

BAB I

PENDAHULUAN

1. 1. UMUM

1. 1. 1. Metode Elemen Hingga

Permasalahan mekanika dapat dijabarkan dan diselesaikan dengan persamaan matematika untuk mendapatkan solusi eksak. Perkembangan teknologi memunculkan bentuk struktur yang lebih kompleks dan rumit, sehingga perhitungan menggunakan metode eksak akan sulit diterapkan. Karena solusi eksak sulit digunakan, orang mulai mencari beberapa solusi alternatif untuk mendapatkan hasil yang efektif dan efisien dengan metode pendekatan terhadap solusi eksak seteliti mungkin. Oleh karena itu mulai dikembangkan metode numerik yaitu suatu metode yang mentransformasikan ekspresi mekanika kontinu menjadi ekspresi mekanika diskrit. Ada beberapa metode yang termasuk dalam metode numerik, yaitu Metode Beda Hingga, Metode Energi, Metode Matriks, dan yang terakhir adalah Metode Elemen Hingga.

Pada Metode Elemen Hingga sebuah struktur didiskritisasi menjadi elemen-elemen, yang dapat berupa elemen segitiga, segiempat, quadrilateral dan lain-lain. Gabungan elemen-elemen tersebut diharapkan tetap memiliki sifat-sifat struktur yang sebenarnya. Misalnya bentuk geometri, kekakuan, energi dan medan lendutan. Sehingga meskipun metode ini adalah metode pendekatan, hasil yang diperoleh tidak akan banyak berbeda dengan metode eksak.

1.1. 2. Estimasi Kesalahan dan Penghalusan Jaringan Elemen

Metode Elemen Hingga hanya merupakan solusi pendekatan dari solusi eksak. Yang menjadi permasalahannya adalah tidak diketahui solusi eksak yang sesungguhnya, sehingga harus dilakukan pemodelan yang sederhana sehingga dapat diaplikasikan ke model yang lebih kompleks dan rumit. Apabila Modelisasi yang dilakukan kurang tepat, maka akan timbul kesalahan-kesalahan yang tidak diinginkan. Sumber kesalahan lain dari penggunaan metode elemen hingga antara lain [Z1] :

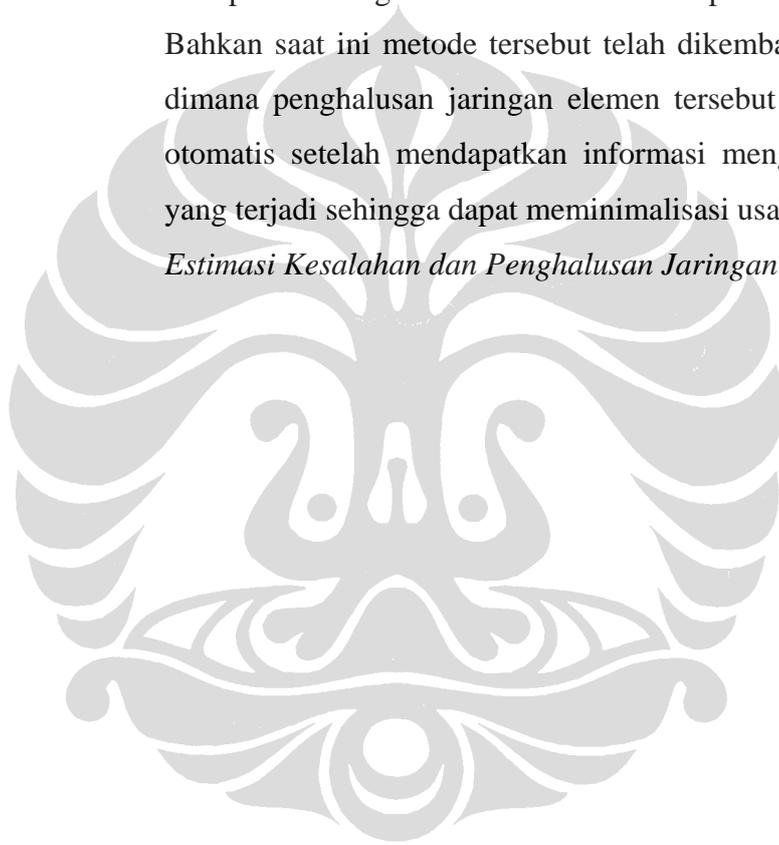
1. Pemakaian integrasi numerik dalam pembentukan persamaan-persamaan elemen, seperti matrik kekakuan.
2. Ketidaktepatan penyelesaian secara numerik seperti yang terjadi pada proses iterasi, invers matrik.
3. Algoritma penyelesaian numerik yang digunakan mempunyai kelemahan pada suatu kasus dan keunggulan tersendiri pada kasus yang lain, sehingga tidak bisa dijamin akan unggul pada setiap kasus, seperti penyelesaian numerik menurut *Gauss-Siedel*, *Newton-Raphson*, *Runge-Kutta* dan sebagainya.
4. Akumulasi kesalahan pembulatan pada proses numerik yang bertahap (efek bola salju).

