

BAB 4

UJI NUMERIK

4.1 Umum

Bab ini akan menampilkan beberapa hasil dari uji numerik dari berbagai kasus pelat. Yang akan dilakukan adalah pengujian terhadap implementasi teknik pemulihan gaya dalam dan pengujian terhadap error estimator Z^2 . Tujuan dilakukan uji numerik ini adalah untuk mengetahui sifat dan perilaku error estimator Z^2 dan teknik pemulihan gaya dalam PPR pada elemen MITC seperti tingkat akurasi dan kecepatan konvergensi error.

Uji numerik yang dilakukan terbagi menjadi dua bagian utama. Bagian pertama akan membahas implementasi teknik pemulihan gaya dalam menggunakan metode *PPR-Nodal Based Patch* dan dibandingkan dengan metode *REP-Element Based Patch*, metode *SPR-Nodal Based Patch*, metode rata-rata dan metode proyeksi.

Pada bagian kedua kita akan meninjau pengujian terhadap estimasi error menggunakan error estimator Z^2 . Pada bagian ini kita akan terfokus pada beberapa parameter utama estimasi error berdasarkan berbagai macam variasi bentuk geometri, pembebanan, dan kondisi batas dari problem struktur yang ditinjau. Kemudian dilakukan perbandingan antara metode *PPR-Nodal Based Patch* dengan metode *REP-Element Based Patch*, metode *SPR-Nodal Based Patch*, metode rata-rata dan metode proyeksi. Parameter-parameter utama estimasi error tersebut antara lain :

1. Estimasi error dalam bentuk norma energi secara global (*predicted global energy norm error*) yaitu $\|e^*\|$
2. Indikator error relatif struktur dalam norma energi (*predicted relative global energy norm error*) yaitu ϕ^* (%)
3. Indikator penghalusan lokal dalam norma energi (*mesh refinement indicator*) yaitu ζ

Beberapa kasus yang disajikan di sini ada solusi eksaknya sehingga kita dapat mengetahui kualitas dari estimator error. Dengan kata lain kita dapat mengukur indikator efektivitasnya (Θ) untuk memberikan gambaran umum perilaku error estimator dalam mendekati error eksak.

Pembahasan estimasi error ini selanjutnya akan dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama merupakan uji numerik terhadap contoh-contoh kasus struktur pelat di mana solusi eksak sudah tersedia sehingga dapat diukur kualitas error estimator yang digunakan.

Pada bagian kedua, error estimator Z^2 diaplikasikan pada kasus-kasus pelat secara umum di mana solusi eksak tidak tersedia atau sulit untuk didapatkan. Problem yang dibahas merupakan kombinasi dari masalah beban terpusat dan terbagi rata, perletakan jepit dan sendi, singularitas sudut dalam, bentuk geometri seperti pelat busur berlubang 180° , serta diskontinuitas geometri seperti perubahan ketebalan antar tiap segmen struktur. Pada bagian ini tidak hanya akan dilihat kualitas error estimator, tetapi juga peran dari parameter-parameter utamanya dalam mengaplikasikan penghalusan jaringan elemen secara adaptif, serta tingkat akurasi dan kecepatan konvergensi dari teknik pemulihan gaya dalam yang digunakan. Berbeda halnya dengan penghalusan seragam di mana parameter indikator penghalusan lokal tidak begitu berperan dalam proses penghalusan tersebut.

Pada setiap kasus struktur yang ditinjau akan ditunjukkan langkah-langkah penghalusan jaringan elemen, sehingga proses penghalusan dapat dikontrol berdasarkan parameter error estimator dan diperoleh jaringan yang optimum yang menghasilkan error terkecil. Proses penghalusan akan dihentikan ketika nilai indikator error relatif berada di bawah angka tertentu, di mana telah kita sepakati sebelumnya bahwa kita akan menggunakan angka 5% sebagai batas penerimaan karena error yang berada di bawah angka 5% tersebut sudah mencukupi untuk aplikasi rekayasa pada umumnya. Kadang-kadang error di bawah 5% belum tentu menghasilkan indikator penghalusan lokal di bawah angka 1 sehingga diperlukan tahap penghalusan selanjutnya untuk menghasilkan indikator penghalusan tiap elemen berada di bawah angka 1. Sebagai akibatnya kita akan memperoleh jaringan elemen yang cukup banyak sehingga membutuhkan waktu komputasi yang lebih lama dan tentunya akan memakan banyak memori untuk aplikasi pada

komputer. Umumnya parameter error global seperti indikator error relatif sudah cukup untuk dijadikan sebagai kriteria penghentian penghalusan jaringan elemen.

4.2 Uji Konvergensi Gaya Dalam Dan Estimasi Error

Pada bagian ini akan dibahas uji konvergensi gaya dalam dan estimasi error menggunakan lima metode pemulihan gaya dalam. Sebelumnya penelitian sudah dilakukan untuk lima metode. Dalam pengujian ini ditambahkan metode PPR - *Nodal Based Patch*.

Keterangan yang diperlukan:

PPR0 = metode PPR- *Nodal Based Patch*, dengan 6 term orde polinomial.

$$P(\xi, \eta) = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \rangle$$

PPR1 = metode PPR- *Nodal Based Patch*, dengan 8 term orde polinomial.

$$P(\xi, \eta) = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle$$

PPR2 = metode PPR- *Nodal Based Patch*, dengan 9 term orde polinomial.

$$P(\xi, \eta) = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \xi^2\eta^2 \rangle$$

REP = metode REP- *Element Based Patch*.

SPR = metode SPR- *Nodal Based Patch*

AVR = metode rata-rata langsung

PRJ = metode proyeksi

Persentase error (%)

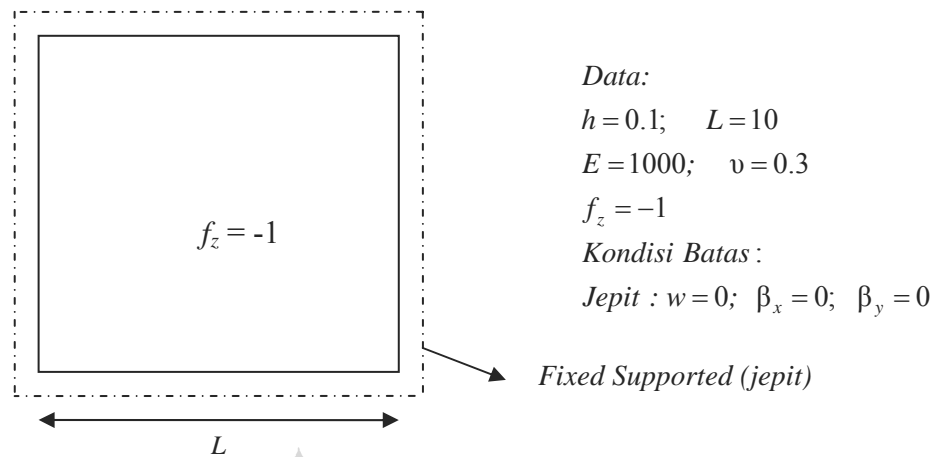
NELT = jumlah elemen

4.2.1 Pelat Khusus

4.2.1.3 Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit dengan Beban Merata

Pelat bujur sangkar adalah contoh kasus yang banyak ditemukan dalam aplikasi bidang sipil. Penghalusan dilakukan secara seragam dimulai dari mesh 4×4, 8×8, 16×16. Solusi gaya dalam eksak untuk kasus perletakan jepit adalah [A2]:

- Momen di pusat pelat : $M = 0,0231 f_z L^2$
- Momen di tengah tepi pelat : $M = 0,0513 f_z L^2$



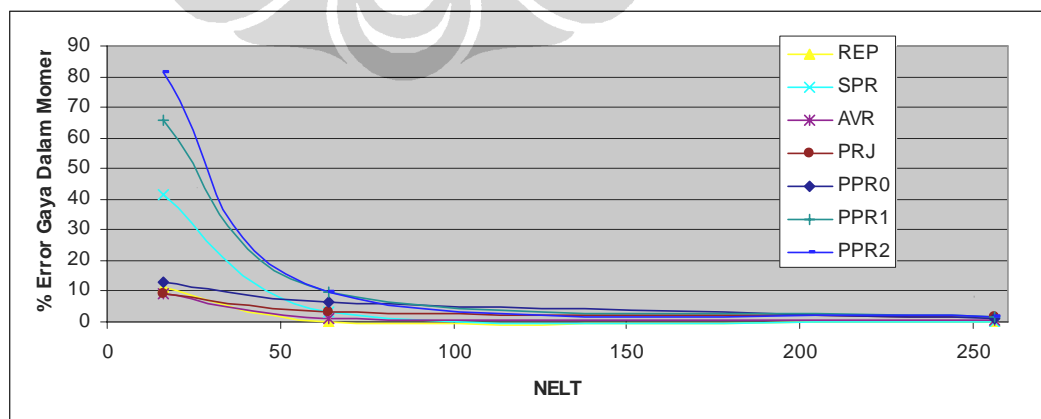
Gambar 4.1 Pelat Bujursangkar Bertumpuan Jepit Dengan Beban Terbagi Merata

Konvergensi Gaya Dalam

Tabel 4.1 Momen Lentur di Pusat Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit

NELT	Momen Lentur Pusat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
16	2.6130	3.8245	4.1952	2.5707	3.263	2.5171	2.0988
64	2.4589	2.5341	2.5338	2.3139	2.3894	2.331	2.241
256	2.3390	2.3437	2.3437	2.3047	2.3113	2.3008	2.2785
Eksak	2.31						

NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
16	13.1169	65.5628	81.6104	11.2857	41.2424	8.9654	9.1429
64	6.4459	9.7013	9.6883	0.1688	3.4372	0.9091	2.9870
256	1.2554	1.4589	1.4589	0.2294	0.0563	0.3983	1.3636

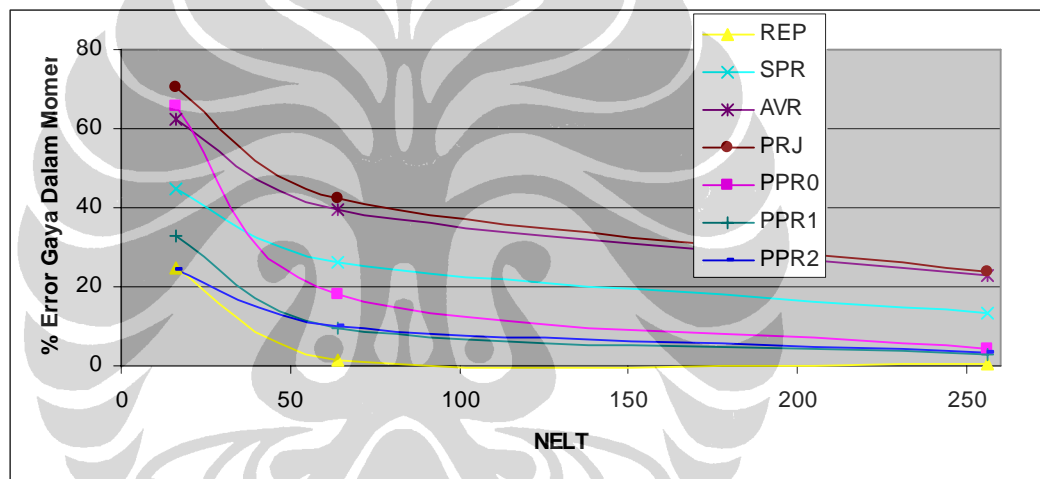


Gambar 4.2 Persentase Error Momen Lentur di Pusat Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit

Tabel 4.2 Momen Lentur Di Tengah Sisi Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit

NELT	Momen Lentur Perletakan						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
16	1.766	3.444	3.873	3.8681	2.8236	1.9362	1.5174
64	4.214	4.630	4.626	5.2153	3.7856	3.0925	2.9494
256	4.918	4.971	4.971	5.1587	4.4417	3.9567	3.9133
Eksak	5.13						

NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
16	65.5712	32.8596	24.5127	24.5984	44.9591	62.2573	70.4211
64	17.8635	9.7485	9.8246	1.6628	26.2066	39.7173	42.5068
256	4.1384	3.0936	3.1014	0.5595	13.4172	22.8713	23.7173



Gambar 4.3 Persentase Error Momen Lentur di Tengah Sisi Atau Perletakan Pelat Bujur Sangkar Perletakan Jepit

Pengujian teknik pemulihan gaya dalam diatas dilakukan pada dua lokasi yang berbeda yaitu di tengah/pusat pelat dan didaerah sisi perletakan bagian tengah.

Berdasarkan hasil pengujian pada Tabel diatas diperoleh hasil :

- Pada pengujian di tengah/pusat pelat, hasil yang diperoleh dari kelima metode dapat diterima di mana error yang terjadi di bawah 5%. Percobaan dilakukan sampai mesh 16×16 dikarenakan pada PPR error yang dihasilkan masih diatas 5%. Untuk empat metode yang lain pengujian cukup sampai mesh 8×8. Pada Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa metode PPR0, PPR1 dan PPR2 memiliki laju konvergensi yang sangat tinggi walaupun dengan mesh

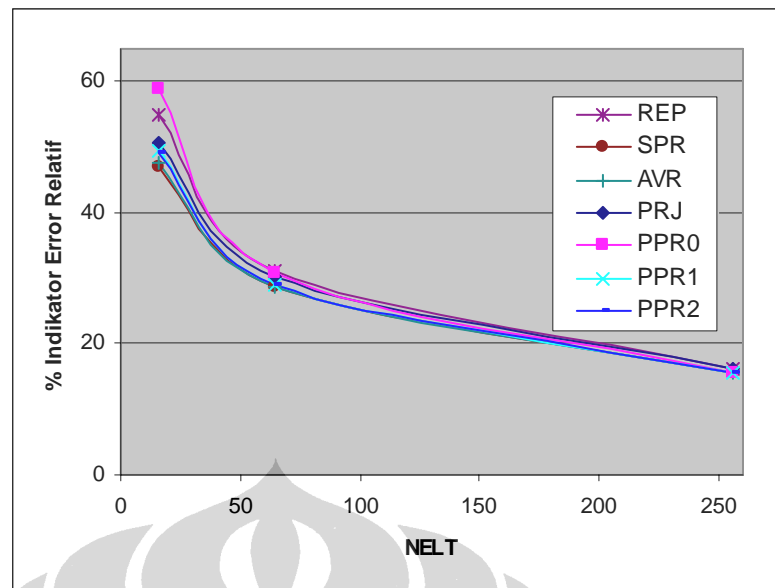
4x4 persentase errornya sangat besar. Pada mesh 4x4 persentase error PPR2 lebih besar dari PPR0 dan PPR1 namun pada mesh 16x16 persentase errornya hampir sama. Laju konvergensi PPR2 lebih besar dari PPR1 dan PPR1 lebih besar dari PPR0. Persentase error PPR0 lebih baik dari PPR1 dan PPR2. Metode proyeksi menghasilkan laju konvergensi paling lambat di antara semua metode yang dipakai. Metode REP dan SPR memberikan hasil yang cukup baik.

- Pada pengujian di tengah perletakan, metode proyeksi, rata2 dan SPR tidak dapat melewati syarat 5%, untuk itu diperlukan penghalusan untuk mendapatkan hasil sesuai kriteria. Sedangkan untuk PPR dan REP, hasil yang diperoleh sudah melewati syarat 5%. Untuk mesh 16x16, metode PPR lebih baik dari metode yang lain. PPR0 mempunyai laju konvergensi yang lebih besar dari PPR2 dan nilai persentase error dari PPR0 lebih besar dari PPR1 dan PPR2. Hal ini berbanding terbalik bila dibandingkan dengan pengujian di pusat pelat. Untuk mesh 16x16 dapat dilihat dari keempat metode bahwa error yang terjadi cenderung lebih besar dibandingkan pengujian tengah pelat, hal ini terjadi karena geometri di daerah perletakan cenderung tidak rata/kasar. Metode REP memberikan error yang kecil.

Error Estimasi

Tabel 4.3 Indikator Error Relatif Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit

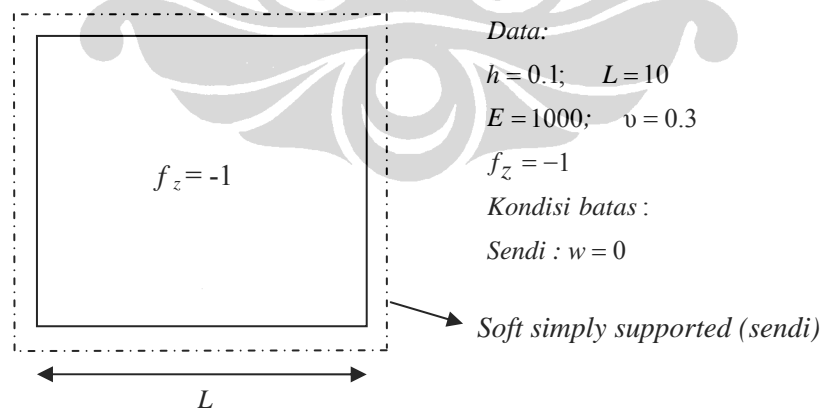
NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
16	58.808	49.491	49.169	55.025	46.945	47.624	50.751
64	30.914	29.05	29.044	31.182	28.732	28.686	30.208
256	15.704	15.686	15.686	16.193	15.691	15.621	16.044



Gambar 4.4 Persentase Indikator Error Relative Pelat Bujursangkar Pada Perletakan Jepit

Indikator error relatif total yang dihasilkan dalam pengujian belum memenuhi syarat 5%, sehingga diperlukan penghalusan ulang sampai indikator error relatifnya memenuhi syarat. Kelima metode memberikan hasil indikator error relatif lentur hampir sama. Indikator error relatif PPR1 dan PPR2 sedikit lebih baik dari PPR0.

