya menjadi dasar untuk menghitung estimasi error. Teknik ini dipakai oleh Zienkiewicz dan Zhu untuk membentuk estimator error Z^2 .

➤ *Metode Superconvergence Patch Recovery (SPR)*

Metode SPR merupakan metode yang dikembangkan oleh **Zienkiewicz-Zhu** [Z3] yang relatif lebih sederhana dan mudah diaplikasikan karena idenya adalah memulihkan gaya dalam pada nodal elemen dengan analogi metode *Least Square Fit* atau pencocokan fungsi/kurva terhadap data-data sampel gaya dalam yang lebih akurat. Bersama dengan perumusan error

estimasi Z^2 , metode ini menghasilkan tingkat konvergensi error yang sangat tinggi (*superconvergence*). Metode ini akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

➤ *Metode Recovery Equilibrium in Patch (REP)*

Metode ini merupakan metode terbaru yang dikembangkan oleh **Boroomand** [B5] yang idenya adalah persamaan keseimbangan dari formulasi solusi untuk menghasilkan medan gaya dalam yang dipulihkan. Pada dasarnya formulasi juga menggunakan patch sebagai media untuk perhitungannya. Metode ini akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

Dengan tersedianya berbagai solusi pendekatan baru seperti yang telah dibahas diatas (pemulihan solusi elemen hingga), maka yang menjadi persoalan bagi kita adalah seberapa besar akurasi yang diperoleh setelah dilakukan pemulihan solusi. Dengan kata lain tiap metode tersebut memiliki solusi yang berbeda-beda yang umumnya terkait dari kasus yang kita tinjau di mana masing-masing metode tersebut memiliki keunggulan dan kelemahannya sendiri.

Tingkat ketepatan yang diperoleh akan menentukan reliabilitas estimator error yang dibentuk. Dengan demikian pemilihan metode pemulihan gaya dalam elemen hingga mempunyai peringkat tertinggi dan penentu kualitas suatu estimator error. Berbagai teknik pemulihan solusi elemen hingga tersebut diatas, walaupun memberikan solusi yang lebih akurat untuk gaya dalam, akan tetapi umumnya memberikan akurasi yang kurang baik terhadap energi regangan, sehingga energi regangan ini tidak boleh dipakai sebagai ukuran.

Untuk selanjutnya akan dibahas dua buah metode pemulihan gaya dalam yaitu metode SPR dan metode REP. Kedua metode itu merupakan metode pemulihan superkonvergen. Metode REP merupakan metode yang sengaja penulis pilih sebagai bahan penelitian.

2.2.3 *Superconvergent Patch Recovery (SPR)*

Reliabilitas error estimator Z^2 sangat tergantung dari kualitas dan akurasi dari teknik pemulihan solusi yang digunakan dan nilai dari solusi yang sudah diperbaiki tersebut. Persyaratan untuk mendapatkan solusi dengan akurasi yang tinggi ini telah memicu penemuan teknik pemulihan solusi yang menghasilkan solusi yang superkonvergen, yang dikenal sebagai *Superconvergent Patch Recovery*. Teknik baru ini dapat mengabaikan beberapa kesulitan yang ditemukan sebelumnya untuk sejumlah elemen quadratik dimana diperlukan banyak penyesuaian untuk memperoleh hasil yang *reasonable*. Dengan mengaplikasikan metode SPR ini, telah dibuktikan [B6,B7] bahwa estimasi error **Zienkiewicz-Zhu** memberikan hasil yang lebih akurat dari pada alternatif metode lainnya [H2,O2,H3]. Berikut ini akan dijelaskan prosedur implementasi metode SPR yang dikemukakan **Zienkiewicz-Zhu** [Z3]

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa nilai gaya dalam atau tegangan pada sampel titik interior elemen memiliki karakteristik superkonvergen dan memiliki konvergensi error berorde $O(h^{p+1})$. Dalam metode SPR ini ide yang digunakan adalah memperhalus (*smoothing*) nilai pada titik tersebut dengan menggunakan fungsi polinomial derajat p untuk membentuk sebuah *local patch* yang melingkupi sejumlah elemen dan nodal tertentu. Sebagai ilustrasi ide tersebut dan prosedur implementasi-nya, kita ambil problem linear eliptic sebagai model yang berbentuk

$$Lu \equiv S^T DSu = f \quad \text{dalam } \Omega \quad (2.12)$$

Dimana untuk problem elastisitas u adalah vektor peralihan. Kita definisikan fungsi u^h sebagai fungsi pendekatan peralihan terhadap solusi eksak u , dan dinyatakan sebagai

$$u^h = N\bar{u} \quad (2.13)$$

Gaya dalam yang dihitung langsung dengan metode elemen hingga dinyatakan dalam bentuk (untuk momen) :

$$\{M^h\} = [H_b]\{\chi^h\} \tag{2.14}$$

Di mana \bar{u} adalah nilai peralihan pada nodal, N adalah *shape function*, dan S adalah operator differensial yang mendefinisikan regangan sebagai

