



UNIVERSITAS INDONESIA

**IMPLEMENTASI METODE PPR
DALAM MENGESTIMASI ERROR MEH
STUDI KASUS :
PELAT LENTUR DENGAN ELEMEN MITC**

TESIS

ANTONI RIDWAN LUBIS
0706172544

**FAKULTAS TEKNIK
PROGRAM PASCASARJANA BIDANG ILMU TEKNIK
DEPOK
DESEMBER 2009**



UNIVERSITY OF INDONESIA

**IMPLEMENTATION OF PPR METHOD
IN ESTIMATING FEM ERROR
CASE STUDY :
PLATE BENDING WITH MITC ELEMENT**

THESIS

ANTONI RIDWAN LUBIS

0706172544

**FACULTY OF TECHNIQUE
PROGRAM OF CIVIL ENGINEERING
POST GRADUATE PROGRAM OF STRUCTURE ENGINEERING
DEPOK
DECEMBER 2009**

169 / FT.01 / TESIS / 12 / 2009



UNIVERSITAS INDONESIA

**IMPLEMENTASI METODE PPR
DALAM MENGESTIMASI ERROR MEH
STUDI KASUS :
PELAT LENTUR DENGAN ELEMEN MITC**

TESIS

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Teknik

**ANTONI RIDWAN LUBIS
0706172544**

**FAKULTAS TEKNIK
PROGRAM PASCASARJANA BIDANG ILMU TEKNIK
DEPOK
DESEMBER 2009**

169 / FT.01 / TESIS / 12 / 2009



UNIVERSITY OF INDONESIA

**IMPLEMENTATION OF PPR METHOD
IN ESTIMATING FEM ERROR
CASE STUDY :
PLATE BENDING WITH MITC ELEMENT**

THESIS

**Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master Engineering**

**ANTONI RIDWAN LUBIS
0706172544**

**FACULTY OF TECHNIQUE
PROGRAM OF CIVIL ENGINEERING
POST GRADUATE PROGRAM OF STRUCTURE ENGINEERING
DEPOK
DECEMBER 2009**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

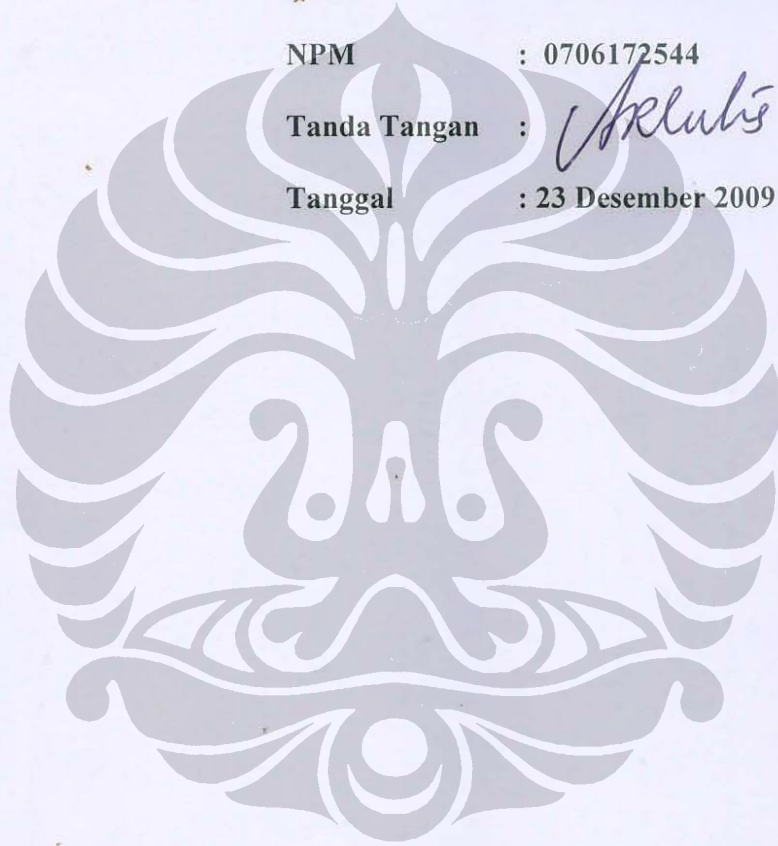
Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Antoni Ridwan Lubis

NPM : 0706172544

Tanda Tangan : 

Tanggal : 23 Desember 2009



DECLARATION

I acknowledge that thesis of which topic is :

**IMPLEMENTATION OF PPR METHOD
IN ESTIMATING FEM ERROR
CASE STUDY :
PLATE BENDING WITH MITC ELEMENT**

Which have been made fulfill the requirement of master engineering on the post graduate Program of University of Indonesia, is not an invitation or duplicated to any thesis that has been published or used in order to gain the master degree in the university of Indonesia and in any other universities, excepts some of its information used are mentioned property.

