

BAB 2
PEMULIHAN SOLUSI
DENGAN METODE *POLYNOMIAL PRESERVING RECOVERY*

2.1. Umum

2.1.1 Kesalahan Solusi Metode Elemen Hingga

Error yang terjadi dalam analisis struktur dengan metode elemen hingga merupakan selisih antara solusi eksak dengan solusi pendekatan dan dapat diekspresikan dalam bentuk peralihan, tegangan maupun gaya dalam. Dengan mengikutsertakan estimator error pada analisa struktur, ketelitian solusi elemen hingga akan meningkat. Estimator error ini akan memberi indikator perlu atau tidaknya analisis berulang. Dengan demikian suatu pencapaian batas standar ketelitian dapat diterima dalam aplikasi teknik.

Bentuk kesalahan solusi elemen hingga bisa dalam bentuk kesalahan peralihan,

$$e_u = u^{ek} - u^h \quad (2.1a)$$

kesalahan gaya dalam,

$$e_M = M^{ek} - M^h \quad (2.1b)$$

atau kesalahan tegangan,

$$e_\sigma = \sigma^{ek} - \sigma^h \quad (2.1c)$$

dimana,

e_u, e_M, e_σ = error eksak (error terhadap solusi eksak) untuk peralihan, momen,

dan tegangan

u^h, M^h, σ^h = solusi MEH untuk peralihan, momen dan tegangan

$u^{ek}, M^{ek}, \sigma^{ek}$ = solusi eksak untuk peralihan, momen dan tegangan

Persentase error yang terjadi akan tereduksi apabila ukuran elemen diperkecil (memperbanyak jumlah elemen) atau dengan menambah derajat fungsi aproksimasi polinomial tiap elemen. Hal ini mengakibatkan tingkat konvergensi dan akseptibilitas tiap elemen hingga berbeda-beda karena tiap elemen

mendefinisikan sendiri ukuran dan orde fungsi aproksimasi polinomialnya. Namun intinya adalah bagaimana kita menentukan besarnya error yang terjadi dalam batasan error dan proses diskritisasi yang diberikan. Hal ini menuntut kita untuk menentukan :

- Error yang muncul dari solusi metode elemen hingga (estimasi error *a posteriori*)
- Cara memperbaiki solusi untuk memperoleh hasil dengan tingkat akurasi yang diinginkan secara ekonomis.

2.1.2 Estimasi Error *A Posteriori*

Metode estimasi error terbagi dalam dua tipe yaitu :

a. Estimasi error *a priori*

Estimasi error *a priori* berdasarkan kecepatan konvergensi asimtotik selama ukuran jaringan cenderung nol dan selama derajat dari fungsi aproksimasi polinomial cenderung tak berhingga. Metode ini dapat memprediksikan kecepatan konvergensi, tetapi sedikit menyatakan tentang error.

b. Estimasi error *a posteriori*

Estimasi error *a posteriori* menggunakan sepenuhnya informasi solusi dari hasil analisa metode elemen hingga dalam formulasinya.

Parameter yang digunakan estimasi error *a posteriori* terdiri dari estimator kesalahan, indeks efektifitas, error relatif (indikator error), dan indikator penghalusan. Parameter ini akan menentukan lokasi jaringan yang perlu diperhalus untuk menghasilkan error yang lebih kecil berdasarkan indikasi error relatifnya.

Indeks efektifitas menyatakan tingkat konvergensi estimasi error terhadap error eksak, yang secara umum dirumuskan sebagai rasio error yang diestimasi dalam bentuk norma energi terhadap error eksaknya sebagai berikut :

$$\Theta^* = \frac{\left[\sum \|e^*\|_i^2 \right]^{1/2}}{\|e\|} \quad \text{atau} \quad \Theta^h = \frac{\left[\sum \|e^h\|_i^2 \right]^{1/2}}{\|e\|} \quad (2.2)$$

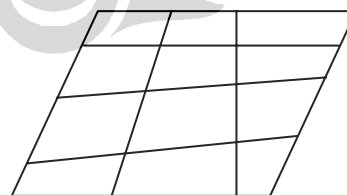
Dari indeks efektifitas tersebut kita mengharapkan agar Θ^* atau $\Theta^h \rightarrow 1$ dan error eksak mendekati nol sehingga estimasi error kita dapat dikatakan asimtotik eksak. Untuk dapat menunjukkan lokasi yang memerlukan perbaikan solusi, kita dapat menggunakan besaran yang dinamakan error relatif dan indikator penghalusan. Dengan menggunakan kedua besaran tersebut kita harus meninjau apakah konvergensi asimtotik tercapai, yaitu Θ^* atau $\Theta^h \rightarrow 1$ jika $h(\text{ukuran elemen}) \rightarrow 0$ atau $p(\text{derajat polinomial}) \rightarrow \infty$.

2.1.3 Penghalusan Jaringan

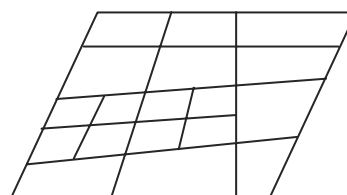
Dalam meregenerasi mesh (jaringan) kita memiliki pilihan untuk menghemat proses perhitungan error dengan mempertahankan bentuk mesh awal dan kemudian diperhalus secara lokal. Hal ini dapat dilakukan dengan cara :

- Menambah elemen yang bertipe sama dengan elemen yang digunakan dalam mesh awal tetapi dengan ukuran (h) yang lebih kecil, atau
- Menggunakan bentuk elemen yang sama, tetapi dengan menambah jumlah derajat fungsi polinomial (p), dalam hal ini menambah nodal baru untuk tiap elemen, atau
- Kombinasi a) dan b)

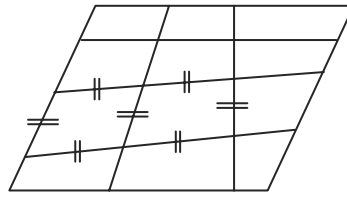
Cara a) kita kenal sebagai penghalusan metode- h sedangkan cara b) kita kenal sebagai penghalusan metode- p yang diilustrasikan seperti pada gambar dibawah ini :



Mesh awal



Penghalusan metode h secara lokal



Penghalusan metode p

Gambar 2.1 Penghalusan jaringan metode- h dan p

Gambar di atas menunjukkan bahwa penghalusan jaringan dapat dilakukan dengan dua metode yaitu metode h dan metode p . Metode h sendiri dapat dilakukan secara seragam dan adaptif.

Penghalusan jaringan secara adaptif memiliki keunggulan dibandingkan dengan penghalusan seragam. Error yang terjadi biasanya tidak sama untuk setiap elemen, hal ini disebabkan beberapa faktor yaitu pola pembebanan, kondisi perletakan, dan bentuk geometrinya sendiri. Penghalusan adaptif dapat melakukan perhitungan dalam waktu yang singkat dan penyimpanan memori yang lebih kecil karena dapat membentuk jaringan yang optimal dengan tingkat akurasi yang diinginkan baik secara global maupun lokal.

Proses ini merupakan proses iteratif dengan informasi error solusi elemen hingga sebagai kemudi prosesnya. Secara umum algoritma penghalusan adaptif meliputi langkah-langkah sebagai berikut :

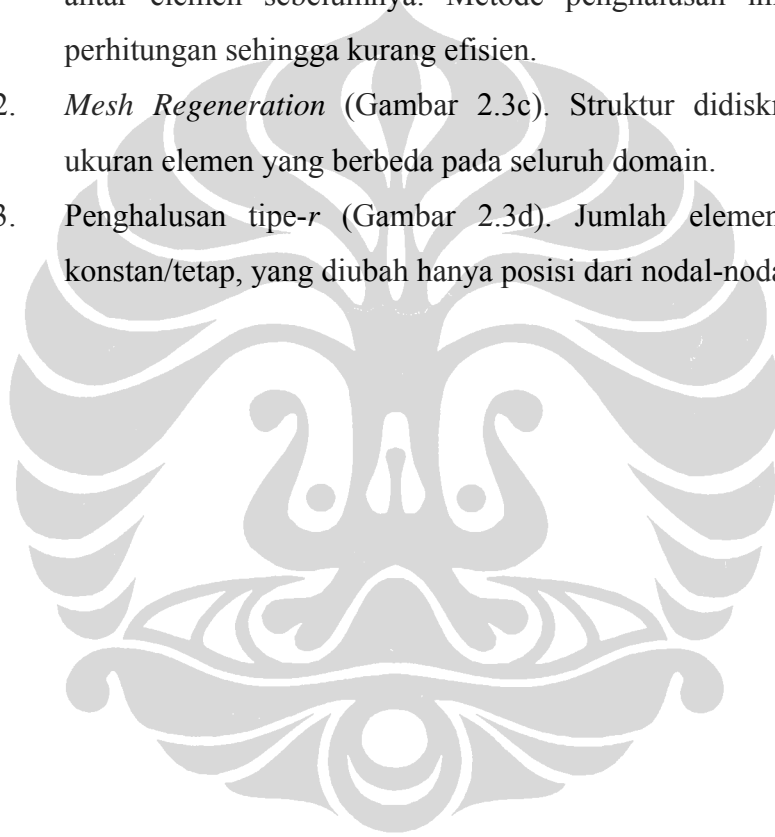
- a. Memodelkan struktur dengan sejumlah elemen hingga
- b. Memasukkan input data yaitu karakteristik material struktur, pembebanan, dan kondisi batas
- c. Analisa dengan metode elemen hingga
- d. Analisa error solusi elemen hingga
- e. Melakukan proses penghalusan jaringan, dan analisa pascaproses secara iteratif

