

## BAB 2 DASAR TEORI

### 2.1 Model Fuzzy Takagi - Sugeno

Model berbasis logika fuzzy (*fuzzy rule-based model*) yang sesuai untuk memperkirakan suatu sistem nonlinear diperkenalkan oleh Takagi dan Sugeno sejak tahun 1985. Model fuzzy yang dikemukakan digambarkan dengan aturan ‘if-then’ fuzzy yang mewakili hubungan linear input-output dari sistem nonlinear [5]. Keseluruhan model fuzzy dari sistem diperoleh dengan memadupadankan model linear sistem.

Model fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) untuk sitem kontinu yang dijabarkan dalam bentuk sekumpulan aturan ‘if-then’ fuzzy, dinyatakan sebagai berikut [2]:

Aturan model ke- $i$

$$\begin{aligned}
 & \text{IF } \zeta_1(t) \text{ adalah } M_{i1} \text{ dan } \dots \zeta_p(t) \text{ adalah } M_{ip}, \\
 & \text{THEN } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

dimana,  $M_{ip}$  adalah subset fuzzy dan  $r$  adalah jumlah aturan model fuzzy,  $x(t) \in R^n$  adalah vektor keadaan (*state vector*),  $u(t) \in R^m$  adalah vektor input,  $y(t) \in R^q$  adalah vektor output,  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ , dan  $C_i \in R^{q \times n}$ . Sementara  $\zeta(t) = [\zeta_1(t), \dots, \zeta_p(t)]$  adalah premis variabel vektor, yang dapat berupa fungsi dari variabel keadaan, gangguan eksternal, dan/atau fungsi waktu.

Jika terdapat pasangan  $(x(t), u(t))$ , dengan inferensi dan defuzzifikasi menggunakan metode rata-rata terpusat (*center average defuzzification*) [6,7] maka output dari sistem fuzzy dapat disimpulkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) C_i x(t)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dimana

$$\zeta(t) = [\zeta_1(t) \ \zeta_2(t) \ \dots \ \zeta_p(t)]$$

$$w_i(\zeta(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(\zeta_j(t)) \tag{2.4}$$

$$h_i(\zeta(t)) = \frac{w_i(\zeta(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t))} \tag{2.5}$$

$M_{ij}(\zeta_j(t))$  adalah fungsi keanggotaan dari  $\zeta_j(t)$  dalam  $M_{ij}$ , dan berlaku

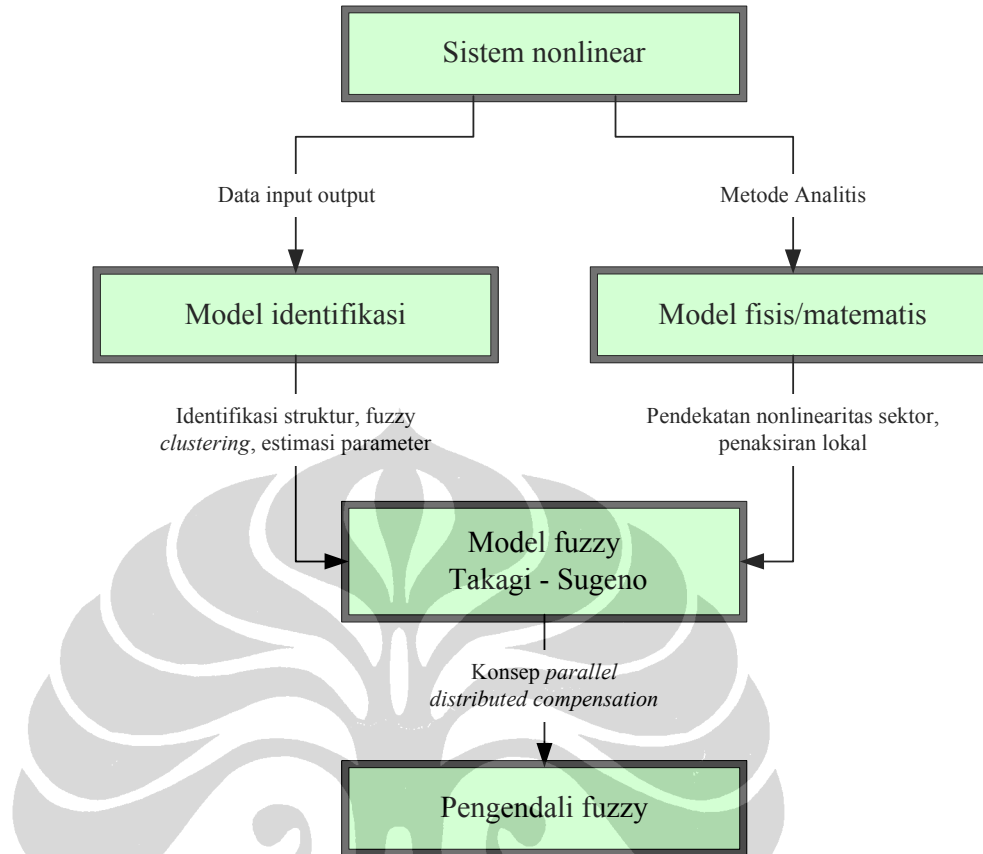
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) > 0 \\ w_i(\zeta(t)) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) = 1 \\ h_i(\zeta(t)) \geq 0 \end{cases}$$