4.2.1.2 Pelat Bujursangkar Perletakan Sederhana dengan Beban Merata



Gambar 4.5 Pelat Bujursangkar Bertumpuan Sendi dengan Beban Terbagi Merata

Penghalusan dilakukan secara seragam dimulai dari mesh 4×4 , 8×8 , 16×16 . Solusi gaya dalam eksak kasus perletakan sendi adalah [A2] :

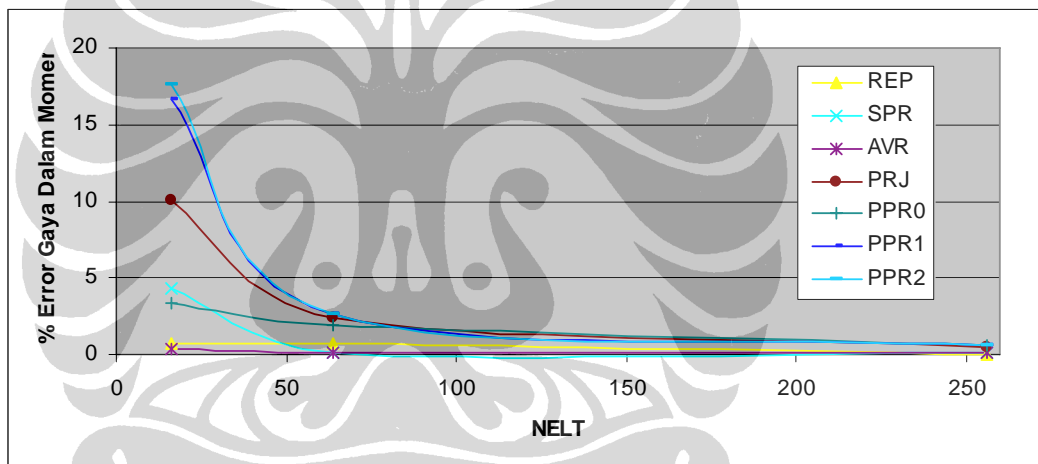
$$\text{Momen di pusat pelat : } M = 0,0479 f_z L^2$$

Konvergensi Gaya Dalam

Tabel 4.4 Momen Lentur dan Persentase Error di Pusat Pelat Bujursangkar Perletakan Sendi

NELT	Momen Lentur Pusat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
16	4.948	5.586	5.631	4.7552	4.9982	4.7733	4.3088
64	4.880	4.916	4.919	4.7564	4.7981	4.7933	4.6745
256	4.819	4.821	4.821	4.7895	4.793	4.7943	4.7647
Eksak	4.79						

NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
16	3.2944	16.6200	17.5616	0.7265	4.3466	0.3486	10.0459
64	1.8747	2.6388	2.6848	0.7015	0.1691	0.0689	2.4113
256	0.6033	0.6493	0.6514	0.0104	0.0626	0.0898	0.5282

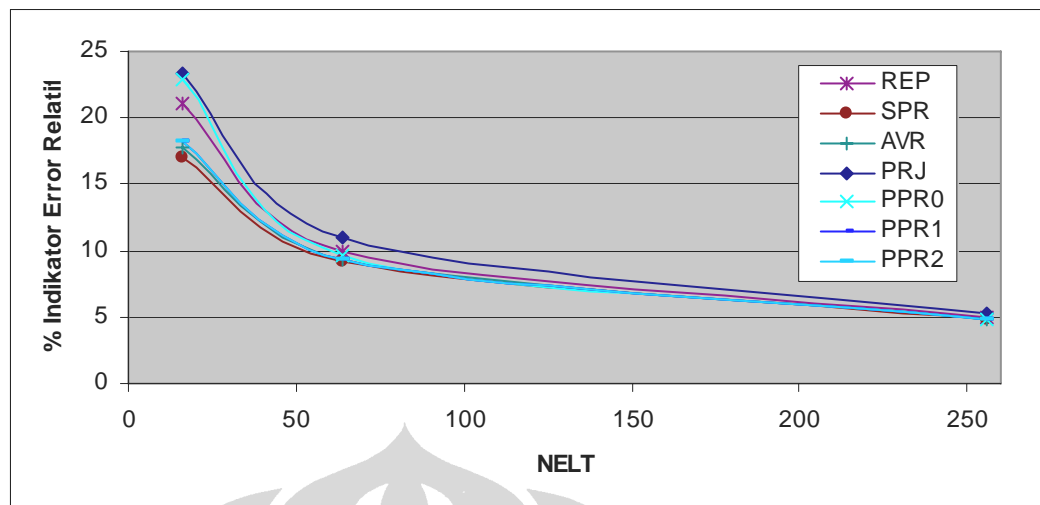


Gambar 4.6 Persentase Error Momen Lentur di Pusat Pelat Bujursangkar Perletakan Sendi

Error Estimasi

Tabel 4.5 Indikator Error Relatif Pelat Bujursangkar Perletakan Sendi

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
16	22.910	18.202	18.155	21.136	17.001	17.838	23.409
64	9.711	9.395	9.397	9.978	9.182	9.322	10.923
256	4.862	4.849	4.849	4.985	4.814	4.830	5.224

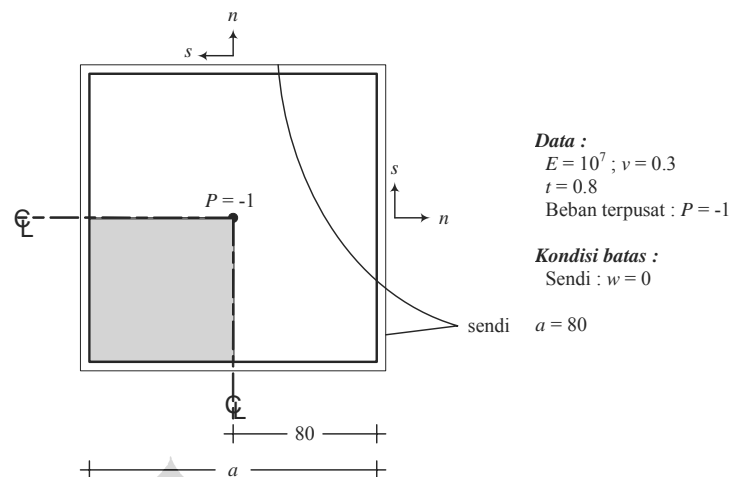


Gambar 4.7 Persentase Indikator Error Relative Pelat Bujursangkar Pada Perletakan Sendi

Untuk gaya dalam di pusat pelat, laju konvergensi metode PPR2 lebih besar dari PPR1 dan PPR0. Namun error PPR0 lebih baik dari PPR1 dan PPR2. Untuk kasus perletakan sendi ini semua metode menghasilkan error relatif yang hampir sama.

4.2.1.3 Pelat Bujursangkar Perletakan Sederhana dengan Beban Terpusat

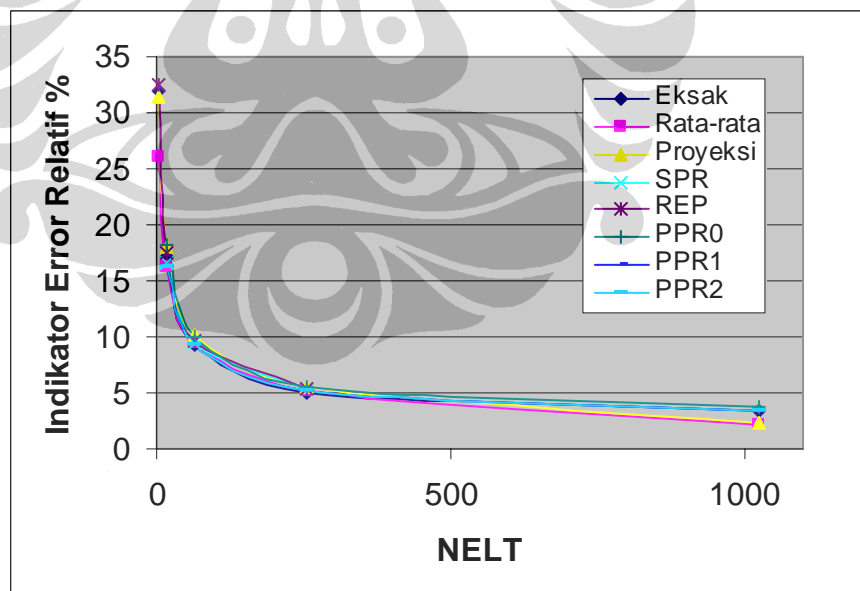
Pelat tipis bujursangkar dengan pembebanan terpusat/titik sering dipakai sebagai salah satu unjuk kerja estimator error, di mana pembebanan terpusat merupakan contoh kasus khusus di mana singularitas merupakan suatu masalah pada kebanyakan kasus pembebanan titik. Karena sifat simetri, peninjauan hanya dilakukan pada $\frac{1}{4}$ bagian struktur.



Gambar 4.8 Pelat Bujursangkar Bertumpuan Sederhana dengan Beban Terbagi Terpusat

Tabel 4.6 Error Estimasi Problem Pelat

NELT	Indikator Error Relatif							
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}	ϕ^{PPR0}
4x4	17.090	18.224	16.269	16.241	17.510	16.601	16.263	18.105
8x8	9.280	9.922	9.349	9.353	9.705	9.538	9.394	10.112
16x16	5.000	5.456	5.201	5.201	5.355	5.288	5.224	5.526



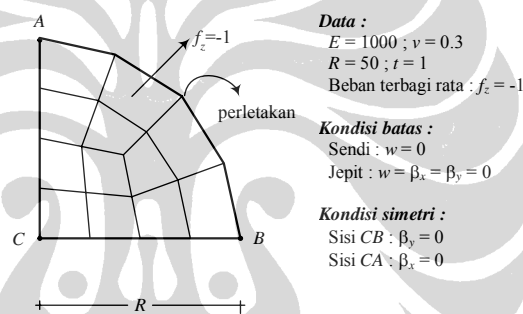
Gambar 4.9 Perbandingan Error Eksak dan Error Estimasi

Hasil yang diperlihatkan pada Tabel 4. dan

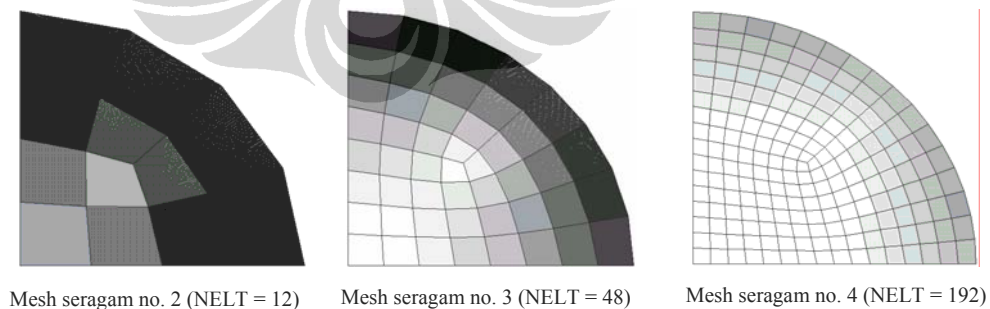
Gambar 4.9 menunjukkan error relatif akan mendekati nol jika jumlah elemen diperbanyak.

4.2.1.4 Pelat Melingkar dengan Beban Merata

Pada bagian ini akan dibahas uji konvergensi solusi gaya dalam pada pelat lingkaran dengan perletakan sendi (*soft simply supported*, $w = 0$) dan jepit (*clamped*, $w = \beta_x = \beta_y = 0$) pada sekeliling pelat dengan pembebanan merata. Tujuan dari uji ini adalah untuk mengetahui perilaku keempat teknik pemulihan gaya dalam pada konfigurasi elemen yang non rektangular. Analisa struktur dibatasi pada $\frac{1}{4}$ bagian saja karena sifat simetrisnya, seperti yang terlihat pada Gambar 4.10.



Gambar 4.10 $\frac{1}{4}$ Bagian Dari Pelat Lingkaran Dengan Beban Terbagi Rata



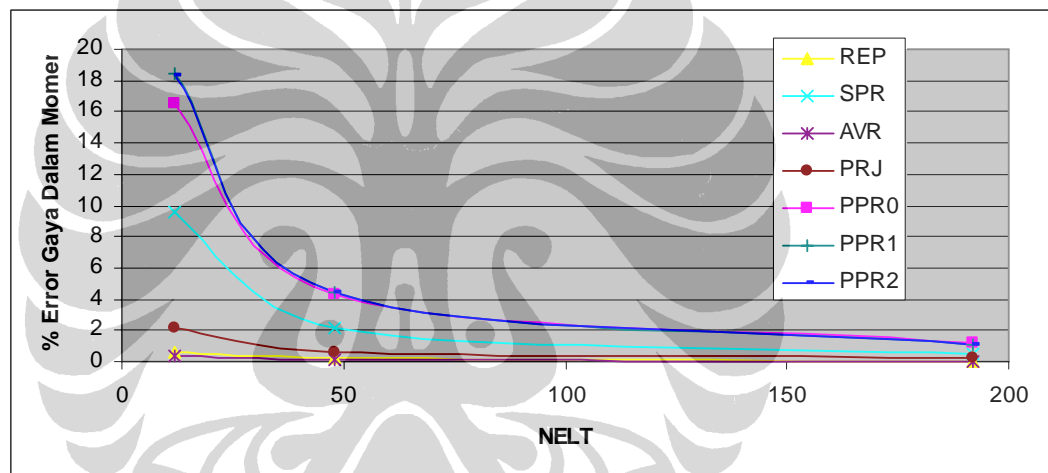
Gambar 4.11 Skema Penghalusan Seragam Untuk Pelat Melingkar

Perletakan Jepit:

Tabel 4.7 Momen Lentur Dan Error Gaya Dalam di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam

NELT	Momen Lentur Pusat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	236.810	240.610	240.410	204.450	222.480	202.430	198.660
48	211.870	212.210	212.230	203.610	207.390	202.780	201.820
192	205.440	205.370	205.370	203.220	204.120	203.010	202.740
Eksak	203.125						

NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	16.583	18.454	18.356	0.652	9.529	0.342	2.198
48	4.305	4.473	4.482	0.239	2.100	0.170	0.642
192	1.140	1.105	1.105	0.047	0.490	0.057	0.190

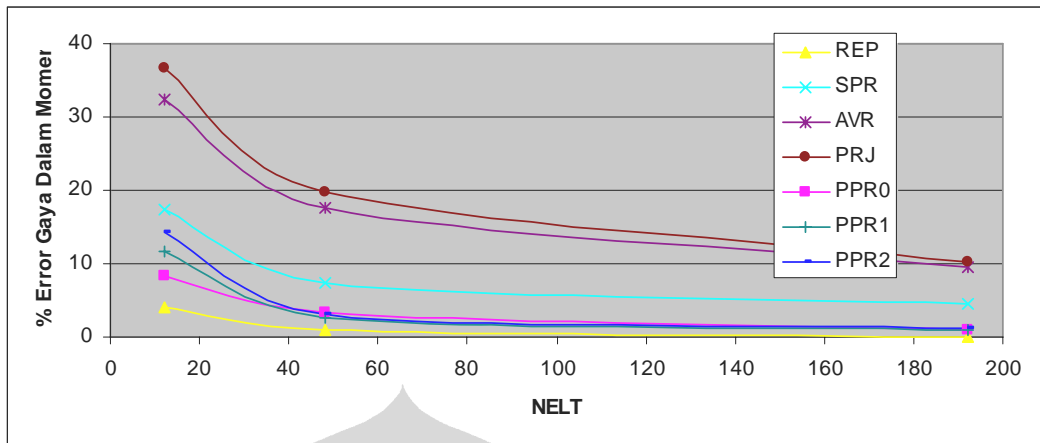


Gambar 4.12 Persentase Error Gaya Dalam Momen di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Jepit – Penghalusan Seragam

Tabel 4.8 Momen Lentur dan Error Gaya Dalam di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam

NELT	Momen Lentur Perletakan						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	286.120	275.680	267.560	300.010	258.120	211.150	197.790
48	302.280	304.050	302.710	315.770	289.130	257.160	250.690
192	309.590	309.480	308.710	312.440	298.340	283.100	280.770
Eksak	312.5						

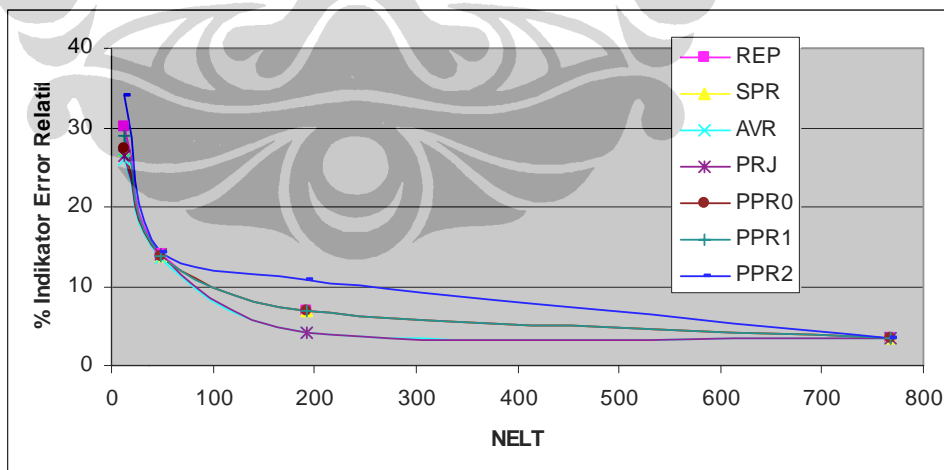
NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	8.442	11.782	14.381	3.997	17.402	32.432	36.707
48	3.270	2.704	3.133	1.046	7.478	17.709	19.779
192	0.931	0.966	1.213	0.019	4.531	9.408	10.154



Gambar 4.13 Persentase Error Gaya Dalam Momen di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit – Penghalusan Seragam

Tabel 4.9 Indikator Error Relatif Pelat Lingkaran Perletakan Jepit Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
12	27.361	28.899	34.018	30.066	27.061	25.922	26.345
48	13.770	13.895	14.177	14.130	13.768	13.577	13.949
192	6.792	6.807	10.743	6.832	6.791	4.118	4.185
768	3.378	3.380	3.380	3.382	3.378	3.371	3.400



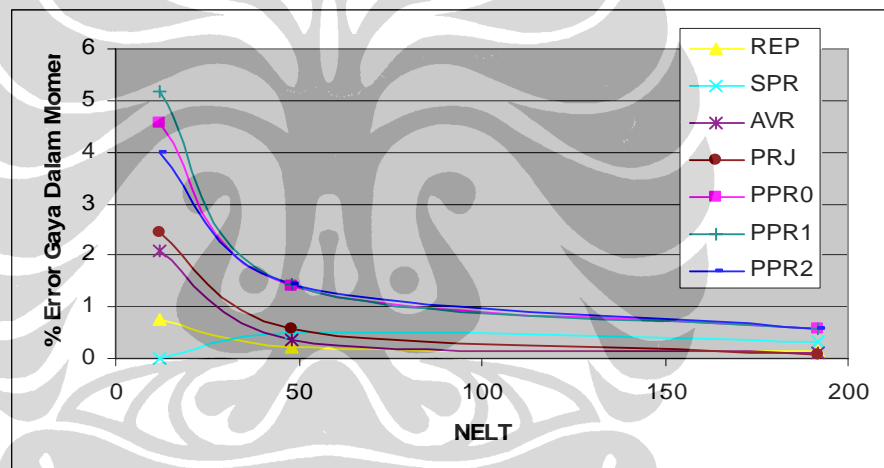
Gambar 4.14 Konvergensi Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam

Perletakan Sendi:

Tabel 4.10 Momen Lentur Dan Persentase Error di Pusatpelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Seragam

NELT	Momen Lentur Pusat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	539.200	542.300	536.110	511.710	515.660	504.880	503.090
48	522.770	523.110	523.100	514.510	518.250	513.680	512.720
192	518.620	518.540	518.540	516.400	517.290	516.190	515.920
Eksak	515.625						

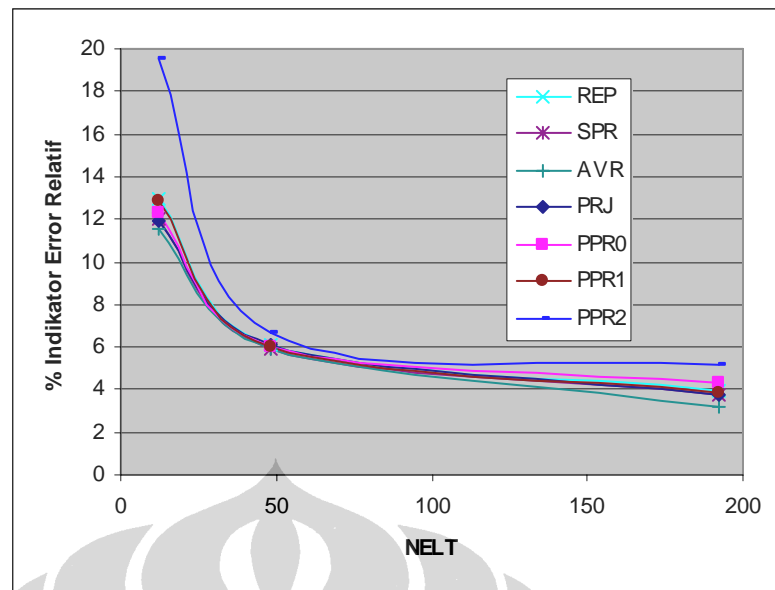
NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	4.5721	5.1733	3.9728	0.7593	0.0068	2.0839	2.4310
48	1.3857	1.4516	1.4497	0.2162	0.5091	0.3772	0.5634
192	0.5808	0.5653	0.5653	0.1503	0.3229	0.1096	0.0572



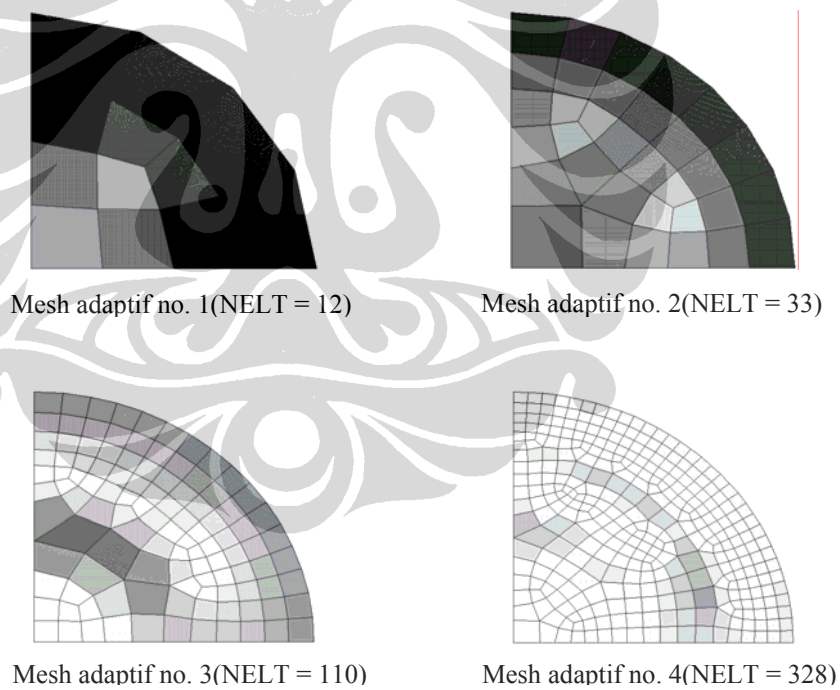
Gambar 4.15 Persentase Error Gaya Dalam Momen di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Sendi – Penghalusan Seragam