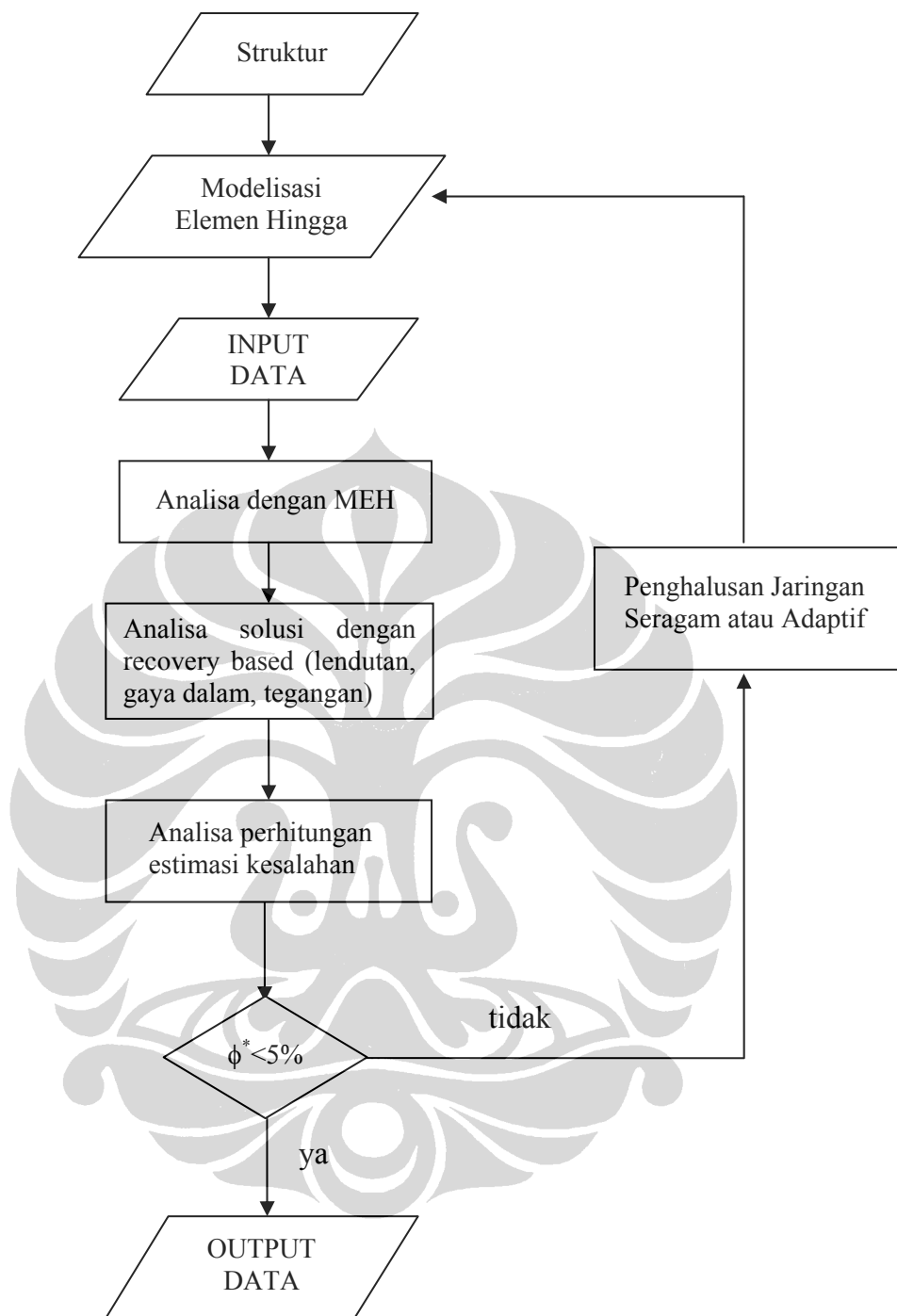
Algoritma penghalusan adaptif secara ilustratif dapat dilihat pada bagan alir proses penghalusan jaringan elemen dengan menggunakan error estimator (Gambar 2.2).

Sedangkan langkah-langkah adaptif secara ilustratif dapat kita lihat pada Gambar 2.3.

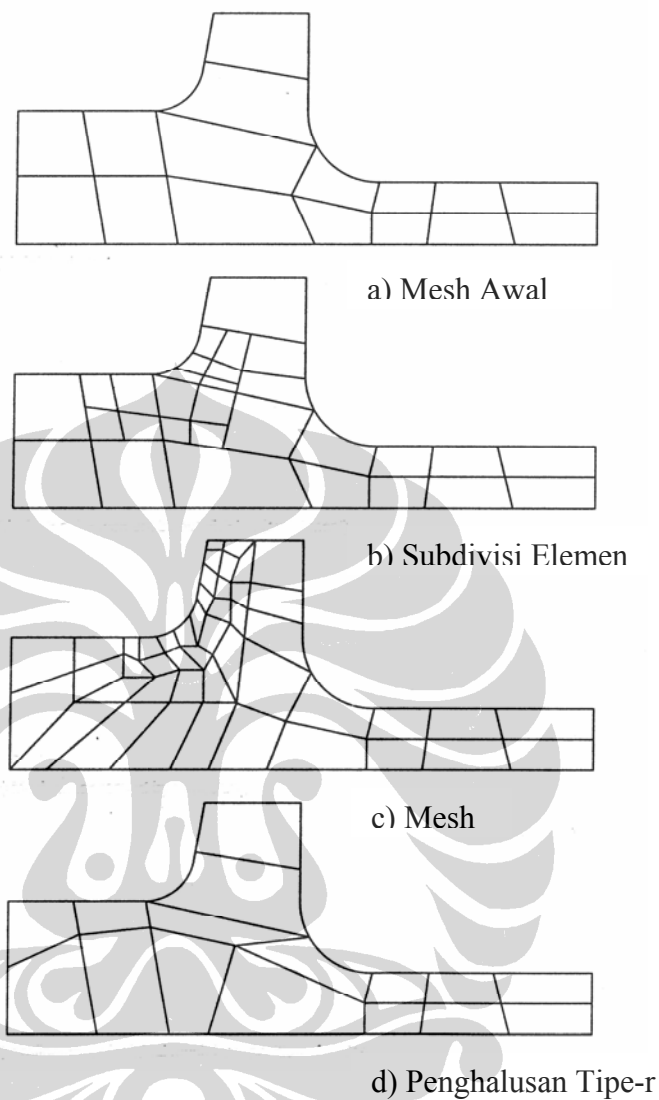
Penghalusan jaringan adaptif metode- h dikelompokkan lagi menjadi 3 macam berdasarkan cara penghalusan yang dilakukan yaitu :

1. Subdivisi elemen dengan mempertahankan bentuk mesh awal (Gambar 2.3b). Disini elemen-elemen yang menunjukkan error yang besar dibagi-bagi menjadi elemen-elemen lebih kecil dengan mempertahankan perbatasan antar elemen sebelumnya. Metode penghalusan ini melibatkan banyak perhitungan sehingga kurang efisien.
2. *Mesh Regeneration* (Gambar 2.3c). Struktur didiskritisasi ulang dengan ukuran elemen yang berbeda pada seluruh domain.
3. Penghalusan tipe- r (Gambar 2.3d). Jumlah elemen (jumlah nodal/dof) konstan/tetap, yang diubah hanya posisi dari nodal-nodal tersebut.





Gambar 2.2 Diagram alir proses penghalusan jaringan dengan estimator error



Gambar 2.3 Penghalusan Adaptif Tipe- h

2.2 Estimasi Error Zienkiewicz-Zhu

Error estimator yang dikembangkan oleh **Zienkiewicz-Zhu** [Z4] berdasarkan estimasi error *a posteriori* dengan teknik pemulihan (*recovery*) solusi (lendutan, gaya dalam, dan tegangan) metode elemen hingga. Sifatnya yang mudah, efisien dan *cost effective* dalam perhitungannya membuatnya relatif lebih unggul dibandingkan metode lainnya.

2.2.1 Norma Error dan Tingkat Konvergensi

Didalam perhitungan struktur dikenal fenomena singularitas di mana terjadi kenaikan tegangan secara lokal mencapai nilai tak hingga akibat dibebani beban terpusat. Secara global solusi yang dihasilkan masih dapat diterima, tetapi secara lokal solusinya jelas jauh dari kriteria hasil. Untuk alasan ini berbagai bentuk integral skalar yang dinamakan sebagai norma digunakan untuk mengestimasi error.

Dapat kita lihat pada persamaan linier umum sebagai berikut :

$$Lu + p = 0 \quad \text{dalam } \Omega \quad (2.3)$$

dimana,

L = operator diferensial linier

Ω = domain dari masalah yang ditinjau, dapat berupa volume, luas, dan sebagainya

Kemudian kita dapat mendefinisikan error dalam bentuk norma energi sebagai berikut :

$$\|e\| = \left(\int_{\Omega} e^T L e \, d\Omega \right)^{1/2} = \left[\int_{\Omega} (u - \hat{u})^T L (u - \hat{u}) \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

di mana :

$\|e\|$ = error eksak global dalam norma energi

Untuk masalah lentur pada suatu luasan A , norma error untuk gaya dalam momen M adalah :

$$\|e_M\|_i^2 = \int_A \langle e_u \rangle [k_b] \{e_u\} \, dA \quad (2.5)$$

di mana :

$$[k_b] = \int_A [B_b]^T [H_b] [B_b] \, dA$$

= matriks kekakuan lentur

Persamaan hubungan regangan dan gaya dalam untuk lentur didefinisikan sebagai :

$$\{\chi^h\} = [B_b]\{u_n\} \quad \text{dan} \quad \{M^h\} = [H_b]\{\chi^h\} \quad (2.6a-b)$$