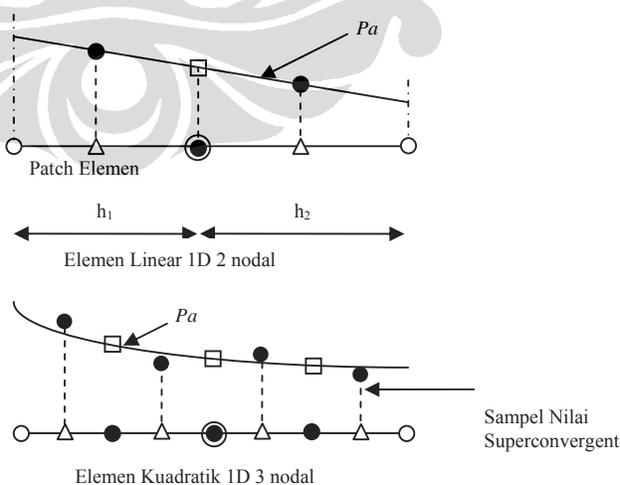
$$\chi^h = Su^h \tag{2.15}$$

Gaya dalam yang diperoleh dari persamaan (2.19) umumnya tidak kontinu pada perbatasan antar elemen dan menunjukkan akurasi yang rendah pada nodal dan batas elemen (perletakan). Tujuan dari teknik pemulihan adalah menentukan parameter nodal \bar{M}^* , sehingga diperoleh medan gaya dalam kontinu M^* yang didefinisikan sebagai :

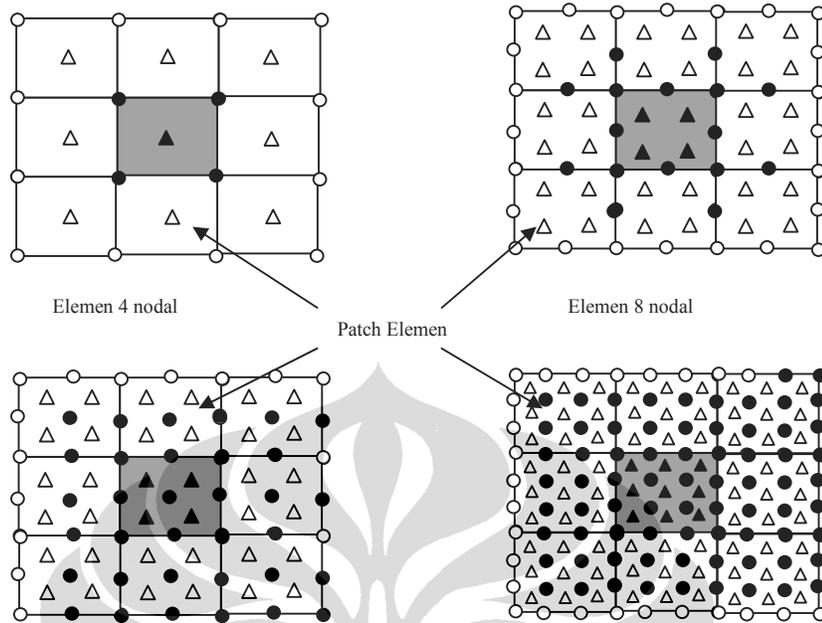
$$M^* = N\bar{M}^* \tag{2.16}$$

yang lebih baik dari solusi elemen hingga M^h , dimana N merupakan *shape function* yang sama digunakan dalam fungsi peralihan.

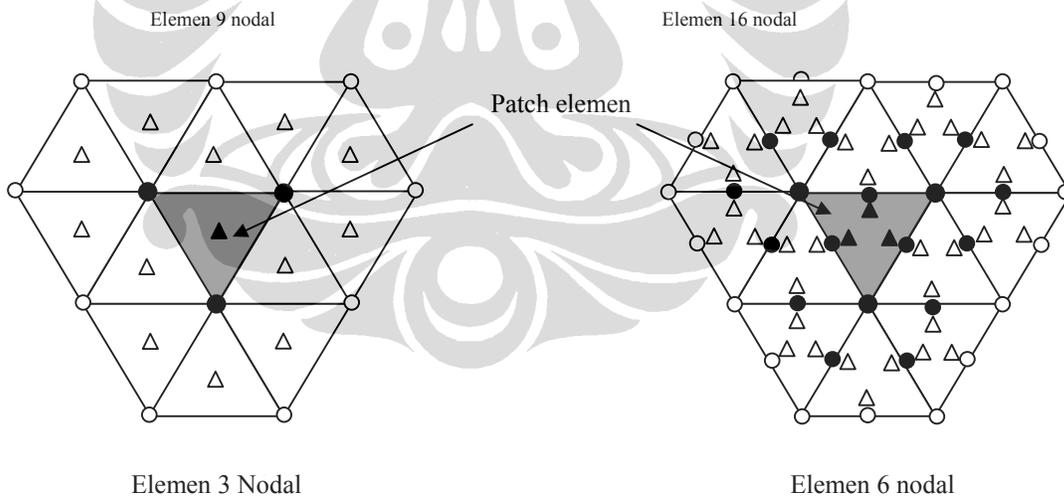
Pada awalnya **Zienkiewicz-Zhu** mengasumsikan bahwa nilai gaya dalam \bar{M}^* pada nodal berlaku untuk fungsi ekspansi polinomial M_p^{SPR} dengan derajat polinomial p yang sama dalam *shape function* N , dan berlaku pada sebuah *local patch* yang melingkupi sejumlah elemen dan nodal tertentu.