Tabel 4.3 Indikator Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Seragam

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
12	12.270	12.882	19.511	12.987	12.004	11.573	11.906
48	5.963	5.994	6.657	6.136	5.927	5.870	6.085
192	4.351	3.866	5.203	3.960	3.726	3.207	3.729



Gambar 4.16 Konvergensi Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Seragam



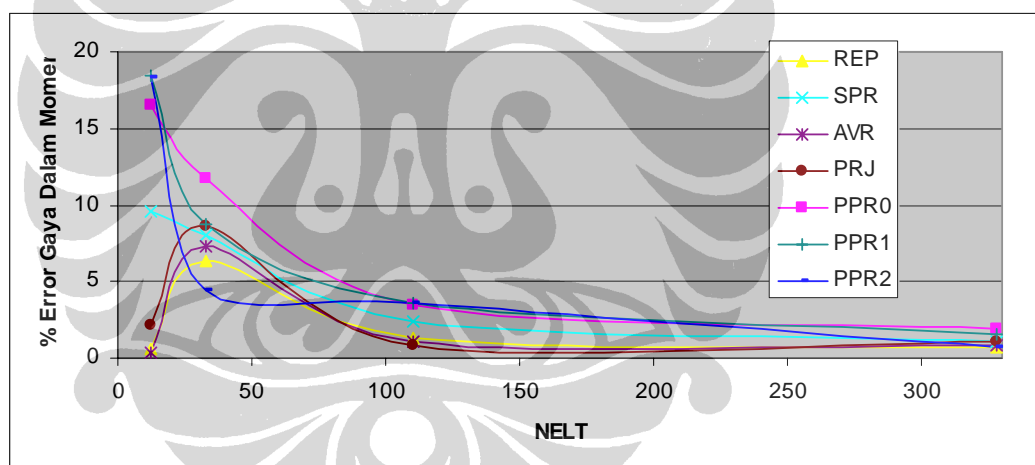
Gambar 4.17 Skema Penghalusan Adaptif untuk Pelat Melingkar Dengan Beban Merata

Perletakan Jepit:

Tabel 4.4 Momen Lentur Dan Persentase Error di Pusat Pelat Pelingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif

NELT	Momen Lentur Pusat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	236.8100	240.6100	240.4100	204.4500	222.4800	202.4300	198.6600
33	227.0100	220.8500	212.0800	190.1400	186.9300	188.2300	185.5400
110	210.0600	210.5100	210.3600	205.7500	207.8800	205.3200	204.7100
328	206.9700	206.1700	204.6600	201.7400	200.9700	201.3700	201.0200
Eksak	203.125						

NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	16.5834	18.4542	18.3557	0.6523	9.5286	0.3422	2.1982
33	11.7588	8.7262	4.4086	6.3926	7.9729	7.3329	8.6572
110	3.4142	3.6357	3.5618	1.2923	2.3409	1.0806	0.7803
328	1.8929	1.4991	0.7557	0.6818	1.0609	0.8640	1.0363

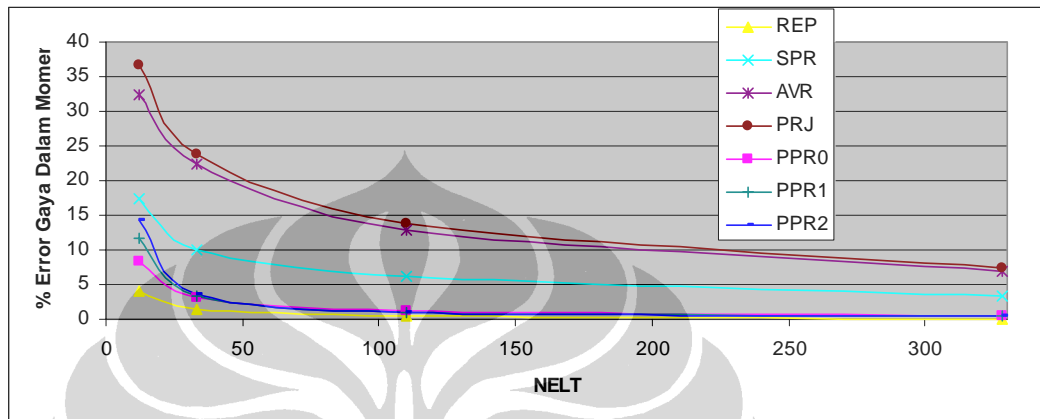


Gambar 4.18 Persentase Error Gaya Dalam Momen di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif

Tabel 4.5 Momen Lentur Dan Persentase Error di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif

NELT	Momen Lentur Perletakan						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	286.1200	275.6800	267.5600	300.0100	258.1200	211.1500	197.7900
33	302.8800	301.9200	301.3700	316.9700	281.3700	242.7100	238.0600
110	308.9000	309.6000	309.4800	314.0300	293.5000	271.9800	269.2300
328	311.2200	311.0900	311.0700	312.2200	302.0300	290.9200	289.5400

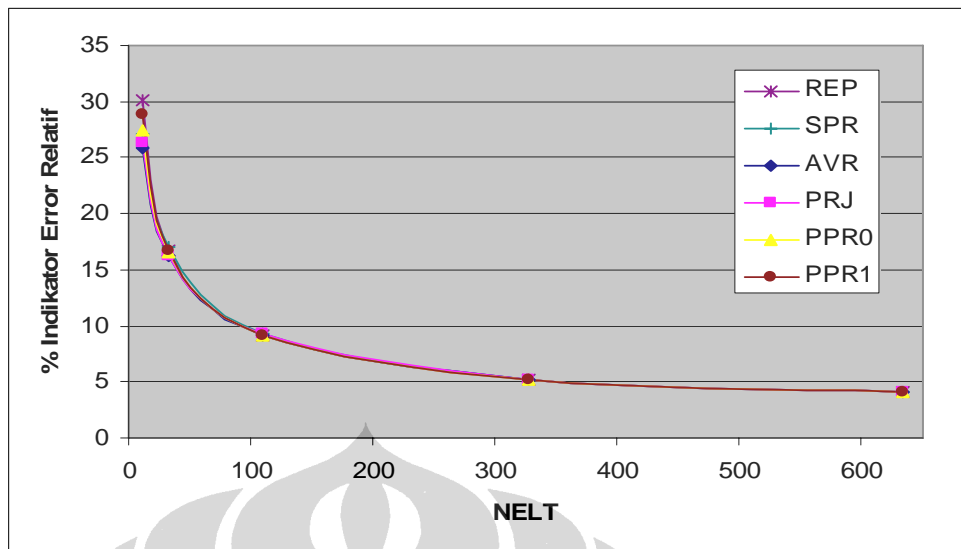
NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12	8.4416	11.7824	14.3808	3.9968	17.4016	32.4320	36.7072
33	3.0784	3.3856	3.5616	1.4304	9.9616	22.3328	23.8208
110	1.1520	0.9280	0.9664	0.4896	6.0800	12.9664	13.8464
328	0.4096	0.4512	0.4576	0.0896	3.3504	6.9056	7.3472



Gambar 4.19 Persentase Error Gaya Dalam Momen di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif

Tabel 4.6 Indikator Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif

NELT	Indikator Error Relatif					
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
12	27.361	28.899	30.066	27.061	25.922	26.345
33	16.502	16.639	16.763	17.015	16.189	16.239
110	9.157	9.209	9.150	9.332	9.122	9.239
328	5.210	5.216	5.160	5.191	5.151	5.218



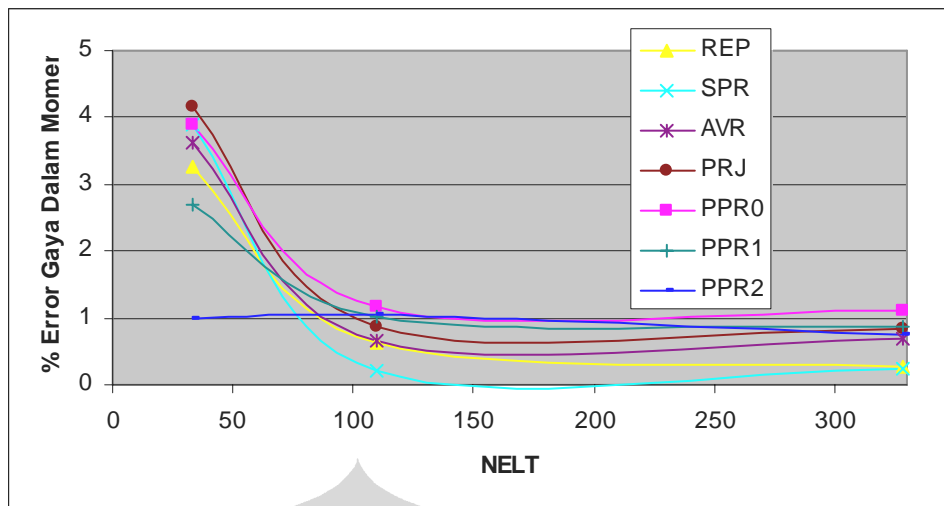
Gambar 4.20 Konvergensi Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif

Perletakan Sendi:

Tabel 4.7 Momen Lentur dan Persentase Error di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Adaptif

NELT	Momen Lentur Pusat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12							
33	535.6800	529.5600	520.7800	498.7900	495.6200	496.9500	494.2400
110	521.6500	520.9500	521.0000	512.3400	516.6300	512.1800	511.2200
328	521.3300	520.0800	519.4500	514.2400	516.8700	512.0600	511.2900
Eksak	515.625						

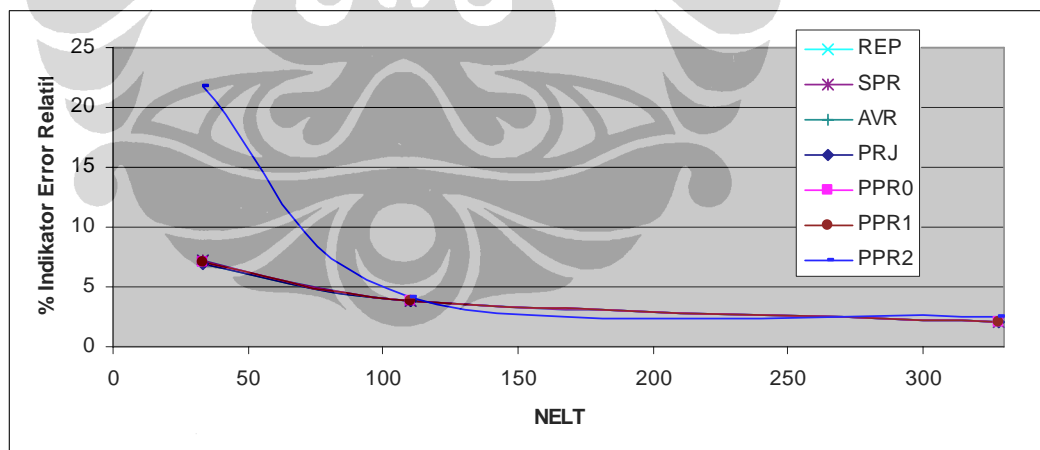
NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
12							
33	3.8895	2.7025	0.9998	3.2650	3.8798	3.6218	4.1474
110	1.1685	1.0327	1.0424	0.6371	0.1949	0.6681	0.8543
328	1.1064	0.8640	0.7418	0.2686	0.2415	0.6914	0.8407



Gambar 4.21 Persentase Error Gaya Dalam Momen di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Sendi – Penghalusan Adaptif

Tabel 4.8 Indikator Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Adaptif

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
33	7.031	7.093	21.787	7.152	7.259	6.907	6.929
110	3.842	3.845	4.088	3.856	3.874	3.836	3.883
328	2.026	2.027	2.432	2.019	2.030	2.021	2.036



Gambar 4.22 Konvergensi Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Sendi – Penghalusan Adaptif

Pada proses penghalusan seragam, error gaya dalam metode PPR0, PPR1 dan PPR2 hampir sama dan lebih baik dari SPR untuk perletakan jepit. Namun sebaliknya, SPR lebih baik dari PPR untuk perletakan sendi. Untuk ke lima metode, laju konvergensi cenderung asimtotik eksak.

Proses penghalusan adaptif, error gaya dalam metode SPR lebih daik dari PPR pada perletakan jepit. Namun sebaliknya pada perletakan sendi, PPR lebih baik dari SPR. Walaupun pada kedua perletakan tersebut indikator error relatifnya hampir sama. Hasil dari PPR2 memberikan error yang besar dan cenderung tidak stabil dibandingkan dengan PPR0 dan PPR1.

Proses penghalusan adaptif memberikan solusi yang hampir sama dengan seragam.

4.2.1.5 Distribusi Momen Lentur pada Pelat Melingkar

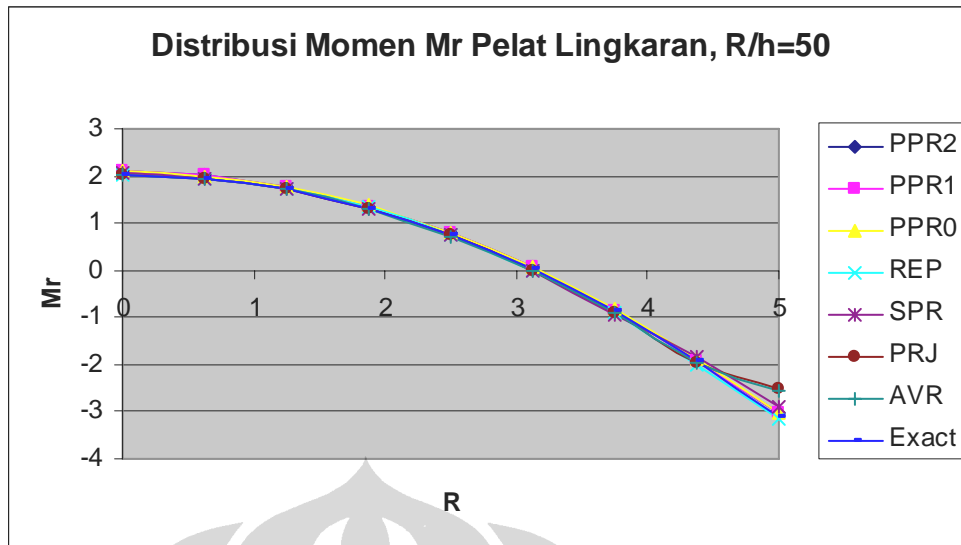
Distribusi momen lentur ditinjau untuk kasus lingkaran perletakan jepit dengan jumlah elemen 48, dengan bentuk pelat seperti pada

Gambar 4.10. Data momen lentur diambil dari tengah pelat menuju perletakan.

Uji numerik untuk metode PPR dihitung untuk tiga kategori, yaitu PPR0, PPR1 dan PPR2. Secara umum, PPR0 adalah klasifikasi dengan 6 term orde polynomial, PPR1 adalah klasifikasi dengan 8 term orde polynomial, PPR2 adalah klasifikasi dengan 9 term orde polynomial. Penentuan term orde polynomial 6, 8 dan 9 adalah untuk menentukan pengaruh penggunaan orde polynomial yang lebih tinggi dalam orde kuadrilateral dalam permasalahan pelat lentur.

Tabel 4.9 Distribusi Momen M_r Pelat Melingkar, $R/h = 50$

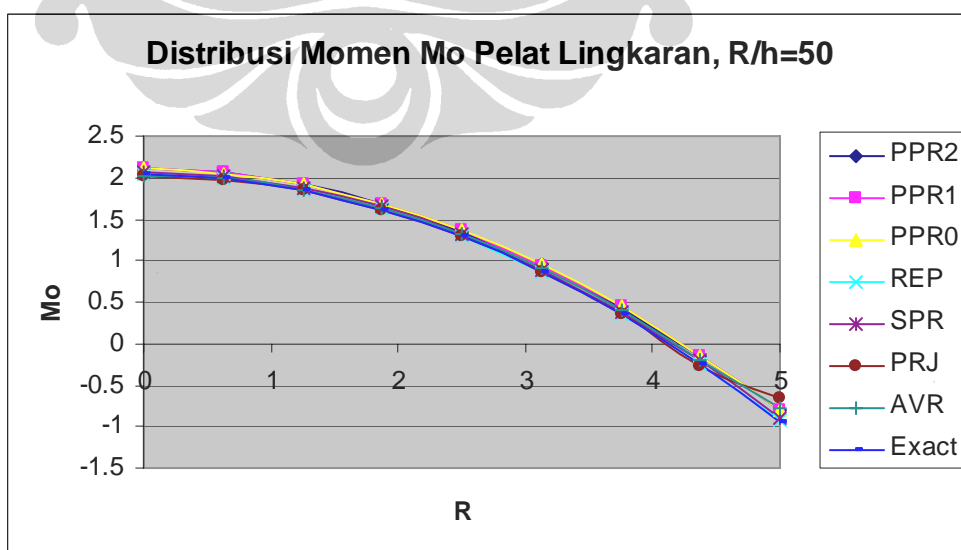
NELT = 48	M_r								
PPR2	2.1223	2.0044	1.7728	1.3645	0.78524	0.0533	-0.85799	-1.9146	-3.0271
PPR1	2.1221	2.0044	1.7732	1.364	0.78655	0.05223	-0.85357	-1.9145	-3.0405
PPR0	2.1187	2.0007	1.7773	1.3698	0.79194	0.05348	-0.83627	-1.8834	-3.0228
REP	2.0361	1.9512	1.7098	1.3398	0.75498	-0.02774	-0.92375	-1.9897	-3.1577
SPR	2.0739	1.9566	1.737	1.3225	0.73407	-0.01582	-0.93764	-1.8569	-2.8913
PRJ	2.0182	1.9426	1.7098	1.311	0.74049	0.00667	-0.89129	-1.9554	-2.5069
AVR	2.0278	1.9483	1.7075	1.3017	0.72809	-0.00596	-0.90922	-1.9528	-2.5716
Exact	2.0313	1.9507	1.709	1.3062	0.7422	0.0171	-0.8691	-1.9165	-3.125



Gambar 4.23 Distribusi Momen Lentur M_r Pelat Melingkar, $R/h=50$

Tabel 4.10 Distribusi Momen M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 50$

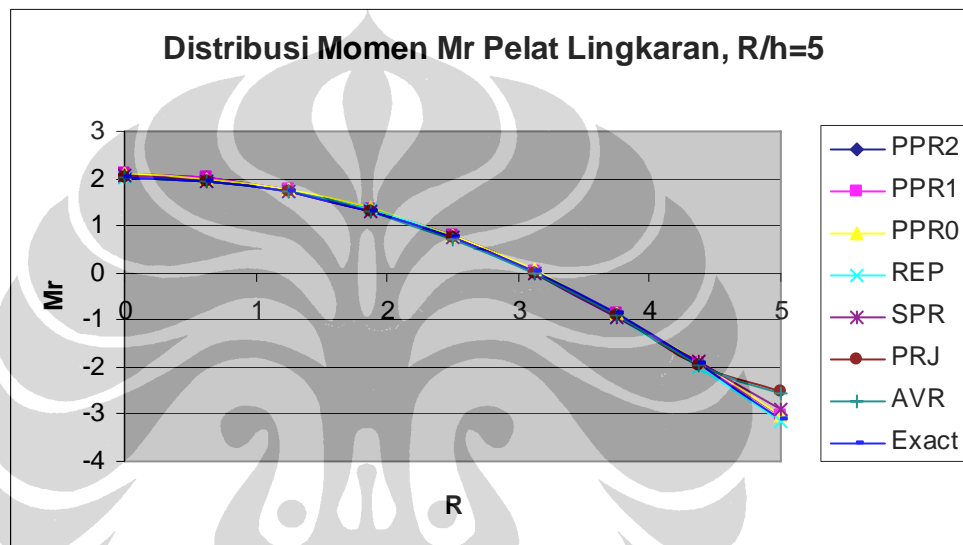
NELT = 48	M_θ								
	PPR2	PPR1	PPR0	REP	SPR	PRJ	AVR	Exact	
PPR2	2.1223	2.0568	1.9131	1.6793	1.3545	0.9461	0.43854	-0.14116	-0.79035
PPR1	2.1221	2.0566	1.9139	1.6783	1.3557	0.94413	0.44111	-0.14504	-0.79306
PPR0	2.1187	2.0483	1.9174	1.6837	1.3597	0.94653	0.44954	-0.15051	-0.809
REP	2.037	1.9934	1.859	1.6348	1.2895	0.85514	0.355	-0.24605	-0.92688
SPR	2.0739	2.0141	1.8791	1.6461	1.3168	0.89604	0.37469	-0.197	-0.88783
PRJ	2.0182	1.9746	1.8414	1.6155	1.2925	0.87258	0.35488	-0.26783	-0.6597
AVR	2.0278	1.9834	1.849	1.6261	1.3111	0.90281	0.39315	-0.20793	-0.77149
Exact	2.0313	1.9849	1.8457	1.6138	1.2891	0.8716	0.3613	-0.2417	-0.9375