Kesalahan-kesalahan yang terjadi harus dihitung penyimpangannya agar solusi yang dihasilkan mendekati solusi eksak. Penyimpangan solusi yang disebut dengan error solusi tidak dapat dihindarkan bila menggunakan metode elemen hingga. Pada suatu problem yang kompleks dan rumit akan sulit diketahui atau tidak ada solusi eksaknya, sehingga penyimpangan yang terjadi juga akan sulit diketahui. Untuk itu dibangun sebuah estimator error yang akan membantu mencari solusi yang sedekat mungkin dengan solusi eksak. Hasil perhitungan akan mendekati solusi eksak apabila estimator error memberikan hasil yang kecil.

Namun hanya dengan mengetahui berapa tingkat kesalahan tersebut tidaklah cukup, tetapi perlu pula suatu metode yang dapat memperkecil tingkat kesalahan tersebut.

Hal ini dapat dilakukan dengan metode yang dinamakan sebagai penghalusan jaringan/mesh elemen hingga. Melalui metode ini dengan bantuan informasi dari hasil analisa estimasi kesalahan dapat diketahui bagaimana mesh elemen yang ada harus dimodelilasi ulang untuk memperkecil tingkat kesalahan solusi sampai batas yang dapat diterima. Bahkan saat ini metode tersebut telah dikembangkan sedemikian rupa dimana penghalusan jaringan elemen tersebut dapat dilakukan secara otomatis setelah mendapatkan informasi mengenai tingkat kesalahan yang terjadi sehingga dapat meminimalisasi usaha perhitungan

Estimasi Kesalahan dan Penghalusan Jaringan Elemen



1. 2. LATAR BELAKANG HISTORIS

Hasil dari perkembangan metode elemen hingga adalah penemuan suatu metode estimasi yang dinamakan estimasi kesalahan *a posteriori* pada akhir tahun 1970 yang diperkenalkan oleh **Babuska** [B1] (1978) dan **Ladeveze** [L1] (1977), dimana **Ladeveze** memperkenalkan terlebih dahulu pemahaman tentang error. Saat ini metode estimasi kesalahan *a posteriori* dapat diklasifikasikan menjadi dua kategori yaitu :

- 1) Estimator berdasarkan kesalahan kesetimbangan atau *equilibrium defaults* (kesetimbangan residual, inter-element traction jump, surface traction defaults) pada solusi elemen hingga.
- 2) Estimator berdasarkan *post-processing techniques* dari solusi elemen hingga (melakukan pendekatan terhadap tegangan eksak, lendutan eksak, turunan fungsi medan lendutan, dan lain-lain).

Metode estimasi ini dapat dilakukan pada tingkat global dan lokal. Dalam tingkat global, besarnya kesalahan dihitung dengan resolusi persamaan pada tingkat global yang merepresentasikan problem struktur yang ditinjau. Dalam tingkat lokal, perhitungan estimasi kesalahan dilakukan pada domain yang merupakan bagian dari domain keseluruhan struktur (misalnya pada nodal-nodal, domain elemen-elemen, atau pada elemen itu sendiri).

Untuk metode global sendiri sudah sering dipakai sejak tahun 1978, yang memiliki sifat:

- Diukur dalam bentuk norma energi
- Tidak ada informasi mengenai solusi pada tingkat lokal
- Tidak terlalu sulit dalam melakukan komputasinya

Metode global ini telah dikembangkan menjadi dua kategori yaitu :

- Metode pemulihan (*Recovery Method*)

Menggunakan prosedur *post-processing technique* dari solusi yang didapatkan dari metode elemen hingga untuk memulihkan gradien (tegangan) dan menghitung perbedaan antara nilai gradien

yang diperoleh dari metode pemulihan terhadap nilai gradien dari metode elemen hingga sebagai pendekatan estimasi kesalahan eksak

➤ Metode residual (*Residual Method*), oleh **Babuska, Oden, Verfurth** [B2,O1,V1]