Name : Antoni Ridwan Lubis

NPM : 0706172544

Signature :



Date : 23 December 2009

HALAMAN PERSETUJUAN

Proposal ini diajukan oleh :

Nama : Antoni Ridwan Lubis

NPM : 0706172544

Program Studi : Teknik Sipil

Judul Proposal:

IMPLEMENTASI METODE PPR
DALAM MENGESTIMASI ERROR MEH
STUDI KASUS :
PELAT LENTUR DENGAN ELEMEN MITC

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk menyelesaikan Tesis dalam mencapai Gelar Magister Teknik pada Program Studi Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Indonesia.

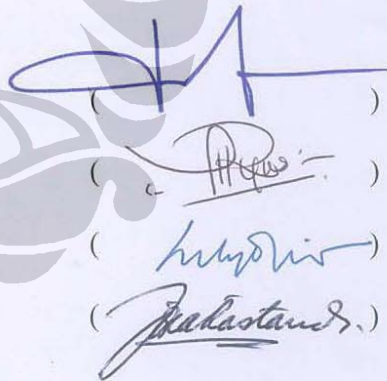
DEWAN PENGUJI :

Pembimbing : Prof. Dr. Ir. Irwan Katili

Penguji 1 : Ir. Essy Ariyuni, Ph.D

Penguji 2 : Dr. Ir. Elly Tjahjono

Penguji 3 : Dr.-Ing. Ir. Josia Irwan R



()
()
()
()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 23 Desember 2009

APPROVAL

Thesis of which topic is :

IMPLEMENTATION OF PPR METHOD IN ESTIMATING FEM ERROR CASE STUDY : PLATE BENDING WITH MITC ELEMENT

Has been made fulfill curriculum requirement of the Master Program.on the University of Indonesia in order to gain the degree of Master Engineering on the post graduate Program Majoring in Civil Structure. This Thesis has been approved and assessed on 23 December 2009 and expressed to fulfill condition / valid as thesis at Department Technique Civil Faculty of Technique University of Indonesia.

COMMITTEE ON EXAMINATION :

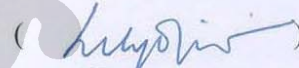
Thesis Adviser: Prof. Dr. Ir. Irwan Katili



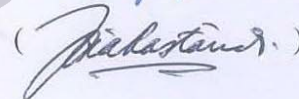
Examiner 1 : Ir. Essy Ariyuni, Ph.D



Examiner 2 : Dr. Ir. Elly Tjahjono



Examiner 3 : Dr.-Ing. Ir. Josia Irwan R



Approved in : Depok

Date : 23 December 2009

KATA PENGANTAR

Syukur kepada Tuhan yang telah melimpahkan berkatnya sehingga saya dapat menyelesaikan tesis ini. Tesis ini merupakan salah satu syarat untuk mencapai gelar Magister Teknik dari Departemen Teknik Sipil pada Fakultas Teknik Universitas Indonesia. Dengan segala kerendahan hati saya menyadari bahwa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak telah sangat banyak membantu saya dalam penyusunan tesis ini. Oleh karena itu, dengan segala ketulusan saya mengucapkan terima kasih kepada :

Bapak Prof. Dr. Ir. Irwan Katili, DEA, sebagai pembimbing dan pengajar yang telah memberikan saran, pengetahuan, waktu dan perhatian, serta motivasi, dengan penuh kesabarann selama penyusunan tesis ini.

Orang tua, Istri saya Sonti dan ketiga anak saya Grace, Arion dan Permata, yang dengan setia memberikan dorongan moril.

Rekan-rekan kantor Arion Plan, Gilbert dan Gama serta mahasiswa Pascasarjana Universitas Indonesia dan semua sahabat saya yang tidak bisa saya sebutkan satu-persatu yang membantu saya dalam menyelesaikan tesis ini.

Akhir kata, saya berharap Tuhan Yang Maha Esa berkenan membalas segala kebaikan semua pihak yang telah membantu. Semoga tesis ini membawa manfaat bagi pengembangan ilmu.

Depok, 23 Desember 2009

Antoni Ridwan Lubis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI
TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Antoni Ridwan Lubis
NPM : 0706172544
Program Studi : Pascasarjana bidang Teknik
Departemen : Teknik Sipil
Fakultas : Teknik
Jenis karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*)** atas karya ilmiah saya yang berjudul :

**IMPLEMENTASI METODE PPR
DALAM MENGESTIMASI ERROR MEH
STUDI KASUS :
PELAT LENTUR DENGAN ELEMEN MITC**

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 23 Desember 2009
Yang menyatakan



(Antoni Ridwan Lubis)

ABSTRAK

Nama : Antoni Ridwan Lubis
Program Studi : Pascasarjana bidang Teknik
Judul :

IMPLEMENTASI METODE PPR DALAM MENGESTIMASI ERROR MEH STUDI KASUS : PELAT LENTUR DENGAN ELEMEN MITC

Salah satu metode pemulihan solusi gaya dalam metode elemen hingga yang paling baru adalah metode *Polynomial Preserving Recovery (PPR)* yang diperkenalkan oleh Zhang (2004). Metode *PPR* merupakan metode pemulihan superconvergent dengan menggunakan patch sebagai media perhitungan seperti yang juga digunakan dalam metode *Superconvergent Patch Recovery (SPR)* yang sudah lebih dulu dikenal sebagai metode pemulihan dengan kinerja bagus.

