

BAB 1

PENDAHULUAN

1. 1. Umum

Penyimpangan atau error solusi tidak dapat dihindarkan dalam penggunaan metode elemen hingga, baik karena modelisasi yang kurang tepat, pemakaian integrasi numerik, ketidaktepatan penyelesaian numerik, maupun akumulasi kesalahan pembulatan pada proses numerik. Suatu problem yang kompleks dan rumit seringkali tidak ada solusi eksaknya, sehingga penyimpangan yang terjadi juga akan sulit diketahui. Untuk itu dikembangkan estimator error yang berfungsi membantu mencari solusi yang sedekat mungkin dengan solusi eksak. Kedekatan hasil perhitungan dengan solusi eksak ditunjukkan oleh nilai estimator error yang kecil.

Prosedur estimasi error berdasarkan teknik pemulihan memberikan hasil yang baik untuk berbagai bentuk problem pelat. Teknik pemulihan error estimator yang banyak digunakan adalah metode superkonvergen yang menghasilkan tingkat konvergensi error yang sangat tinggi (*superconvergence*). Metode superkonvergen yang pertama adalah metode *Superconvergent Patch Recovery* (SPR). Prinsip metode ini adalah memulihkan gaya dalam pada nodal elemen dengan analogi metode *Least Square Fit* atau pencocokan fungsi/kurva terhadap data-data sampel gaya dalam yang lebih akurat.

Metode superkonvergen yang lain adalah metode *Recovery by Equilibrium in Patches* (REP) yang didasarkan pada persamaan keseimbangan dari formulasi solusi untuk menghasilkan medan gaya dalam yang dipulihkan. Seperti juga metode SPR, metode REP menggunakan patch sebagai media untuk perhitungannya.

Metode superkonvergen berikutnya adalah metode *Polynomial Preserving Gradient Recovery* (PPR) yang didasarkan pada pemulihan gradien perpindahan pada nodal elemen dengan analogi metode *Least Square Fit*. Seperti juga metode SPR dan metode REP, Metode PPR menggunakan patch sebagai media untuk perhitungannya.

Pemilihan metode pemulihan dalam elemen hingga merupakan faktor penentu kualitas suatu estimator error. Masing-masing metode mempunyai kelebihan dan kekurangan, dan tingkat akurasi yang diperoleh dari pemulihan solusi tersebut merupakan topik yang penting untuk dikaji.

1. 2. Latar Belakang Historis

Hasil dari perkembangan metode elemen hingga adalah penemuan suatu metode estimasi yang dinamakan estimasi kesalahan *a posteriori* pada akhir tahun 1970 yang diperkenalkan oleh **Babuska** [B1] (1978) dan **Ladeveze** [L1] (1977), di mana **Ladeveze** memperkenalkan terlebih dahulu pemahaman tentang error. Saat ini metode estimasi kesalahan *a posteriori* dapat diklasifikasikan menjadi dua kategori yaitu :

- 1) Estimator berdasarkan kesalahan kesetimbangan atau *equilibrium defaults* (kesetimbangan residual, inter-element traction jump, surface traction defaults) pada solusi elemen hingga.
- 2) Estimator berdasarkan *post-processing techniques* dari solusi elemen hingga (melakukan pendekatan terhadap tegangan eksak, lendutan eksak, turunan fungsi medan lendutan, dan lain-lain).

Metode estimasi ini dapat dilakukan pada tingkat global dan lokal. Dalam tingkat global, besarnya kesalahan dihitung dengan resolusi persamaan pada tingkat global yang merepresentasikan problem struktur yang ditinjau. Dalam tingkat lokal, perhitungan estimasi kesalahan dilakukan pada domain yang merupakan bagian dari domain keseluruhan struktur (misalnya pada nodal-nodal, domain elemen-elemen, atau pada elemen itu sendiri).