Untuk mengestimasi kesalahan dikembangkan suatu metode pengestimasi kesalahan agar solusi elemen hingga yang dihasilkan mendekati solusi “eksak”. Pertama-tama **Babuska** dan **Rheinboldt** [B1] memprediksi error solusi elemen hingga dengan memanfaatkan residual hasil persamaan keseimbangan dan residual derivatif normal yang terbentuk pada batas-batas antar elemen. Residual yang dihasilkan tersebut merupakan faktor dominan untuk mengestimasi solusi elemen hingga, khususnya pada kasus 1 dimensi. Kemudian **Gago** [G1,G2] mengembangkan metode ini untuk problem 2D dan menambahkan *inter-element traction jumps* ke dalam formulasinya. Sebuah interpretasi terhadap **Gago** estimator telah dilakukan oleh **Zhong** [Z2] dan **Beckers** [B3] yang menunjukkan bahwa **Gago** estimator terlalu *heuristic*. Maka kemudian estimator eksplisit yang baru dikembangkan dimana *surface traction defaults* dimasukkan dalam analisisnya dan melahirkan teknik estimasi *inter-element tractions* eksak.

Kikuchi [K1] memperkenalkan estimasi penurunan peralihan dengan solusi elemen hingga (estimasi kesalahan interpolasi). **Zienkiewicz** dan **Zhu** [Z1] membangun medan tegangan kontinu dari medan tegangan elemen elemen hingga dengan metode proyeksi global (estimasi lama **Zienkiewicz** dan **Zhu**), metode massa tergroupal (*lump mass*), metode nodal rata-rata, dan metode superkonvergensi (estimasi baru **Zienkiewicz** dan **Zhu**). **Beckers** [B3] menggunakan metode *residual wait* dan ekstrapolasi untuk membangun medan tegangan kontinu dan metode konstruksi dari medan peralihan derajat superior. Kesimpulan yang dapat diambil adalah:

- Estimasi lama dari Z^2 tidak baik untuk elemen isoparametrik derajat genap, tapi sangat bagus untuk elemen pelat DKQ

- Metode massa tergumpal (*lump mass*), demikian pula metode lainnya, dengan cara rata-rata sederhana tidak baik untuk elemen derajat superior atau sama dengan dua.
- Estimasi baru Z^2 serta *metode residual wait* dan ekstrapolasi, baik dalam berbagai kasus.

1.3. ERROR ESTIMATOR

Estimasi error *a posteriori* terus berkembang karena lebih mudah dan efisien. **Prudhomme** dan **Oden** [P1] memperkenalkan strategi baru dalam aplikasi estimasi error *a posteriori*. Mereka memperkenalkan suatu teknik yang dapat meningkatkan reliabilitas estimasi error *a posteriori* dengan menggunakan metode *implicit error residual* untuk mencari batas bawah (*lower bound*) dari estimasi error. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membangun sebuah alat yang dapat memverifikasi akurasi dari solusi metode elemen hingga.

Bernardi [B4] pada tahun 2003 memperkenalkan aplikasi-aplikasi terbaru mengenai estimasi error *a posteriori* terutama dalam hal adaptifitas jaringan (mesh) elemen. Salah satu aplikasi yang diperkenalkannya adalah aplikasi diskritisasi bertahap.

Kedua penelitian diatas masih bersifat hipotesa sehingga diperlukan penelitian lebih lanjut. Oleh karena itu dikesempatan ini penulis sengaja memilih error estimasi **Zienkiewicz-Zhu** [Z3] dikarenakan aplikasinya sudah banyak digunakan dan diterima sebagai metode yang sangat baik didukung dengan kemudahan dalam komputasinya dan implementasinya pada komputer.

Dengan proses *recovery* baru, prosedur estimasi error berdasarkan teknik pemulihan memberikan hasil yang terbaik ketika dilakukan pengujian pada berbagai bentuk problem pelat. Bagaimanapun Babuska, dalam deretan penerbitan mulai 1994 yang memperkenalkan banyak pengujian objektif terhadap error estimator dan menciptakan suatu pengujian berbagai bentuk error estimator

dimana termasuk didalamnya teknik pemulihan error estimator menggunakan metode SPR, yang menjadi pengujian terbaik untuk saat ini.

Metode superkonvergen berikutnya, yang diperkenalkan oleh Boroomand [B5,B6] yang disebut REP (Recovery by Equilibrium in Patches), pada dasarnya menggunakan pembentukan patch elemen juga. Metode ini menggunakan persamaan keseimbangan dari formulasi solusi untuk menghasilkan medan gaya dalam yang dipulihkan. Kemudian metode ini ditingkatkan [B7], dan membuktikan bahwa metode ini lulus test yang diperkenalkan Babuska [B8-B10]. Tidak seperti metode SPR yang memerlukan informasi tentang titik superkonvergen yang berda di seluruh elemen pembentuk patch, REP tidak memerlukannya, metode REP hanya menggunakan titik boundaries yang ada pada elemen. Untuk prosedur perhitungannya secara keseluruhan hampir sama dengan SPR..