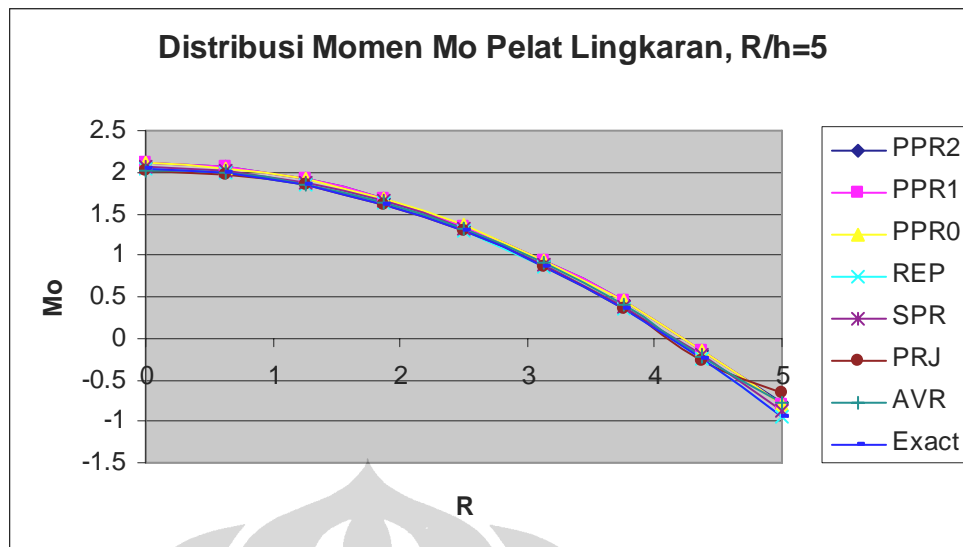
Gambar 4.24 Distribusi Momen Lentur M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 50$

Tabel 4.11 Distribusi Momen M_r Pelat Melingkar, $R/h = 5$

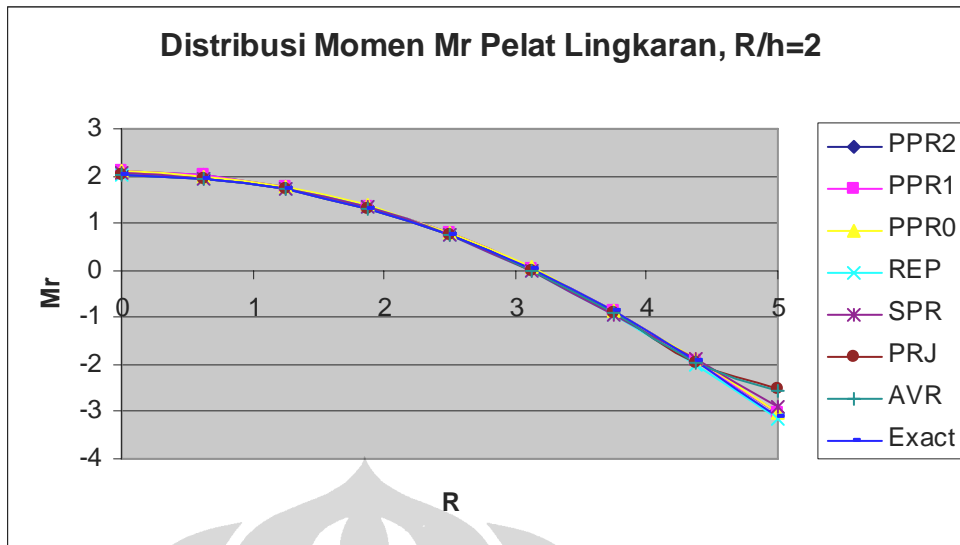
NELT = 48	M_r								
PPR2	2.1225	2.005	1.7735	1.365	0.79008	0.04859	-0.86751	-1.9185	-3.0132
PPR1	2.1228	2.0046	1.7737	1.3654	0.78956	0.04796	-0.86004	-1.9155	-3.038
PPR0	2.1189	2.0013	1.7773	1.37	0.79413	0.05185	-0.83961	-1.8851	-3.0238
REP	2.0359	1.9516	1.7105	1.3409	0.75766	-0.03175	-0.93031	-1.9866	-3.1554
SPR	2.0743	1.9574	1.738	1.3236	0.73757	-0.02025	-0.94707	-1.86	-2.8761
PRJ	2.0183	1.9427	1.71	1.3117	0.74201	0.00487	-0.89391	-1.9565	-2.5068
AVR	2.0282	1.9487	1.7084	1.303	0.73019	-0.01018	-0.91548	-1.9528	-2.5649
Exact	2.0313	1.9507	1.709	1.3062	0.7422	0.0171	-0.8691	-1.9165	-3.125

Gambar 4.25 Distribusi Momen Lentur M_r Pelat Melingkar, $R/h = 5$ Tabel 4.20 Distribusi Momen M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 5$

NELT = 48	M_θ								
PPR2	2.1225	2.057	1.9137	1.6779	1.3538	0.94387	0.44091	-0.15756	-0.7797
PPR1	2.1228	2.0564	1.9143	1.6782	1.3532	0.94358	0.44067	-0.15084	-0.79592
PPR0	2.1189	2.048	1.9179	1.6835	1.3587	0.94508	0.44721	-0.15423	-0.80987
REP	2.0368	1.9931	1.8586	1.6334	1.287	0.85693	0.35809	-0.24974	-0.93614
SPR	2.0743	2.0142	1.88	1.6455	1.3158	0.89244	0.37617	-0.20418	-0.88365
PRJ	2.0183	1.9746	1.8419	1.6153	1.2909	0.87095	0.35429	-0.27137	-0.66097
AVR	2.0282	1.9832	1.85	1.6264	1.3093	0.89936	0.39384	-0.21321	-0.76948
Exact	2.0313	1.9849	1.8457	1.6138	1.2891	0.8716	0.3613	-0.2417	-0.9375

Gambar 4.26 Distribusi Momen Lentur M_0 Pelat Melingkar, $R/h = 5$ Tabel 4.12 Distribusi Momen M_r Pelat Melingkar, $R/h = 2$

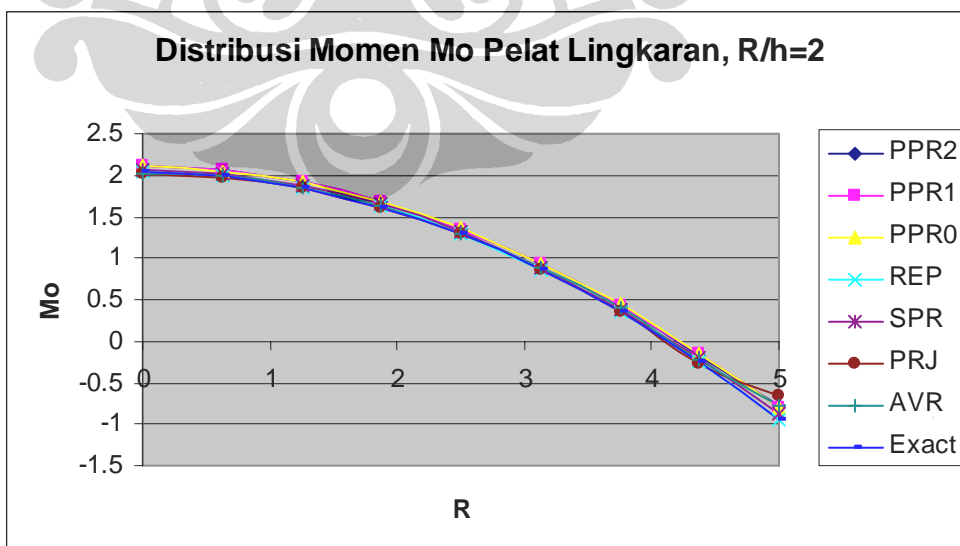
NELT = 48	M_r								
	PPR2	2.1227	2.0048	1.7734	1.3659	0.79165	0.04783	-0.86974	-1.9209
PPR1	2.1231	2.0044	1.7735	1.3663	0.79095	0.04737	-0.8615	-1.9175	-3.0412
PPR0	2.119	2.0013	1.7769	1.3704	0.79562	0.05226	-0.84047	-1.8873	-3.0281
REP	2.0358	1.9515	1.7101	1.3413	0.75922	-0.0319	-0.93155	-1.9868	-3.1574
SPR	2.0745	1.9573	1.7381	1.3247	0.73866	-0.0213	-0.9492	-1.8619	-2.8758
PRJ	2.0183	1.9426	1.71	1.3124	0.74311	0.00501	-0.8948	-1.9589	-2.5098
AVR	2.0283	1.9486	1.7086	1.304	0.73103	-0.01097	-0.91706	-1.9546	-2.566
Exact	2.0313	1.9507	1.709	1.3062	0.7422	0.0171	-0.8691	-1.9165	-3.125



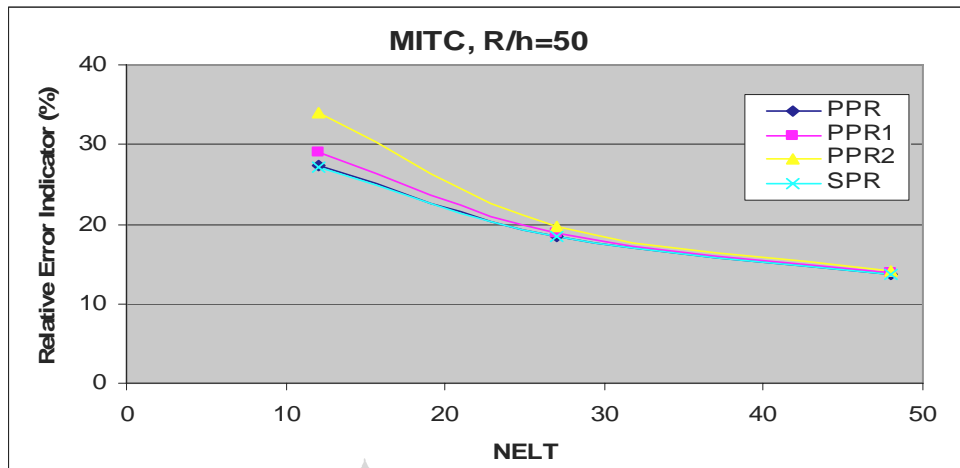
Gambar 4.27 Distribusi Momen Lentur M_r , Pelat Melingkar, $R/h=2$

Tabel 4.13 Distribusi Momen M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 2$

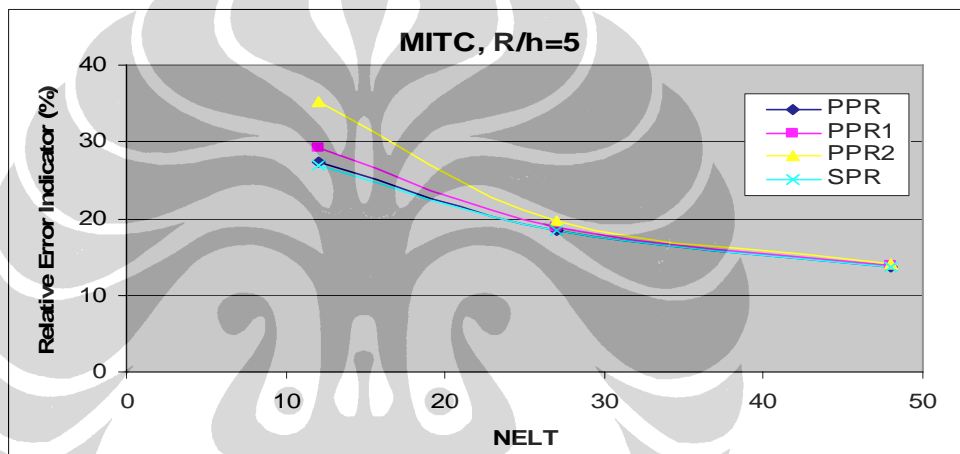
NELT = 48	M_θ								
PPR2	2.1227	2.0572	1.9142	1.6775	1.3516	0.94182	0.43834	-0.16323	-0.77812
PPR1	2.1231	2.0565	1.9147	1.678	1.3509	0.94134	0.43818	-0.1545	-0.79788
PPR0	2.119	2.0481	1.9183	1.6832	1.3568	0.94254	0.44462	-0.1571	-0.81204
REP	2.0367	1.9932	1.859	1.6328	1.285	0.85558	0.35661	-0.25335	-0.93985
SPR	2.0745	2.0142	1.8806	1.6454	1.3134	0.88991	0.37445	-0.20761	-0.88361
PRJ	2.0183	1.9747	1.8422	1.615	1.289	0.86883	0.35233	-0.27384	-0.66247
AVR	2.0283	1.9831	1.8506	1.6265	1.307	0.89672	0.39207	-0.21619	-0.76979
Exact	2.0313	1.9849	1.8457	1.6138	1.2891	0.8716	0.3613	-0.2417	-0.9375



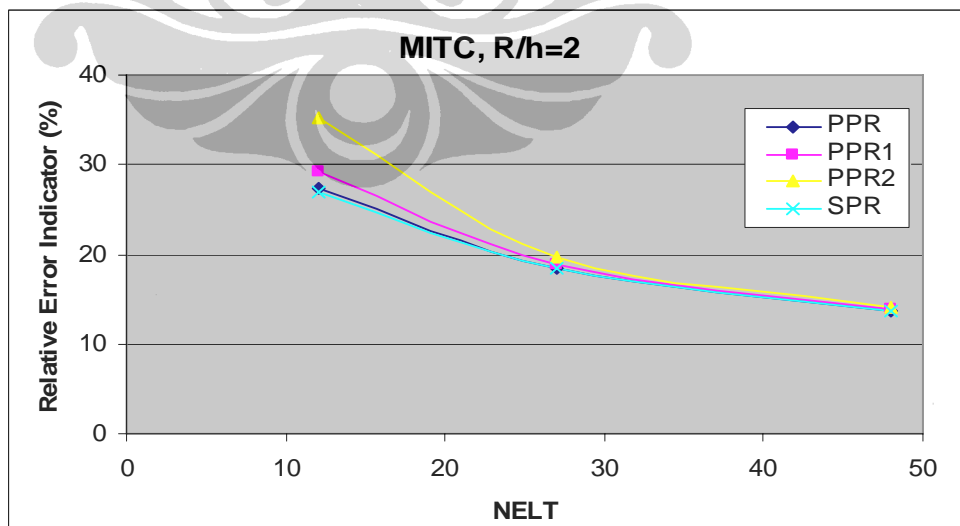
Gambar 4.28 Distribusi Momen Lentur M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 2$



Gambar 4.29 Indikator Error Relatif Total untuk Pelat Melingkar, R/h=50



Gambar 4.30 Indikator Error Relatif Total untuk Pelat Melingkar, R/h=5



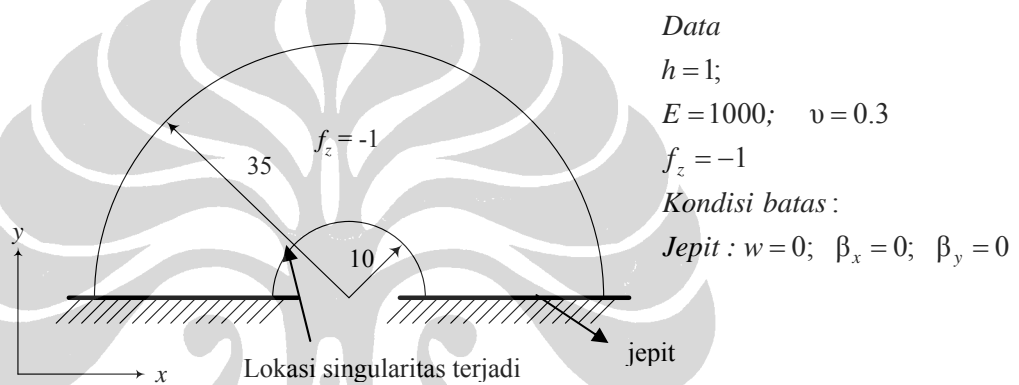
Gambar 4.31 Indikator Error Relatif Total untuk Pelat Melingkar, R/h=2

Error gaya dalam dan indikator error relatif PPR0, PPR1 dan SPR hampir sama hasilnya dan keduanya lebih baik dari PPR2. Hasil ini hampir sama untuk pelat tebal maupun tipis.

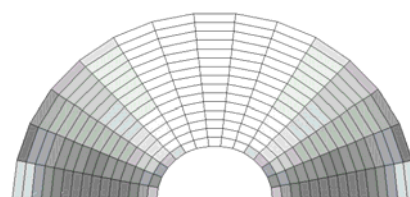
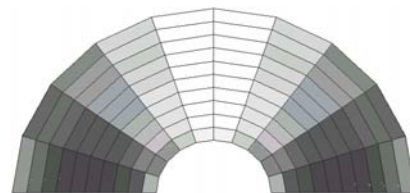
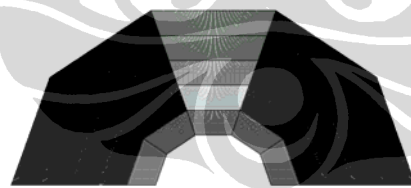
4.2.2 Pelat Umum

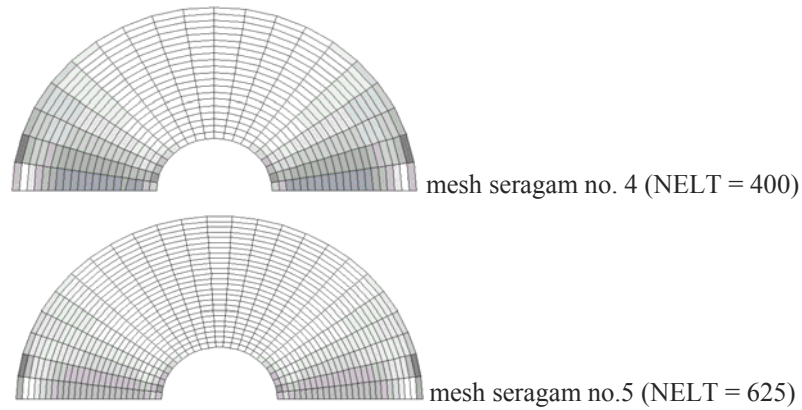
4.2.2.1 Pelat Busur Berlubang 180°

Pada kasus ini akan diuji pengaruh singularitas pada daerah perletakan jepit yang dekat dengan lubang seperti pada Tabel 4.14.