Gambar 2.7 Patch elemen untuk problem 1 dimensi : Δ Superconvergent Gauss Point ; \square Nilai nodal dengan SPR ; \odot 'Patch' assembly point

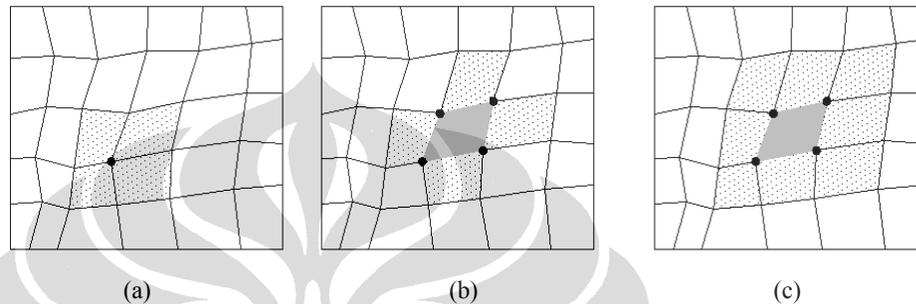


Gambar 2.8 Patch elemen untuk elemen linear, quadratic, dan kubik quadrilateral: Δ Superconvergent Gauss Point ; \bullet Nilai nodal dengan SPR ; \odot 'Patch' assembly point



Gambar 2.9 Patch elemen untuk elemen linear dan quadratic triangular : Δ Superconvergent Gauss Point ; \bullet Nilai nodal dengan SPR ; \odot 'Patch' assembly point

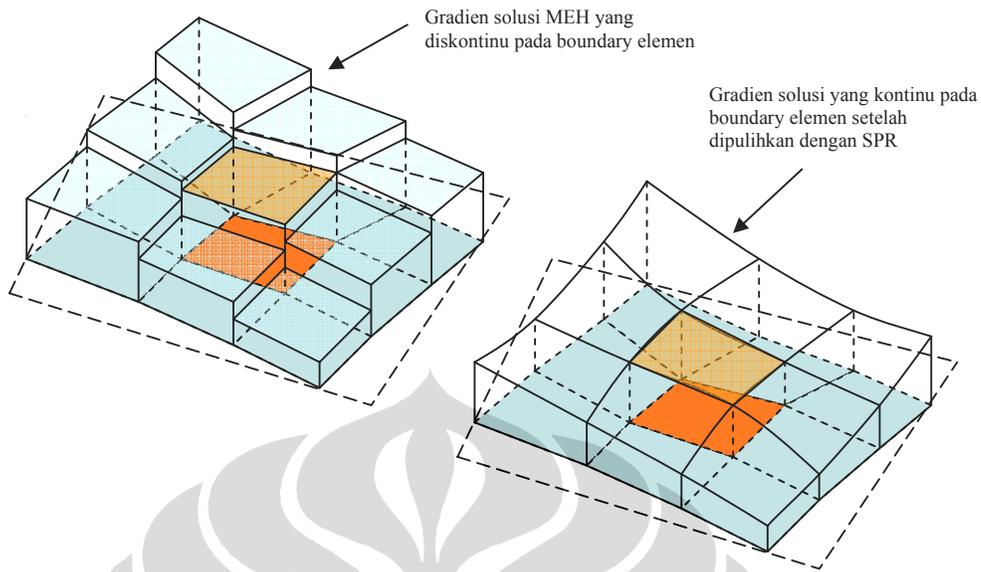
Bentuk patch elemen yang digunakan diperlihatkan pada Gambar 2.7-9 dengan model patch yang dibentuk oleh elemen (*Element Based Patch*). Saat ini ada tiga buah model patch yang dapat digunakan yaitu *Nodal Based Patch*, *Element Based Patch*, dan *Element Interface Based Patch*. Ketiga model patch tersebut diilustrasikan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10

Bentuk model patch: (a) Nodal Based Patch; (b) Element interface Based Patch; dan (c) Element Based Patch

Element Based Patch pertama kali diperkenalkan oleh **Zienkiewicz-Zhu** [Z3] yang kemudian dimodifikasi oleh **J.E. Akin** [A1]. Formulasi SPR yang dikemukakan oleh **Zienkiewicz-Zhu** [Z3] menyatakan bahwa sebuah ekspansi polinomial dengan derajat yang sama dengan derajat polinomial aproksimasi peralihan nodal elemen berlaku pada sebuah lokal patch sebagai medan gradien solusi yang kontinu dengan melakukan *Least Square Fit* polinomial tersebut terhadap sejumlah titik sampel superkonvergen dalam patch yang sedang ditinjau.



Gambar 2.11 Ilustrasi kontinuitas gaya dalam pada problem 2D

Ekspansi polinomial ini dapat digunakan untuk tiap komponen M^{SPR} (misalnya M_x^{SPR}) dan dinyatakan sebagai :

$$M_x^{SPR} = \langle P(\xi, \eta) \rangle \{a_n\}$$

$$M_x^{SPR} = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle \langle a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \rangle^T$$

.....(2.17)

Vektor $\langle P \rangle$ merupakan fungsi ekspansi polinomial dalam sistem koordinat lokal parametrik (ξ, η) yang diasumsikan sebagai medan gaya dalam yang kontinu pada patch yang ditinjau. Di sini digunakan delapan term polinomial kuadrat sesuai dengan formulasi elemen DKMQ[K2] yang menggunakan derajat kebebasan temporer pada sisi elemen untuk merepresentasikan fungsi kuadrat pada sisi elemen tersebut.