Dengan mensubstitusi persamaan $e_u = u^{ek} - u^h$ (2.1a) dan

(2.6a-b), persamaan (2.5) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \|e_M\|_i^2 &= \int_A \langle e_u \rangle ([B_b]^T [H_b] [B_b]) \{e_u\} dA \\ &= \int_A (\langle u^{ek} \rangle - \langle u^h \rangle) [B_b]^T [H_b] ([B_b] \{u^{ek}\} - [B_b] \{u^h\}) dA \\ &= \int_A (\langle u^{ek} \rangle [B_b]^T - \langle u^h \rangle [B_b]^T) [H_b] ([B_b] \{u^{ek}\} - [B_b] \{u^h\}) dA \\ &= \int_A (\langle \chi^{ek} \rangle - \langle \chi^h \rangle) [H_b] (\{\chi^{ek}\} - \{\chi^h\}) dA \\ &= \int_A (\langle \chi^{ek} \rangle - \langle \chi^h \rangle) (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) dA \\ &= \int_A (\langle \chi^{ek} \rangle - \langle \chi^h \rangle) [H_b] [H_b]^{-1} (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) dA \\ &= \int_A (\langle \chi^{ek} \rangle [H_b]^T - \langle \chi^h \rangle [H_b]^T) [H_b]^{-1} (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) dA \quad ; \quad [H_b]^T = [H_b] \\ &= \int_A (\langle M^{ek} \rangle - \langle M^h \rangle) [H_b]^{-1} (\{M^{ek}\} - \{M^h\}) dA \end{aligned} \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) dapat dinyatakan secara identik untuk gaya dalam geser T sebagai berikut :

$$\|e_T\|_i^2 = \int_A (\langle T^{ek} \rangle - \langle T^h \rangle) [H_s]^{-1} (\{T^{ek}\} - \{T^h\}) dA \quad (2.8)$$

di mana :

$\|e_M\|$, $\|e_T\|$ = error eksak dalam norma energi lentur, dan geser untuk elemen i

Error eksak total dalam norma energi untuk elemen i diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.7) dan (2.8) menjadi :

$$\begin{aligned} \|e\|_i^2 &= \|e_M\|_i^2 + \|e_T\|_i^2 \\ &= \int_A (\langle e_M \rangle [H_b]^{-1} \{e_M\}) dA + \int_A (\langle e_T \rangle [H_s]^{-1} \{e_T\}) dA \end{aligned} \quad (2.9.a)$$

dimana,

$$\langle e_M \rangle = \langle M^{ek} \rangle - \langle M^h \rangle \quad ; \quad \langle e_T \rangle = \langle T^{ek} \rangle - \langle T^h \rangle$$

Error eksak total dalam norma energi untuk elemen i dengan hanya memperhitungkan gaya dalam momen saja menjadi :

$$\begin{aligned}\|e\|_i^2 &= \|e_M\|_i^2 \\ &= \int_A \left(\langle e_M \rangle [H_b]^{-1} \{e_M\} \right) dA\end{aligned}\quad (2.9.b)$$

Bentuk norma energi error pada persamaan (2.9) dievaluasi untuk subdomain atau elemen tunggal saja. Error total diseluruh domain struktur diperoleh dengan menjumlahkan kontribusi error dari tiap elemen i sebagai:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2 \quad (2.9)$$

di mana :

$\|e\|^2$ = error eksak total (global) dalam norma energi

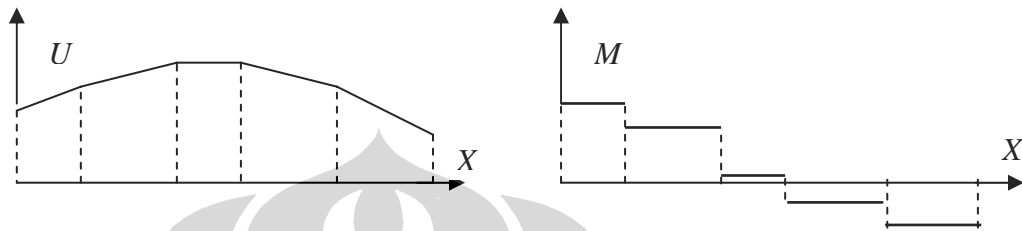
m = jumlah elemen pada struktur

Tingkat konvergensi error berbanding lurus terhadap eksponensial fungsi aproksimasi polinomial p dan dinyatakan dalam bentuk $O(h^p)$. Tingkat konvergensi ini berlaku untuk error dalam bentuk norma energi pada persamaan (

(2.9). Namun **Zienkiewicz** dan **Taylor** [Z5] menunjukkan bahwa untuk kasus di mana singularitas terjadi umumnya tingkat konvergensi error akan berada dibawah orde $O(h^p)$ dan sama untuk elemen dengan fungsi linier, kuadratik, dan kubik.

2.2.2 Teknik Pemulihan Solusi

Kontinuitas peralihan yang diperlihatkan pada titik-titik nodal tidak berarti juga menghasilkan kontinuitas gaya dalam pada sisi pertemuan elemen yang berbatasan. Gaya-gaya dalam ini dihitung dari derivatif fungsi peralihan sehingga menimbulkan masalah kontinuitas dan akurasi.



(a) Kontinuitas peralihan u_h

(b) Diskontinuitas gaya dalam

Gambar 2.4 Ilustrasi aproksimasi problem 1D elemen linear

Secara teoritis maupun solusi analitik tidak didapati masalah ini, karena geometri mempertahankan keseragaman sifat dan bentuk. Masalah ini muncul di dalam metode elemen hingga yang kemudian justru dijadikan acuan dasar untuk mengestimasi error hasil perhitungan elemen hingga.

Walaupun hasil solusi yang diberikan metode elemen hingga mempunyai akurasi yang kurang baik untuk gaya dalam pada nodal-nodal struktur, tetapi tetap dimungkinkan dilakukan pemulihan (*recovery*) gaya dalam tersebut sehingga akan didapat gaya dalam yang baru yang mempunyai akurasi yang lebih baik dari sebelumnya dan kontinuitas bisa dihasilkan pada nodal-nodal struktur. Beberapa teknik pemulihan solusi yang tersedia adalah sebagai berikut:

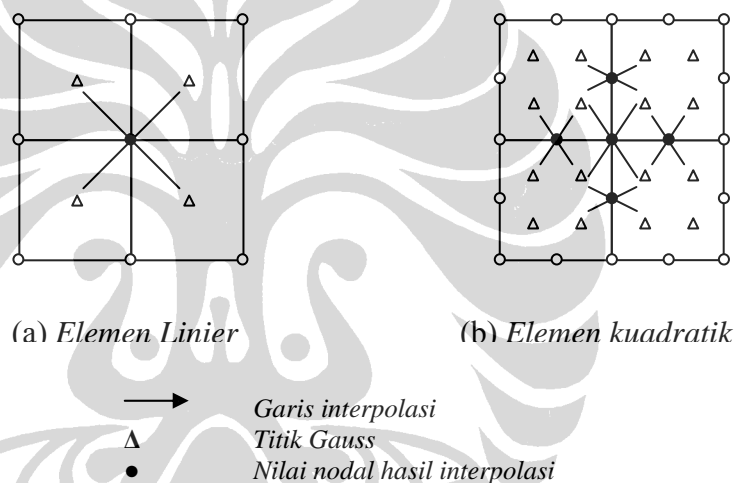
➤ *Metode Interpolasi*

Berdasarkan solusi yang diberikan oleh metode elemen hingga, sejumlah peneliti menemukan fakta bahwa solusi-solusi gaya dalam, regangan, maupun tegangan memiliki tingkat konvergensi yang tinggi untuk titik-titik yang berada di dalam elemen, bukan pada nodal elemen. **Herrman** [H1] dengan teoremanya

menunjukkan bahwa solusi-solusi tersebut menunjukkan nilai yang baik pada titik-titik integrasi **Gauss-Legendre** dan disebut sebagai *optimal sampling points*. Fenomena ini kemudian disebut sebagai *superconvergence*. Berdasarkan penemuan ini metode pemulihan solusi mengalami perkembangan. Salah satunya adalah metode interpolasi. Idennya adalah memperbaiki solusi, misalnya tegangan σ , dengan menghitung pada titik integrasi **Gauss** dan mengasumsikan untuk seluruh domain elemen solusi yang lebih baik σ^* dapat diperoleh dengan melakukan interpolasi yang sama untuk interpolasi peralihan

$$\sigma^* = N_u \tilde{\sigma}^* \quad (2.10)$$

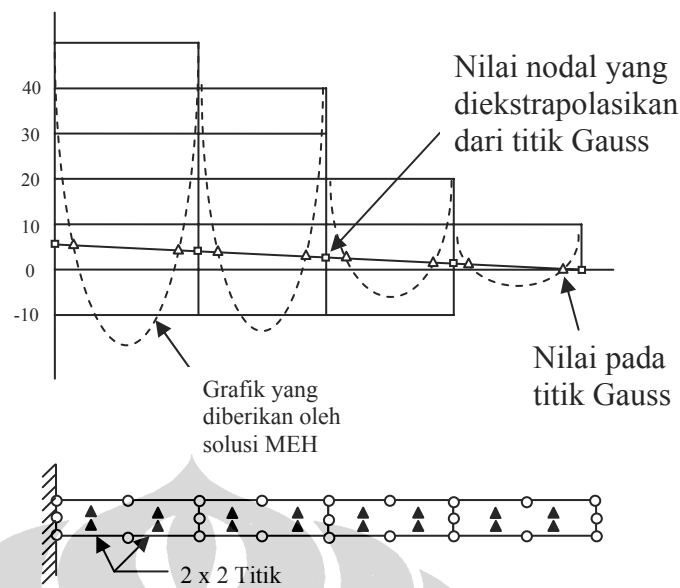
Metode interpolasi ini dapat dilustrasikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Nilai gaya dalam pada nodal melalui interpolasi titik Gauss

➤ Metode Ekstrapolasi

Prosedur lain dikemukakan oleh **Hinton** dan **Campbell** [H2] yang menyarankan perhitungan tegangan pada semua nodal dilakukan dengan mengekstrapolasi nilai solusi pada titik **Gauss**. Prosedur ini diilustrasikan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Balok Kantilever dengan elemen Q8

➤ Metode Proyeksi Gaya

Metode proyeksi merupakan salah satu metode pemulihan gaya dalam yang cukup sederhana untuk membangun kontinuitas gaya dalam pada nodal struktur. Pemulihan gaya dalam yang dilakukan pada metode ini adalah mengambil nilai proyeksi gaya dalam dari tiap-tiap elemen berdasarkan fungsi bentuk elemen ke dalam nodal struktur. Proyeksi gaya dalam kontinu pada nodal ini selanjutnya menjadi dasar untuk menghitung estimasi error. Teknik ini dipakai oleh Zienkiewicz dan Zhu untuk membentuk estimator error Z^2 .