Uji numerik implementasi metode tersebut perlu dilakukan dalam mengestimasi error metode elemen hingga untuk pelat lentur dengan elemen MITC. Dalam penelitian ini uji numerik akan dilakukan dengan penghalusan jaringan elemen (*mesh*) tipe-*h* secara seragam dan adaptif. Hasil pengujian tersebut akan dibandingkan dengan tiga metode pemulihan gaya dalam lainnya yaitu metode SPR, metode REP, metode rata-rata langsung, dan metode proyeksi. Program utama yang akan digunakan dalam penelitian ini untuk melakukan uji numerik dimaksud adalah program UI-FEAP yang telah disertai subrutin formulasi elemen MITC dan Error Estimator Z^2 yang ditulis dalam bahasa FORTRAN hasil penelitian peneliti lain sebelumnya. Penulis menambahkan subrutin yang terkait dengan perhitungan metode *PPR*.

Kata Kunci :

Pelat Lentur, Elemen MITC, *Superconvergent Patch Recovery*, *Polynomial Preserving Recovery (PPR)*, Error Estimator, penghalusan tipe-*h*, penghalusan seragam dan adaptif, UI-FEAP

ABSTRACT

Nama : Antoni Ridwan Lubis
Program Studi : Pascasarjana bidang Teknik
Judul :

**IMPLEMENTATION OF PPR METHOD
IN ESTIMATING FEM ERROR
CASE STUDY :
PLATE BENDING WITH MITC ELEMENT**

One of the newly-published recovery methods in finite element method is the *Polynomial Preserving Recovery (PPR)* introduced by Zhang (2004). It is a superconvergent recovery method using patch as recovery media as done by *Superconvergent Patch Recovery (SPR)*, which has been well known as a good recovery method.

A numerical study of the implementation of this method shall be carried out to estimate error in finite element analysis using MITC element. In this research, the numerical study will be performed by both uniform and adaptive *h*-type *mesh* refinement. The result will be compared with three other recovery methods, i.e. SPR method, REP method, averaging method, and projection method. The main program to be used in the numerical study will be the UI-FEAP program, which has been enriched with MITC and Z^2 error estimator subroutines written in FORTRAN programming language by other researchers. The subroutines related to PPR method shall be added in this regard.

Key word:

Plate bending, MITC element, *Superconvergent Patch Recovery*, *Polynomial Preserving Recovery (PPR)*, Error Estimator, *h*-type refinement, uniform and adaptive refinement, UI-FEAP

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	v
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR NOTASI	x
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xix
DARTAR LAMPIRAN	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Umum	1
1.2 Latar Belakang Historis	2
1.3 Error Estimator Saat Ini	4
1.4 Teknik Pemulihan Solusi	5
1.5 Tinjauan Pustaka	5
1.6 Tujuan Dan Metodologi Penulisan	6
1.7 Pembatasan Masalah	7
1.8 Sistematika Penulisan	7
BAB II PEMULIHAN SOLUSI DENGAN METODE <i>POLYNOMIAL</i>	
<i>PRESERVING RECOVERY</i> DAN ERROR ESTIMATOR Z^2	9
2.1 Umum	9
2.1.1 Kesalahan Solusi Metode Elemen Hingga	9
2.1.2 Estimasi Error <i>A Posteriori</i>	10
2.1.3 Penghalusan Jaringan	11
2.2 Estimasi Error Zienkiewicz-Zhu	15
2.2.1 Norma Error dan Tingkat Konvergensi	16
2.2.2 Teknik Pemulihan Solusi	19
2.2.3 Metode Pemulihan Superkonvergen	23
2.2.4 <i>Superconvergent Patch Recovery</i> (SPR)	28
2.2.5 <i>Polynomial Preserving Recovery</i> (PPR)	31
2.2.6 Gaya Dalam pada Nodal Struktur	37
2.2.7 Estimasi Error dengan Pemulihan Solusi Gaya Dalam	37
2.3 Indikator Error Dan Penghalusan	39
BAB III ASPEK PROGRAMASI METODE PPR DENGAN FEAP.....	43
3.1 Umum	43
3.2 Modifikasi Subrutin FEAP	43
3.2.1 Daftar Subrutin Terkait Dengan Error Estimator dan Metode PPR	44
3.2.2 Penjelasan Kode Fortran Subrutin PPR	47
3.2.2.1 Mengalokasi Memori Aray-Aray PPR	47