Nilai parameter tidak diketahui $\{a_n\}$ dalam persamaan (2.22) ditentukan dengan melakukan pencocokan (*Least Square Fit*) parameter tersebut terhadap titik-titik sampel yang superkonvergen, di mana di sini akan dipakai titik integrasi Gauss 2×2 . Untuk melakukan hal ini kita perlu meminimasi persamaan berikut, untuk patch elemen dengan n titik sampel:

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \left[M_x^h(\xi_k, \eta_k) - \langle P_k \rangle \{a_n\} \right]^2 \quad (2.18)$$

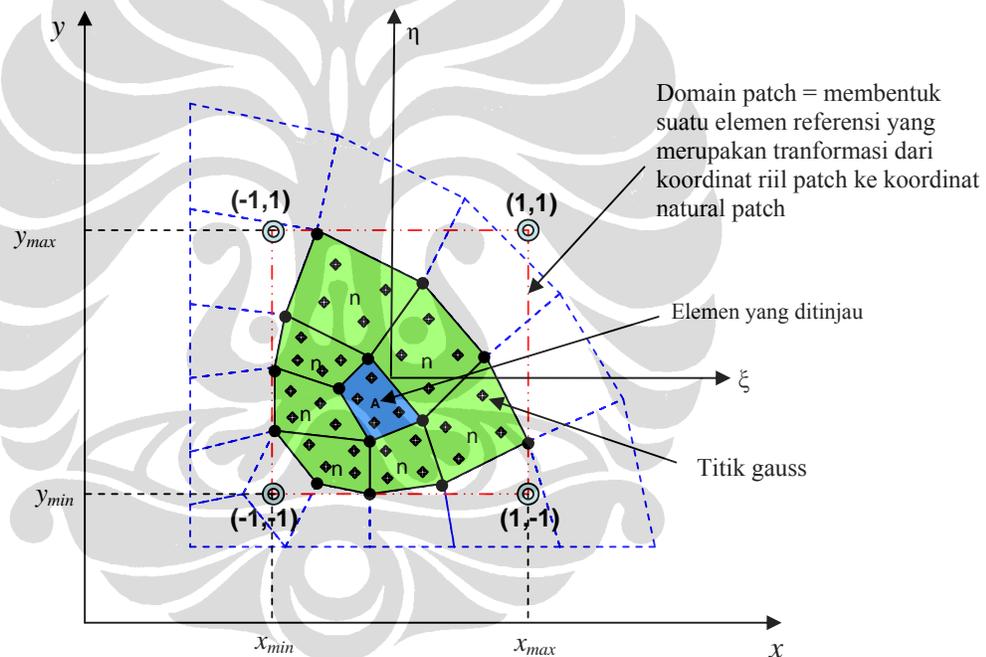
$$\langle P \rangle_k = \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle$$

dimana :

(ξ_k, η_k) = koordinat titik-titik Gauss dalam sisitem koordinat lokal Patch

n = jumlah titik Gauss pada tiap Patch

$M_x^h(\xi_k, \eta_k)$ = Nilai gaya dalam solusi MEH pada titik-titik Gauss



Gambar 2.12

Domain local Patch dan sistem koordinat lokal parametrik (ξ, η) untuk tipe Element Interface Based Patch pada sebuah mesh elemen sembarang; koordinat $\xi=0, \eta=0$ tidak harus berimpit pada pusat elemen pembentuk patch

Minimasi persamaan (2.23) mengindikasikan bahwa $\{a_n\}$ harus memenuhi persamaan berikut :

$$\sum_{k=1}^n \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle^T \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle \{a_n\} = \sum_{k=1}^n \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle^T M_x^h(\xi_k, \eta_k) \quad (2.19)$$

Dari persamaan (2.24) diperoleh

$$\{a_n\} = [A]^{-1} \{b_n\} \quad (2.20)$$

dimana:

$$[A] = \sum_{k=1}^n \langle P_k \rangle^T \langle P_k \rangle, \quad \{b_n\} = \sum_{k=1}^n \langle P_k \rangle^T M_x^h(\xi_k, \eta_k) \quad (2.21)$$

Setelah parameter $\{a_n\}$ ditentukan, nilai nodal gaya dalam M^{SPR} dapat dihitung dengan memasukkan nilai koordinat nodal pada persamaan (2.22) berdasarkan sistem koordinat lokal dari patch yang ditinjau. Di sini semua nodal yang berada pada patch yang ditinjau akan dihitung nilai gaya dalamnya. Hal yang sama berlaku pada komponen gaya dalam lainnya, yaitu untuk fungsi momen dan gaya lintang :

$$\{a_n\}_M = [A]^{-1} \{b_n\}_M$$

$$\{a_n\}_T = [A]^{-1} \{b_n\}_T$$

di mana :

$\{a_n\}_M$: parameter $\{a_n\}$ untuk gaya dalam momen

$\{b_n\}_M$: vektor $\{b_n\}$ untuk gaya dalam momen

$\{a_n\}_T$: parameter $\{a_n\}$ untuk gaya dalam lintang

$\{b_n\}_T$: vektor $\{b_n\}$ untuk gaya dalam lintang

Perhitungan gaya dalam pada semua nodal dalam suatu patch mengakibatkan terjadinya perhitungan yang terus berulang pada nodal yang sama di setiap patch yang berbeda. Oleh karena itu dalam penelitian ini nilai-nilai gaya dalam pada nodal dari patch-patch yang berbeda akan dirata-

ratakan, yaitu diakumulasi sehingga kemudian setelah selesai perhitungan pada semua nodal nilai akumulasi tersebut dibagi dengan jumlah perhitungan gaya dalam pada nodal tersebut, atau dengan kata lain jumlah patch yang mengandung nodal tersebut.