➤ Metode Superconvergence Patch Recovery (SPR)

Metode SPR merupakan metode yang dikembangkan oleh **Zienkiewicz-Zhu** [Z3] yang relatif lebih sederhana dan mudah diaplikasikan karena idenya adalah memulihkan gaya dalam pada nodal elemen dengan analogi metode *Least Square Fit* atau pencocokan fungsi/kurva terhadap data-data sampel gaya dalam yang lebih akurat. Bersama dengan perumusan error estimasi Z^2 , metode ini menghasilkan tingkat konvergensi error yang sangat tinggi (*superconvergence*). Metode ini akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

➤ *Metode Recovery by Equilibrium in Patch (REP)*

Metode ini merupakan metode yang dikembangkan oleh **Boroomand** [B8], yang kemudian disempurnakan dalam [B5]. Identya adalah persamaan keseimbangan dari formulasi solusi untuk menghasilkan medan gaya dalam yang dipulihkan. Pada dasarnya formulasinya juga menggunakan *patch* sebagai media untuk perhitungannya.

Hasil *patch test* menunjukkan performance yang bagus dari REP dan menjanjikan penerapan yang lebih luas. Metode REP mempunyai banyak kelebihan – yang sama dan kadang-kadang melebihi performance metode SPR [B5].

➤ *Metode Polynomial Preserving Recovery (PPR)*

Metode ini merupakan metode yang dikembangkan oleh **Zhang** [Z11]. Identya adalah memulihkan gaya dalam pada nodal melalui pembentukan medan perpindahan berdasarkan fungsi bentuk dalam *patch*. Metode ini juga menggunakan analogi metode *Least Square Fit* atau pencocokan fungsi/kurva terhadap data-data sampel yang lebih akurat pada nodal elemen dalam *patch*.

Dengan error estimasi, metode ini menghasilkan tingkat konvergensi error yang sangat tinggi (*superconvergence*). Metode ini akan dijelaskan pada subbab berikutnya.

Dengan tersedianya berbagai solusi pendekatan baru seperti yang telah dibahas di atas (pemulihan solusi elemen hingga), maka yang menjadi persoalan bagi kita adalah seberapa besar akurasi yang diperoleh setelah dilakukan pemulihan solusi. Dengan kata lain tiap metode tersebut memiliki solusi yang berbeda-beda yang umumnya terkait dari kasus yang kita tinjau di mana masing-masing metode tersebut memiliki keunggulan dan kelemahannya sendiri. Tingkat ketepatan yang diperoleh akan menentukan reliabilitas estimator error yang dibentuk. Dengan demikian pemilihan metode pemulihan dalam elemen hingga mempunyai peringkat tertinggi dan penentu kualitas suatu estimator error. Berbagai teknik pemulihan solusi elemen hingga tersebut diatas, walaupun memberikan solusi yang lebih akurat untuk gaya dalam, akan tetapi umumnya memberikan akurasi yang kurang baik terhadap energi regangan, sehingga energi regangan ini tidak boleh dipakai sebagai ukuran.

Untuk selanjutnya akan dibahas dua buah metode pemulihan yaitu metode SPR dan metode PPR. Kedua metode itu merupakan metode pemulihan superkonvergen yang menggunakan Patch sebagai medianya. Metode PPR merupakan metode yang sengaja penulis pilih sebagai bahan penelitian.

2.2.3 Metode Pemulihan Superkonvergen

Reliabilitas error estimator Z^2 sangat tergantung dari kualitas dan akurasi dari teknik pemulihan solusi yang digunakan dan nilai dari solusi yang sudah diperbaiki tersebut. Persyaratan untuk mendapatkan solusi dengan akurasi yang tinggi ini telah memicu penemuan teknik pemulihan solusi yang menghasilkan solusi yang superkonvergen, di mana yang pertama dikenal sebagai *Superconvergent Patch Recovery*. Teknik baru ini dapat mengabaikan beberapa kesulitan yang ditemukan sebelumnya untuk sejumlah elemen kuadrat di mana diperlukan banyak penyesuaian untuk memperoleh hasil yang *reasonable*. Dengan mengaplikasikan metode SPR ini, telah dibuktikan [B6,B7] bahwa estimasi error **Zienkiewicz-Zhu** memberikan hasil yang lebih akurat dari pada alternatif metode lainnya [H2,O2,H3]. Berikut ini akan dijelaskan prosedur implementasi metode SPR yang dikemukakan **Zienkiewicz-Zhu** [Z3].

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa nilai gaya dalam atau tegangan pada sampel titik interior elemen memiliki karakteristik superkonvergen dan memiliki konvergensi error berorde $O(h^{p+1})$. Dalam metode SPR ini ide yang digunakan adalah memperhalus (*smoothing*) nilai pada titik tersebut dengan menggunakan fungsi polinomial derajat p untuk membentuk sebuah *local patch* yang melingkupi sejumlah elemen dan nodal tertentu. Sebagai ilustrasi ide tersebut dan prosedur implementasi-nya, kita ambil problem linear eliptic sebagai model yang berbentuk

$$Lu \equiv S^T DSu = f \quad \text{dalam } \Omega \quad (2.11)$$

Di mana untuk problem elastisitas u adalah vektor peralihan. Kita definisikan fungsi u^h sebagai fungsi pendekatan peralihan terhadap solusi eksak u , dan dinyatakan sebagai

$$u^h = N\bar{u} \quad (2.12)$$

Gaya dalam yang dihitung langsung dengan metode elemen hingga dinyatakan dalam bentuk (untuk momen) :

$$\{M^h\} = [H_b] \{\chi^h\} \quad (2.13)$$

Di mana \bar{u} adalah nilai peralihan pada nodal, N adalah *shape function*, dan S adalah operator differensial yang mendefinisikan regangan sebagai

$$\chi^h = Su^h \quad (2.14)$$

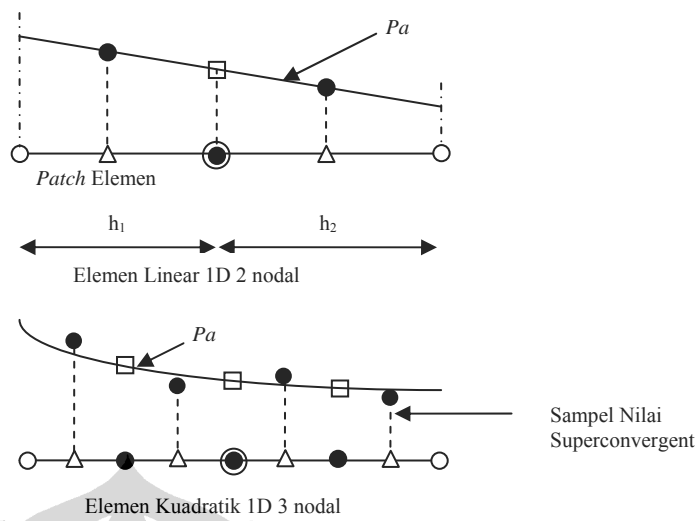
Gaya dalam yang diperoleh dari persamaan (2.13) umumnya tidak kontinu pada perbatasan antar elemen dan menunjukkan akurasi yang rendah pada nodal dan batas elemen (perletakan). Tujuan dari teknik pemulihan adalah menentukan parameter nodal \bar{M}^* , sehingga diperoleh medan gaya dalam kontinu M^* yang didefinisikan sebagai :

$$M^* = N\bar{M}^* \quad (2.15)$$

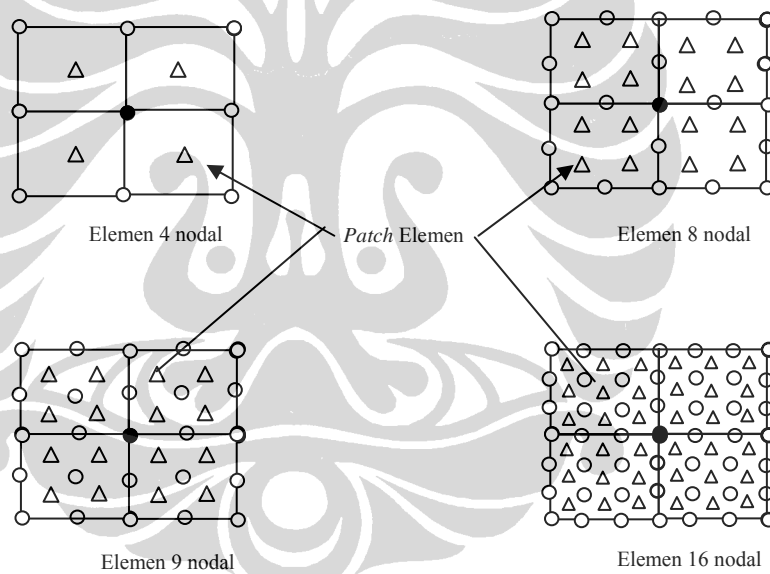
yang lebih baik dari solusi elemen hingga M^h , di mana N merupakan *shape function* yang sama digunakan dalam fungsi peralihan.