	3.2.2.2	Database Patch	50
	3.2.2.3	Komputasi Gaya Dalam Nodal Dengan Metode PPR.....	51
	3.2.2.4	Komputasi Indikator Error Relatif Parsial Lentur	63
	3.2.3	Contoh Data Input Analisa Metode PPR dan Error Estimasi	64
BAB IV	UJI NUMERIK		78
4.1	Umum.....		78
4.2	Uji Konvergensi Gaya Dalam dan Estimasi Error		80
	4.2.1	Pelat Khusus	80
	4.2.1.1	Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit dengan Beban Merata	80
	4.2.1.2	Pelat Bujursangkar Perletakan Sederhana dengan Beban Merata.....	84
	4.2.1.3	Pelat Bujursangkar Perletakan Sederhana dengan Beban Terpusat.....	86
	4.2.1.4	Pelat Melingkar dengan Beban Merata.....	88
	4.2.1.5	Distribusi Momen Lentur pada Pelat Melingkar	97
	4.2.2	Pelat Umum.....	103
	4.2.2.1	Pelat Busur Berlubang 180°	103
	4.2.2.2	Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat	106
	4.2.2.3	Pelat Miring 30° (Morley Acute Skew Plate) ..	109
	4.2.2.4	Pelat Miring 60° (Razzaque Skew Plate).....	116
	4.2.2.5	Pelat L	120
	4.2.2.6	Pelat dengan Perbedaan Tebal	123
	4.2.2.7	Pelat Hexagonal Berlubang.....	126
	4.2.2.8	Pelat Persegi Panjang Berlubang	128
BAB V	KESIMPULAN		131
	DAFTAR PUSTAKA		133
	LAMPIRAN		138

DAFTAR NOTASI

SIMBOL MATEMATIKA

$[]$ = matriks persegi dan bujursangkar

$\{ \}$ = matriks kolom

$\langle \rangle$ = matriks baris

$[]^{-1}$ = matriks invers

$| |$ = determinan invers

\sum = penjumlahan/jumlah

\approx = kira-kira sama dengan

\int = integral

$\| \|$ = ukuran atau norma

SIMBOL LATIN

$[A]^{-1}$ = invers matrik $[A]$

$[A]^T$ = transpose matrik $[A]$

D_b, D_s = koefisien kekakuan lentur dan geser

E = modulus young

f_z = beban merata arah vertikal

$[H_b]$ = matriks Hooke lentur

$[H_s]$ = matriks Hooke geser

$[J]$ = matriks Jacobian

$|J|$ = determinan matriks Jacobian

$[j]$ = invers matriks Jacobian

k = koefisien koreksi geser

R = jari-jari lingkaran

h, t = tebal elemen/pelat

$\|e^{ek}\|$ = error eksak dalam norma energi total untuk seluruh daerah (*domain*) struktur (global)

$\|e^{ek}\|_i$ = error eksak dalam norma energi total untuk elemen i (lokal)

e_M = error ditinjau terhadap momen lentur

e_σ = error ditinjau terhadap tegangan

e_T = error ditinjau terhadap gaya geser transversal

$\|e_M^{ek}\|_i$ = error eksak dalam norma energi lentur untuk elemen i

$\|e_T^{ek}\|_i$ = error eksak dalam norma energi geser untuk elemen i

e_U = error ditinjau terhadap peralihan untuk elemen i

$\|e^*\|$ = estimator error global dalam norma energi dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam

$\|e^*\|_i$ = estimator error lokal dalam norma energi untuk elemen i dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam

$\|e^a\|$ = estimator error global dalam norma energi dengan menggunakan metode rata2

$\|e^{pr}\|$ = estimator error global dalam norma energi dengan menggunakan metode proyeksi

$\|e^{SPR}\|$ = estimator error global dalam norma energi dengan menggunakan metode SPR

$\|e^{REP}\|$ = estimator error global dalam norma energi dengan menggunakan metode REP

- $\|e_M^*\|_i$ = estimator error lokal dalam norma energi lentur untuk elemen i
 dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam
- $\|e_T^*\|_i$ = estimator error lokal dalam norma energi geser untuk elemen i dengan
 salah satu metode pemulihan gaya dalam
- $\|\hat{e}\|$ = error izin norma energi global dalam norma energi
- $\|\hat{e}\|_i$ = error izin dalam norma energi yang diprediksikan untuk masing-masing
 elemen
- $\|\bar{e}\|$ = error solusi yang diperbaiki dalam norma energi
- p = jumlah derajat polinomial aproksimasi elemen
- L = operator diferensial linier
- $[k]$ = matriks kekakuan struktur
- $[k_b]$ = matriks kekakuan lentur
- $[k_s]$ = matriks kekakuan geser
- $\langle M^{ek} \rangle$ = fungsi gaya dalam momen lentur eksak
- $\langle T^{ek} \rangle$ = fungsi gaya dalam lintang eksak
- $\langle M_h \rangle$ = fungsi gaya dalam momen lentur solusi metode elemen hingga
- $\langle T_h \rangle$ = fungsi gaya dalam lintang solusi metode elemen hingga
- $O(h^p)$ = tingkat konvergensi error solusi metode elemen hingga
- S = operator differensial
- M^* = medan solusi gaya dalam momen kontinu
- M_p^{SPR} = medan solusi gaya dalam dengan metode SPR
- u^{ek} = vektor peralihan eksak
- u^h = vektor peralihan metode elemen hingga
- u^* = vector solusi peralihan yang diperbaiki
- P = vektor fungsi polinomial p
- a = vektor least square pada patch lokal
- A = matriks simetris hasil perkalian vektor P
- b = vektor hasil perkalian vektor P dan nilai gaya dalam pada titik Gauss
- M_x^{pr} = fungsi momen x setelah pemulihan dengan metode proyeksi