Secara keseluruhan prosedur SPR ini memerlukan data-data berikut ini :

- Jumlah patch yang dapat dibentuk oleh sebuah elemen pada suatu mesh elemen
- Jumlah elemen serta nodal yang terdapat pada setiap patch
- Jumlah titik-titik Gauss serta koordinatnya pada tiap patch
- Nilai gaya dalam pada tiap titik Gauss pada tiap patch

Sedangkan prosedur SPR itu sendiri pada elemen DKMQ[K2] dapat dirangkum sebagai berikut :

- Tinjau setiap patch pada mesh elemen
- Bentuk domain dari tiap patch seperti pada Gambar 2.12
- Transformasikan koordinat riil dari tiap nodal dan titik Gauss yang terdapat didalam patch tersebut ke sistem koordinat natural (ξ, η) patch tersebut seperti pada Gambar 2.12. Persamaan transformasi koordinat ini berdasarkan transformasi Jacobian konstan sebagai berikut :

$$x = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_{min} + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_{max} \rightarrow \xi = \frac{2x - x_{min} - x_{max}}{(x_{max} - x_{min})}$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - \eta)y_{min} + \frac{1}{2}(1 + \eta)y_{max} \rightarrow \eta = \frac{2y - y_{min} - y_{max}}{(y_{max} - y_{min})}$$

di mana kita mencari koordinat natural (ξ, η) berdasarkan koordinat riil (x, y) yang diketahui.

- Berdasarkan koordinat natural titik-titik Gauss hitung vektor $\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle$ pada tiap titik Gauss dan hitung matrik $\langle A \rangle = \sum_{k=1}^n \langle P_k \rangle^T \langle P_k \rangle$ sehingga terbentuk matrik $[A]$ berukuran 8×8 .

Kemudian matrik ini dijumlahkan untuk seluruh titik Gauss dalam patch yang ditinjau.

- Berdasarkan koordinat natural titik-titik Gauss serta nilai gaya dalam $M^h(\xi_k, \eta_k)$ pada titik Gauss yang bersesuaian, hitung vektor $\{b_n\} = \sum_{k=1}^n \langle P_k \rangle^T M^h(\xi_k, \eta_k)$ sehingga terbentuk vektor $\{b_n\}$ berukuran 8×1 .

Jumlahkan vektor tersebut pada semua titik Gauss dalam patch yang ditinjau.

- Hitung matrik $[A^{-1}]$ (invers A) sehingga dapat dihitung vektor $\{a_n\} = [A^{-1}]\{b_n\}$ yang berdimensi 8×1
- Hitung gaya dalam pada semua nodal yang berada dalam patch tersebut dengan memasukkan koordinat natural nodal yang bersangkutan kedalam persamaan $M^{SPR} = \langle P(\xi, \eta) \rangle \{a_n\}$. Hal yang sama berlaku untuk gaya geser T^{SPR} .

2.2.4 Recovery by Equilibrium in Patches (REP)

Metode ini merupakan metode terbaru yang dikembangkan oleh **Boroomand** [B5]. Timbulnya ide metode pemulihan ini didasari kebutuhan untuk menghasilkan pemulihan solusi yang akurat meskipun tanpa keberadaan titik-titik superkonvergen.

Idenya adalah persamaan keseimbangan dari formulasi solusi untuk menghasilkan medan gaya dalam yang dipulihkan. Pada dasarnya formulasinya juga menggunakan patch sebagai media untuk perhitungannya.

$$\int_{\Omega} [B]^T (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) d\Omega = 0 \quad (2.22)$$

Pada persamaan di atas, Ω_p adalah domain dari patch. Persamaan tersebut bisa merepresentasikan keseluruhan problem, sebuah patch elemen atau sebuah elemen tunggal.