Pada awalnya **Zienkiewicz-Zhu** mengasumsikan bahwa nilai gaya dalam \bar{M}^* pada nodal berlaku untuk fungsi ekspansi polinomial M_p^* dengan derajat polinomial p yang sama dalam *shape function* N , dan berlaku pada sebuah *local patch* yang melingkupi sejumlah elemen dan nodal tertentu.

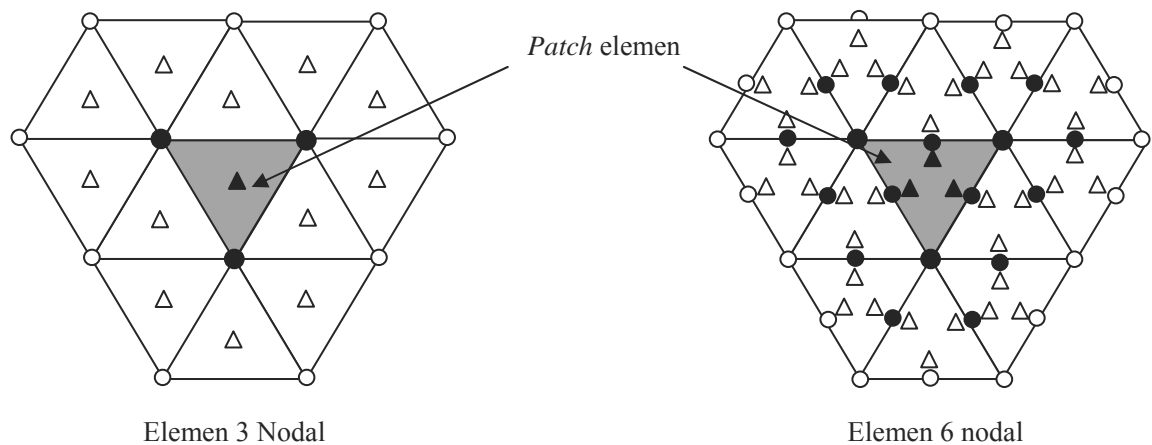
Bentuk *patch* elemen yang digunakan diperlihatkan pada Gambar 2.7-9 dengan model *patch* yang dibentuk oleh elemen (*Element Based Patch*) . Saat ini ada tiga buah model *patch* yang dapat digunakan yaitu *Nodal Based Patch*, *Element Based Patch*, dan *Element Interface Based Patch*. Ketiga model *patch* tersebut diilustrasikan pada Gambar 2.10.



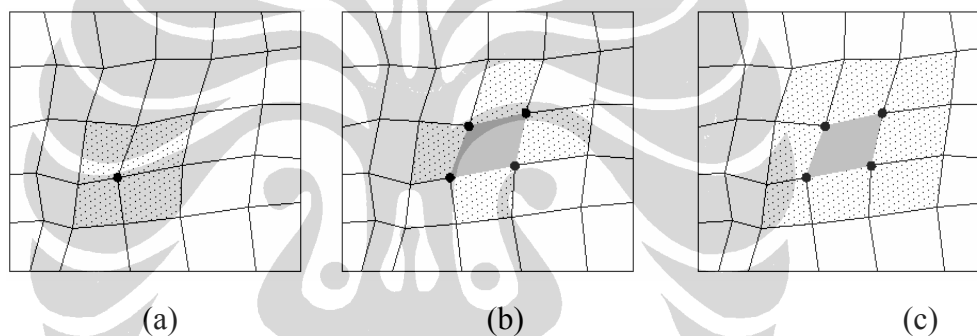
Gambar 2.7 Patch elemen untuk problem 1 dimensi : Δ Superconvergent Gauss Point ; \square Nilai nodal dengan metode pemulihan superkonvergen ; \bullet 'Patch' assembly point



Gambar 2.8 Patch (NBP) untuk elemen linear, quadratic, dan kubik quadrilateral: Δ Superconvergent Gauss Point ; \bullet Nilai nodal dengan SPR ; \odot 'Patch' assembly point



Gambar 2.9 *Patch (EBP)* untuk elemen linear dan quadratic triangular :
 Δ Superconvergent Gauss Point ; \bullet Nilai nodal dengan SPR ; \odot 'Patch' assembly point

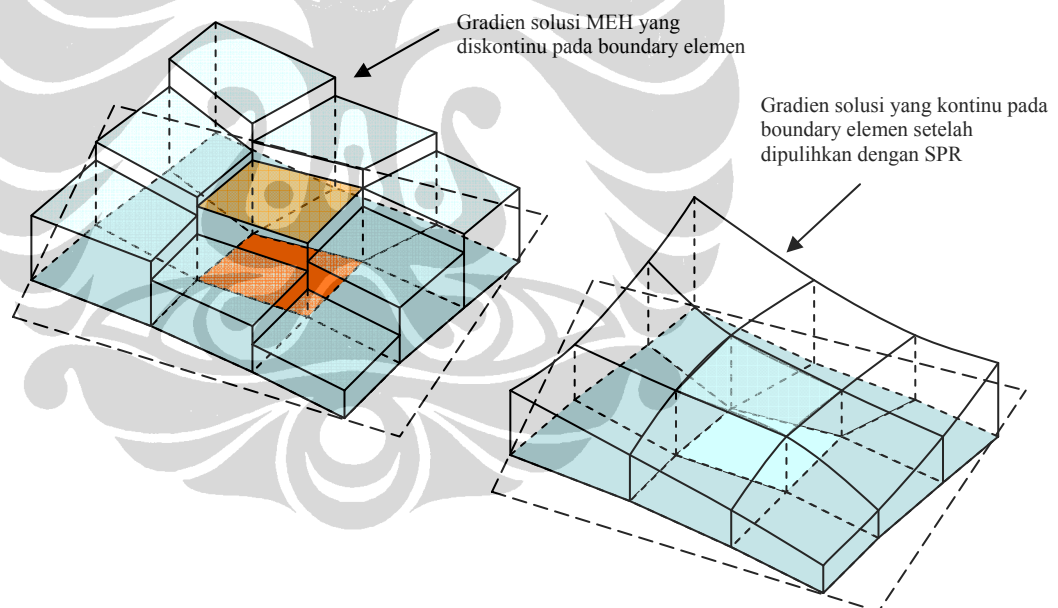


Gambar 2.10 Bentuk model *patch*
 (a) Nodal Based *Patch*; (b) Element interface Based *Patch*; (c) Element Based *Patch*

Dalam proses perhitungan gaya dalam dengan metode SPR berbasis *nodal based patch*, jumlah *patch* yang dapat dibentuk pada suatu mesh struktur tidak semata-mata berdasarkan jumlah nodal dalam mesh struktur tersebut. Hal ini terkait dengan jumlah total titik Gauss dari semua elemen yang terangkum dalam *patch*. Agar perhitungan bisa diselesaikan, diperlukan jumlah titik Gauss yang sama atau lebih dari bilangan yang tidak diketahui. Bilangan yang tidak diketahui ini adalah parameter $\{a_n\}$ yang berjumlah 8, sehingga jumlah titik Gauss yang digunakan dalam setiap *patch* harus ≥ 8 . Oleh karena itu, untuk nodal-nodal dengan hanya satu elemen yang tergabung padanya tidak dapat digunakan sebagai pusat pembentuk *patch* karena jumlah titik Gauss dengan *patch* semacam ini hanya 4.

Dalam hal ini perlakuan yang sama ditujukan untuk *patch* dengan dua elemen yang tergabung. Walaupun *patch* yang dibentuk oleh elemen-elemen tersebut menyediakan 8 buah titik Gauss, namun untuk kasus-kasus di mana geometri mesh struktur sangat tidak beraturan penggunaan *patch* tersebut akan menghasilkan solusi gaya dalam yang kurang akurat.

Element Based Patch pertama kali diperkenalkan oleh **Zienkiewicz-Zhu** [Z3] yang kemudian dimodifikasi oleh **J.E. Akin** [A1]. Formulasi SPR yang dikemukakan oleh **Zienkiewicz-Zhu** [Z3] menyatakan bahwa sebuah ekspansi polinomial dengan derajat yang sama dengan derajat polinomial aproksimasi peralihan nodal elemen berlaku pada sebuah lokal *patch* sebagai medan gradien solusi yang kontinu dengan melakukan *Least Square Fit* polinomial tersebut terhadap sejumlah titik sampel superkonvergen dalam *patch* yang sedang ditinjau.



Gambar 2.11 Ilustrasi kontinuitas gaya dalam pada problem 2D

Ekspansi polinomial ini dapat digunakan untuk tiap komponen M^* (misalnya M_x^*) dan dinyatakan sebagai :

$$M_x^* = \langle P(\xi, \eta) \rangle \{a_n\} \quad (2.16)$$

$$M_x^* = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \rangle \langle a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \rangle^T$$

Vektor $\langle P \rangle$ merupakan fungsi ekspansi polinomial dalam sistem koordinat lokal parametrik (ξ, η) yang diasumsikan sebagai medan gaya dalam yang kontinu pada *patch* yang ditinjau. Di sini digunakan delapan term polinomial kuadrat sesuai dengan formulasi elemen yang menggunakan derajat kebebasan temporer pada sisi elemen untuk merepresentasikan fungsi kuadrat pada sisi elemen tersebut.