Untuk metode global sendiri sudah sering dipakai sejak tahun 1978, yang memiliki sifat:

- Diukur dalam bentuk norma energi
- Tidak ada informasi mengenai solusi pada tingkat lokal
- Tidak terlalu sulit dalam melakukan komputasinya

Metode global ini telah dikembangkan menjadi dua kategori yaitu :

- Metode pemulihan (*Recovery Method*)
Menggunakan prosedur *post-processing technique* dari solusi yang didapatkan dari metode elemen hingga untuk memulihkan gradien (tegangan) dan menghitung perbedaan antara nilai gradien yang diperoleh dari metode pemulihan terhadap nilai gradien dari metode elemen hingga sebagai pendekatan estimasi kesalahan eksak
- Metode residual (*Residual Method*), oleh **Babuska, Oden, Verfurth** [B2,O1,V1]

Untuk mengestimasi kesalahan dikembangkan suatu metode pengestimasi kesalahan agar solusi elemen hingga yang dihasilkan mendekati solusi “eksak”. Pertama-tama **Babuska** dan **Rheinboldt** [B1] memprediksi error solusi elemen hingga dengan memanfaatkan residual hasil persamaan keseimbangan dan residual derivatif normal yang terbentuk pada batas-batas antar elemen. Residual yang dihasilkan tersebut merupakan faktor dominan untuk mengestimasi solusi elemen hingga, khususnya pada kasus 1 dimensi. Kemudian **Gago** [G1,G2] mengembangkan metode ini untuk problem 2D dan menambahkan *inter-element traction jumps* ke dalam formulasinya. Sebuah interpretasi terhadap **Gago** estimator telah dilakukan oleh **Zhong** [Z2] dan **Beckers** [B3] yang menunjukkan bahwa **Gago** estimator terlalu *heuristic*. Maka kemudian estimator eksplisit yang baru di kembangkan di mana *surface traction defaults* dimasukkan dalam analisisnya dan melahirkan teknik estimasi *inter-element tractions* eksak.

Kikuchi [K1] memperkenalkan estimasi penurunan peralihan dengan solusi elemen hingga (estimasi kesalahan interpolasi). **Zienkiewicz** dan **Zhu** [Z1] membangun medan tegangan kontinu dari medan tegangan elemen elemen hingga dengan metode proyeksi global (estimasi lama **Zienkiewicz** dan **Zhu**), metode massa tergumpal (*lump mass*), metode nodal rata-rata, dan metode superkonvergensi (estimasi baru **Zienkiewicz** dan **Zhu**). **Beckers** [B3] menggunakan metode *residual wait* dan ekstrapolasi untuk membangun medan tegangan kontinu dan metode konstruksi dari medan peralihan derajat superior.

Kesimpulan yang dapat diambil adalah:

- Estimasi lama dari Z^2 tidak baik untuk elemen isoparametrik derajat genap, tapi sangat bagus untuk elemen pelat DKQ
- Metode massa tergumpal (*lump mass*), demikian pula metode lainnya, dengan cara rata-rata sederhana tidak baik untuk elemen derajat superior atau sama dengan dua.
- Estimasi baru Z^2 serta *metode residual wait* dan ekstrapolasi, baik dalam berbagai kasus.

Error estimasi **Zienkiewicz-Zhu** [Z3] dalam aplikasinya sudah banyak digunakan dan diterima sebagai metode yang sangat baik didukung dengan kemudahan dalam komputasinya dan implementasinya pada komputer.

Zhang [Z10] dan Z[11] pada tahun 2003, memperkenalkan Ultraconvergence pada teknik pemulihan ZZ recovery.

1.3. Error Estimator Saat Ini

Estimasi error *a posteriori* terus berkembang karena lebih mudah dan efisien. **Prudhomme** dan **Oden** [P1] memperkenalkan strategi baru dalam aplikasi estimasi error *a posteriori*. Mereka memperkenalkan suatu teknik yang dapat meningkatkan reliabilitas estimasi error *a posteriori* dengan menggunakan metode *implicit error residual* untuk mencari batas bawah (*lower bound*) dari estimasi error. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membangun sebuah alat yang dapat memverifikasi akurasi dari solusi metode elemen hingga.