Gambar 4.32 Pelat busur berlubang 180°

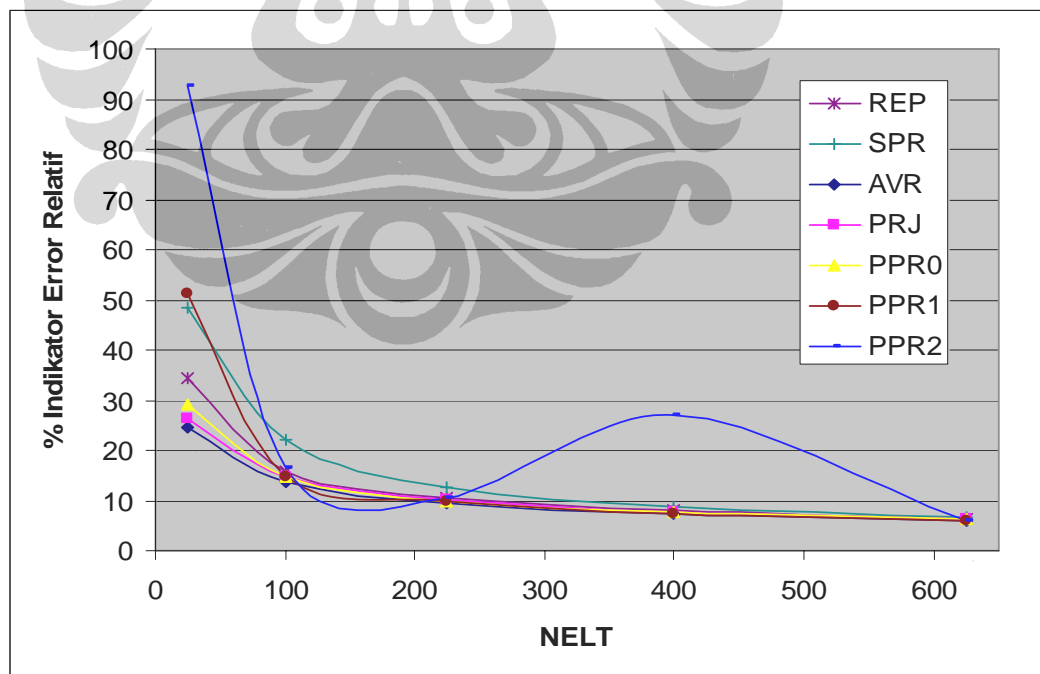




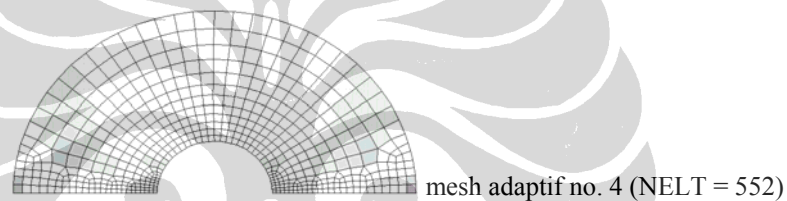
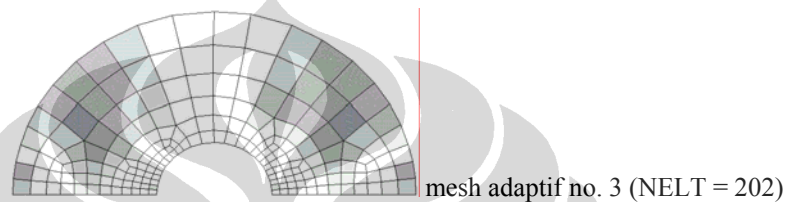
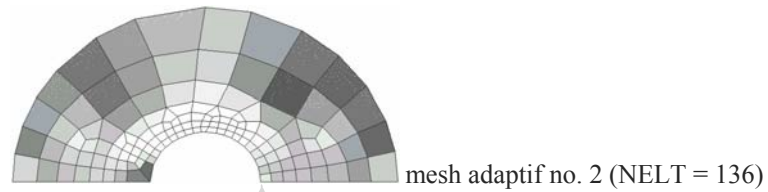
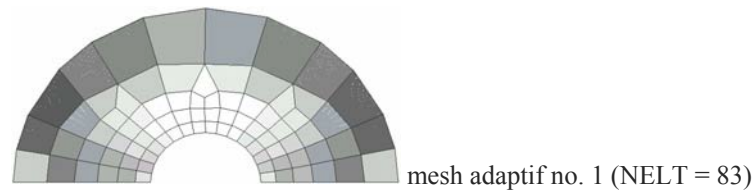
Gambar 4.33 Skema Penghalusan Seragam untuk Pelat Busur Berlubang

Tabel 4.14 Indikator Error Relatif Pelat Busur Berlubang 180⁰ - Penghalusan Seragam

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
25	28.978	51.140	92.611	34.265	48.452	24.625	26.203
100	14.699	14.735	16.534	15.899	22.201	13.819	14.646
225	9.956	9.782	10.461	10.653	12.584	9.488	10.027
400	7.582	7.468	26.956	7.898	8.607	7.281	7.663
625	6.175	6.097	6.126	6.364	6.640	5.964	6.250



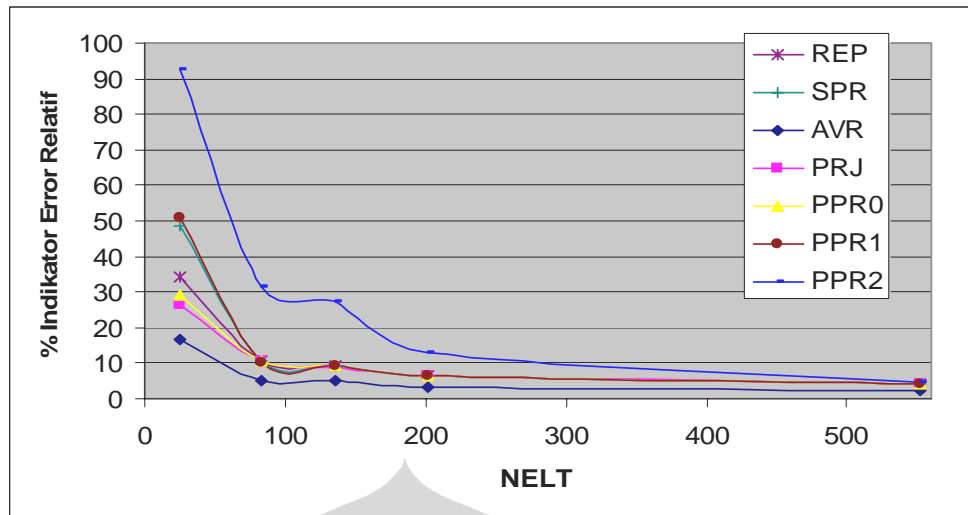
Gambar 4.34 Konvergensi Error Relative Pelat Busur Berlubang - Penghalusan Seragam



Gambar 4.35 Skema Penghalusan Adaptif untuk Pelat Berlubang

Tabel 4.15 Indikator Error Relatif Pelat Busur Berlubang 180^0 - Penghalusan Adaptif

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
25	28.978	51.140	92.611	34.265	48.452	16.512	26.203
83	10.524	10.194	31.474	10.423	10.580	5.205	10.485
136	9.064	9.285	27.415	9.415	9.060	5.056	8.978
202	6.475	6.416	13.077	6.385	6.341	3.202	6.550
552	4.069	4.051	4.501	4.053	3.991	2.540	4.105

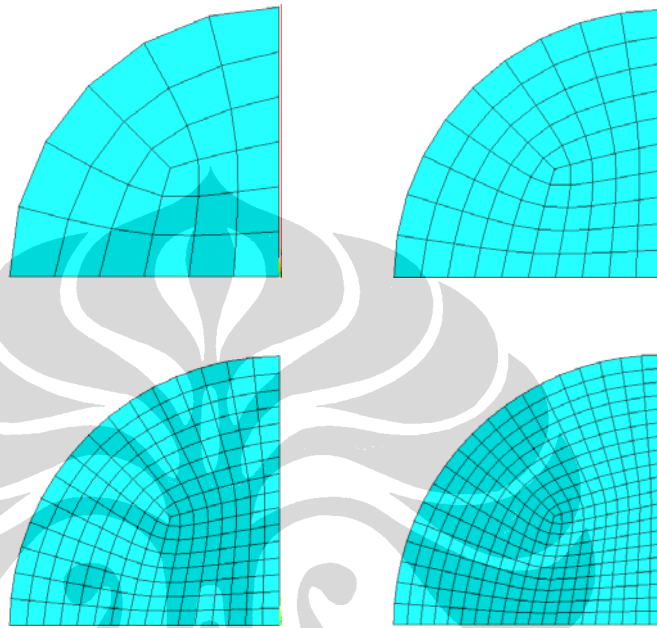


Gambar 4.36 Konvergensi Error Relative Pelat Busur Berlubang - Penghalusan Adaptive

Indikator error relatif PPR0 dan PPR1 hampir sama dengan REP dan SPR. PPR2 memberikan error yang besar dan laju konvergensi yang besar pada penghalusan adaptive namun cenderung tidak stabil untuk penghalusan seragam.

4.2.2.2 Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat

Gangguan lokal yang disebabkan oleh pembebanan terpusat harus mendapat perhatian khusus bila dikehendaki hasil yang akurat. Pada subbab ini akan diuji pelat melingkar perletakan jepit dengan parameter-parameter: $E=1000$, $\nu=0.3$, $h=1$ dan $P=1$.



Gambar 4.37 Diskritisasi Seragam Problem Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat

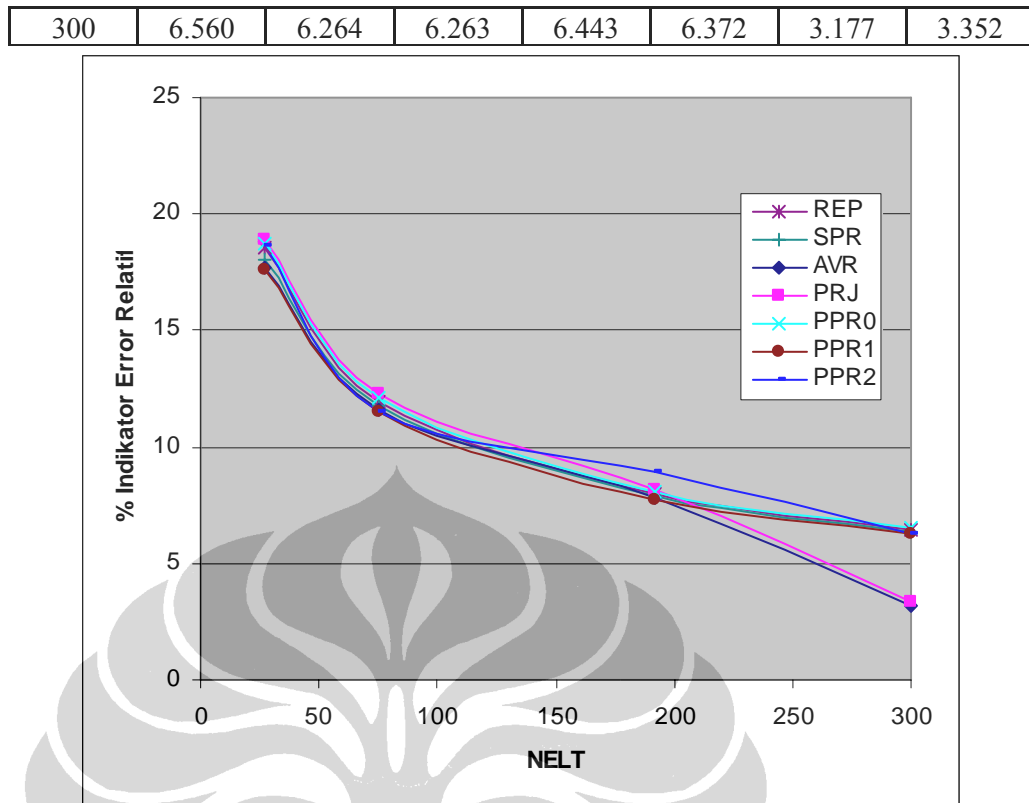
Metode elemen hingga memberikan solusi terhadap masalah ini dengan cara mendekati titik-titik singularitas secara hampiran elemen yang berhingga kecilnya. Hal ini dilakukan dengan memperbanyak jumlah elemen sehingga dapat mewakili gaya-gaya sekitar titik ini. Pencapaian error relatif norma energi sebatas 5% dapat dilihat pada

Gambar 4.37 dan

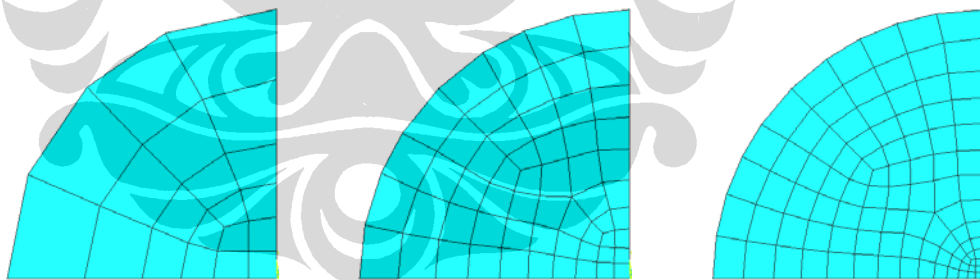
Gambar 4.39 yang menunjukkan tahap diskritisasi secara seragam maupun adaptif.

Tabel 4.16 Indikator Error Relatif Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat – Penghalusan Seragam

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
27	18.710	17.578	18.611	18.585	18.040	17.668	18.865
75	12.102	11.501	11.525	11.969	11.735	11.589	12.274
192	8.096	7.729	8.895	7.993	7.873	7.775	8.185



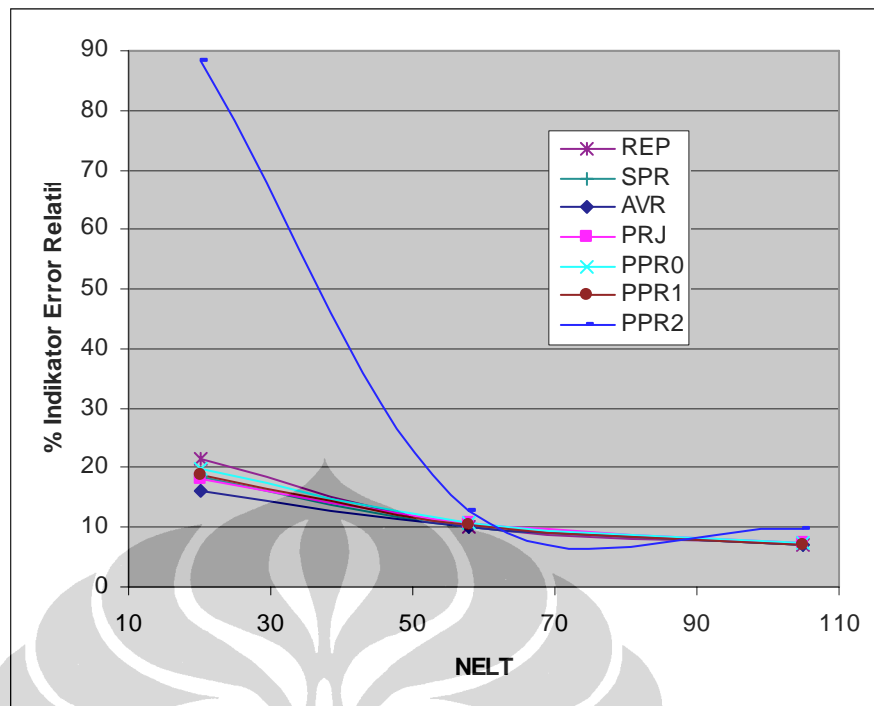
Gambar 4.38 Konvergensi Error Relative Pelat Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat - Penghalusan Seragam



Gambar 4.39 Diskritasi Adaptif Problem Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat

Tabel 4.17 Indikator Error Relatif Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat – Penghalusan Adaptif

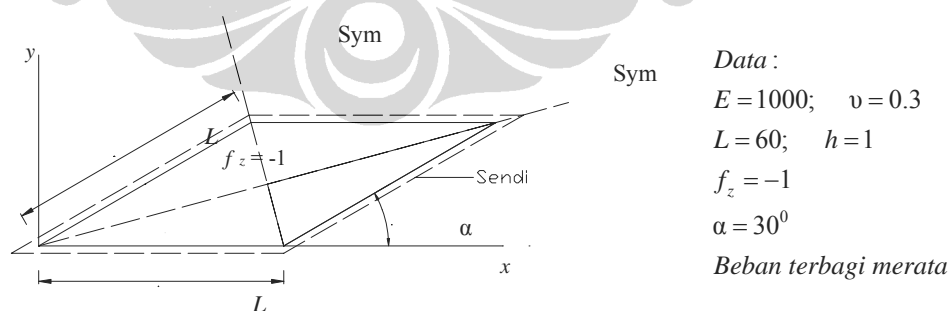
NELT	Penghalusan Adaptive						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
20	19.96	18.66	88.34	21.445	18.273	16.227	18.09
58	10.86	10.43	12.63	10.089	10.006	9.909	10.599
105	7.25	7.10	9.77	7.043	7.104	7.019	7.503



Gambar 4.40 Konvergensi Error Relative Pelat Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat Penghalusan Adaptif

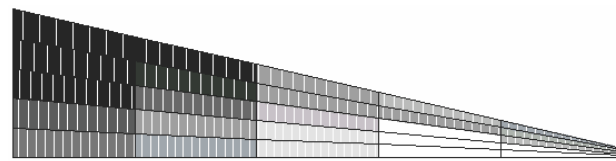
Indikator error relatif PPR1 memberikan hasil lebih baik dari PPR0 dan PPR2 dan hampir sama dengan SPR. Indikator error PPR2 memberikan hasil yang besar dengan laju konvergensi yang tinggi.

4.2.2.3 Pelat Miring 30° (Morley Acute Skew Plate)

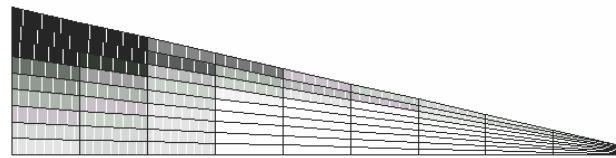


Gambar 4.41 Pelat Morley posisi segitiga

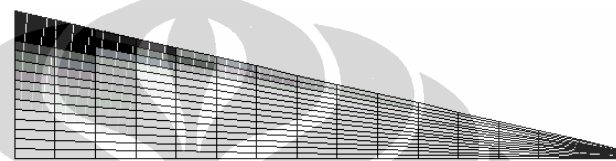
Pelat Morley merupakan suatu pelat berbentuk belah ketupat dengan sudut 30° dengan perletakan sendi (*soft simply supported*) pada keempat sisinya. Uji pada pelat ini diterapkan pada kasus pelat tipis.



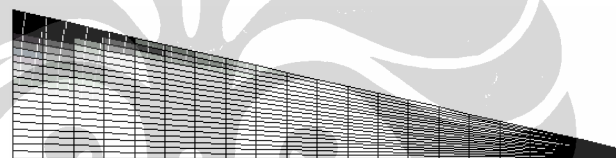
mesh seragam 5×5 (NELT = 25)



mesh seragam 9×9 (NELT = 81)



mesh seragam 15×15 (NELT = 225)



mesh seragam 20×20 (NELT = 400)

Gambar 4.42 Skema Penghalusan Seragam Untuk Pelat Morley

Solusi eksak diberikan oleh [M1] sebagai berikut :

- Momen prinsipal maksimum : $M_1 = 19,1 \times 10^{-3} f_z L^2$
- Momen prinsipal minimum : $M_2 = 10,8 \times 10^{-3} f_z L^2$

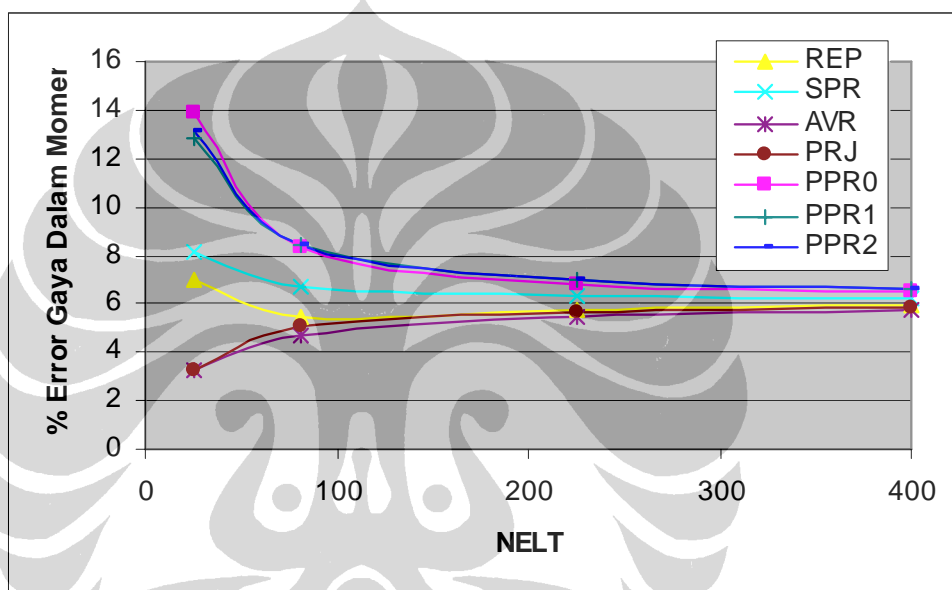
Pada Gambar 4.41 diperlihatkan pelat Morley yang akan dianalisa. Pelat tersebut akan dianalisa $\frac{1}{4}$ bagian saja karena sifat simetrisnya. Rasio Poisson sebesar 0.3 dipilih dengan modulus elastisitas 1000. Beban diaplikasikan tegak lurus permukaan pelat sebesar 1 per unit area.