- $\{M_{x_i}^{pr}\}$ = nilai momen x pada nodal i setelah pemulihan dengan metode proyeksi
- $\{M_{y_i}^{pr}\}$ = nilai momen y pada nodal i setelah pemulihan dengan metode proyeksi
- $\{M_{xy_i}^{pr}\}$ = nilai momen xy pada nodal i setelah pemulihan dengan metode proyeksi
- $\{T_{xz_i}^{pr}\}$ = nilai gaya lintang xz pada nodal i setelah pemulihan dengan metode proyeksi
- $\{T_{yz_i}^{pr}\}$ = nilai gaya lintang yz pada nodal i setelah pemulihan dengan metode proyeksi
- $[P]$ = matriks proyeksi tergrup
- $\langle \bar{M}^* \rangle_i = \langle \bar{M}_x^* \quad \bar{M}_y^* \quad \bar{M}_{xy}^* \rangle_i$ = gaya dalam momen pada nodal struktur
- $\langle \bar{T}^* \rangle_i = \langle \bar{T}_{xz}^* \quad \bar{T}_{yz}^* \rangle_i$ = gaya dalam lintang pada nodal struktur
- $\langle M^* \rangle_i = \langle M_x^* \quad M_y^* \quad M_{xy}^* \rangle_i$ = nilai pemulihan gaya dalam momen dari setiap elemen yang bertemu pada nodal i
- $\langle T^* \rangle_i = \langle T_{xz}^* \quad T_{yz}^* \rangle_i$ = nilai pemulihan gaya dalam lintang dari setiap elemen yang bertemu pada nodal i
- $M_{1_i}^*$ = momen prinsipal maksimum
- $M_{2_i}^*$ = momen prinsipal minimum
- $\|u^{ek}\|$ = dua kali energi regangan eksak struktur secara global
- $\|u^{ek}\|_i$ = dua kali energi regangan eksak per elemen
- $\|u^*\|_i$ = dua kali energi regangan elemen secara lokal yang diestimasi dengan metode pemulihan gaya dalam
- $\|u^*\|$ = dua kali energi regangan elemen secara global yang diestimasi dengan metode pemulihan gaya dalam
- $\|u^h\|_i$ = dua kali energi regangan tiap elemen i dari solusi metode elemen hingga
- $\|u^h\|$ = dua kali energi regangan secara global dari solusi metode elemen hingga
- $\langle N \rangle$ = matriks baris dari fungsi bentuk

- m = jumlah elemen yang digunakan
 w = translasi arah vertikal

SIMBOL YUNANI

- ϕ = indikator error eksak struktur (dalam norma energi)
 ϕ^* = indikator error relatif struktur (dalam norma energi) dengan yang diestimasi dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam
 $\overline{\phi}$ = indikator error izin struktur (dalam norma energi)
 ϕ^h = indikator error relatif struktur (dalam norma energi) dengan yang diestimasi dengan menggunakan metode rata2
 ϕ^{pr} = indikator error relatif struktur (dalam norma energi) dengan yang diestimasi dengan menggunakan metode proyeksi
 ϕ^{SPR} = indikator error relatif struktur (dalam norma energi) dengan yang diestimasi dengan menggunakan metode SPR
 ξ, η = variabel dalam koordinat natural
 ξ_i, η_i = koordinat natural dari titik i yang ditinjau
 Ω = daerah (*domain*) dari masalah yang ditinjau, yang dapat berupa volume, luas, dan sebagainya
 ζ_k = indikator penghalusan tiap elemen dalam norma energi dengan salah satu metode pemulihan gaya dalam
 σ^{ek} = fungsi tegangan eksak
 σ^h = fungsi tegangan elemen hingga
 Θ^* = indikator efektifitas
 β_x, β_y = rotasi bidang $z-x$ dan $z-y$
 Φ = energi potensial total
 ν = konstanta rasio Poisson