Gambar 2.1 memperlihatkan pendekatan dalam mendisain sistem kendali fuzzy berbasis model. Untuk mendisain pengendali fuzzy, diperlukan model fuzzy T-S dari sistem nonlinear. Secara umum ada dua pendekatan dalam membentuk model fuzzy sistem [2,8], yakni:

- (1) Identifikasi model fuzzy menggunakan input-output data, dan
- (2) Penurunan model dari persamaan sistem nonlinear yang ada.

Pemodelan fuzzy menggunakan data input-output secara garis besar terdiri atas, identifikasi struktur, *fuzzy clustering*, dan estimasi parameter. Pendekatan menggunakan metode identifikasi cocok diterapkan pada sistem yang tidak dapat atau terlalu sulit dijabarkan dalam model analitis dan/atau model fisis.



Gambar 2.1 Disain kendali berbasis model fuzzy

Dalam kasus seperti sistem mekanis dimana model dinamis nonlinear sistem dapat ditentukan dengan menggunakan metode seperti Lagrange atau Newton-Euler, pendekatan dengan menurunkan model fuzzy dari persamaan nonlinear dinamis lebih tepat digunakan. Metode ini menggunakan pendekatan ‘sektor nonlinearitas’ atau ‘penaksiran lokal’ atau kombinasi keduanya.

## 2.2 Pengendali Fuzzy

Perancangan pengendali fuzzy pada umumnya berdasarkan konsep *parallel distributed compensation* (PDC), yaitu sebuah prosedur perancangan berbasis model yang diusulkan oleh Kang dan Sugeno.

Gagasan PDC adalah mengasosiasikan kompensator untuk tiap-tiap aturan dari model fuzzy itu yang digunakan untuk mendisain pengendali fuzzy [2].

Aturan yang berlaku pada model fuzzy juga berlaku pada pengendali fuzzy, jika terdapat aturan 1 dan aturan 2 pada model fuzzy, maka terdapat juga aturan pengendali 1 dan aturan pengendali 2 pada disain pengendali.

Dari persamaan model fuzzy (2.1) berlaku:

Aturan pengendali ke- $i$ :

$$\begin{aligned} & \text{IF } \zeta_1(t) \text{ adalah } M_{i1} \text{ dan } \dots \zeta_p(t) \text{ adalah } M_{ip}, \\ & \text{THEN } u(t) = -F_i x(t), \quad i=1,2,\dots,r \end{aligned} \quad (2.6)$$

Keseluruhan pengendali fuzzy diberikan oleh:

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t))} = -\sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) F_i x(t) \quad (2.7)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.7) ke persamaan (2.2) untuk sistem kontinu, diperoleh persamaan untuk sistem lup tertutup yakni:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\zeta(t)) h_j(\zeta(t)) (A_i - B_i F_j) x(t) \quad (2.8)$$

Pengendali fuzzy didisain untuk menentukan *feedback gain*  $F_i$ , pada bagian-bagian konsekuennya. Dengan PDC, prosedurnya menjadi lebih sederhana dan natural. Pada teknik pengendali nonlinear lainnya diperlukan adanya pengetahuan yang khusus dan mendalam.