Tabel 4.18 Momen Lentur M_1 Dan Persentase Error Di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Seragam

NELT	Momen M_1 Di Pusat Pelat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ

25	78.2860	77.5660	77.8050	73.5750	74.3470	71.0290	70.9830
81	74.5000	74.5260	74.5540	72.4980	73.3600	72.0180	72.2650
225	73.4590	73.5610	73.5630	72.7170	73.1200	72.5430	72.6750
400	73.2290	73.3070	73.3070	72.8210	73.0540	72.7090	72.7940
Eksak	68.7600						

NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
25	13.854	12.807	13.154	7.003	8.125	3.300	3.233
81	8.348	8.386	8.426	5.436	6.690	4.738	5.097
225	6.834	6.982	6.985	5.755	6.341	5.502	5.694
400	6.499	6.613	6.613	5.906	6.245	5.743	5.867

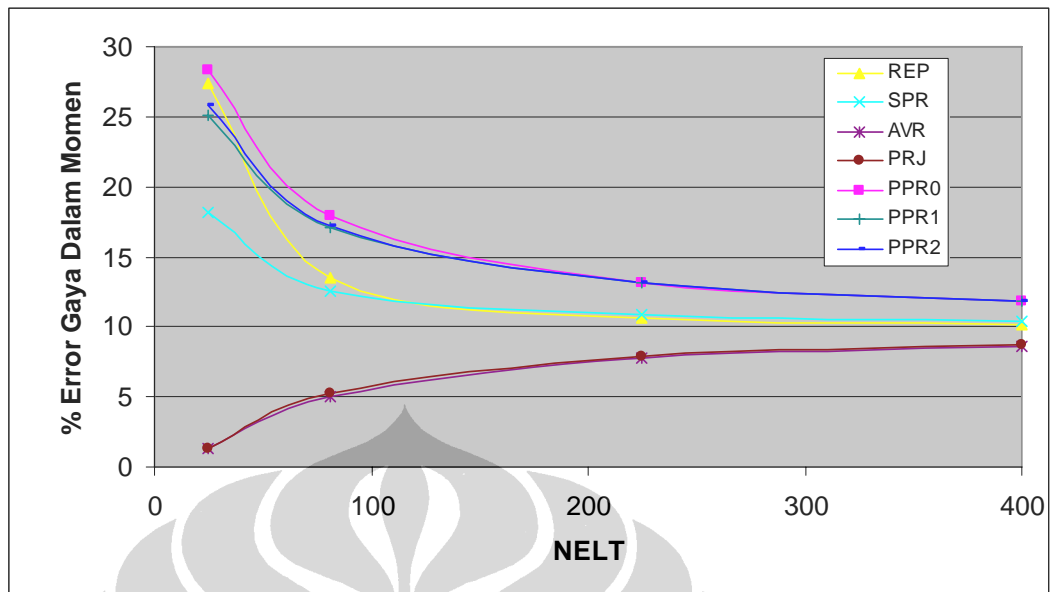


Gambar 4.43 Persentase Error Momen Lentur M_1 di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Seragam

Tabel 4.19 Momen Lentur M_2 dan Persentase Error Di Pusat Pelat Morley - Penghalusan Seragam

NELT	Momen M_2 Di Pusat Pelat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
25	48.6320	47.3770	47.6370	48.2640	44.7690	37.4020	37.3900
81	44.6550	44.3400	44.4020	43.0150	42.6310	39.7820	39.8720
225	42.8740	42.8380	42.8500	41.8930	41.9840	40.8230	40.8710
400	42.3680	42.3670	42.3710	41.7140	41.8310	41.1490	41.1800
Eksak	37.88						

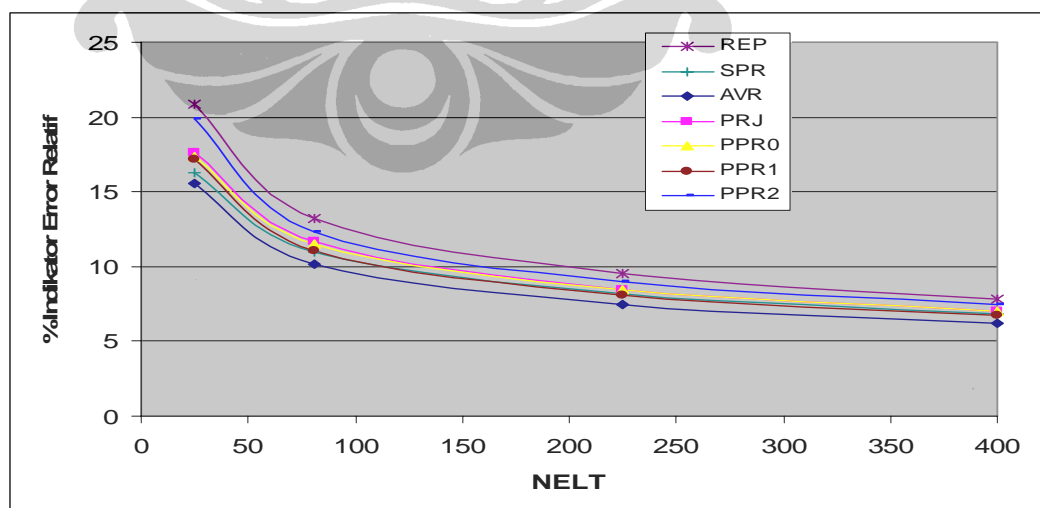
NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
25	28.384	25.071	25.758	27.413	18.186	1.262	1.294
81	17.885	17.054	17.218	13.556	12.542	5.021	5.259
225	13.184	13.089	13.120	10.594	10.834	7.769	7.896
400	11.848	11.845	11.856	10.121	10.430	8.630	8.712



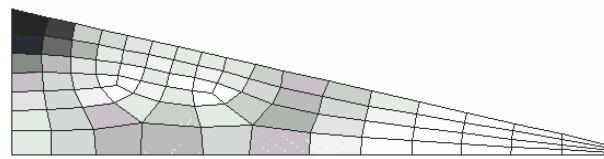
Gambar 4.44 Persentase Error Momen Lentur M_2 di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Seragam

Tabel 4.20 Indikator Error Relatif Pelat Morley - Penghalusan Seragam

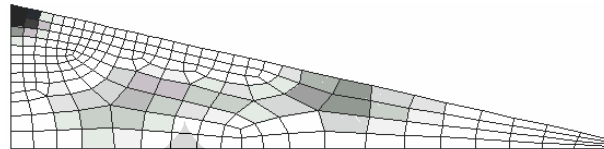
NELT	Penghalusan Seragam						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
25	17.339	17.22	19.867	20.844	16.287	15.535	17.606
81	11.538	11.05	12.329	13.226	10.997	10.178	11.692
225	8.461	8.074	8.981	9.569	8.156	7.43	8.485
400	7.027	6.733	7.44	7.857	6.869	6.209	7.034



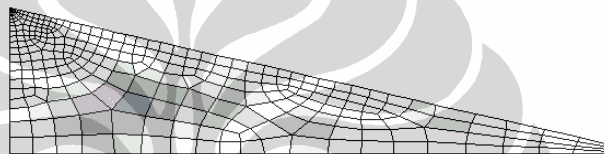
Gambar 4.45 Konvergensi Error Relative Pelat Morley - Penghalusan Seragam



mesh adaptif no. 1 (NELT = 81)



mesh adaptif no. 2 (NELT = 193)



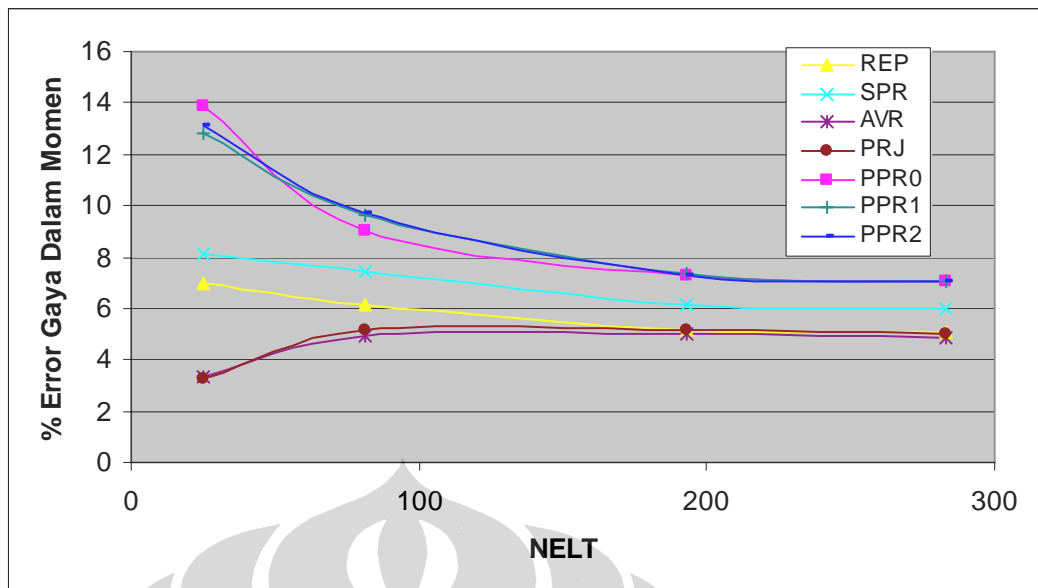
mesh adaptif no. 3 (NELT = 283)

Gambar 4.46 Skema penghalusan adaptif untuk pelat Morley

Tabel 4.30 Momen Lentur M_1 Dan Persentase Error Di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Adaptif

NELT	Momen M_1 Di Pusat Pelat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
25	78.2860	77.5660	77.8050	73.5750	74.3470	71.0290	70.9830
81	74.9560	75.3640	75.4110	72.9760	73.8600	72.1320	72.3110
193	73.7840	73.7990	73.7870	72.3160	72.9670	72.1810	72.2850
283	73.5940	73.5990	73.5950	72.2430	72.8640	72.1080	72.1970
Eksak	68.76						

NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
25	13.854	12.807	13.154	7.003	8.125	3.300	3.233
81	9.011	9.604	9.673	6.131	7.417	4.904	5.164
193	7.307	7.328	7.311	5.172	6.118	4.975	5.127
283	7.030	7.038	7.032	5.065	5.969	4.869	4.999

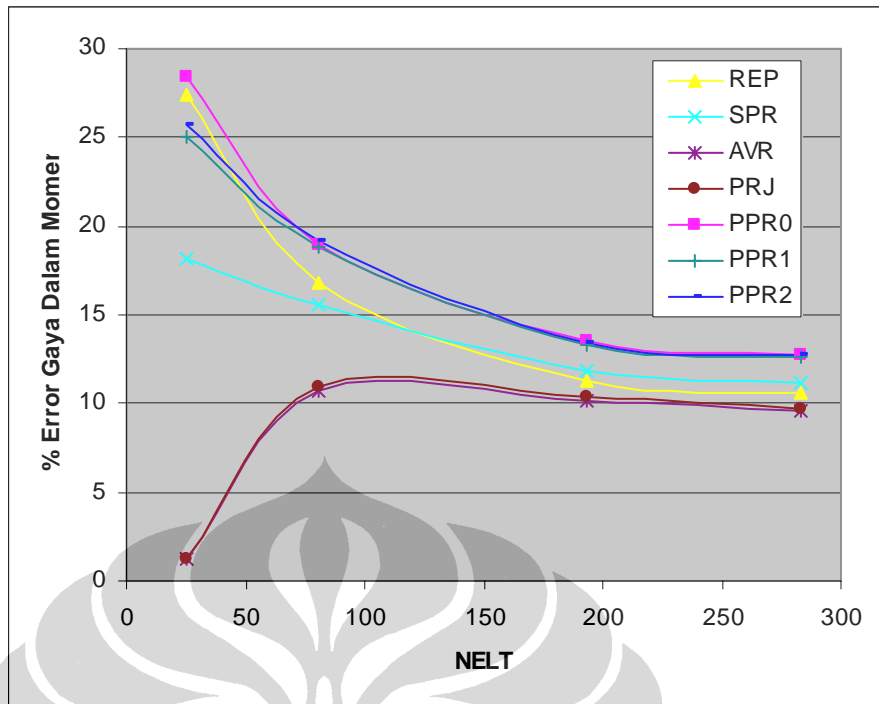


Gambar 4.47 Persentase Error Momen Lentur M_1 di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Adaptif

Tabel 4.21 Momen Lentur M_2 dan Persentase Error di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Adaptif

NELT	Momen M_2 Di Pusat Pelat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
25	48.6320	47.3770	47.6370	48.2640	44.7690	37.4020	37.3900
81	45.0610	45.0290	45.1440	44.2280	43.7830	41.9440	42.0270
193	43.0100	42.9400	42.9670	42.1640	42.3780	41.7290	41.8100
283	42.7090	42.6720	42.6990	41.9080	42.1230	41.4910	41.5570
Eksak	37.88						

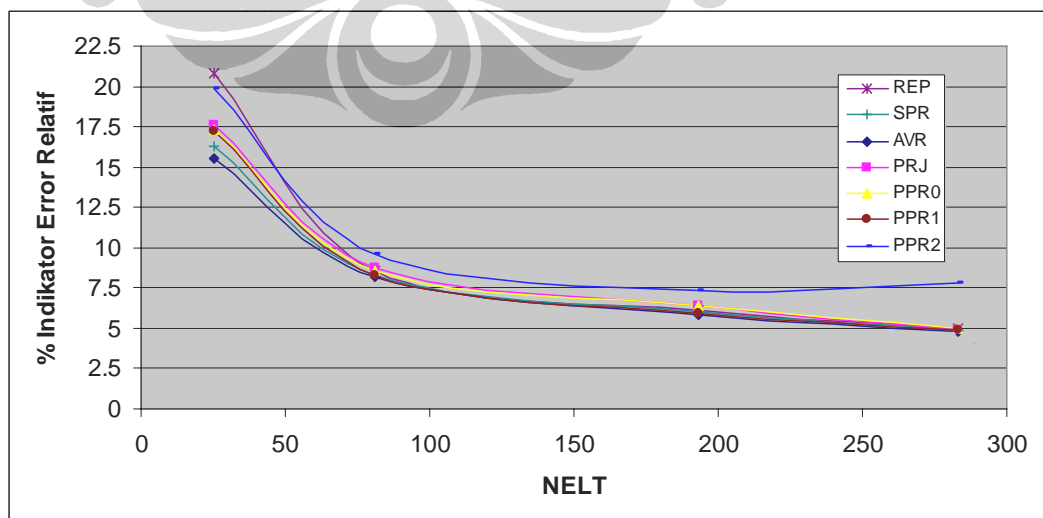
NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
25	28.384	25.071	25.758	27.413	18.186	1.262	1.294
81	18.957	18.873	19.176	16.758	15.583	10.729	10.948
193	13.543	13.358	13.429	11.309	11.874	10.161	10.375
283	12.748	12.650	12.722	10.634	11.201	9.533	9.707



Gambar 4.44 Persentase Error Momen Lentur M_2 Di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Adaptif

Tabel 4.22 Indikator Error Relatif Pelat Morley - Penghalusan Adaptif

NELT	Penghalusan Adaptive						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
25	17.339	17.220	19.867	20.844	16.287	15.535	17.606
81	8.602	8.278	9.580	8.566	8.278	8.219	8.750
193	6.380	5.967	7.317	6.153	5.998	5.871	6.377
283	4.954	4.896	7.791	4.999	4.861	4.825	4.911



Gambar 4.49 Konvergensi Error Relative Pelat Morley - Penghalusan Adaptive

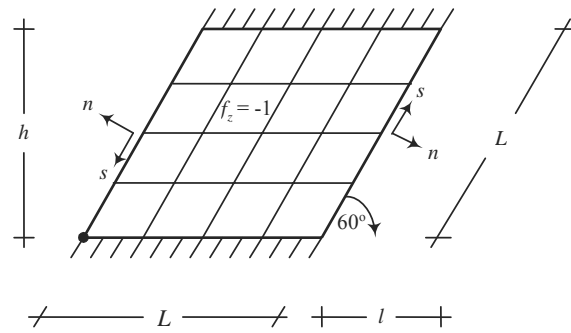
Indikator error relatif PPR1 memberikan hasil lebih baik dari PPR0 dan PPR2 dan hampir sama dengan SPR. Error gaya dalam PPR2 memberikan hasil yang tidak stabil dibandingkan dengan PPR0 dan PPR1. Penghalusan adaptive memberikan error yang lebih baik dari penghalusan seragam.



4.2.2.4 Pelat Miring 60° (Razzaque's Skew Plate)

Pelat Razzaque merupakan pelat miring bersudut 60° dan bertumpu sederhana (sendi) pada dua sisinya dan bebas pada dua sisi lainnya (lihat Gambar 4.). Penghalusan seragam dan adaptif dilakukan dengan skema seperti pada Gambar 4. dan Gambar 4.. Pada bagian ini akan dihitung persentase error untuk gaya dalam M_y di mana solusi eksaknya adalah[R1]:

- Momen M_y di pusat pelat : $M_y = 0,9589 \times 10^{-1} fL^2$



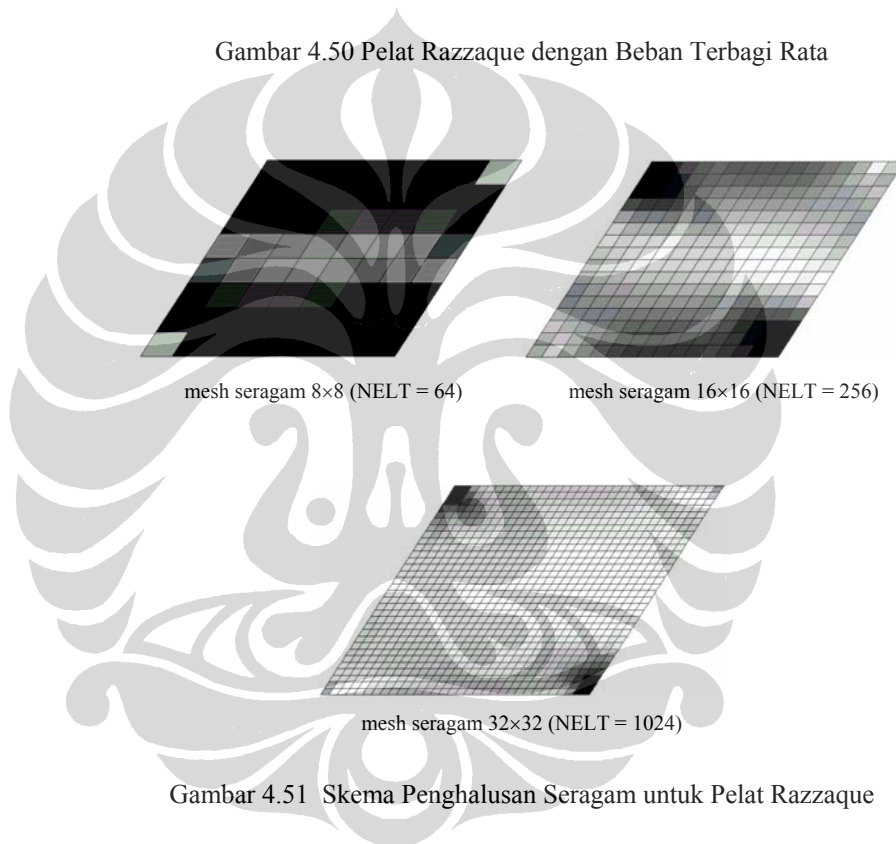
Data :
 $E = 1000$; $\nu = 0,3$; $h = 1$
 $L = 50$
 Beban merata : $f_z = -1$

Kondisi batas :
 Sendi : $w = 0$

$$l = S \cos 60^\circ = 50 \cos 60^\circ = 25$$

$$h = S \sin 60^\circ = 50 \sin 60^\circ = 43,3013$$

Gambar 4.50 Pelat Razzaque dengan Beban Terbagi Rata



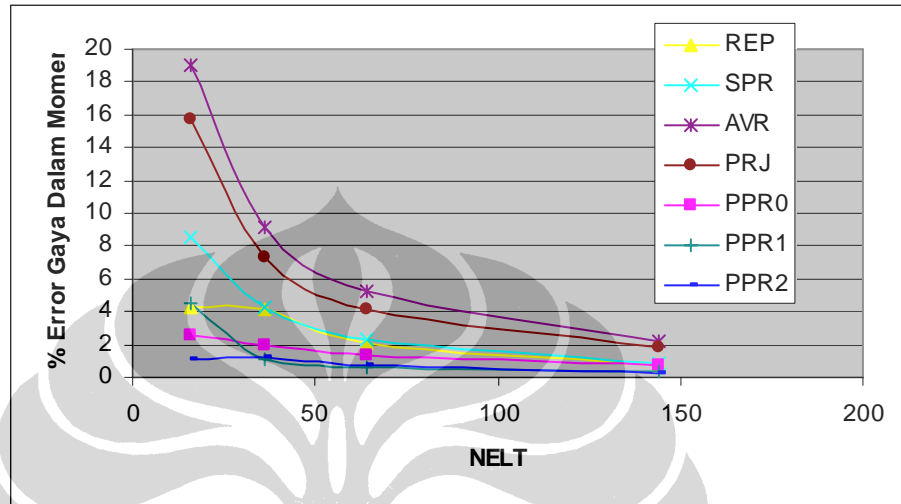
Gambar 4.51 Skema Penghalusan Seragam untuk Pelat Razzaque