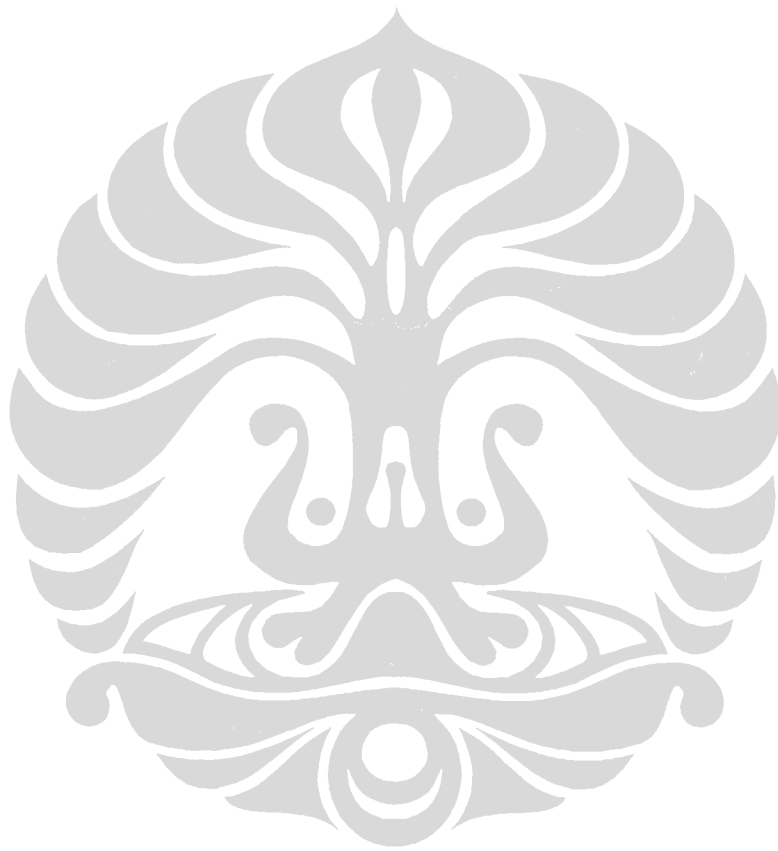
DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Penghalusan jaringan metode- h dan p	12
Gambar 2.2	Diagram alir proses penghalusan jaringan dengan estimator error.....	14
Gambar 2.3	Penghalusan Adaptif Tipe- h	15
Gambar 2.4	Ilustrasi aproksimasi problem 1D elemen linear.....	19
Gambar 2.5	Nilai gaya dalam pada nodal melalui interpolasi titik Gauss.....	20
Gambar 2.6	Balok Kantilever dengan elemen Q8	20
Gambar 2.7	<i>Patch</i> elemen untuk problem 1 dimensi.....	24
Gambar 2.8	<i>Patch</i> elemen untuk elemen linear, quadratic dan kubik quadrilateral.....	25
Gambar 2.9	<i>Patch</i> elemen untuk elemen linear dan quadratic triangular.....	25
Gambar 2.10	Bentuk model <i>patch</i>	26
Gambar 2.11	Ilustrasi kontinuitas gaya dalam pada problem 2D.....	27
Gambar 2.12	Domain Local <i>Patch</i> dan Sistem Koordinat Lokal Parametrik (Ξ, H) untuk Tipe Element Based <i>Patch</i> pada Sebuah Mesh Elemen Sembarang	28
Gambar 2.13	Proses penghalusan jaringan	40
Gambar 3.1	Modifikasi Secara Umum Yang Dilakukan Pada UI-FEAP Untuk Aplikasi Metode PPR.....	43
Gambar 3.2.	Diagram Alir Perhitungan Gaya Dalam dan Energi Regangan Elemen dengan Menggunakan Metode PPR pada UI-FEAP	63
Gambar 3.3	Contoh Analysis Struktur Lingkaran dengan UI-FEAP.....	64
Gambar 3.4	Mesh Adaptif.....	64
Gambar 4.1	Pelat Bujursangkar Bertumpuan Jepit dengan Beban Terbagi Merata	81
Gambar 4.2	Persentase Error Momen Lentur di Pusat Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit	81
Gambar 4.3	Persentase Error Momen Lentur di Tengah Sisi atau Perletakan Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit.....	82
Gambar 4.4	Persentase Indikator Error Relative Pelat Bujursangkar pada Perletakan Jepit	84
Gambar 4.5	Pelat Bujursangkar Bertumpuan Sendi dengan Beban Terbagi Merata	84
Gambar 4.6	Persentase Error Momen Lentur di Pusat Pelat Bujursangkar Perletakan Sendi.....	85
Gambar 4.7	Persentase Indikator Error Relative Pelat Bujursangkar pada Perletakan Sendi.....	86
Gambar 4.8	Pelat Bujursangkar Bertumpuan Sederhana dengan Beban Terbagi Terpusat	87
Gambar 4.9	Perbandingan Error Eksak dan Error Estimasi	87
Gambar 4.10	$\frac{1}{4}$ Bagian Dari Pelat Lingkaran Dengan Beban Terbagi Rata ...	88
Gambar 4.11	Skema Penghalusan Seragam Untuk Pelat Melingkar	88
Gambar 4.12	Persentase Error Gaya Dalam Momen di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Jepit – Penghalusan Seragam	89