1. 4. TEKNIK PEMULIHAN SOLUSI

Solusi perhitungan gaya dalam merupakan suatu hasil yang penting dalam aplikasi teknik sipil. Perhitungan solusi pada umumnya dilakukan pada nodal-nodal elemen, dimana meliputi peralihan (lendutan) nodal, gaya dalam nodal, tegangan dan regangan. Nilai peralihan untuk sebuah model peralihan elemen hingga umumnya memberikan konvergensi error sesuai dengan orde polinomial pembentuk elemen tersebut. Namun untuk nilai gradien atau turunan dari peralihan tersebut, seperti gaya dalam dan tegangan/regangan, umumnya memiliki konvergensi error yang lebih kecil. Oleh karena itu sebuah model elemen hingga perlu dilengkapi sebuah metode yang dapat memperbaiki solusi tersebut dengan akurasi tinggi. Metode ini dikenal luas sebagai teknik pemulihan solusi.

Dengan media error estimator, kita dapat mengetahui tingkat akurasi dan konvergensi sebuah metode pemulihan solusi yang dipakai. Hingga saat ini sudah banyak teknik pemulihan solusi yang dikemukakan oleh berbagai peneliti di dunia, Salah satu metode yang dikenal luas sebagai teknik pemulihan solusi yang baik adalah *Recovery by Equilibrium In Patches*.

1. 5. TUJUAN Dan METODOLOGI PENULISAN

Dalam Tesis ini, akan dievaluasi performa elemen kuadrilateral pelat empat nodal dengan masing-masing tiga derajat kebebasan yang diberi nama MITC[B6] (*Mixed Interpolated Tensorial Components*) melalui penerapan error estimator dengan metode estimasi **Zienkiewicz-Zhu** [Z4] atau estimasi Z^2 dengan teknik pemulihan solusi gaya dalam *Recovery by Equilibrium In Patch* (REP) menggunakan metode *element Interfaced based patch*. Selain itu menggunakan metode proyeksi gaya dalam, rata-rata langsung dan *SPR-nodal based patch* sebagai pembanding.

Penerapan dari metode estimasi kesalahan Z^2 ini adalah untuk menunjukkan bagaimana mengestimasi presisi dari solusi elemen tersebut dan bagaimana merealisasikan presisi tersebut dengan menggunakan jaringan adaptif, sehingga akhirnya diperoleh pemodelan elemen hingga yang mendekati optimal atau mendekati struktur fisik sebenarnya dengan usaha komputasi yang minimal, sehingga hasil yang diperoleh memenuhi batas akurasi yang ditentukan. Selain untuk mengestimasi error pada suatu tahap diskritisasi, error estimator ini juga akan digunakan untuk mengetahui tingkat akurasi dari teknik pemulihan gaya dalam yang digunakan sebagai parameter utama pembentuk error estimator Z^2 . Metodologi penelitian yang digunakan adalah berupa studi literatur dari berbagai buku dan jurnal yang ada di daftar pustaka. Analisa dan test akan dilakukan dengan menggunakan main program FEAP versi 7.1 (*Finite*

Element Analysis Program) yang dibuat oleh R.L. Taylor, dan akan dibuat subrutin teknik pemulihan gaya dalam REP. Untuk metode error estimasi dan teknik pemulihan gaya dalam lainnya sudah tersedia subrutinnya berkat penelitian sebelumnya sehingga pada penelitian kali ini penulis hanya menggunakannya dengan sedikit modifikasi untuk menyesuaikan dengan metode REP. Penjelasan mengenai formulasi elemen MITC[B6] serta implementasinya pada FEAP dapat dilihat pada daftar referensi [K3]

1. 6. PEMBATASAN MASALAH

Masalah yang akan dibahas dibatasi hanya untuk elemen pelat quadrilateral 12 derajat kebebasan, dengan material homogen, isotropik dan linier elastik dengan tipe pembebanan statis. Untuk aplikasi estimasi kesalahan, evaluasi pada proses diskritisasi dilakukan dengan penghalusan jaringan secara seragam dan adaptif. Estimasi kesalahannya menggunakan metode **REP (Recovery Equilibrium In Patch)** yang dikembangkan oleh **Zienkiewicz-Zhu**[Z3], yang menggunakan metode **Element Interface Based Patch**.