Tabel 4.23 Momen M_y dan Persentase Error di Pusat Pelat Razzaque – Penghalusan Seragam

NELT	Momen M_y Lentur Pusat						
	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
16	983.970	1,001.900	948.630	917.740	876.870	776.490	808.570
36	977.820	969.990	947.610	918.990	918.370	870.760	888.340
64	971.240	964.520	951.670	939.560	936.930	908.620	918.860
144	965.370	962.100	957.070	951.890	950.680	937.390	941.710
Eksak	958.9						

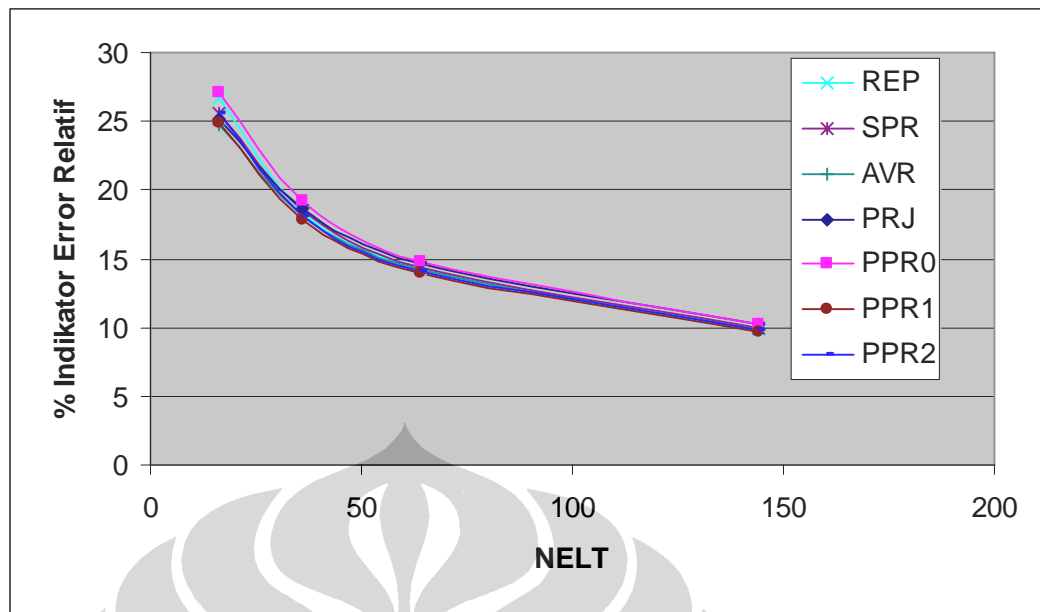
NELT	Persentase Error gaya dalam Momen (%)
------	---------------------------------------

	PPR0	PPR1	PPR2	REP	SPR	AVR	PRJ
16	2.6145	4.4843	1.0710	4.2924	8.5546	19.0228	15.6773
36	1.9731	1.1565	1.1774	4.1621	4.2267	9.1918	7.3584
64	1.2869	0.5861	0.7540	2.0169	2.2912	5.2435	4.1756
144	0.6747	0.3337	0.1908	0.7310	0.8572	2.2432	1.7927

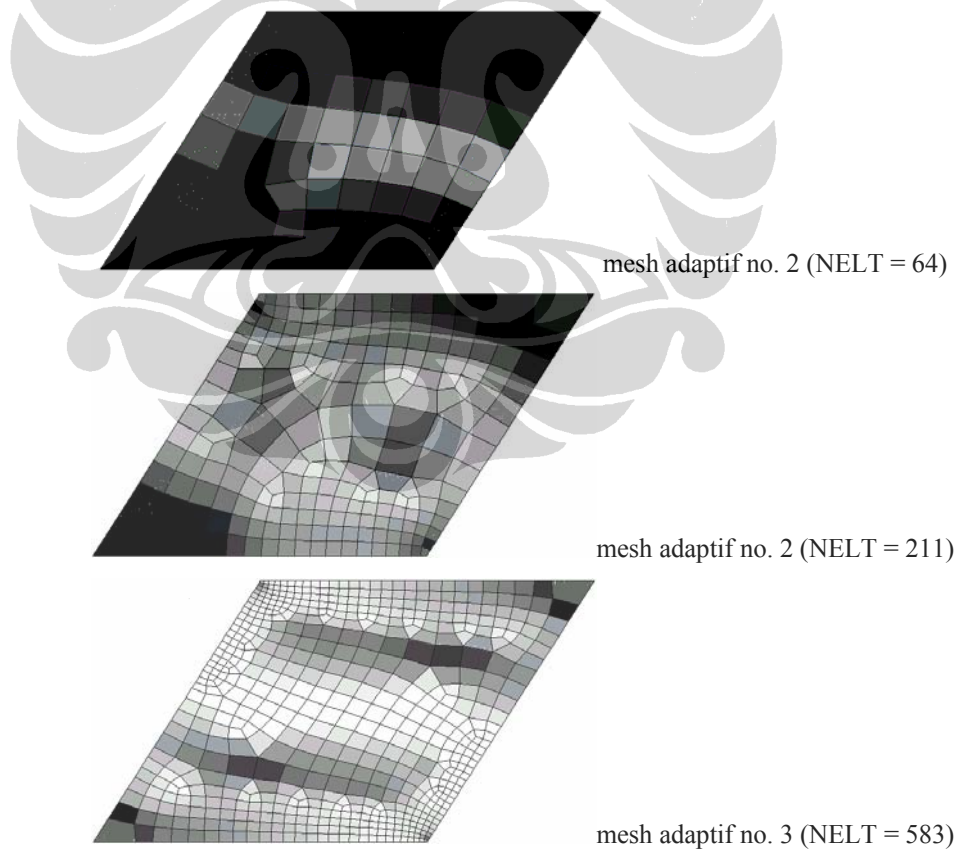
Gambar 4.52 Persentase Error Momen M_y di Pusat Pelat Razzaque

Tabel 4.24 Indikator Error Relatif Pelat Razzaque - Penghalusan Seragam

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
16	27.142	24.932	25.643	26.748	25.606	24.811	25.188
36	19.172	17.851	18.108	18.356	18.462	18.166	18.618
64	14.799	13.937	14.105	14.203	14.376	14.181	14.612
144	10.238	9.737	9.841	9.864	9.984	9.862	10.216



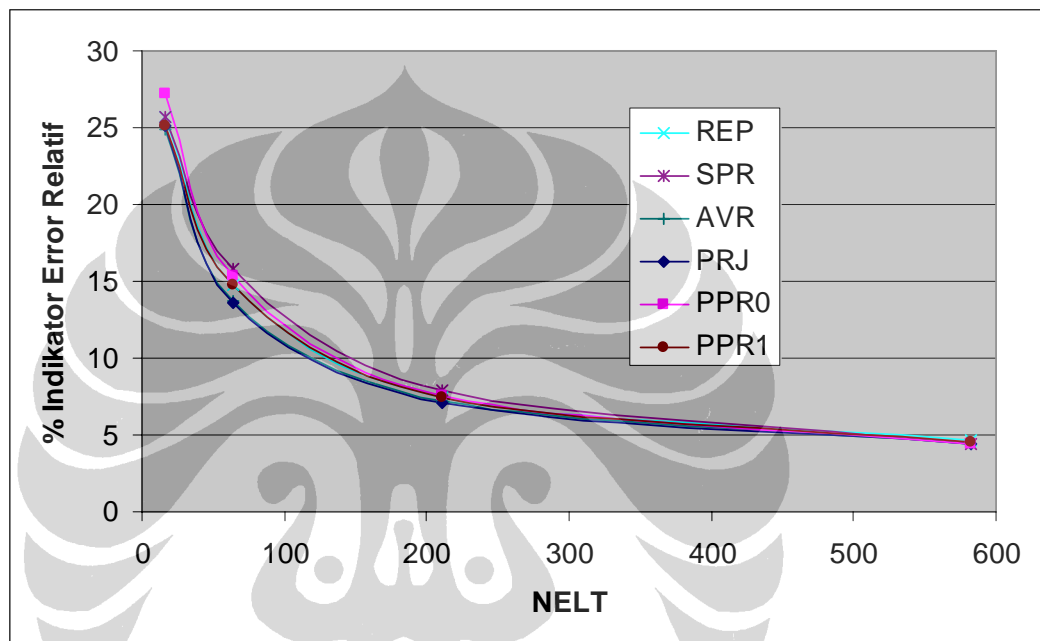
Gambar 4.53 Konvergensi Error Relative Pelat Razzaque - Penghalusan Seragam



Gambar 4.54 Skema Penghalusan Adaptif untuk Pelat Razzaque

Tabel 4.25 Indikator Error Relatif Pelat Razzaque - Penghalusan Adaptif

NELT	Indikator Error Relatif					
	ϕ^{PPRO}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
16	27.174	25.098	25.739	25.656	24.892	25.138
16	15.336	14.776	14.773	15.799	13.682	13.573
64	7.564	7.415	7.409	7.883	7.199	7.107
211	4.468	4.505	4.628	4.451	4.420	4.427



Gambar 4.55 Konvergensi Error Relative Pelat Razzaque - Penghalusan Adaptive

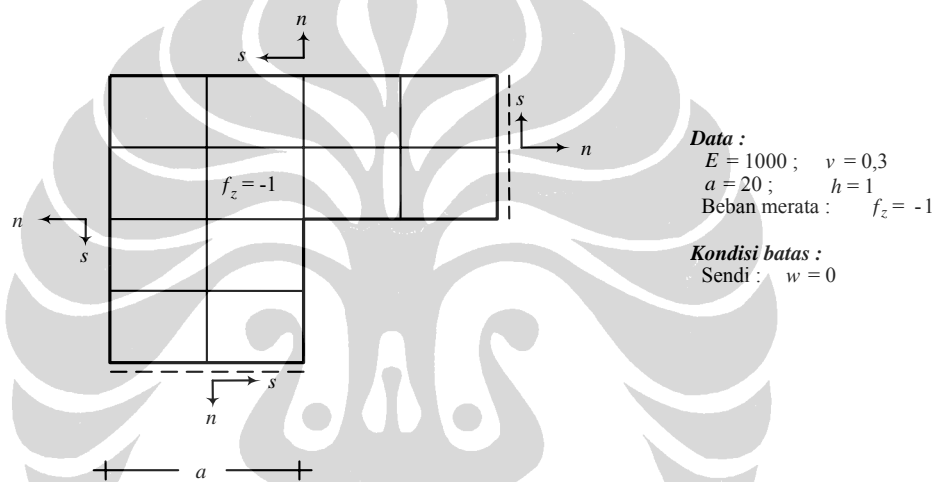
Indikator error relatif semua metode memberikan hasil yang hampir sama untuk penghalusan seragam. Untuk Penghalusan adaptive, PPRO dan PPR1 memberikan hasil yang hampir sama. Kelima metode memberikan hasil yang cenderung konvergen asimtotik eksak. Penghalusan adaptive memberikan error yang lebih baik dari penghalusan seragam.

4.2.2.5 Pelat L

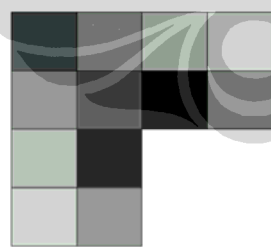
Pada bagian ini akan dibahas contoh kasus pelat yang sering dipakai untuk mengetahui perilaku konvergensi error akibat efek singularitas. Pelat tersebut adalah pelat berbentuk L yang memiliki sudut dalam 90° . Pada sudut inilah

singularitas terjadi. Pelat ini diberi perletakan sendi untuk lebih memfokuskan perhatian pada singularitas yang terjadi di sudut dalam tersebut.

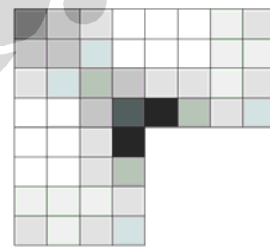
Permasalahan singularitas ini secara teoritis dapat diselesaikan jika kita memberikan elemen dalam jumlah banyak pada sudut dalam tersebut. Dengan kata lain penghalusan adaptif pada bagian tersebut merupakan solusi yang baik. Namun kita juga akan melihat bagaimana perilaku konvergensi error jika kita melakukan penghalusan seragam. Skema penghalusan ditunjukkan pada Gambar 4.57 dan Gambar 4.59. Sedangkan perbandingan konvergensi error untuk penghalusan seragam dan adaptif dapat dilihat pada Tabel 4.35 dan Tabel 4.36



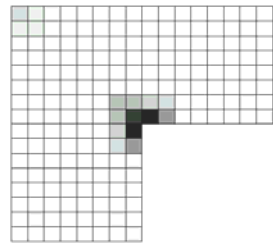
Gambar 4.56 Pelat L Singular dengan Tumpuan Sendi dan Beban Terbagi Rata



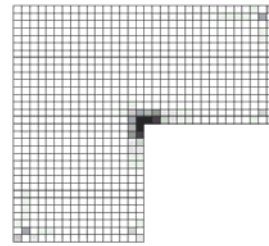
Mesh seragam no. 1
(NELT = 12)



Mesh seragam no. 2
(NELT = 48)



Mesh seragam no. 2
(NELT = 192)

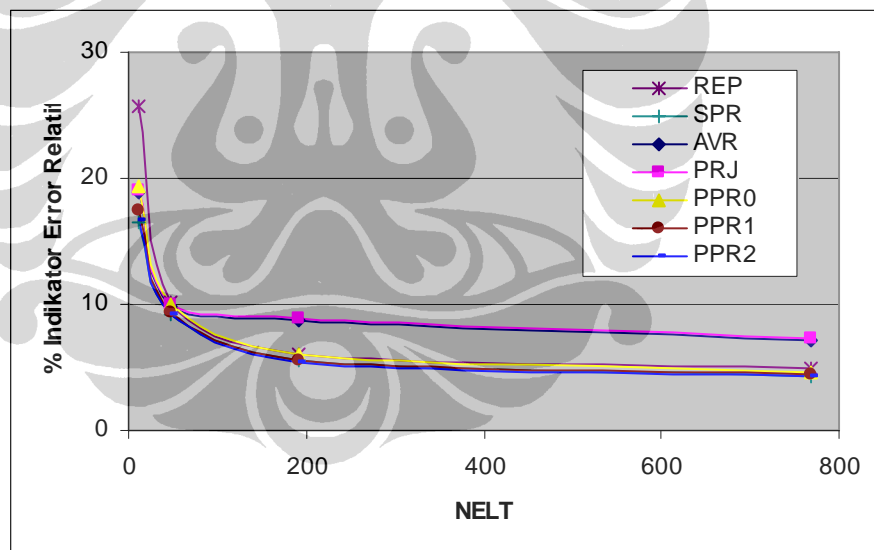


Mesh seragam no. 4
(NELT = 768)

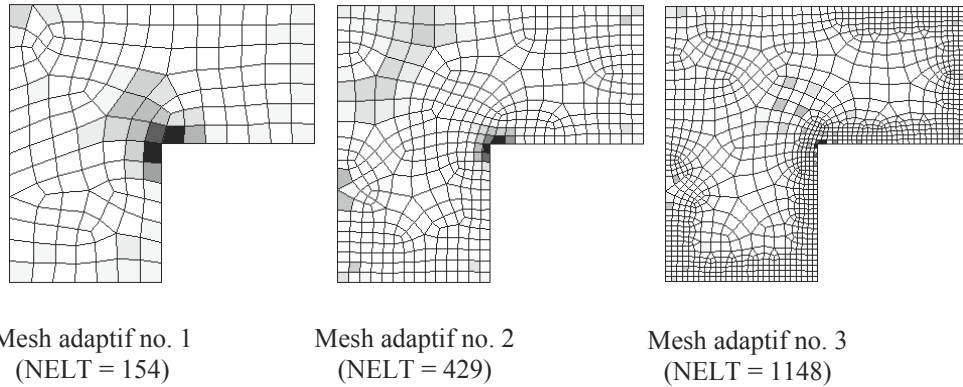
Gambar 4.57 Skema Penghalusan Seragam Pelat L Untuk Mencapai Error Relatif $\leq 5\%$

Tabel 4.26 Indikator Error Relatif Pelat L - Penghalusan Seragam

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ_{PPR0}	ϕ_{PPR1}	ϕ_{PPR2}	ϕ_{REP}	ϕ_{SPR}	ϕ_{AVR}	ϕ_{PRJ}
12	19.438	17.392	16.642	25.766	16.471	18.884	19.086
48	10.044	9.341	9.191	10.215	9.241	9.878	10.000
192	6.005	5.563	5.458	6.047	5.488	8.737	8.843
768	4.602	4.366	4.308	4.954	4.284	7.142	7.225

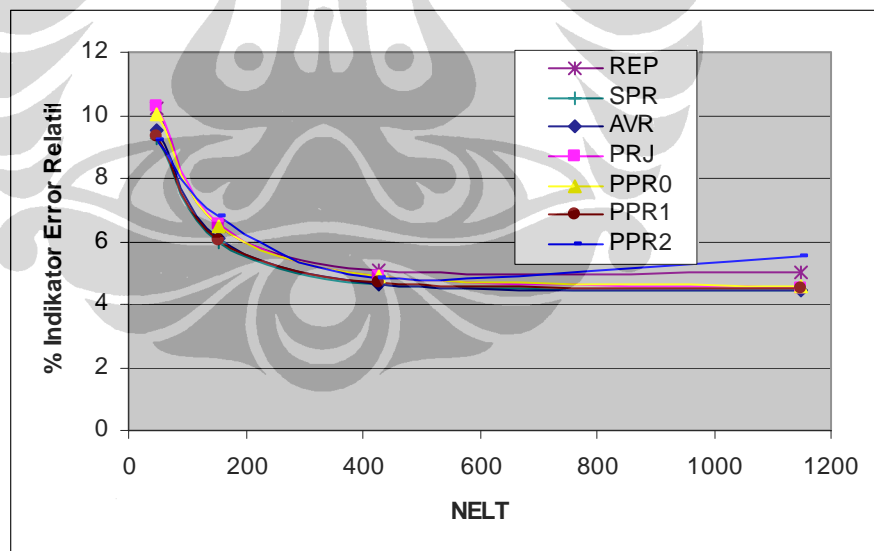


Gambar 4.58 Konvergensi Error Relative Pelat L - Penghalusan Seragam

Gambar 4.59 Skema Penghalusan Adaptif Pelat L Untuk Mencapai Error Relatif $\leq 5\%$

Tabel 4.27 Indikator Error Relatif Pelat L - Penghalusan Adaptif

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
48	10.044	9.341	9.191	10.215	9.241	9.517	10.273
154	6.473	6.044	6.769	6.452	5.96	6.115	6.567
429	4.888	4.676	4.805	5.106	4.628	4.643	4.884
1148	4.601	4.498	5.544	4.998	4.449	4.416	4.539

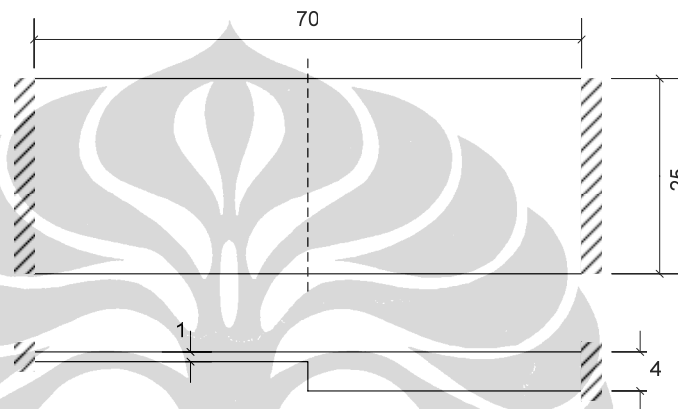


Gambar 4.60 Konvergensi Error Relative Pelat L - Penghalusan Adaptive

Untuk penghalusan seragam dan adaptive, PPR0 dan PPR1 memberikan hasil yang hampir sama dengan SPR. PPR2 cenderung fluktuatif pada penghalusan adaptive setelah NELT 429. Penghalusan adaptive memberikan error yang hampir sama dengan penghalusan seragam dan cenderung asimtotik eksak.