Gambar 4.13	Persentase Error Gaya Dalam Momen di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit – Penghalusan Seragam	90
Gambar 4.14	Konvergensi Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam	91
Gambar 4.15	Persentase Error Gaya Dalam Momen di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Sendi – Penghalusan Seragam.....	91
Gambar 4.16	Konvergensi Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Seragam	92
Gambar 4.17	Skema Penghalusan Adaptif untuk Pelat Melingkar dengan Beban Merata.....	93
Gambar 4.18	Persentase Error Gaya Dalam Momen di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif.....	94
Gambar 4.19	Persentase Error Gaya Dalam Momen di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif.....	95
Gambar 4.20	Konvergensi Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif	95
Gambar 4.21	Persentase Error Gaya Dalam Momen di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Sendi – Penghalusan Adaptif	96
Gambar 4.22	Konvergensi Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Sendi – Penghalusan Adaptif	97
Gambar 4.23	Distribusi Momen Lentur M_r Pelat Melingkar, $R/h=50$	98
Gambar 4.24	Distribusi Momen Lentur M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 50$	99
Gambar 4.25	Distribusi Momen Lentur M_r Pelat Melingkar, $R/h = 5$	99
Gambar 4.26	Distribusi Momen Lentur M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 5$	100
Gambar 4.27	Distribusi Momen Lentur M_r Pelat Melingkar, $R/h=2$	101
Gambar 4.28	Distribusi Momen Lentur M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 2$	101
Gambar 4.29	Indikator Error Relatif Total untuk Pelat Melingkar, $R/h=50$.	102
Gambar 4.30	Indikator Error Relatif Total untuk Pelat Melingkar, $R/h=5$...	102
Gambar 4.31	Indikator Error Relatif Total untuk Pelat Melingkar, $R/h=2$...	102
Gambar 4.32	Pelat busur berlubang 180°	103
Gambar 4.33	Skema Penghalusan Seragam untuk Pelat Busur Berlubang ...	104
Gambar 4.34	Konvergensi Error Relative Pelat Busur Berlubang – Penghalusan Seragam	104
Gambar 4.35	Skema Penghalusan Adaptif untuk Pelat Berlubang.....	105
Gambar 4.36	Konvergensi Error Relative Pelat Busur Berlubang – Penghalusan Adaptive	106
Gambar 4.37	Diskritasi Seragam Problem Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat.....	106
Gambar 4.38	Konvergensi Error Relative Pelat Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat - Penghalusan Seragam.....	107
Gambar 4.39	Diskritasi Adaptif Problem Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat.....	108
Gambar 4.40	Konvergensi Error Relative Pelat Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat Penghalusan Adaptif.....	108
Gambar 4.41	Pelat Morley posisi segitiga	109
Gambar 4.42	Skema Penghalusan Seragam Untuk Pelat Morley.....	110

Gambar 4.43	Persentase Error Momen Lentur M1 di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Seragam.....	111
Gambar 4.44	Persentase Error Momen Lentur M2 di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Seragam.....	112
Gambar 4.45	Konvergensi Error Relative Pelat Morley – Penghalusan Seragam	112
Gambar 4.46	Skema penghalusan adaptif untuk pelat Morley	113
Gambar 4.47	Persentase Error Momen Lentur M1 di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Adaptif	114
Gambar 4.48	Persentase Error Momen Lentur M2 Di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Adaptif	115
Gambar 4.49	Konvergensi Error Relative Pelat Morley – Penghalusan Adaptive.....	115
Gambar 4.50	Pelat Razzaque dengan Beban Terbagi Rata.....	116
Gambar 4.51	Skema Penghalusan Seragam untuk Pelat Razzaque	117
Gambar 4.52	Persentase Error Momen My di Pusat Pelat Razzaque	118
Gambar 4.53	Konvergensi Error Relative Pelat Razzaque – Penghalusan Seragam	119
Gambar 4.54	Skema Penghalusan Adaptif untuk Pelat Razzaque.....	119
Gambar 4.55	Konvergensi Error Relative Pelat Razzaque – Penghalusan Adaptive.....	120
Gambar 4.56	Pelat L Singular dengan Tumpuan Sendi dan Beban Terbagi Rata.....	121
Gambar 4.57	Skema Penghalusan Seragam Pelat L Untuk Mencapai Error Relatif < 5%.....	122
Gambar 4.58	Konvergensi Error Relative Pelat L – Penghalusan Seragam	122
Gambar 4.59	Skema Penghalusan Adaptif Pelat L Untuk Mencapai Error Relatif < 5%.....	123
Gambar 4.60	Konvergensi Error Relative Pelat L – Penghalusan Adaptive.....	123
Gambar 4.61	Pelat Bujursangkar dengan Diskontinuitas Geometri	124
Gambar 4.62	Skema Penghalusan Seragam untuk Pelat dengan Perbedaan Tebal	125
Gambar 4.63	Indikator Error Relatif Pelat dengan Ketebalan Berbeda – Penghalusan Seragam	125
Gambar 4.64	Skema Penghalusan Adaptif untuk Pelat dengan Ketebalan Berbeda	126
Gambar 4.65	Indikator Error Relatif Pelat dengan Ketebalan Berbeda – Penghalusan Adaptif.....	126
Gambar 4.66	Satu Quadran Pelat Hexagonal Dengan Beban Merata.....	127
Gambar 4.67	Skema Penghalusan Adaptif Pelat Hexagonal Berlubang Untuk Mencapai Error Relatif.....	127
Gambar 4.68	Konvergensi Error Relative Pelat Hexagonal Berlubang dengan Penghalusan Adaptive	128
Gambar 4.69	Pelat Persegi Panjang Berlubang	129

Gambar 4.70	Skema Penghalusan Adaptif Pelat Persegi Panjang Berlubang Untuk Mencapai Error Relatif	129
Gambar 4.71	Konvergensi Error Relatif Pelat Persegipanjang Berlubang dengan Penghalusan Adaptif.....	130



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Perbandingan Metode PPR dan Metode SPR	35
Tabel 3.1	Formulasi Estimasi Error	43
Tabel 4.1	Momen Lentur di Pusat Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit.....	82
Tabel 4.2	Momen Lentur Di Tengah Sisi Pelat Bujursangkar Perletakan Jepit	83
Tabel 4.3	Momen Lentur dan Persentase Error di Pusat Pelat Bujursangkar Perletakan Sendi	84
Tabel 4.4	Indikator Error Relatif Pelat Bujursangkar Perletakan Sendi	86
Tabel 4.5	Error Estimasi Problem Pelat	86
Tabel 4.6	Momen Lentur Dan Error Gaya Dalam di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam	88
Tabel 4.7	Momen Lentur dan Error Gaya Dalam di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam	90
Tabel 4.8	Momen Lentur dan Error Gaya Dalam di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam	90
Tabel 4.9	Indikator Error Relatif Pelat Lingkaran Perletakan Jepit Perletakan Jepit - Penghalusan Seragam.....	91
Tabel 4.10	Momen Lentur Dan Persentase Error di Pusatpelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Seragam.....	92
Tabel 4.11	Indikator Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Seragam	92
Tabel 4.12	Momen Lentur Dan Persentase Error di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif.....	94
Tabel 4.13	Momen Lentur Dan Persentase Error di Perletakan Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif.....	94
Tabel 4.14	Indikator Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Jepit - Penghalusan Adaptif	95
Tabel 4.15	Momen Lentur dan Persentase Error di Pusat Pelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Adaptif	96
Tabel 4.16	Indikator Error Relatif Pelat Melingkar Perletakan Sendi - Penghalusan Adaptif	96
Tabel 4.17	Distribusi Momen M_r Pelat Melingkar, $R/h = 50$	98
Tabel 4.18	Distribusi Momen M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 50$	98
Tabel 4.19	Distribusi Momen M_r Pelat Melingkar, $R/h = 5$	99
Tabel 4.20	Distribusi Momen M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 5$	100
Tabel 4.21	Distribusi Momen M_r Pelat Melingkar, $R/h = 2$	100
Tabel 4.22	Distribusi Momen M_θ Pelat Melingkar, $R/h = 2$	101
Tabel 4.23	Indikator Error Relatif Pelat Busur Berlubang 1800 – Penghalusan Seragam	104
Tabel 4.24	Indikator Error Relatif Pelat Busur Berlubang 1800 – Penghalusan Adaptif	105
Tabel 4.25	Indikator Error Relatif Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat – Penghalusan Seragam	107
Tabel 4.26	Indikator Error Relatif Pelat Melingkar dengan Beban Terpusat – Penghalusan Adaptif.....	108

Tabel 4.27	Momen Lentur M1 Dan Persentase Error di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Seragam.....	111
Tabel 4.28	Momen Lentur M2 dan Persentase Error di Pusat Pelat Morley - Penghalusan Seragam	112
Tabel 4.29	Indikator Error Relatif Pelat Morley - Penghalusan Seragam.....	112
Tabel 4.30	Momen Lentur M1 Dan Persentase Error di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Adaptif	114
Tabel 4.31	Momen Lentur M2 dan Persentase Error di Pusat Pelat Morley – Penghalusan Adaptif	114
Tabel 4.32	Indikator Error Relatif Pelat Morley - Penghalusan Adaptif	115
Tabel 4.33	Momen My dan Persentase Error di Pusat Pelat Razzaque – Penghalusan Seragam.....	118
Tabel 4.34	Indikator Error Relatif Pelat Razzaque - Penghalusan Seragam.....	118
Tabel 4.35	Indikator Error Relatif Pelat Razzaque - Penghalusan Adaptif	120
Tabel 4.36	Indikator Error Relatif Pelat L - Penghalusan Seragam.....	122
Tabel 4.37	Indikator Error Relatif Pelat L - Penghalusan Adaptif.....	123
Tabel 4.38	Indikator Error Relatif Pelat dengan Ketebalan Berbeda – Penghalusan Seragam	125
Tabel 4.39	Indikator Error Relatif Pelat dengan Ketebalan Berbeda – Penghalusan Adaptif	126
Tabel 4.40	Indikator Error Relatif Pelat Hexagonal Berlubang.....	128
Tabel 4.41	Indikator Error Relatif Pelat Persegipanjang Berlubang.....	130

DAFTAR LAMPIRAN