Bernardi [B4] pada tahun 2003 memperkenalkan aplikasi-aplikasi terbaru mengenai estimasi error *a posteriori* terutama dalam hal adaptifitas jaringan (mesh) elemen. Salah satu aplikasi yang diperkenalkannya adalah aplikasi diskritisasi bertahap.

Zhang [Z11] pada tahun 2004 memperkenalkan metode baru untuk estimasi error *a posteriori* dengan menggunakan polinomial berderajat $k+1$ untuk solusi peralihan nodal. Gradien pemulihan diperoleh dari turunan polinomial tersebut.

Zhang[Z12] pada tahun 2004 menamakan metode tersebut sebagai metode *Polynomial Preserving Gradient Recovery* yang kadang-kadang disebutkan sebagai *Polynomial Preserving Recovery* (PPR).

1. 4. Teknik Pemulihan Solusi

Solusi perhitungan gaya dalam merupakan suatu hasil yang penting dalam aplikasi teknik sipil. Perhitungan solusi pada umumnya dilakukan pada nodal-nodal elemen, meliputi peralihan (lendutan) nodal, gaya dalam nodal, tegangan dan regangan. Nilai peralihan untuk sebuah model peralihan elemen hingga umumnya memberikan konvergensi error sesuai dengan orde polinomial pembentuk elemen tersebut. Peralihan nodal dengan orde peralihan berderajat k , dilakukan pemulihan peralihan nodal dengan orde polinomial berderajat $k+1$. Nilai gradien atau turunan dari peralihan tersebut, seperti gaya dalam dan tegangan/regangan, umumnya memiliki konvergensi error yang lebih kecil. Oleh karena itu sebuah model elemen hingga perlu dilengkapi sebuah metode yang dapat memperbaiki solusi tersebut dengan akurasi tinggi. Metode ini dikenal luas sebagai teknik pemulihan solusi.

Dengan media error estimator, kita dapat mengetahui tingkat akurasi dan konvergensi sebuah metode pemulihan solusi yang dipakai. Hingga saat ini sudah banyak teknik pemulihan solusi yang dikemukakan oleh berbagai peneliti di dunia, Salah satu metode andal sebagai teknik pemulihan solusi yang baik adalah *Polynomial Preserving Gradient Recovery* (PPR).

1. 5. Tinjauan Pustaka

Zhang [Z11] pada tahun 2004 dalam jurnalnya yang pertama mengenai PPR menjelaskan metode *gradient recovery* yang baru, yang tetap mempertahankan kesederhanaan, efisiensi dari metode *gradient recovery* ZZ (SPR). Sebuah ruang elemen derajat k , dilakukan pencocokan dengan sebuah polinomial derajat $k+1$ untuk nilai-nilai solusi pada beberapa nodal points, dan kemudian mengambil gradien atau turunannya untuk memperoleh gradien yang di-*recovery* pada setiap nodal. Gagasan ini juga berhubungan dengan *meshless method* yang memberi perhatian pada titik (nodal) yang ada disekelilingnya dan bukan pada elemennya.

Dalam penjelasannya, elemen yang digunakan adalah elemen segitiga (triangular) yang seragam.

Zhang[Z12], menjelaskan metode PPR dalam elemen Quadrilateral yang bilinear. Dalam tulisannya digunakan polinomial kuadratik dengan term orde 6.

Zhang[Z13] dan [Z14], Metode PPR diaplikasikan dalam elemen triangular dimana Model patch dan parameter patch seperti jumlah nodal dan elemen dalam patch dijelaskan. Metode SPR dapat diaplikasikan pada patch apabila jumlah nodal yang disyaratkan dalam patch tidak memenuhi. Untuk Elemen berorde k , jumlah nodal yang disyaratkan sebesar $(k+2)(k+3)/2$. Sehingga untuk elemen linier, jumlah nodal yang disyaratkan minimum 6.