4.2.2.6 Pelat dengan Perbedaan Tebal

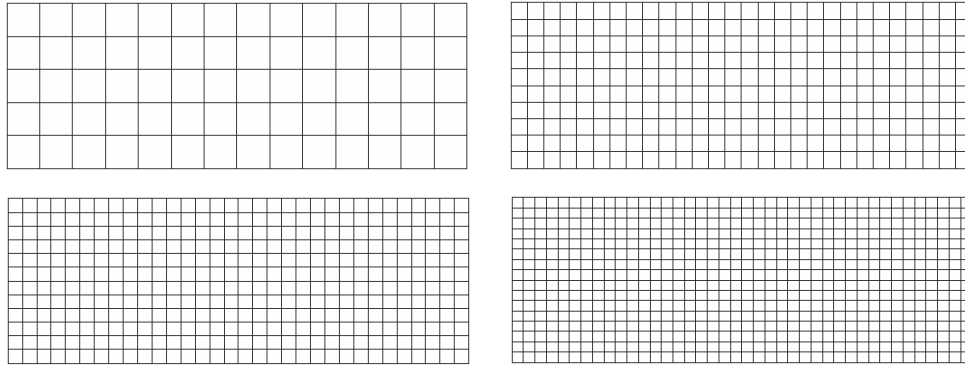
Penyelesaian persoalan diskontinuitas geometri pada pelat akan dievaluasi dengan bantuan estimator error. Pada bagian tengah pelat terjadi loncatan geometri di mana kontribusi error akan berperan besar. Pelat ini mengalami pembebanan secara merata sebesar 1 unit per area dan mempunyai ketebalan 1 unit untuk sisi kiri dan 4 unit pada sisi kanan. Modulus elastisitas 1000 dan Poisson ratio 0,3 dipakai untuk persoalan ini.



Gambar 4.45 Pelat Bujursangkar dengan Diskontinuitas Geometri

Kontur indeks penghalusan elemen memberi indikasi mengenai diperlukannya memperbanyak jumlah elemen pada daerah sisi tengah pelat. Secara langsung hal ini menunjukkan bahwa loncatan geometri memberikan kontribusi error yang besar.

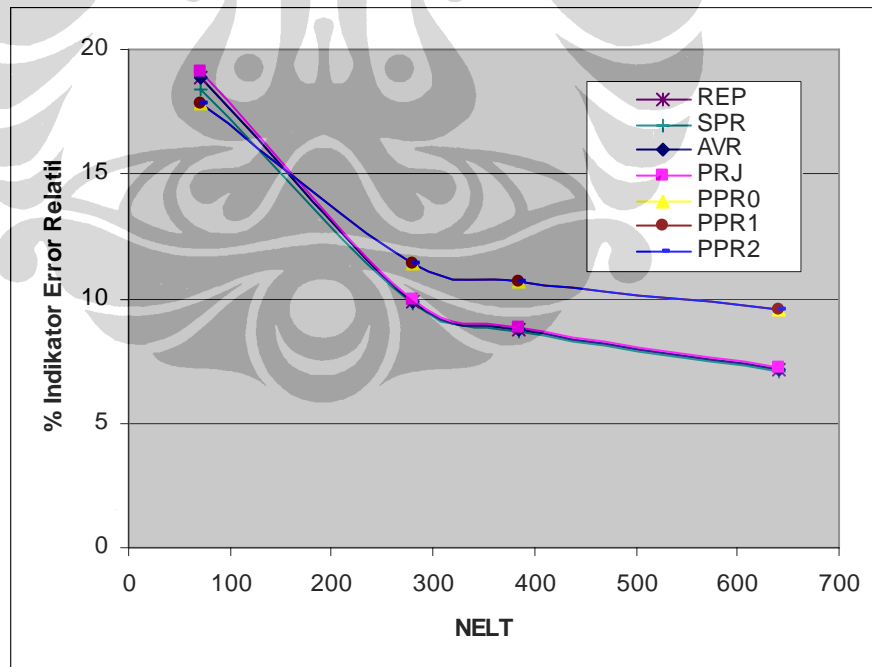
Selain diskontinuitas geometri, kondisi batas ikut menentukan kompleksnya permasalahan. Selain bagian tengah pelat, tiap sudut tumpuan memerlukan jumlah elemen yang banyak untuk mengeliminasi error energi pada tingkat elemen. Memperbanyak jumlah elemen khusus pada bagian-bagian tersebut merupakan pemulihan mesh yang baik dan efisien, sedangkan pada daerah lain error energi relatif kecil dan stabil.



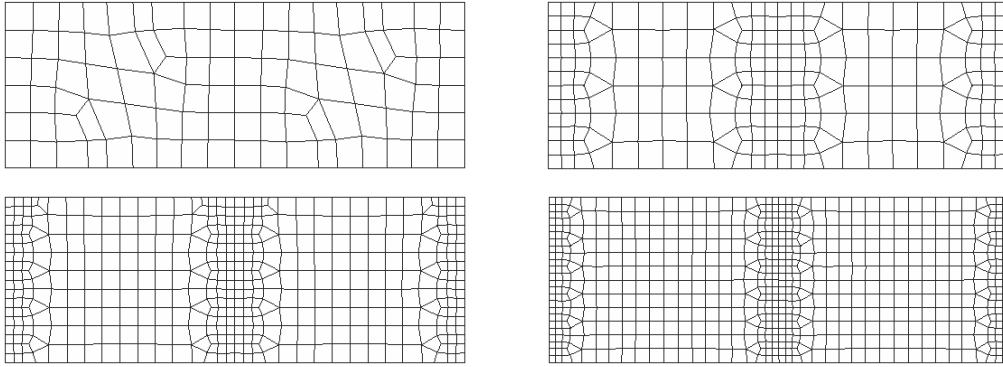
Gambar 4.46 Skema Penghalusan Seragam untuk Pelat dengan Perbedaan Tebal

Tabel 4.28 Indikator Error Relatif Pelat dengan Ketebalan Berbeda – Penghalusan Seragam

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ_{PPR0}	ϕ_{PPR1}	ϕ_{PPR2}	ϕ_{REP}	ϕ_{SPR}	ϕ_{AVR}	ϕ_{PRJ}
70	17.831	17.831	17.831	18.900	18.403	18.884	19.086
280	11.408	11.408	11.408	9.904	9.803	9.878	10.000
384	10.664	10.664	10.664	8.754	8.678	8.737	8.843
640	9.594	9.594	9.594	7.145	7.095	7.142	7.225



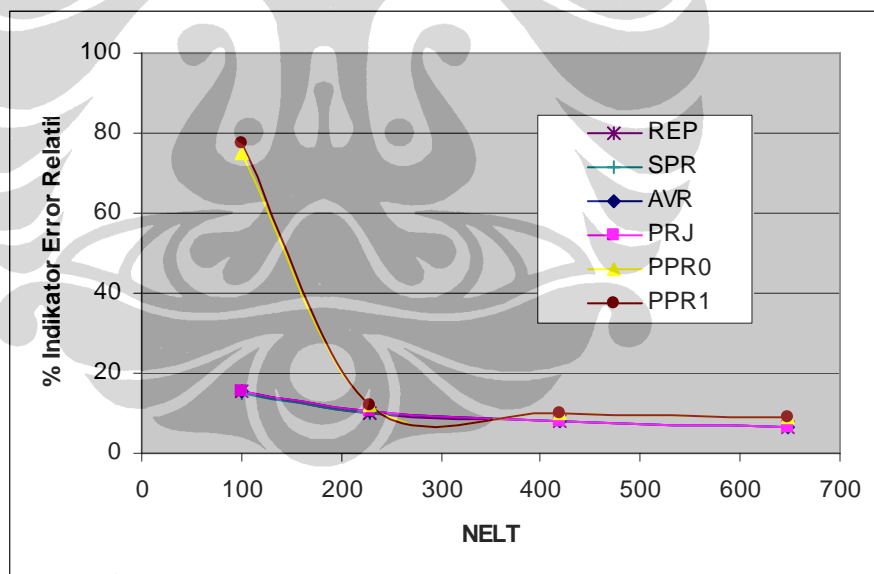
Gambar 4.63 Indikator Error Relatif Pelat dengan Ketebalan Berbeda – Penghalusan Seragam



Gambar 4.47 Skema Penghalusan Adaptif untuk Pelat dengan Ketebalan Berbeda

Tabel 4.29 Indikator Error Relatif Pelat dengan Ketebalan Berbeda – Penghalusan Adaptif

NELT	Indikator Error Relatif					
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
100	75.086	77.342	15.415	15.060	15.356	15.493
228	11.907	12.002	10.184	10.051	10.338	10.320
420	10.147	10.184	7.977	7.910	8.015	8.065
648	8.798	8.826	6.532	6.484	6.540	6.593



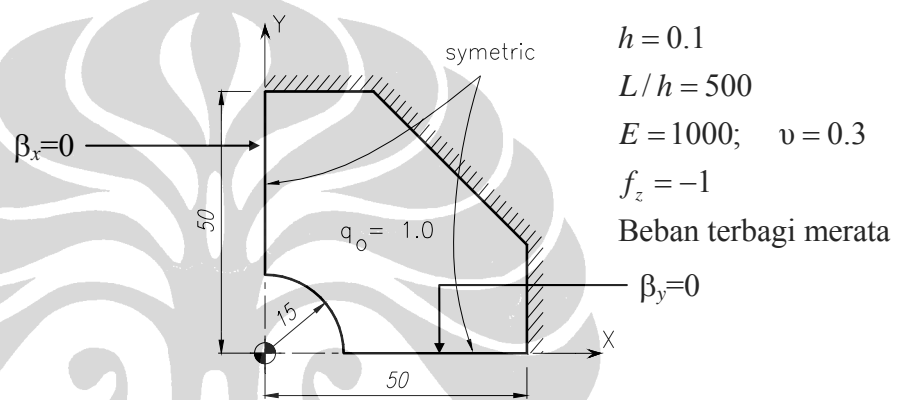
Gambar 4.48 Indikator Error Relatif Pelat dengan Ketebalan Berbeda – Penghalusan Adaptif

Untuk penghalusan seragam dan adaptive, semua metode cenderung memberikan hasil yang konvergen. Penghalusan adaptive memberikan hasil yang lebih baik dari penghalusan seragam.

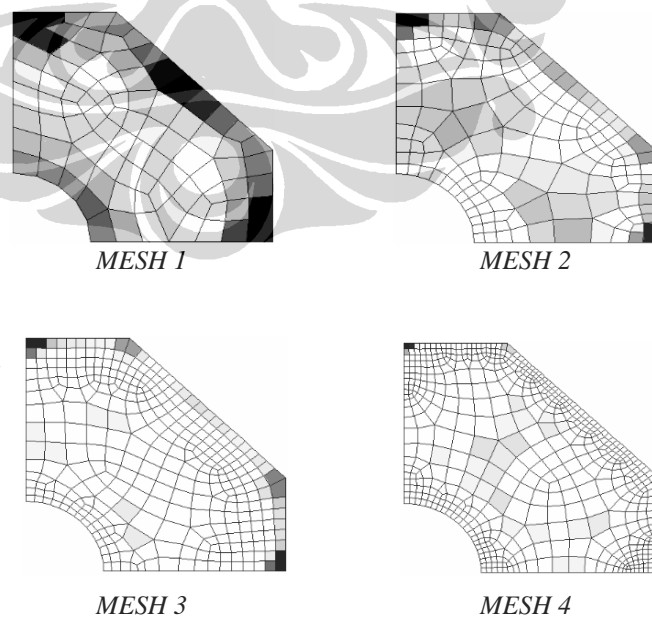
4.2.2.7 Pelat Hexagonal Berlubang

Gambar 4.49 memperlihatkan contoh lanjut aplikasi estimator error problem pelat lentur dengan elemen MITC. Untuk problem ini kondisi batas tepi pelat dibuat lebih kompleks dibandingkan dengan problem-problem sebelumnya. Karena sifat simetris pelat, maka hanya satu quadran pelat yang akan dianalisa.

Tebal pelat diambil 0.1 yang menghasilkan $L/h=500$ (pelat tipis). Modulus elastisitas sebesar 1000 dan Poisson rasio 0.3 dipilih untuk problem ini. Pembebanan merata sebesar 1.0 unit per area bekerja tegak lurus permukaan pelat.



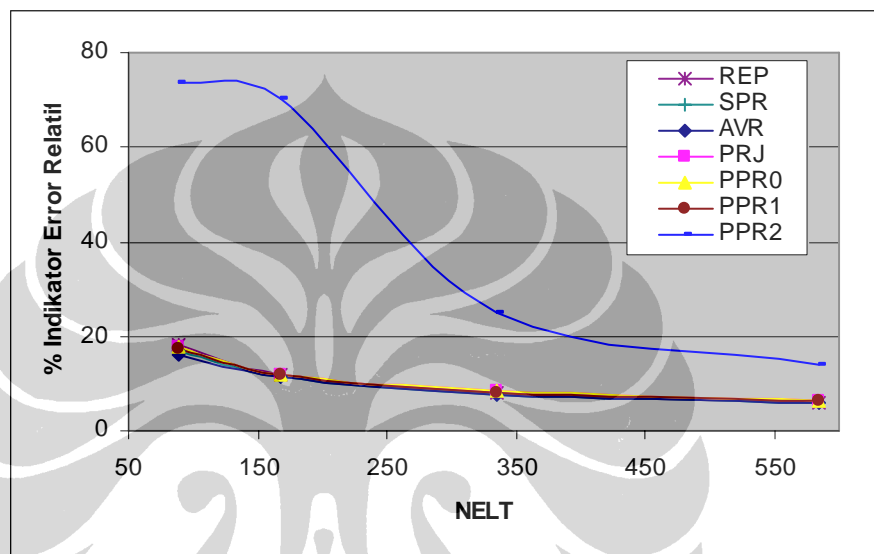
Gambar 4.49 Satu Quadran Pelat Hexagonal Dengan Beban Merata



Gambar 4.50 Skema Penghalusan Adaptif Pelat Hexagonal Berlubang Untuk Mencapai Error Relatif

Tabel 4.40 Indikator Error Relatif Pelat Hexagonal Berlubang

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
88	17.725	17.302	73.502	18.333	16.916	16.279	17.763
167	11.895	11.649	70.402	11.849	11.313	11.225	12.041
335	8.285	8.009	24.994	8.061	7.804	7.734	8.274
585	6.27	6.168	13.901	6.113	6.107	6.064	6.294



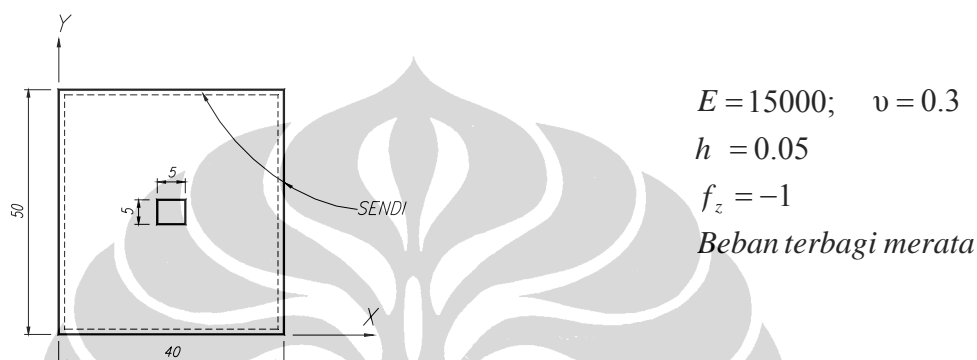
Gambar 4.51 Konvergensi Error Relative Pelat Hexagonal Berlubang Dengan Penghalusan Adaptive

Semua metode kecuali PPR2 memberikan indikator error yang hampir sama. PPR2 memberikan error yang besar dan memberikan laju konvergensi yang cepat. PPR1 memberikan hasil yang hampir sama dengan REP dan SPR.

4.2.2.8 Pelat Persegipanjang Berlubang

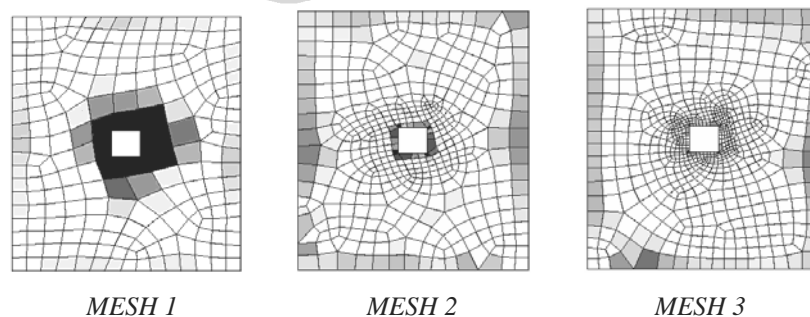
Suatu pelat persegipanjang dengan lubang berbentuk bujursangkar di tengah, merupakan salah satu contoh kasus pelat yang cukup sering dijumpai. Pada bagian ini, ketebalan pelat diambil cukup tipis yaitu 0.05, sedangkan dimensi pelat diambil 40×50 seperti yang terlihat pada

Gambar 4.52.



Gambar 4.52 Pelat Persegi Panjang Berlubang

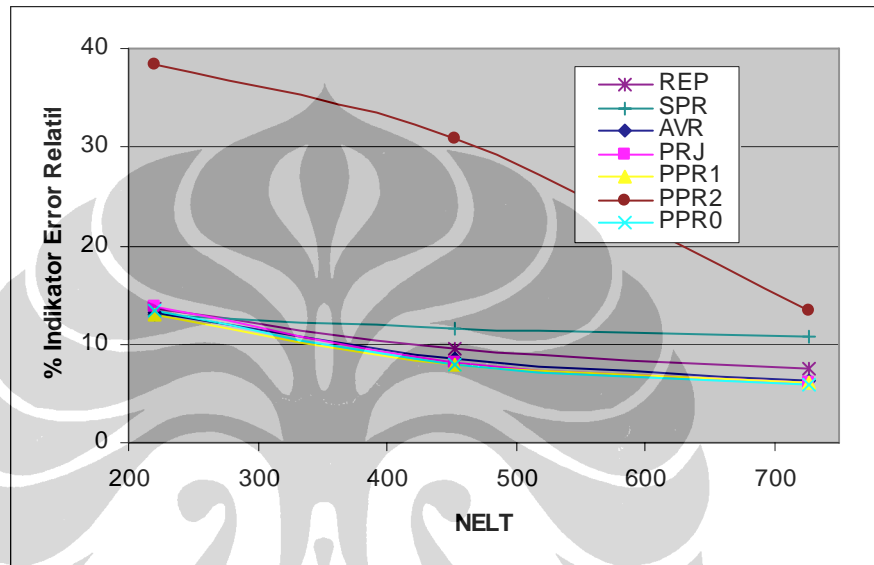
Untuk kasus ini dilakukan pengujian menggunakan penghalusan secara adaptif saja. Bisa dilihat dari gambar di bawah, penghalusan akan lebih terkonsentrasi pada daerah lubang. Hal ini terjadi karena adanya konsentrasi tegangan pada daerah lubang. Untuk kasus konstruksi, pada daerah pinggir lubang/void dilakukan perkuatan dengan pembesian yang lebih rapat. Bentuk penghalusan mesh diperlihatkan pada Gambar 4.70.



Gambar 4.53 Skema Penghalusan Adaptif Pelat Persegi Panjang Berlubang Untuk Mencapai Error Relatif

Tabel 4.30 Indikator Error Relatif Pelat Persegipanjang Berlubang

NELT	Indikator Error Relatif						
	ϕ^{PPR0}	ϕ^{PPR1}	ϕ^{PPR2}	ϕ^{REP}	ϕ^{SPR}	ϕ^{AVR}	ϕ^{PRJ}
220	13.407	12.992	38.451	13.527	13.033	13.215	13.779
453	7.858	7.934	30.831	9.634	11.555	8.589	8.140
727	5.935	5.99	13.303	7.424	10.694	6.326	6.094



Gambar 4.54 Konvergensi Error Relatif Pelat Persegipanjang Berlubang dengan Penghalusan Adaptif

PPR0 dan PPR1 memberikan error yang lebih baik dibandingkan dengan metode yang lain. Sedangkan PPR2 memberikan error yang besar.