Dari persamaan di atas, gaya dalam eksak diganti dengan gaya dalam yang diperbaiki sehingga persamaan menjadi:

$$\int_{\Omega_p} \{B_p\}^T \{M^*\} d\Omega \approx \int_{\Omega_p} \{B_p\}^T \{M^h\} d\Omega \quad (2.23)$$

Di sini juga dipakai ekspansi polinomial seperti persamaan (2.17), yang dalam bentuk matriks ditulis sebagai berikut:

$$M_x^* = [P]\{\tilde{a}\}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \langle P(\xi, \eta) \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle P(\xi, \eta) \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle P(\xi, \eta) \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle P(\xi, \eta) \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \langle P(\xi, \eta) \rangle \end{bmatrix}, \quad \{\tilde{a}\} = \begin{Bmatrix} \{a\}_1 \\ \{a\}_2 \\ \{a\}_3 \\ \{a\}_4 \\ \{a\}_5 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Persamaan (2.23) menjadi

$$\int_{\Omega_p} [B_p]^T [P]\{\tilde{a}\} d\Omega \approx \{F_p^h\}, \quad [H]\{\tilde{a}\} \approx \{F_p^h\} \quad (2.24)$$

Selanjutnya, didefinisikan fungsi

$$\Phi = ([H]\{\tilde{a}\} - \{F^h\})^T ([H]\{\tilde{a}\} - \{F^h\}) \quad (2.25)$$

Dan dengan meminimasikannya terhadap $\{\tilde{a}\}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \{\tilde{a}\}} = 0$, diperoleh

$$\{\tilde{a}\} = [H]^T [H]^{-1} [H]^T \{F^h\} \quad (2.26)$$

Dalam perkembangannya, bentuk persamaan REP di atas diperbaiki karena dari penelitian Boroomand dan Zienkiewicz, formulasi di atas sensitif terhadap elemen dengan *aspect ratio* yang tinggi. Sensitivitas terhadap *aspect ratio* tersebut bisa dieliminasi jika vektor gaya dalam ditulis sebagai

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = M_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} + M_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{Bmatrix} + \dots = \sum M_i 1_i \quad (2.27)$$

Substitusi ke persamaan (2.24) akan menghasilkan

$$\{F^*\}_1 + \{F\}_2 + \dots = \{F^h\}_1 + \{F^h\}_2 + \dots \quad (2.28)$$

Dan permisahan persamaan kesetimbangan tersebut menghasilkan

$$\{F^*\}_i \approx \{F^h\}_i \quad (2.29)$$

Persamaan di atas dijabarkan sebagai:

$$\{F^*\}_i = \int_{\Omega_p} [B]_p^T \{M^*\}_i d\Omega, \quad \{F^h\}_i = \int_{\Omega_p} [B]_p^T \{M^h\}_i d\Omega \quad (2.30)$$

atau

$$\{F^*\}_i = \int_{\Omega_p} [B]_p^T \{1\}_i M_i^* d\Omega, \quad \{F^h\}_i = \int_{\Omega_p} [B]_p^T \{1\}_i M_i^h d\Omega$$

Substitusi persamaan (2.17) ke persamaan di atas menghasilkan

$$\int_{\Omega_p} [B]_p^T \{1\}_i \langle P(\xi, \eta) \rangle \{a_n\}_i d\Omega \approx \{F^h\}_i \quad \text{atau} \quad [H]_i \{a\}_i \approx \{F^h\}_i \quad (2.31)$$

$[H]_i$ dan $\{F^h\}_i$ bisa dihitung dengan integrasi numerik sebagai berikut:

$$[H]_i = \int_{\Omega_p} [B]_p^T \{1\}_i \langle P(\xi, \eta) \rangle d\Omega \quad (2.32)$$

$$[H]_i = \sum_{l=1}^m [B(\xi_l, \eta_l)]_p^T \{1\}_i \langle P(\xi_l, \eta_l) \rangle |J(\xi_l, \eta_l)| \omega \quad (2.33)$$

$$\{F^h\}_i = \sum_{l=1}^m [B(\xi_l, \eta_l)]_p^T \{1\}_i M_i^h |J(\xi_l, \eta_l)| \omega$$

dengan m adalah jumlah titik integrasi, J matriks Jacobian dan ω faktor pemberat.

Selanjutnya, bisa didefinisikan fungsi seperti persamaan (2.25), yang dengan meminimalkan terhadap $\{a\}$ akan menghasilkan:

$$\{a\} = \left[[H]_i^T [H]_i \right]^{-1} [H]_i^T \{F^h\}_i \quad (2.34)$$

Pada beberapa kasus konfigurasi patch, matriks $[H]$ mungkin tidak stabil. Hal ini bisa dihilangkan dengan menggunakan fungsi

$$\Phi = ([H]_i \{a\} - \{F^h\}_i)^T ([H]_i \{a\} - \{F^h\}_i) + \Sigma ([H]_e \{a\} - \{F^h\}_e)^T ([H]_e \{a\} - \{F^h\}_e) \quad (2.35)$$

Minimasi persamaan tersebut terhadap $\{a\}$ akan menghasilkan:

$$\{a\} = \left[[H]_i^T [H]_i + \Sigma [H]_e^T [H]_e \right]^{-1} \left[[H]_i^T \{F^h\}_i + \Sigma [H]_e^T \{F^h\}_e \right] \quad (2.36)$$

Pada persamaan tersebut, $[H]_e$ dan $\{F^h\}_e$ mempunyai ekspresi yang sama dengan $[H]_i$ dan $\{F^h\}_i$, tapi integralnya diaplikasikan pada masing-masing elemen.

Prosedur REP sama persis dengan prosedur SPR seperti yang dijelaskan pada subbab 2.2.3 di atas. Perbedaannya hanya pada prosedur mencari parameter yang tidak diketahui, $\{a\}$. Dalam prosedur REP, tidak diperlukan data jumlah titik Gauss dan nilai gaya dalam pada tiap titik Gauss dalam patch.