2.2.4 *Superconvergent Patch Recovery (SPR)*

Nilai parameter tidak diketahui $\{a_n\}$ dalam persamaan (2.16) ditentukan dengan melakukan pencocokan (*Least Square Fit*) parameter tersebut terhadap titik-titik sampel yang superkonvergen, di mana di sini akan dipakai titik integrasi Gauss 2×2 . Untuk melakukan hal ini kita perlu meminimasi persamaan berikut, untuk *patch* elemen dengan n titik sampel:

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \left[M_x^h(\xi_k, \eta_k) - \langle P \rangle_k \{a_n\} \right]^2 \quad (2.17)$$

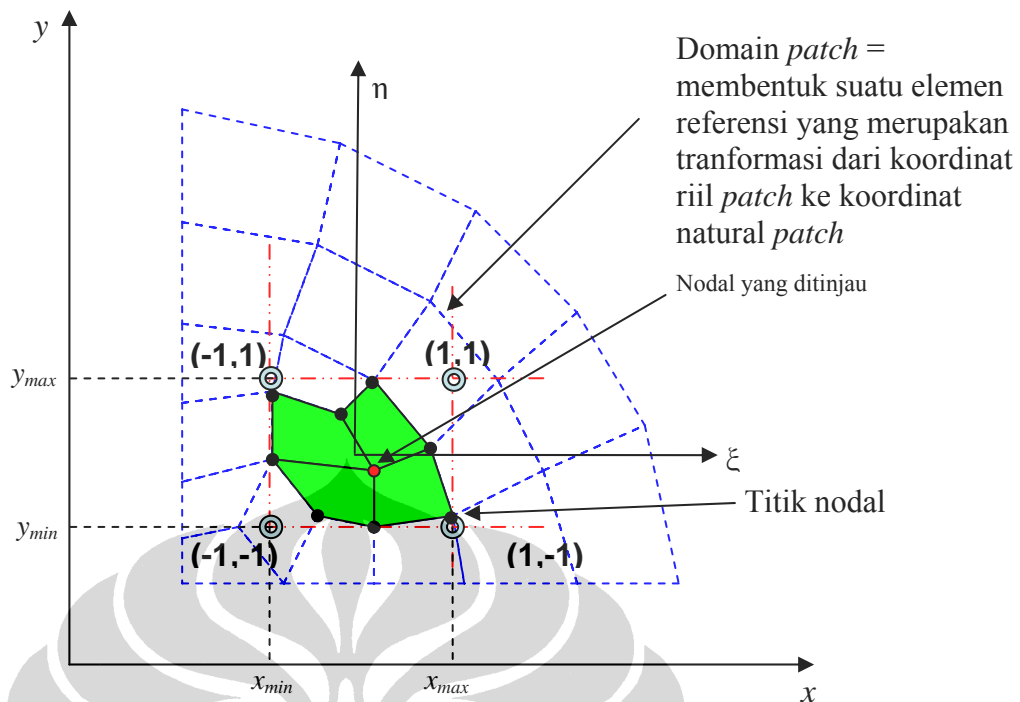
$$\langle P \rangle_k = \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle$$

dimana :

(ξ_k, η_k) = koordinat titik-titik Gauss dalam sistem koordinat lokal *Patch*

n = jumlah titik Gauss pada tiap *Patch*

$M_x^h(\xi_k, \eta_k)$ = Nilai gaya dalam solusi MEH pada titik-titik Gauss



Gambar 2.12 Domain Local Patch dan Sistem Koordinat Lokal Parametrik (Ξ, H) untuk Tipe Nodal Based Patch pada Sebuah Mesh Elemen Sembarang.

Koordinat $\xi=0, \eta=0$ tidak harus berimpit pada nodal pembentuk patch

Minimasi persamaan (2.17) mengindikasikan bahwa $\{a_n\}$ harus memenuhi persamaan berikut :

$$\sum_{k=1}^n \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle^T \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle \{a_n\} = \sum_{k=1}^n \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle^T M_x^h(\xi_k, \eta_k) \quad (2.18)$$

Dari persamaan (2.18) diperoleh

$$\{a_n\} = [A]^{-1} \{b_n\} \quad (2.19)$$

di mana:

$$[A] = \sum_{k=1}^n \langle P_k \rangle^T \langle P_k \rangle, \quad \{b_n\} = \sum_{k=1}^n \langle P_k \rangle^T M_x^h(\xi_k, \eta_k) \quad (2.20)$$

Setelah parameter $\{a_n\}$ ditentukan, nilai nodal gaya dalam M^{SPR} dapat dihitung dengan memasukkan nilai koordinat nodal pada persamaan (2.16) berdasarkan sistem koordinat lokal dari patch yang ditinjau. Di sini semua nodal yang berada

pada *patch* yang ditinjau akan dihitung nilai gaya dalamnya. Hal yang sama berlaku pada komponen gaya dalam, yaitu untuk fungsi momen:

$$\{a_n\}_M = [A]^{-1} \{b_n\}_M$$

dimana,

$\{a_n\}_M$: parameter $\{a_n\}$ untuk gaya dalam momen

$\{b_n\}_M$: vektor $\{b_n\}$ untuk gaya dalam momen

Perhitungan gaya dalam pada semua nodal dalam suatu *patch* mengakibatkan terjadinya perhitungan yang terus berulang pada nodal yang sama di setiap *patch* yang berbeda. Oleh karena itu dalam penelitian ini nilai-nilai gaya dalam pada nodal dari *patch-patch* yang berbeda akan dirata-ratakan, yaitu diakumulasi sehingga kemudian setelah selesai perhitungan pada semua nodal nilai akumulasi tersebut dibagi dengan jumlah perhitungan gaya dalam pada nodal tersebut, atau dengan kata lain jumlah *patch* yang mengandung nodal tersebut.

Secara keseluruhan prosedur SPR ini memerlukan data-data berikut ini :

- Jumlah *patch* yang dapat dibentuk oleh sebuah elemen pada suatu mesh elemen
- Jumlah elemen serta nodal yang terdapat pada setiap *patch*
- Jumlah titik-titik Gauss serta koordinatnya pada tiap *patch*
- Nilai gaya dalam pada tiap titik Gauss pada tiap *patch*

Sedangkan prosedur SPR itu sendiri pada elemen MITC dapat dirangkum sebagai berikut :

- Tinjau setiap *patch* pada mesh elemen
- Bentuk domain dari tiap *patch* dan sistem koordinat natural dari tiap *patch* (lihat Gambar 2.12) dengan cara mengambil nodal terluar sebagai batas sistem natural *patch*.
- Transformasikan titik-titik Gauss setiap elemen dari sistem koordinat koordinat natural elemen ke koordinat riil struktur, dengan persamaan berikut:

$$x = \sum_{i=1,4} N_i x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1,4} N_i y_i$$

- Transformasikan koordinat riil dari tiap nodal dan titik Gauss yang terdapat di dalam *patch* tersebut ke sistem koordinat natural (ξ, η) *patch* dengan persamaan berikut :

$$x = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_{min} + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_{max} \rightarrow \xi = \frac{2x - x_{min} - x_{max}}{(x_{max} - x_{min})}$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - \eta)y_{min} + \frac{1}{2}(1 + \eta)y_{max} \rightarrow \eta = \frac{2y - y_{min} - y_{max}}{(y_{max} - y_{min})}$$

- Setelah semua koordinat titik Gauss dari semua elemen ditransformasikan dalam sistem koordinat natural *patch*, untuk setiap titik Gauss, hitung matriks $[A] = \sum_{k=1}^n \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle^T \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle$ di mana matriks $[A]$ berukuran 8×8 .
- Terhadap semua titik Gauss dalam sistem koordinat natural *patch* dan nilai gaya dalam elemen $M^h(\xi_k, \eta_k)$ pada titik Gauss yang bersesuaian, hitung matriks $\sum_{k=1}^n \langle P(\xi_k, \eta_k) \rangle^T M^h(\xi_k, \eta_k)$ sehingga terbentuk matriks berukuran 8×1 .
- Hitung matriks $[A^{-1}]$ (invers $[A]$) sehingga untuk setiap gaya dalam dapat dihitung vektor $\{a_n\}$ yang berdimensi 8×1
- Hitung gaya dalam pada semua nodal yang terdapat pada *patch* dengan memasukkan koordinat natural *patch* dari semua nodal tersebut ke dalam persamaan (2.16), sebagai contoh, yaitu $M_{x_i}^* = \langle P(\xi_i, \eta_i) \rangle \{a_n\}$ di mana i adalah koordinat natural *patch* dari setiap nodal yang terdapat dalam *patch* tersebut.

2.2.5 Polynomial Preserving Recovery (PPR)

Metode ini merupakan metode terbaru yang dikembangkan oleh **Zhang** [Z11,Z12,Z13,Z14,Z15]. Timbulnya ide metode pemulihan ini didasari kebutuhan untuk menghasilkan pemulihan solusi yang akurat seperti pada SPR.

Idenya adalah memulihkan gaya dalam dengan pembentukan medan perpindahan dalam suatu patch melalui fungsi bentuk dan mengambil turunannya sebagai pemulihan gaya dalam. Metode ini juga menggunakan *patch* sebagai media untuk perhitungannya.