Untuk sistem *closed-loop*, dengan mendefinisikan matriks  $G_{ii} = A_i - B_i F_i$  dan matriks  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ , persamaan (2.8) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_i h_i(\zeta(t)) h_i(\zeta(t)) G_{ii} x(t) \\ & + 2 \sum_i \sum_{i < j} h_i(\zeta(t)) h_j(\zeta(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 2.3 Analisa Kestabilan Sistem Fuzzy

Dalam hal analisa kestabilan sistem fuzzy, beberapa teorema yang dikemukakan K. Tanaka dan Sugeno [2] memberikan kondisi yang cukup untuk menjamin kestabilan, dinyatakan dalam teorema berikut:

**Teorema 1.** *Kesetimbangan sistem fuzzy kontinu (2.2) dengan  $u(t) = 0$  adalah stabil asimptotik global jika terdapat matrik definit positif sedemikian sehingga*

$$A_i^T P + PA_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.10)$$

*terdapat matriks  $P$  untuk setiap subsistem.*

Yang dimaksud dengan subsistem adalah setiap persamaan linear yang diwakili oleh  $A_i x(t) + B_i u(t)$ . Teorema 1 di atas adalah untuk kestabilan sistem *open loop*. Jika  $r = 1$ , maka teorema di atas tereduksi menjadi teorema kestabilan Lyapunov untuk sistem linear kontinu.

**Teorema 2.** *Kesetimbangan sistem fuzzy kontinu yang dinyatakan oleh persamaan (2.9) adalah stabil asimptotik global jika terdapat sebuah matriks bersama definit positif  $P$  sedemikian sehingga*

$$G_{ii}^T P + PG_{ii} < 0, \quad (2.11)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j \leq r \quad (2.12)$$

Untuk mencari matriks  $P$  yang memenuhi kondisi (2.10), (2.11) dan (2.12) cukup sulit dan dapat menghabiskan banyak waktu, terutama jika menggunakan metode *trial and error*. Metode penyelesaian yang lebih efisien adalah penyelesaian secara analitis numerik dengan menggunakan algoritma optimisasi LMI (*Linear Matrix Inequality*) [2,3,4].

Terlihat bahwa analisa kestabilan sistem kendali fuzzy adalah tentang mencari matriks  $P$  yang memenuhi persyaratan pada teorema-teorema di atas, yang akan menjadi semakin sulit menemukannya jika  $r$  (jumlah aturan 'if-then') lebih besar. Hal ini bisa diatasi dengan menerapkan kondisi kestabilan baru yakni kondisi *relaxed stability* [2,9].

**Teorema 3.** Dengan mengasumsikan bahwa jumlah aturan yang berlaku sepanjang waktu  $t$  adalah kurang atau sama dengan  $s$ , dimana  $1 < s \leq r$ . Kesetimbangan sistem fuzzy kontinu yang dinyatakan oleh persamaan (2.9) adalah stabil asimptotik global jika terdapat sebuah matriks bersama definit positif  $P$  dan matriks bersama semidefinit positif  $Q$  sedemikian sehingga

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q < 0, \quad (2.13)$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - Q \leq 0, \quad i < j \leq r \quad (2.14)$$

#### 2.4 Linear Matrix Inequality

Salah satu metoda analisa optimisasi numerik yang cukup banyak mendapat perhatian dalam perancangan sistem kendali adalah teknik optimisasi yang disebut *linear matrix inequality*. Faktor yang membuat teknik optimisasi LMI menjadi menarik [3] adalah:

- (1) Berbagai macam spesifikasi rancangan dan batasan-batasan (*constraints*) dapat dinyatakan dalam LMI,
- (2) Masalah yang diformulasikan ke dalam LMI dapat diselesaikan secara tepat dan efisien dengan algoritma optimisasi *convex* ('LMI solvers'),
- (3) Pada saat terjadi kekurangan solusi analitis dalam persamaan matriks, terutama untuk persoalan *multiple constraints*, maka dalam kerangka LMI hal ini biasanya mudah ditangani. Ini menyebabkan disain berbasis LMI menjadi alternatif yang lebih baik jika dibandingkan dengan metode analitis klasik.

LMI didefinisikan sebagai pertidaksamaan matriks yang dinyatakan dalam bentuk [4]:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (2.15)$$

dimana  $x \in R^m$  adalah variabel dan  $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$  adalah matriks simetris yang diberikan. Simbol pertidaksamaan pada (2.15) berarti bahwa  $F(x)$

adalah definit positif, yakni  $u^T F(x)u > 0$  untuk setiap  $u \in R^n$ , dan *leading principal minors* dari matriks  $F(x)$  harus positif.

Bentuk LMI pada (2.15) adalah *convex constraint* (batasan *convex*) pada  $x$ , yakni, himpunan  $\{x \mid F(x) > 0\}$  adalah *convex*. