

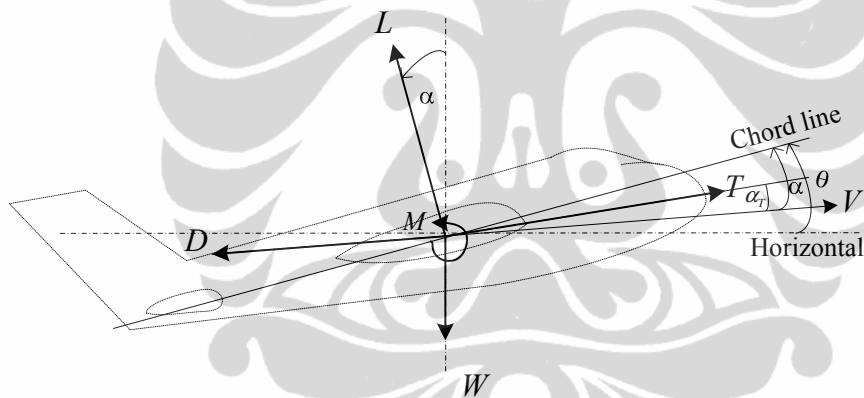
BAB II

DINAMIKA PESAWAT TERBANG

2.1 Aerodinamika Pesawat Terbang

Pesawat Terbang pada prinsipnya dipengaruhi oleh 4 gaya utama, yaitu : gaya dorong (*Thrust T*), gaya hambat (*Drag D*), gaya angkat (*Lift L*), dan gaya gravitasi (*Weight W*).

Pada saat pesawat sedang *cruising* dengan kecepatan V dan ketinggian konstan, maka : $T - D = m \left(\frac{dV}{dt} \right) = 0$ dan $L = W$. Pada saat lepas landas (*take off*), pesawat mengalami percepatan pada arah horizontal dan vertikal, *lift* lebih besar dari *weight* ($L > W$) dan *thrust* lebih besar dari *drag* ($T > D$), dengan *lift* tegak lurus kecepatan ($L \perp V$) dan *drag* sejajar kecepatan ($D \parallel V$).



Gambar 2.1 Arah gaya pada pesawat

di mana :

V = resultan kecepatan pesawat

$$V = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}$$

u, v, w = kecepatan pesawat ke arah longitudinal, lateral, dan vertical.

θ = sudut antara garis sumbu horizontal dan *chord line*

α = *angle of attack* (sudut antara kecepatan pesawat dengan *chord line*)

α_r = sudut antara *thrust* dengan kecepatan pesawat.

W = gaya gravitasi (berat pesawat) tegak lurus garis horizontal

$W = mg$ (m = massa pesawat, g = percepatan gravitasi bumi)



L = gaya angkat (*Lift*) tegak lurus arah kecepatan pesawat $L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$

D = gaya hambat (*Drag*) berlawanan kecepatan pesawat $D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$

ρ, C_L, C_D = *density* udara, *coefisien lift* dan *coefisien drag*

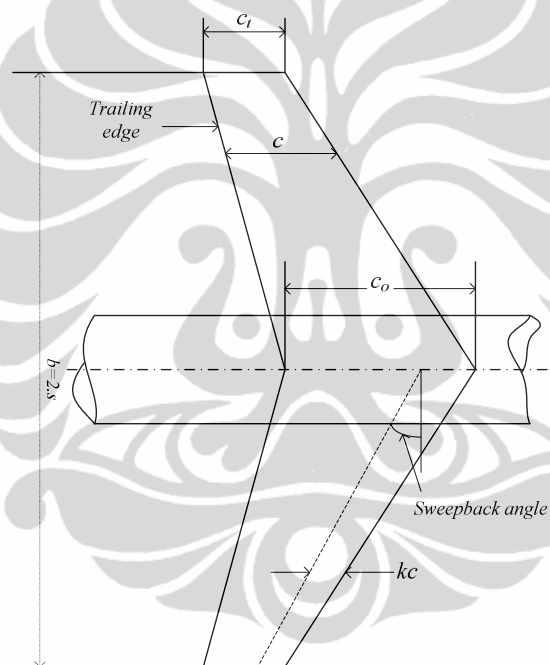
S = Luas wing = $\bar{c}b$, (\bar{c} = *mean chord*, b = *wing span*)

M = *pitching moment*

T = gaya dorong (*Thrust*) dari mesin pesawat. $T = \frac{\dot{G}_{gas}}{g} (V_{gas} - V)$

\dot{G}_{gas} = berat campuran bahan bakar dan udara dalam pembakaran persatuan waktu

V_{gas} = kecepatan gas buang dari mesin pesawat



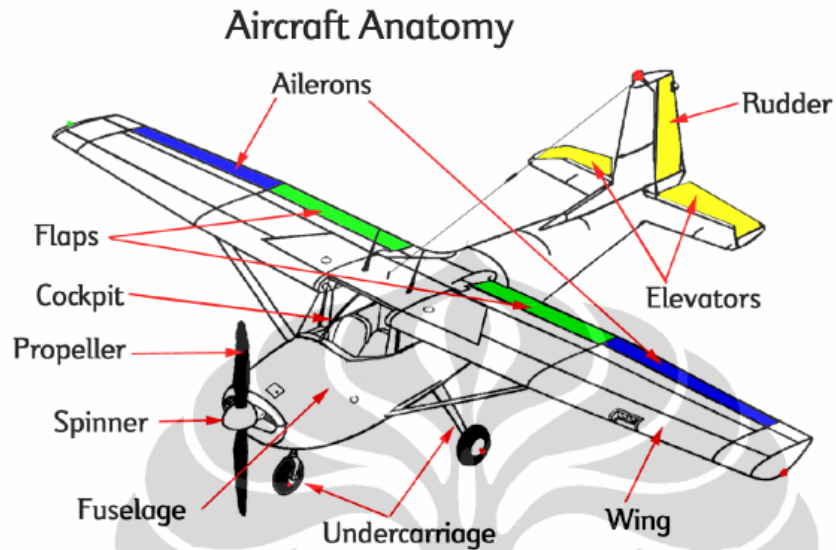
Gambar 2.2 Geometri aerodinamika pada wing

2.2 Kinematika dan Dinamika Pesawat

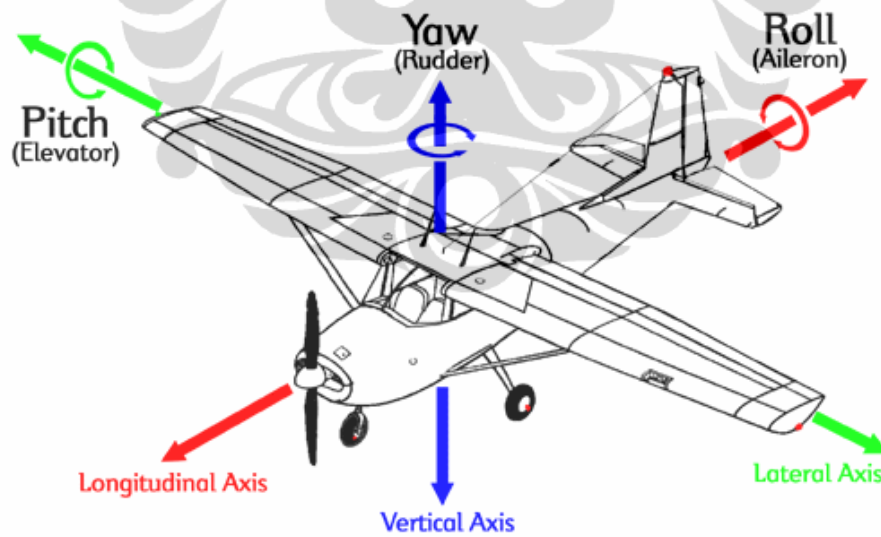
Pesawat terbang memiliki kemampuan bergerak dalam tiga sumbu (x, y, z), yakni *rolling*, *pitching*, dan *yawing*. Gerak naik turunnya hidung pesawat (*pitching*) dikontrol oleh *elevator*, gerak naik turunnya sayap kiri atau kanan pesawat (*rolling*) dikontrol oleh *aileron*, sedangkan gerak berbelok dalam bidang horizontal (*yawing*) dikontrol oleh *rudder*. Pada bagian belakang sayap terdapat *flap* yang berfungsi membantu meningkatkan gaya angkat (*Lift*) pada saat *take off* maupun mengurangi gaya angkat pada saat *landing*. Struktur pesawat, arah gaya,



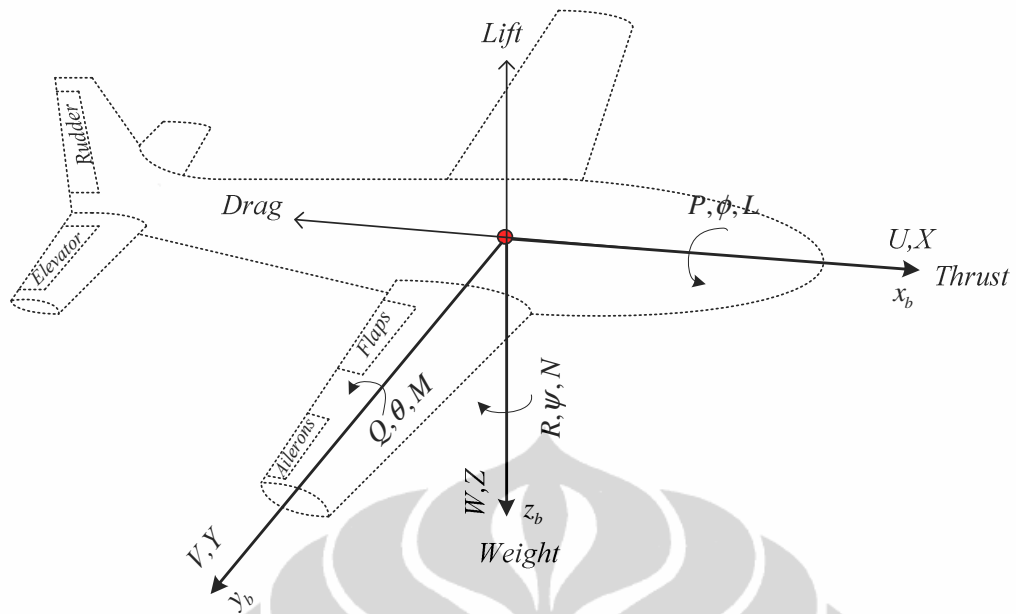
momen, dan kecepatan dijelaskan pada gambar (2.3) dan gambar (2.4) di bawah ini, diambil dari referensi [3].



Gambar 2.3 Struktur Pesawat Terbang



Gambar 2.4 Sumbu arah gerak translasi dan rotasi



Gambar 2.5 Komponen arah gaya, momen, dan kecepatan

Tabel 2.1 Komponen arah gaya, momen, dan kecepatan pada sumbu (x, y, z)

	Roll axis x_b	Pitch axis y_b	Yaw axis z_b
Kecepatan sudut	P	Q	R
Kecepatan translasi	U	V	W
Gaya Aerodynamic	X	Y	Z
Momen Aerodynamic	L	M	N
Moment of Inertia	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Products of Inertia	I_{yz}	I_{xz}	I_{xy}
Perubahan sudut	ϕ	θ	ψ

2.2.1 Gaya pada sumbu (x, y, z)

Komponen arah gaya, momen, kecepatan translasi dan rotasi (*angular*) pada koordinat (x, y, z) dijelaskan pada gambar (2.4) dan gambar (2.5).



2.2.1.1 Gerak Translasi

Hukum II Newton :

$$\sum F = ma \quad (2.1)$$

di mana :

ΣF = resultan gaya yang bekerja pada pesawat [Newton].

$$\Sigma F = F + F_{gravitasi}$$

m = massa dari elemen pesawat [kg].

a = percepatan translasi [m/s^2].

Gaya karena aerodinamika dan gaya dorong mesin [1] pesawat :

$$\Sigma F = m \frac{d}{dt} \{V_T\} = m \left\{ \frac{d}{dt} V_T + (\omega \times V_T) \right\} \quad (2.2)$$

V_T = kecepatan translasi [m/s].

ω = kecepatan angular pesawat [rad/sec]

$$V_T = \hat{i}U + \hat{j}V + \hat{k}W$$

$$\omega = \hat{i}P + \hat{j}Q + \hat{k}R$$

$$\frac{d}{dt} V_T = \hat{i}\dot{U} + \hat{j}\dot{V} + \hat{k}\dot{W}$$

$$\omega \times V_T = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{bmatrix} = \hat{i}(QW - VR) + \hat{j}(UR - PW) + \hat{k}(PV - UQ)$$

$$\Sigma F = m \frac{d}{dt} \{V_T\} = m \left\{ (\hat{i}\dot{U} + \hat{j}\dot{V} + \hat{k}\dot{W}) + \hat{i}(QW - VR) + \hat{j}(UR - PW) + \hat{k}(PV - UQ) \right\}$$

$$\Sigma F = m \left\{ \hat{i}(\dot{U} + QW - VR) + \hat{j}(\dot{V} + UR - PW) + \hat{k}(\dot{W} + VP - UQ) \right\}$$

$$\Sigma F = \hat{i}\Sigma F_x + \hat{j}\Sigma F_y + \hat{k}\Sigma F_z$$

sehingga,

$$\Sigma F_x = m(\dot{U} + QW - VR)$$

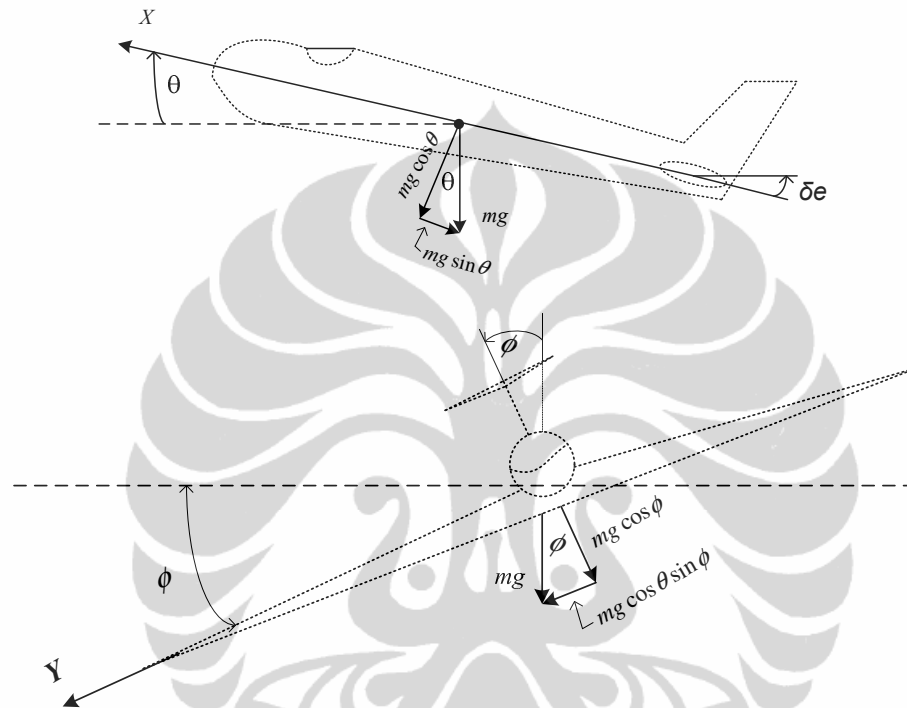
$$\Sigma F_y = m(\dot{V} + UR - PW) \quad (2.3)$$

$$\Sigma F_z = m(\dot{W} + VP - UQ)$$



Gaya karena gravitasi bumi :

$$\begin{aligned}(F_x)_{gravity} &= -mg \sin \theta \\ (F_y)_{gravity} &= mg \cos \theta \sin \phi \\ (F_z)_{gravity} &= mg \cos \theta \cos \phi\end{aligned}\quad (2.4)$$



Gambar 2.6 Komponen gaya gravitasi

Dari persamaan (2.3) dan (2.4) diperoleh :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_x + (F_x)_{gravity} = m(\dot{U} + QW - VR) \\ \sum F_y &= F_y + (F_y)_{gravity} = m(\dot{V} + UR - PW) \\ \sum F_z &= F_z + (F_z)_{gravity} = m(\dot{W} + VP - UQ)\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned}F_x - mg \sin \theta &= m(\dot{U} + QW - VR) \\ F_y + mg \cos \theta \sin \phi &= m(\dot{V} + UR - PW) \\ F_z + mg \cos \theta \cos \phi &= m(\dot{W} + VP - UQ)\end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{karena } F_x = X, F_y = Y, F_z = Z,$$



maka **persamaan gaya** pada sumbu (x, y, z) menjadi :

$$\begin{aligned} X - mg \sin \theta &= m(\dot{U} + QW - VR) \\ Y + mg \cos \theta \sin \phi &= m(\dot{V} + UR - PW) \\ Z + mg \cos \theta \cos \phi &= m(\dot{W} + VP - UQ) \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2.1.2 Gerak Rotasi

Torsi [2] pada pusat massa (*center of gravity*) pesawat :

$$\sum M = \frac{d}{dt}(H) = \frac{d}{dt}(I\omega) = I \frac{d\omega}{dt}$$

di mana,

M = torsi [$kg.m^2.rad/sec^2$.]

H = momentum angular [$kg.m^2.rad/sec$.]

I = momen inertiya [$kg.m^2$]

$$H = I\omega$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$$

$$H_x = I_{xx}P - I_{xy}Q - I_{xz}R$$

$$H_y = -I_{xy}P + I_{yy}Q - I_{yz}R$$

$$H_z = -I_{xz}P - I_{yz}Q + I_{zz}R$$

(2.7)

$$M = \left(\frac{d}{dt} H \right) + (\omega \times H)$$

$$M = \left(\frac{d}{dt} I\omega \right) + (\omega \times H)$$

$$M = I \left(\frac{d}{dt} \omega + \omega \times \omega \right) + (\omega \times H)$$



$$\frac{d}{dt}\omega = \hat{i}\dot{P} + \hat{j}\dot{Q} + \hat{k}\dot{R} \quad (2.8)$$

$$(\omega \times H) = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P & Q & R \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$(\omega \times H) = \hat{i}(QH_z - RH_y) + \hat{j}(RH_x - PH_z) + \hat{k}(PH_y - QH_x)$$

Dari persamaan (2.7), (2.8) dan (2.9) diperoleh :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + (I_{zz} - I_{yy})QR \\ M_y &= I_{yy}\dot{Q} + I_{xz}(P^2 - R^2) + (I_{xx} - I_{zz})PR \\ M_z &= I_{zz}\dot{R} - I_{xz}(\dot{P} - QR) + (I_{yy} - I_{zz})PQ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{karena } M_x = L, M_y = M, M_z = N$$

maka **persamaan torsi** pada sumbu (x, y, z) menjadi :

$$\left. \begin{aligned} L &= I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + (I_{zz} - I_{yy})QR \\ M &= I_{yy}\dot{Q} + I_{xz}(P^2 - R^2) + (I_{xx} - I_{zz})PR \\ N &= I_{zz}\dot{R} - I_{xz}(\dot{P} - QR) + (I_{yy} - I_{zz})PQ \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

2.2.2 Linearisasi

Persamaan (2.6) dan (2.10) di atas adalah *non-linear*. Apabila semua varabel mendapat gangguan (terjadi perubahan yang relative kecil) [1], [2], [3], di mana :

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \Delta X & U &= U_0 + \Delta U & P &= P_0 + \Delta P & L &= L_0 + \Delta L & \phi &= \phi_0 + \Delta\phi \\ Y &= Y_0 + \Delta Y & V &= V_0 + \Delta V & Q &= Q_0 + \Delta Q & M &= M_0 + \Delta M & \theta &= \theta_0 + \Delta\theta \\ Z &= Z_0 + \Delta Z & W &= W_0 + \Delta W & R &= R_0 + \Delta R & N &= N_0 + \Delta N & \psi &= \psi_0 + \Delta\psi \end{aligned}$$

maka persamaan (2.6) menjadi :

$$\begin{aligned} &X_0 + \Delta X - mg \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \\ &= m \left\{ \frac{d}{dt}(U_0 + \Delta U) + (Q_0 + \Delta Q)(W_0 + \Delta W) - (V_0 + \Delta V)(R_0 + \Delta R) \right\} \\ &Y_0 + \Delta Y + mg \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \sin(\phi_0 + \Delta\phi) \\ &= m \left\{ \frac{d}{dt}(V_0 + \Delta V) + (U_0 + \Delta U)(R_0 + \Delta R) - (P_0 + \Delta P)(W_0 + \Delta W) \right\} \\ &Z_0 + \Delta Z + mg \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \cos(\phi_0 + \Delta\phi) \\ &= m \left\{ \frac{d}{dt}(W_0 + \Delta W) + (V_0 + \Delta V)(P_0 + \Delta P) - (U_0 + \Delta U)(Q_0 + \Delta Q) \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$



dan persamaan (2.10) menjadi persamaan (2.12) :

$$\begin{aligned} L_0 + \Delta L &= I_{xx} (\dot{P}_0 + \Delta \dot{P}) - I_{xz} ((\dot{R}_0 + \Delta \dot{R}) + (P_0 + \Delta P)(Q_0 + \Delta Q)) + (I_{zz} - I_{yy})(Q_0 + \Delta Q)(R_0 + \Delta R) \\ M_0 + \Delta M &= I_{yy} (\dot{Q}_0 + \Delta \dot{Q}) + I_{xz} ((P_0 + \Delta P)^2 - (R_0 + \Delta R)^2) + (I_{xx} - I_{zz})(P_0 + \Delta P)(R_0 + \Delta R) \\ N_0 + \Delta N &= I_{zz} (\dot{R}_0 + \Delta \dot{R}) - I_{xz} ((\dot{P}_0 + \Delta \dot{P}) - (Q_0 + \Delta Q)(R_0 + \Delta R)) + (I_{yy} - I_{zz})(P_0 + \Delta P)(Q_0 + \Delta Q) \end{aligned} \quad (2.12)$$

di mana *initial* θ pada $X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0, W_0, P_0, Q_0, R_0, L_0, M_0, N_0, \phi_0, \theta_0, \psi_0$

merupakan kondisi awal (*initial condition*), sedangkan *initial* Δ pada $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta U, \Delta V, \Delta W, \Delta P, \Delta Q, \Delta R, \Delta L, \Delta M, \Delta N, \Delta \phi, \Delta \theta, \Delta \psi$ adalah perubahan kecil.

Pesawat diasumsikan terbang simetris, di mana kondisi awal (*initial condition*)

$$X_0 \approx Y_0 \approx Z_0 \approx V_0 \approx W_0 \approx P_0 \approx Q_0 \approx R_0 \approx \phi_0 \approx \psi_0 \approx 0, \quad \text{maka persamaan (2.11)}$$

menjadi :

$$\begin{aligned} \Delta X - mg(\Delta \theta \cos \theta_0) &= m\Delta \dot{U} \\ \Delta Y + mg(\Delta \phi \cos \theta_0 - U_0 \Delta R) &= m\Delta \dot{V} \\ \Delta Z - mg(\Delta \theta \sin \theta_0 + U_0 \Delta Q) &= m\Delta \dot{W} \end{aligned} \quad (2.13)$$

dan persamaan (2.12) menjadi :

$$\begin{aligned} \Delta L &= I_{xx} \Delta \dot{P} - I_{xz} \Delta \dot{R} \\ \Delta M &= I_{yy} \Delta \dot{Q} \\ \Delta N &= I_{zz} \Delta \dot{R} - I_{xz} \Delta \dot{P} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Gaya ΔX yang merupakan fungsi dari $U, W, \delta_e, \delta_r \rightarrow \Delta X(U, W, \delta_e, \delta_r)$. Gaya

ΔY yang merupakan fungsi dari $V, P, R, \delta_r \rightarrow \Delta Y(V, P, R, \delta_r)$, dan Gaya

ΔZ yang merupakan fungsi dari $U, W, \dot{W}, Q, \delta_e, \delta_r \rightarrow \Delta Z(U, W, \dot{W}, Q, \delta_e, \delta_r)$

diturunkan dengan deret *Taylor* menjadi :

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{\partial X}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial X}{\partial W} \Delta W + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r \\ \Delta Y &= \frac{\partial Y}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial Y}{\partial P} \Delta P + \frac{\partial Y}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r \\ \Delta Z &= \frac{\partial Z}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial Z}{\partial W} \Delta W + \frac{\partial Z}{\partial \dot{W}} \Delta \dot{W} + \frac{\partial Z}{\partial Q} \Delta Q + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dengan cara yang sama untuk Torsi $\Delta L, \Delta M$ dan ΔN (diturunkan dengan deret *Taylor*), diperoleh :



$$\begin{aligned}
\Delta L &= \frac{\partial L}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial L}{\partial P} \Delta P + \frac{\partial L}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \Delta \delta_a \\
\Delta M &= \frac{\partial M}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial M}{\partial W} \Delta W + \frac{\partial M}{\partial \dot{W}} \Delta \dot{W} + \frac{\partial M}{\partial Q} \Delta Q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial M}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r \\
\Delta N &= \frac{\partial N}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial N}{\partial P} \Delta P + \frac{\partial N}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \Delta \delta_a
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Untuk menyederhanakan notasi, didefinisikan : $X_x = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial x}$, $Z_x = \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial x}$, dan

$$M_x = \frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M}{\partial x}, \text{ dengan } X_x, Z_x, M_x \text{ merupakan } \textit{stability derivatives}.$$

Pada saat terbang simetris (gerak *longitudinal*), gaya yang berpengaruh adalah ΔX (gaya pada sumbu *longitudinal*) dan ΔZ (gaya pada sumbu *vertical*), sedangkan torsi yang berpengaruh adalah ΔM (*pitching / torsi* pada sumbu *lateral y*). Pengaruh Z_q , $Z_{\dot{w}}$ sangat kecil [1],[2],[3], maka $Z_q \approx Z_{\dot{w}} \approx 0$.

Substitusi persamaan (2.15) ke persamaan (2.13), dan persamaan (2.16) ke persamaan (2.14) diperoleh persamaan gerak longitudinal :

$$\begin{aligned}
X_u \Delta U + X_w \Delta W + X_{\delta_e} \Delta \delta_e + X_{\delta_r} \Delta \delta_r &= \Delta \dot{U} + (g \cos \theta_0) \Delta \theta \\
Z_u \Delta U + Z_w \Delta W + Z_{\delta_e} \Delta \delta_e + Z_{\delta_r} \Delta \delta_r &= \Delta \dot{W} - U_0 \Delta Q + (g \sin \theta_0) \Delta \theta \\
M_u \Delta U + M_w \Delta W + M_{\dot{w}} \Delta \dot{W} + M_q \Delta Q + M_{\delta_e} \Delta \delta_e + M_{\delta_r} \Delta \delta_r &= \Delta \dot{Q}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Didefinisikan $\Delta U = u$, $\Delta V = v$, $\Delta W = w$, $\Delta Q = q$, $\Delta \delta = \delta$ dan $\Delta \theta = \theta$.

Karena sudut θ_0 relatif kecil, di mana $\theta_0 \approx 0$, maka $\cos \theta_0 = 1$ dan $\sin \theta_0 = 0$, dari ref. [1], [2], [3], maka persamaan **gerak longitudinal** (2.17) dilinearkan menjadi :

$$X_u u + X_w w + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_r} \delta_r = \dot{u} + g \theta \tag{2.18}$$

$$Z_u u + Z_w w + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_r} \delta_r = \dot{w} - u_0 q \tag{2.19}$$

$$M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_r} \delta_r = \dot{q} \tag{2.20}$$



BAB III

PEMODELAN GERAK PESAWAT DALAM RUANG KEADAAN

3.1 Penurunan Model Matematis Sistem Gerak Pesawat

Gerak longitudinal pesawat terbang adalah gerak sepanjang sumbu x , di mana *control surface* yang sangat berpengaruh adalah *elevator* dan *flaps*.

Model pesawat yang digunakan adalah CHARLIE [2] *Passenger Jet Aircraft* bermesin empat pada *flight condition 4*.

Tabel 3.1 Data Parameters Pesawat CHARLIE

<i>Parameters</i>	<i>Unit</i>	<i>Value</i>
Massa, m	(kg)	290000
Wing area, S	(m^2)	510
Wing mean aerodynamic chord, \bar{c}	(m)	8.3
Aspect ratio	-	7.0
c.g. (<i>center of gravity</i>)	(%) \bar{c}	0.25 \bar{c}
Pilot location (<i>relative to c.g.</i>), l_{x_p}	(m)	26.2
Pilot location (<i>relative to c.g.</i>), l_{z_p}	(m)	-3.05
Moment Inertia, I_{xx}	($kg.m^2$)	24.6 x 10 ⁶
Moment Inertia, I_{yy}	($kg.m^2$)	45 x 10 ⁶
Moment Inertia, I_{zz}	($kg.m^2$)	67.5 x 10 ⁶
Moment Inertia, I_{xz}	($kg.m^2$)	1.32 x 10 ⁶
Flight Condition, <i>Height</i>	(m)	12200
Mach Number, M	-	0.8
Speed cruising, U_0	($m.s^{-1}$)	250
Pressure dynamics, \bar{q}	($N.m^{-2}$)	9911
Angle of attack, α_0	(<i>degrees</i>)	4.6



Tabel 3.2 Data Aerodinamik pesawat CHARLIE

<i>Stability derivatives</i>	<i>Units</i>	<i>Value</i>
U-derivative, X_u	$(1/s)$	0.0002
Z_u	$(1/s)$	-0.007
M_u	$(1/m.s.)$	0.00006
W-derivative, X_w	$(1/s)$	0.039
Z_w	$(1/s)$	-0.317
M_w	$(1/m.s.)$	-0.003
$X_{\dot{w}}$	$(1/s)$	0
$Z_{\dot{w}}$	$(1/s)$	0
$M_{\dot{w}}$	$(1/m.s.)$	-0.0004
q-derivative, X_q	$(1/s)$	0
Z_q	$(1/s)$	-1.57
M_q	$(1/m.s.)$	-0.339
X_{δ_r}	$(1/s)$	3.434×10^{-6}
Z_{δ_r}	$(1/s)$	-1.5×10^{-7}
M_{δ_r}	$(1/m.s.)$	0.67×10^{-7}
X_{δ_E}	$(1/s)$	0.44
Z_{δ_E}	$(1/s)$	-5.46
M_{δ_E}	$(1/m.s.)$	-1.16

Persamaan ruang keadaan (*state space*) sistem adalah :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\eta \\ y &= Cx + D\eta \end{aligned} \quad (3.1)$$

di mana :



x = vektor keadaan ($n \times 1$)

A = matriks keadaan ($n \times n$)

B = matriks masukan ($n \times p$)

C = matriks keluaran ($q \times n$)

D = matriks transmisi langsung ($q \times p$)

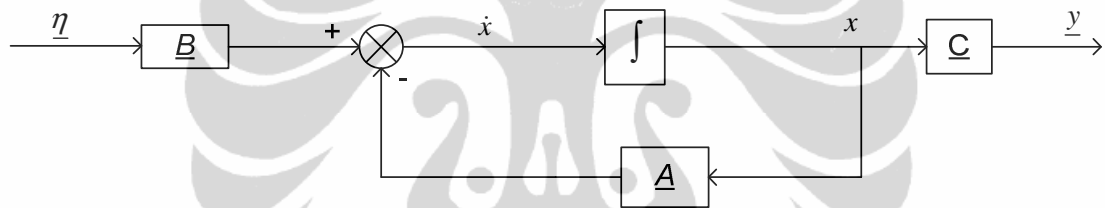
η = vektor masukan ($p \times 1$)

y = vector keluaran ($q \times 1$)

Pada aplikasi pesawat terbang (*rigid airframe*) nilai matriks $D = 0$ (referensi [3]), sehingga persamaan (3.1) menjadi :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\eta \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (3.2)$$

Persamaan (3.2) dalam diagram blok adalah :



Gambar 3.1 Diagram blok sistem

Penurunan model matematis gerak longitudinal diperoleh dari persamaan (2.18), (2.19) dan (2.20) yang disusun kembali menjadi :

$$\dot{u} = X_u u + X_w w - g\theta + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_r} \delta_r \quad (3.3)$$

$$\dot{w} = Z_u u + Z_w w + u_0 q + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_r} \delta_r \quad (3.4)$$

$$\dot{q} = M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_r} \delta_r \quad (3.5)$$

Substitusi persamaan (3.4) ke dalam persamaan (3.5) diperoleh :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= X_u u + X_w w - g\theta + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{w} &= Z_u u + Z_w w + u_0 q + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_r} \delta_r \\ \dot{q} &= (M_u + M_w Z_u) u + (M_w + M_{\dot{w}} Z_w) w + (M_q + M_{\dot{w}} u_0) q \\ &\quad + (M_{\delta_e} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}) \delta_e + (M_{\delta_r} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_r}) \delta_r\end{aligned}\quad (3.6)$$



Karena $\frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = \omega_y(t) = q(t)$ atau $\dot{\theta}(t) = q(t) \rightarrow \dot{\theta} = q$

Sehingga persamaan (3.6) dalam **persamaan ruang keadaan** menjadi :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u & Z_w & u_0 & 0 \\ M_u + M_w Z_u & M_w + M_w Z_w & M_q + M_w u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_r} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_r} \\ M_{\delta_e} + M_w Z_{\delta_e} & M_{\delta_r} + M_w Z_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

di mana,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u & Z_w & u_0 & 0 \\ M_u + M_w Z_u & M_w + M_w Z_w & M_q + M_w u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_r} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_r} \\ M_{\delta_e} + M_w Z_{\delta_e} & M_{\delta_r} + M_w Z_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix}$$

Dengan memasukkan data pesawat CHARLIE pada table (3.1) dan table (3.2) ke dalam persamaan (3.7) maka diperoleh :

$$A = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.039 & 0 & -9.81 \\ -0.07 & -0.317 & 250 & 0 \\ 8.8 \cdot 10^{-5} & -0.002873 & -0.439 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.44 & 3.434 \cdot 10^{-6} \\ -5.46 & -1.5 \cdot 10^{-7} \\ -1.1578 & 6.701 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Dengan nilai matriks A dan matriks B tersebut di atas diperoleh **persamaan ruang keadaan (state-space) pesawat CHARLIE:**

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.039 & 0 & -9.81 \\ -0.07 & -0.317 & 250 & 0 \\ 8.8*10^{-5} & -0.002873 & -0.439 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0.44 & 3.434*10^{-6} \\ -5.46 & -1.5*10^{-7} \\ -1.1578 & 6.701*10^{-7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Karakteristik sistem ditentukan oleh **nilai eigen** melalui persamaan :

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (3.9)$$

di mana, λ merupakan nilai eigen dari sistem. Sistem dikatakan stabil jika semua pole (nilai eigen) adalah negative, atau $|\lambda I - A| < 0$

Sedangkan **Vektor eigen** ditentukan dengan persamaan :

$$(\lambda_i I - A)V_i = 0 \quad (3.10)$$

dengan $i = 1, 2, 3, 4$ dan $V_i = \text{vector eigen}$.

Karakteristik pesawat CHARLIE dengan persamaan (3.9) :

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 0.0002 & -0.039 & 0 & 9.81 \\ 0.07 & \lambda + 0.317 & -250 & 0 \\ -8.8*10^{-5} & 0.002873 & \lambda + 0.439 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

diperoleh nilai eigen :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.3785 + 0.8456i \\ \lambda_2 &= -0.3785 - 0.8456i \\ \lambda_3 &= 0.0006 + 0.0512i \\ \lambda_4 &= 0.0006 - 0.0512i \end{aligned} \quad (3.11)$$

Karakteristik pesawat CHARLIE tidak stabil, karena ada nilai eigen yang positif (yaitu λ_3 dan λ_4).



Vektor Eigen sistem pesawat CHARLIE dengan persamaan (3.10) :

$$(\lambda_i I - A)V_i = 0 \text{ dengan } i = 1, 2, 3, 4$$

Pada $i = 1$

$$(\lambda_1 I - A)V_1 = 0 \text{ di mana } \lambda_1 = -0.3785 + 0.8456i$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 0.0002 & -0.039 & 0 & 9.81 \\ 0.07 & \lambda_1 + 0.317 & -250 & 0 \\ -8.8 \cdot 10^{-5} & 0.002873 & \lambda_1 + 0.439 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \end{bmatrix} = 0$$

diperoleh :

$$V_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ v_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0098 - 0.0106i \\ 0.9999 \\ -0.0002 + 0.0034i \\ 0.0034 - 0.0013i \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, untuk $i = 2, 3, 4$ diperoleh :

$$V_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ v_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0098 + 0.0106i \\ 0.9999 \\ -0.0002 - 0.0034i \\ 0.0034 + 0.0013i \end{bmatrix} \quad V_3 = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ v_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9999 \\ 0.0104 + 0.0037i \\ -0.0003 + 0.0000i \\ 0.0001 + 0.0052i \end{bmatrix}$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} v_{14} \\ v_{24} \\ v_{34} \\ v_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9999 \\ 0.0104 - 0.0037i \\ -0.0003 - 0.0000i \\ 0.0001 - 0.0052i \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks *eigen vector* pesawat CHARLIE adalah :

$$\underline{V} = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4]$$

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 0.0098 - 0.0106i & 0.0098 + 0.0106i & -0.9999 & -0.9999 \\ 0.9999 & 0.9999 & 0.0104 + 0.0037i & 0.0104 - 0.0037i \\ -0.0002 + 0.0034i & -0.0002 - 0.0034i & -0.0003 + 0.0000i & -0.0003 - 0.0000i \\ 0.0034 - 0.0013i & 0.0034 + 0.0013i & 0.0001 + 0.0052i & 0.0001 - 0.0052i \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.3 Uji Controllability dan Observability

Keterkontrolan (*controllability*) dan keteramatan (*observability*) suatu sistem dapat ditentukan dengan mengetahui rank dari matriks M dan O, jika *full rank* maka sistem tersebut *Controllability* dan *Observability* lengkap [1],[2],[3].



$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (3.12)$$

di mana M merupakan Matriks *Controllability*

$$O = [C \quad CA \quad CA^2 \quad CA^3]^T \quad (3.13)$$

di mana O merupakan Matriks *Observability*

Uji *Controllability* pesawat CHARLIE diuji dengan persamaan (3.12) :

$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$ di mana M merupakan Matriks *Controllability*

$$M = \begin{bmatrix} 0.4400 & 3.434 \cdot 10^{-6} & -0.2129 & -0.0000 & 0.1357 & -0.0000 & 3.5267 & -0.0000 \\ -5.4600 & -1.5 \cdot 10^{-7} & -287.754 & 0.0002 & 222.2348 & -0.0001 & 78.7212 & -0.0000 \\ -1.1578 & 6.701 \cdot 10^{-7} & 0.5240 & -0.0000 & 0.5967 & -0.0000 & -0.9005 & 0.0000 \\ 0 & 0 & -1.1578 & 0.0000 & 0.5240 & -0.0000 & 0.5967 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

Karena rank dari matriks M adalah 4 (baris 1,2,3,4 pada matriks saling independent), maka pesawat dapat dikontrol (*controllability*) secara lengkap.

Uji *Observability* pesawat CHARLIE diuji dengan persamaan (3.13) :

$O = [C \quad CA \quad CA^2 \quad CA^3]^T$ di mana O merupakan Matriks *Observability*

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0001 & -0.0029 & -0.4390 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0002 & 0.0022 & -0.5256 & -0.0009 \\ 0.0001 & -0.0029 & -0.4390 & 0 \\ -0.0002 & 0.0008 & 0.7738 & -0.0016 \\ 0.0002 & 0.0022 & -0.5256 & -0.0009 \end{bmatrix}$$

Karena rank dari matriks O adalah 4 (kolom 1,2,3,4 pada matriks saling independent), maka pesawat dapat diamati (*observability*) secara lengkap