Peralihan titik nodal w pada nodal diambil sebagai

$$w = \langle P(\xi, \eta) \rangle \{a\} \quad (2.21)$$

dimana P adalah polinomial berorde $k+1$ dari elemen orde k . Elemen MITC yang geometrinya bilinear, elemen berorde $k=1$, diambil polinomial kuadratik berorde 6 :

$$P(\xi, \eta) = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \rangle \quad (2.22)$$

Dengan menggunakan seluruh nodal pada patch diperoleh

$$[Q] = \begin{bmatrix} \langle P(\xi, \eta)_1 \rangle \\ \langle P(\xi, \eta)_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle P(\xi, \eta)_n \rangle \end{bmatrix}_{n \times 6} \quad (2.23)$$

Diperoleh medan peralihan pada patch sebagai :

$$\{w_n\} = [Q] \{a\}$$

Dengan metode least square fitting diperoleh :

$$\{a\} = [Q]^T [Q]^{-1} [Q]^T \{w_n\} \quad (2.24)$$

dan

$$[A_p]_{6 \times n} = [Q]^T [Q]^{-1} [Q]^T$$

Medan Perpindahan dalam fungsi bentuk :

$$\{w^*\} = \langle N_p \rangle \{w_n\} \quad (2.25)$$

Dengan menggunakan Persamaan (2.21), Persamaan (2.24) pada Persamaan (2.25) diperoleh fungsi bentuk dalam patch sebagai :

$$\langle N_p \rangle_{1, xn} = \langle P(\xi, \eta) \rangle [A_p] \quad (2.26)$$

Dengan penurunan yang sama, maka untuk displacement yang lain seperti putaran sudut akan diperoleh dalam bentuk yang sama, yaitu

$$\{\beta_x^*\} = \langle N_p \rangle \{\beta_x\} \text{ dan } \{\beta_y^*\} = \langle N_p \rangle \{\beta_y\} \quad (2.27)$$

Pemulihan gaya dalam pada metode PPR berdasarkan turunan/derivatif dari perpindahan yang bersesuaian. Kelengkungan/turunan rotasi arah x diambil pada koordinat natural sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \{\beta_{x,\eta}^*\} &= \langle N_{p,\eta} \rangle \{\beta_{xn}\} \text{ dan } \{\beta_{x,\xi}^*\} = \langle N_{p,\xi} \rangle \{\beta_{xn}\} \\ \text{dengan} \\ \langle N_{p,\xi} \rangle &= \langle P(\xi, \eta)_{,\xi} \rangle [A_p] \text{ dan } \langle N_{p,\eta} \rangle = \langle P(\xi, \eta)_{,\eta} \rangle [A_p] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh kelengkungan/turunan rotasi arah y. Dengan transformasi jacobii diperoleh turunan rotasi tersebut menjadi:

$$\begin{aligned} \{\beta_{x,x}^*\} &= j_{11} \{\beta_{x,\xi}^*\} + j_{12} \{\beta_{x,\eta}^*\} \\ \{\beta_{x,y}^*\} &= j_{21} \{\beta_{x,\xi}^*\} + j_{22} \{\beta_{x,\eta}^*\} \\ \text{dan} \\ \{\beta_{y,x}^*\} &= j_{11} \{\beta_{y,\xi}^*\} + j_{12} \{\beta_{y,\eta}^*\} \\ \{\beta_{y,y}^*\} &= j_{21} \{\beta_{y,\xi}^*\} + j_{22} \{\beta_{y,\eta}^*\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Kelengkungan pada nodal kj menjadi :

$$\langle \chi^* \rangle = \langle \chi_x^* \quad \chi_y^* \quad \chi_{xy}^* \rangle = \left\langle \{\beta_{x,x}^*\} \quad \{\beta_{y,y}^*\} \quad (\{\beta_{x,y}^*\} + \{\beta_{y,x}^*\}) \right\rangle_{kj} \quad (2.30)$$

Gaya dalam Momen yang dipulihkan pada nodal kj adalah :

$$\begin{aligned} \{M^*\}_{kj} &= [H_b] \{\chi^*\}_{kj} \\ \begin{Bmatrix} M^*_{xx} \\ M^*_{yy} \\ M^*_{xy} \end{Bmatrix}_{kj} &= [H_b] \begin{Bmatrix} \chi^*_x \\ \chi^*_y \\ \chi^*_{xy} \end{Bmatrix}_{kj} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Perhitungan recovery gradien perpindahan pada semua nodal dalam suatu *patch* mengakibatkan terjadinya perhitungan yang terus berulang pada nodal yang sama di setiap *patch* yang berbeda. Oleh karena itu dalam penelitian ini nilai-nilai gaya dalam pada nodal dari *patch-patch* yang berbeda akan dirata-ratakan. Hal ini sama seperti metode SPR.

Secara keseluruhan prosedur PPR ini memerlukan data-data berikut ini :

- Jumlah *patch* yang dapat dibentuk oleh sebuah elemen pada suatu mesh elemen
- Jumlah elemen serta nodal yang terdapat pada setiap *patch*
- Jumlah nodal atau titik-titik Gauss serta koordinatnya pada tiap *patch*
- Nilai perpindahan pada tiap nodal atau titik Gauss pada tiap *patch*

Zhong, Zhang[Z15] Metode PPR untuk elemen kuadrilateral, jumlah elemen dalam *patch* adalah 4. Model *patch* yang digunakan adalah *nodal based patch* dengan mengambil interior nodal dalam *patch*. Zhang[Z14], Metode SPR dapat digunakan untuk *patch* yang mempunyai jumlah elemen sama dengan 3.

Prosedur PPR pada elemen MITC dapat dirangkum sebagai berikut :

- Tinjau setiap *patch* pada mesh elemen
- Bentuk domain dari tiap *patch* dan sistem koordinat natural dari tiap *patch* (lihat Gambar 2.12) dengan cara mengambil nodal terluar sebagai batas sistem natural *patch*.
- Transformasikan koordinat riil dari tiap nodal yang terdapat di dalam *patch* tersebut ke sistem koordinat natural (ξ, η) *patch* dengan persamaan berikut :

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_{min} + \frac{1}{2}(1+\xi)x_{max} \rightarrow \xi = \frac{2x - x_{min} - x_{max}}{(x_{max} - x_{min})}$$

$$y = \frac{1}{2}(1-\eta)y_{min} + \frac{1}{2}(1+\eta)y_{max} \rightarrow \eta = \frac{2y - y_{min} - y_{max}}{(y_{max} - y_{min})}$$

- Setelah semua koordinat titik nodal dari semua elemen ditransformasikan dalam sistem koordinat natural *patch*, untuk setiap titik nodal, hitung matriks

$$[Q] = \begin{bmatrix} \langle P(\xi, \eta)_1 \rangle \\ \langle P(\xi, \eta)_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle P(\xi, \eta)_n \rangle \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad [A] = [Q][Q]^T \text{ di mana matriks } [Q] \text{ berukuran } n \times 6$$

dimana terdapat n titik nodal dalam *patch* dan $[A]$ berukuran 6×6 .

- Terhadap semua nodal dalam *patch* pada sistem koordinat natural *patch* dan nilai perpindahan pada *patch* $w^h(\xi_k, \eta_k)$ pada nodal yang bersesuaian, hitung matriks $[A_p]_{6 \times n} = [[Q]^T [Q]]^{-1} [Q]^T$ dan dihitung $[A_p] \{w_n\}$ sehingga terbentuk matriks berukuran 6×1 .
- Hitung matrik turunan fungsi bentuk *patch* $\langle N_{p,\xi} \rangle$ dan $\langle N_{p,\eta} \rangle$ berdasarkan Persamaan (2.28) berdimensi $1 \times n$. Turunan ini diperoleh dengan menghitung $\langle P(\xi, \eta)_{,\xi} \rangle$ dan $\langle P(\xi, \eta)_{,\eta} \rangle$
- Hitung gradien perpindahan pada nodal yang terdapat pada *patch* dengan memasukkan koordinat natural *patch* dari nodal tersebut ke dalam persamaan (2.16), sehingga diperoleh gradien perpindahan rotasi x dan y dalam koordinat natural. Dengan invers matriks jacobini dari *patch* yang ditinjau diperoleh gradien perpindahan rotasi x dan y dalam koordinat kartesian. Kelengkungan/kurvatur pada nodal yang ditinjau dapat dihitung berdasarkan Persamaan (2.30).
- Hitung gaya dalam momen yang dipulihkan pada setiap titik nodal elemen pada *patch* dengan menghitung berdasarkan persamaan (2.31)

Garis besar perbandingan antara metode PPR dan metode SPR disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 2.1 Perbandingan Metode PPR dan Metode SPR

<i>Item</i>	<i>SPR</i>	<i>PPR</i>
Media perhitungan	<i>patch</i>	<i>patch</i>
Dasar pembentukan medan gaya dalam yang dipulihkan	Titik-titik sampel yang superkonvergen	Titik-titik nodal dalam Patch
Persamaan yang di- <i>least square fit</i>	$\sum_{k=1}^n [M_x^h(\xi_k, \eta_k) - \langle P_k \rangle \{a_n\}]$	$\{w_n\} - [Q]\{a\}$
Parameter $\{a_n\}$	$\{a_n\} = [A]^{-1} \{b_n\}$ $[A] = \sum_{k=1}^n \langle P_k \rangle^T \langle P_k \rangle$ $\{b_n\} = \sum_{k=1}^n \langle P_k \rangle^T M_x^h(\xi_k, \eta_k)$	$\{a\} = [A]^{-1} \{b\}$ $[A] = [Q]^T [Q] \quad \text{dan} \quad [A_p] = [A][Q]^T$ $\{b_n\} = [Q]^T \{w_n\}$ $\langle N_p \rangle = \langle P(\xi, \eta) \rangle [A_p] \quad \text{dan} \quad \langle N_{p,\xi} \rangle = \langle P(\xi, \eta)_{,\xi} \rangle [A_p]$ $\{\beta_{x,\xi}^*\} = \langle N_{p,\xi} \rangle \{\beta_{xn}\}$ $\{\beta_{x,x}^*\} = j_{11} \{\beta_{x,\xi}^*\} + j_{12} \{\beta_{x,\eta}^*\}$ $\langle \chi^* \rangle = \langle \{\beta_{x,x}^*\} \quad \{\beta_{y,y}^*\} \quad (\{\beta_{x,y}^*\} + \{\beta_{y,x}^*\}) \rangle$ $\{M^*\} = [H_b] \{\chi^*\}$
Pemulihan nodal pada boundary	Disarankan menggunakan internal <i>patch</i>	Disarankan menggunakan internal <i>patch</i>

2.2.6 Gaya Dalam pada Nodal Struktur

Perhitungan gaya dalam pada nodal struktur dilakukan dengan meratakan-ratakan nilai pemulihan gaya dalam nodal pada tiap elemen yang bertemu pada nodal tersebut, yaitu:

$$\{M^{AVR}\}_i = \frac{1}{m} \sum_i^m \{M^h\}_i \quad (2.31)$$

di mana :