2.2.5 Gaya Dalam pada Nodal Struktur

Perhitungan gaya dalam pada nodal struktur dilakukan dengan meratakan-ratakan nilai pemulihan gaya dalam nodal pada tiap elemen yang bertemu pada nodal tersebut, yaitu:

$$\{M^{AVR}\}_i = \frac{1}{m} \sum_i^m \{M^h\}_i \quad \text{dan} \quad \{T^{AVR}\}_i = \frac{1}{m} \sum_i^m \{T^h\}_i \quad (2.36a-b)$$

di mana :

$$\langle M^{AVR} \rangle_i = \langle M_x^{AVR} \quad M_y^{AVR} \quad M_{xy}^{AVR} \rangle_i = \text{gaya dalam rata}^2 \text{ pada nodal struktur}$$

$$\langle T^{AVR} \rangle_i = \langle T_x^{AVR} \quad T_y^{AVR} \rangle_i$$

$$\langle M^h \rangle_i = \langle M_x^h \quad M_y^h \quad M_{xy}^h \rangle_i = \text{nilai pemulihan gaya dalam dari setiap elemen}$$

yang bertemu pada nodal i

$$\langle T^h \rangle_i = \langle T_x^h \quad T_y^h \rangle_i$$

m = jumlah elemen yang bertemu pada nodal i

Momen utama untuk tiap nodal struktur i adalah :

$$M_{1_i} = \frac{M_{x_i}^{AVR} + M_{y_i}^{AVR}}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_{x_i}^{AVR} - M_{y_i}^{AVR}}{2}\right)^2 + (M_{xy_i}^{AVR})^2}$$

$$M_{2_i} = \frac{M_{x_i}^{AVR} + M_{y_i}^{AVR}}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_{x_i}^{AVR} - M_{y_i}^{AVR}}{2}\right)^2 + (M_{xy_i}^{AVR})^2}$$

(2.37a-b)

$$M_{12_i} = \frac{M_{1_i} - M_{2_i}}{2} \quad (2.38)$$

Sedangkan sudut utamanya adalah :

$$\varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2M_{xy_i}}{M_{x_i} - M_{y_i}} \right) \quad (2.39)$$

2.2.6 Estimasi Error dengan Pemulihan Solusi Gaya Dalam

Pada dasarnya estimator error **Zienkiewicz-Zhu** [Z5] dilakukan untuk mengestimasi error untuk memperbaiki solusi MEH menggunakan teknik pemulihan, sehingga error estimasi menjadi :

$$\|e\|_i^2 \approx \|e^*\|_i^2 = \|e_M^*\|_i^2 + \|e_T^*\|_i^2 \quad (2.40)$$

dimana :

$\|e^*\|_i^2$ = estimator error norma energi lokal untuk elemen i dengan metode pemulihan gaya dalam (SPR, PRJ, AVR)

Error total di seluruh domain struktur :

$$\|e^*\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e^*\|_i^2 \quad (2.41)$$

Nilai indeks efektifitasnya sebagai berikut

$$\Theta^* = \frac{\|e^*\|}{\|e\|} \quad (2.42)$$

Teorema yang dikemukakan **Zienkiewicz-Zhu** [Z6] menunjukkan bahwa untuk semua error estimator berbasis teknik pemulihan solusi dapat dibuat batasan untuk indeks efektifitas tersebut sebagai berikut

$$1 - \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \leq \Theta^* \leq 1 + \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \quad (2.43)$$

atau

$$\|e\| - \|\bar{e}\| \leq \|e^*\| \leq \|e\| + \|\bar{e}\| \quad (2.44)$$

Dimana e adalah error aktual dan \bar{e} adalah error solusi yang diperbaiki

$$\|\bar{e}\| = \|u - u^*\| \quad (2.45)$$

Dari teorema tersebut dapat ditarik dua kesimpulan penting sebagai berikut:

1. Setiap proses pemulihan yang menghasilkan error yang tereduksi akan memberikan error estimator yang baik
2. Jika solusi elemen hingga yang diperbaiki konvergen dengan rate lebih tinggi dari solusi langsung elemen hingga maka error estimator tersebut akan selalu asimtotik eksak

2.3 INDIKATOR ERROR Dan PENGHALUSAN

Estimator error hanya mungkin menjadi error aktual jika ukuran elemen diperkecil menjadi sangat kecil mencapai nol dan dalam hal ini membuat jumlah elemen menjadi tak terhingga. Apabila ukuran elemen mendekati nol, maka perhitungan tak akan pernah berhenti. Untuk itu diperlukan suatu batasan yang efektif sebagai penentu kriteria untuk pemberhentian proses dikritisasi.

Indikator error eksak struktur dapat didefinisikan dari error energi eksak yang dinormalisasi oleh energi regangan eksak sebagai berikut :

$$\phi = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100\% \quad (2.46)$$

dimana $\|e\|$ adalah norma energi error yang didefinisikan pada persamaan (2.10), sedangkan $\|u\|$ adalah dua kali energi regangan eksak struktur secara global yang untuk struktur pelat terdiri dari energi lentur dan geser

$$\|u\|_i^2 = \|u_M\|_i^2 + \|u_T\|_i^2 \quad (2.47a)$$

$$= \int_A \langle M \rangle [H_b]^{-1} \{M\} dA + \int_A \langle T \rangle [H_s]^{-1} \{T\} dA \quad (2.47b)$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^m \|u\|_i^2 \quad (2.47c)$$

Indikator error eksak tersebut dapat dihitung jika solusi eksak tersedia. Kita dapat mengestimasi dengan menggunakan pemulihan solusi yang sudah dibahas sebelumnya.