Zhong-Ci Shi dan Zhang[Z15], Metode PPR diaplikasikan dalam permasalahan elastisitas dengan elemen Quadrilateral. Pemulihan Gaya Dalam dilakukan berdasarkan pemulihan gradien perpindahan. Dalam hal ini, digunakan model fungsi bentuk patch untuk membentuk fungsi polinomial perpindahan dalam patch. Fungsi bentuk patch ini didapatkan berdasarkan metode least square fit dari perpindahan nodal dalam patch. Gradien perpindahan seperti regangan atau kelengkungan dalam pelat, diperoleh dari turunan fungsi polinomial perpindahan dalam patch. Dalam penjelasannya, untuk elemen quadrilateral dengan polinomial kuadratik 6 term orde, 8 term orde dan 9 term orde, minimum nodal yang diperlukan dalam patch adalah 9 atau minimum 4 elemen dalam patch.

1. 6. Tujuan Dan Metodologi Penulisan

Dalam tesis ini, akan dievaluasi performa elemen pelat empat nodal dengan masing-masing tiga derajat kebebasan yang diberi nama MITC (*Mixed Interpolated Tensorial Component*) melalui penerapan metode pemulihan gaya dalam PPR (*Polynomial Preserving Gradient Recovery*) yang dikembangkan oleh Zhang[Z11]. Juga dilakukan pengujian metode PPR ini dengan polinomial term orde yang berbeda.

Penerapan dari metode estimasi kesalahan Z^2 untuk menunjukkan bagaimana mengestimasi presisi dari solusi elemen tersebut dan bagaimana merealisasikan presisi tersebut dengan menggunakan jaringan adaptif, sehingga akhirnya

diperoleh pemodelan elemen hingga yang mendekati optimal atau mendekati struktur fisik sebenarnya dengan usaha komputasi yang minimal, sehingga hasil yang diperoleh memenuhi batas akurasi yang ditentukan. Selain untuk mengestimasi error pada suatu tahap diskritisasi, error estimator ini juga akan digunakan untuk mengetahui tingkat akurasi dari teknik pemulihan gaya dalam yang digunakan sebagai parameter utama pembentuk error estimator Z^2 .

Metodologi penelitian yang digunakan adalah berupa studi literatur dari berbagai buku dan jurnal yang ada di daftar pustaka. Analisa dan test akan dilakukan dengan menggunakan main program FEAP versi 7.1 (*Finite Element Analysis Program*) yang dibuat oleh R.L. Taylor, dan akan dibuat subrutin teknik pemulihan PPR.

1. 7. Pembatasan Masalah

Masalah yang akan dibahas dibatasi hanya untuk elemen pelat quadrilateral 12 derajat kebebasan, dengan material homogen, isotropik dan linier elastik dengan tipe pembebanan statis. Untuk aplikasi estimasi kesalahan, evaluasi pada proses diskritisasi dilakukan dengan penghalusan jaringan secara seragam dan adaptif. Estimasi kesalahannya menggunakan metode PPR (*Polynomial Preserving Gradient Recovery*) yang dikembangkan oleh Zhang[Z11,Z12,Z13,Z14,Z15], dengan menggunakan *Nodal Base Patch*.

1. 8. Sistematika Penulisan

Secara garis besar sistematika penulisan tesis ini dibagi dalam 5 bab yang dapat diuraikan sebagai berikut :

1. Bab 1 adalah bab pendahuluan yang menjabarkan secara singkat latar belakang metode elemen hingga, error estimator, teknik pemulihan PPR, tinjauan pustaka, tujuan penulisan dan metode penelitian, pembatasan masalah, dan sistematika penulisan.
2. Bab 2 menguraikan tentang teori dasar PPR dan Error Estimator Z^2 .
3. Bab 3 akan membahas aspek programasi menggunakan FEAP serta implementasi metode PPR dalam FEAP melalui modifikasi program menggunakan bahasa Fortran beserta penjelasannya.

4. Bab 4 akan menguraikan uji numerik terhadap beberapa kasus pelat berupa aplikasi dari teknik pemulihan gaya dalam PPR serta perbandingan dengan metode yang lain.
5. Bab 5 merupakan kesimpulan dan saran dari hasil penulisan tesis ini.