$\langle M^{AVR} \rangle_i = \langle M_x^{AVR} \quad M_y^{AVR} \quad M_{xy}^{AVR} \rangle_i$ = gaya dalam rata² pada nodal struktur

$\langle M^h \rangle_i = \langle M_x^h \quad M_y^h \quad M_{xy}^h \rangle_i$ = nilai pemulihan gaya dalam dari setiap elemen yang

bertemu pada nodal i

m = jumlah elemen yang bertemu pada nodal i

Momen utama untuk tiap nodal struktur i adalah :

$$M_{1_i} = \frac{M_{x_i}^{AVR} + M_{y_i}^{AVR}}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_{x_i}^{AVR} - M_{y_i}^{AVR}}{2}\right)^2 + (M_{xy_i}^{AVR})^2}$$

$$M_{2_i} = \frac{M_{x_i}^{AVR} + M_{y_i}^{AVR}}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_{x_i}^{AVR} - M_{y_i}^{AVR}}{2}\right)^2 + (M_{xy_i}^{AVR})^2} \quad (2.32a-b)$$

$$M_{12_i} = \frac{M_{1_i} - M_{2_i}}{2} \quad (2.33)$$

Sedangkan sudut utamanya adalah :

$$\varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2M_{xy_i}}{M_{x_i} - M_{y_i}} \right) \quad (2.34)$$

2.2.7 Estimasi Error dengan Pemulihan Solusi Gaya Dalam

Pada dasarnya estimator error **Zienkiewicz-Zhu** [Z5] dilakukan untuk mengestimasi error untuk memperbaiki solusi MEH menggunakan teknik pemulihan, sehingga error estimasi menjadi :

$$\|e\|_i^2 \approx \|e^*\|_i^2 = \|e_M^*\|_i^2 + \|e_T^*\|_i^2 \quad (2.35)$$

di mana :

$\|e^*\|_i^2$ = estimator error norma energi lokal untuk elemen i dengan metode pemulihan gaya dalam (PPR, SPR, PRJ, AVR)

Error total di seluruh domain struktur :

$$\|e^*\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e^*\|_i^2 \quad (2.36)$$

Nilai indeks efektifitasnya sebagai berikut

$$\Theta^* = \frac{\|e^*\|}{\|e\|} \quad (2.37)$$

Teorema yang dikemukakan **Zienkiewicz-Zhu** [Z6] menunjukkan bahwa untuk semua error estimator berdasarkan teknik pemulihan solusi dapat dibuat batasan untuk indeks efektifitas tersebut sebagai berikut

$$1 - \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \leq \Theta^* \leq 1 + \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \quad (2.38)$$

atau

$$\|e\| - \|\bar{e}\| \leq \|e^*\| \leq \|e\| + \|\bar{e}\| \quad (2.28)$$

Di mana e adalah error aktual dan \bar{e} adalah error solusi yang diperbaiki

$$\|\bar{e}\| = \|u - u^*\| \quad (2.40)$$

Dari teorema tersebut dapat ditarik dua kesimpulan penting sebagai berikut:

1. Setiap proses pemulihan yang menghasilkan error yang tereduksi akan memberikan error estimator yang baik

2. Jika solusi elemen hingga yang diperbaiki konvergen dengan rate lebih tinggi dari solusi langsung elemen hingga maka error estimator tersebut akan selalu asimtotik eksak.

2.3 Indikator Error Dan Penghalusan

Estimator error hanya mungkin menjadi error aktual jika ukuran elemen diperkecil menjadi sangat kecil mencapai nol dan dalam hal ini membuat jumlah elemen menjadi tak terhingga. Apabila ukuran elemen mendekati nol, maka perhitungan tak akan pernah berhenti. Untuk itu diperlukan suatu batasan yang efektif sebagai penentu kriteria untuk pemberhentian proses diskritisasi.

Indikator error eksak struktur dapat didefinisikan dari error energi eksak yang dinormalisasi oleh energi regangan eksak sebagai berikut :

$$\phi = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100\% \quad (2.41)$$

di mana $\|e\|$ adalah norma energi error yang didefinisikan pada persamaan

(2.9), sedangkan $\|u\|$ adalah dua kali energi regangan

eksak struktur secara global yang untuk struktur pelat terdiri dari energi lentur dan geser

$$\begin{aligned} \|u\|_i^2 &= \|u_M\|_i^2 + \|u_T\|_i^2 \\ &= \int_A \langle M \rangle [H_b]^{-1} \{M\} dA + \int_A \langle T \rangle [H_s]^{-1} \{T\} dA \\ \|u\|^2 &= \sum_{i=1}^m \|u\|_i^2 \end{aligned} \quad (2.42a-c)$$

Untuk metode PPR pada penelitian ini, hanya memperhitungkan energi lentur saja. Indikator error eksak tersebut dapat dihitung jika solusi eksak tersedia. Kita dapat mengestimasi dengan menggunakan pemulihan solusi yang sudah dibahas sebelumnya.

Indikator error relatif struktur dengan metode pemulihan gaya dalam ϕ^* adalah sebagai berikut

$$\phi^* = \frac{\|e^*\|}{\|u^*\|} \times 100\% \quad (2.43)$$

dimana,

$$\|u^*\|_i = \sqrt{\|u^h\|_i^2 + \|e^*\|_i^2} \quad (2.44)$$

$\|u^*\|_i$ = dua kali energi regangan elemen secara lokal yang diestimasi dengan metode pemulihan gaya dalam

Nilai $\|e^*\|$ sesuai dengan persamaan (2.36)

sedangkan $\|u^h\|_i$ adalah dua kali energi regangan lentur untuk gaya momen dan geser elemen secara lokal yang diperoleh melalui metode elemen hingga dan dapat diekspresikan dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \|u^h\|_i^2 &= \|u_M^h\|_i^2 + \|u_T^h\|_i^2 \\ &= \int_A \langle M^h \rangle [H_b]^{-1} \{M^h\} dA + \int_A \langle T^h \rangle [H_m]^{-1} \{T^h\} dA \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sehingga dapat kita peroleh

$$\|u^*\|^2 = \sum_{i=1}^m \|u^*\|_i^2 \quad (2.46)$$

dimana,

$\|u^*\|$ = dua kali energi regangan elemen secara global yang diestimasi dengan metode pemulihan gaya dalam

Indikator error menurut persamaan (2.43) merupakan besaran yang kita gunakan sebagai kriteria penghentian proses penghalusan elemen. Hal ini dapat dilakukan dengan memberikan batasan $\bar{\phi}$ di mana jika $\phi^* \leq \bar{\phi}$ maka proses

diskritisasi dapat dihentikan. Nilai ϕ yang digunakan untuk aplikasi rekayasa umumnya adalah 5%. Indikator error ijin struktur ditentukan oleh :

$$\bar{\phi} = \frac{\|\hat{e}\|}{\|u^*\|} \times 100\% \quad (2.47)$$

di mana $\|\hat{e}\|$ adalah error ijin norma energi global, yaitu :

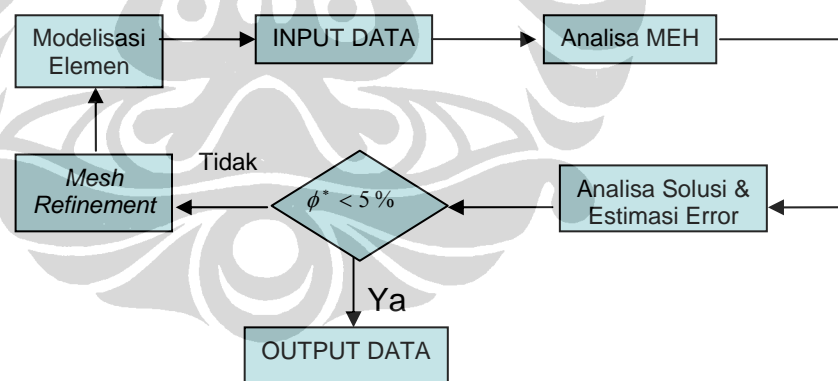
$$\|\hat{e}\|^2 = \bar{\phi}^2 \left(\|u^h\|^2 + \|e^*\|^2 \right) \quad (2.48)$$

Dalam jaringan elemen yang optimal distribusi error norma energi adalah sama/merata di semua elemen, sehingga

$$\|\hat{e}\|^2 = m \|\hat{e}_i\|^2 \quad (2.49)$$

dimana,

m = jumlah elemen yang digunakan



Gambar 2.13 Proses penghalusan jaringan

Substitusi persamaan

$$\|\hat{e}\|^2 = m \|\hat{e}_i\|^2$$

(2.48) ke persamaan

(2.49) menghasilkan :

$$\begin{aligned}
 m \|\hat{e}\|_i^2 &= \bar{\phi}^2 \left(\|u^h\|^2 + \|e^*\|^2 \right) \\
 \|\hat{e}\|_i^2 &= \frac{\bar{\phi}^2 \left(\|u^h\|^2 + \|e^*\|^2 \right)}{m}
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

Dengan demikian kita dapat mensyaratkan bahwa error tiap elemen i harus lebih kecil atau sama dengan

$$\|\hat{e}\|_i = \bar{\phi} \left(\frac{\|u^h\|^2 + \|e^*\|^2}{m} \right)^{1/2} = e_m
 \tag{2.51}$$

dimana,

$\|\hat{e}\|_i$ = error norma energi ijin yang diperkirakan untuk tiap elemen i

Untuk elemen di mana persyaratan tersebut tidak dipenuhi adalah kandidat untuk diperhalus. Jika kita nyatakan rasio sebagai berikut :

$$\frac{\|e^*\|_i}{e_m} = \zeta_k
 \tag{2.52}$$

Maka elemen harus diperhalus jika

$$\zeta_k > 1
 \tag{2.53}$$