Indikator error relatif struktur dengan metode pemulihan gaya dalam ϕ^* adalah sebagai berikut

$$\phi^* = \frac{\|e^*\|}{\|u^*\|} \times 100\% \quad (2.48)$$

dimana

$$\|u^*\|_i = \sqrt{\|u^h\|_i^2 + \|e^*\|_i^2} \quad (2.49)$$

$\|u^*\|_i$ = dua kali energi regangan elemen secara lokal yang diestimasi dengan metode pemulihan gaya dalam

Nilai $\|e^*\|$ sesuai dengan persamaan (2.41) sedangkan $\|u^h\|_i$ adalah dua kali energi regangan lentur untuk gaya momen dan geser elemen secara lokal yang diperoleh melalui metode elemen hingga dan dapat diekspresikan dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \|u^h\|_i^2 &= \|u_M^h\|_i^2 + \|u_T^h\|_i^2 \\ &= \int_A \langle M^h \rangle [H_b]^{-1} \{M^h\} dA + \int_A \langle T^h \rangle [H_m]^{-1} \{T^h\} dA \end{aligned} \quad (2.50)$$

Sehingga dapat kita peroleh

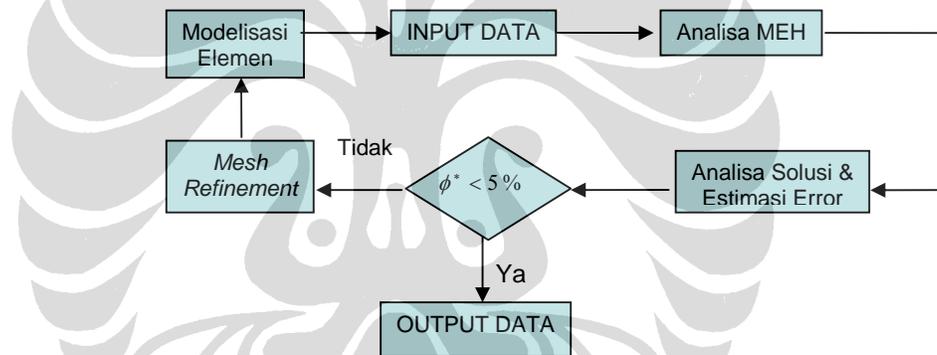
$$\|u^*\|^2 = \sum_{i=1}^m \|u^*\|_i^2 \quad (2.51)$$

dimana :

$\|u^*\|$ = dua kali energi regangan elemen secara global yang diestimasi dengan metode pemulihan gaya dalam

Indikator error menurut persamaan (2.48) merupakan besaran yang kita gunakan sebagai kriteria penghentian proses penghalusan elemen. Hal ini dapat dilakukan dengan memberikan batasan $\bar{\phi}$ dimana jika $\phi^* \leq \bar{\phi}$ maka proses diskritisasi dapat dihentikan. Nilai $\bar{\phi}$ yang digunakan untuk aplikasi rekayasa umumnya adalah 5%. Indikator error ijin struktur ditentukan oleh :

$$\bar{\phi} = \frac{\|\hat{e}\|}{\|u^*\|} \times 100\% \tag{2.52}$$



Gambar 2.13: Proses penghalusan jaringan

di mana $\|\hat{e}\|$ adalah error ijin norma energi global, yaitu :

$$\|\hat{e}\|^2 = \bar{\phi}^2 \left(\|u^h\|^2 + \|e^*\|^2 \right) \tag{2.53}$$

Dalam jaringan elemen yang optimal distribusi error norma energi adalah sama/merata di semua elemen., sehingga

$$\|\hat{e}\|^2 = m \|\hat{e}_i\|^2 \tag{2.54}$$

di mana

m = jumlah elemen yang digunakan

Dengan substitusi persamaan (2.53) ke persamaan (2.54) menghasilkan :

$$m\|\hat{e}\|_i^2 = \bar{\phi}^2 \left(\|u^h\|^2 + \|e^*\|^2 \right)$$

$$\|\hat{e}\|_i^2 = \frac{\bar{\phi}^2 \left(\|u^h\|^2 + \|e^*\|^2 \right)}{m} \quad (2.55)$$

Dengan demikian kita dapat mensyaratkan bahwa error tiap elemen i harus lebih kecil atau sama dengan

$$\|\hat{e}\|_i = \bar{\phi} \left(\frac{\|u^h\|^2 + \|e^*\|^2}{m} \right)^{1/2} = e_m \quad (2.56)$$

di mana :

$\|\hat{e}\|_i$ = error norma energi ijin yang diperkirakan untuk tiap elemen i

Untuk elemen di mana persyaratan tersebut tidak dipenuhi adalah kandidat untuk diperhalus. Jika kita nyatakan rasio sebagai berikut :

$$\frac{\|e^*\|_i}{e_m} = \zeta_k \quad (2.57)$$

Maka elemen harus diperhalus jika

$$\zeta_k > 1 \quad (2.58)$$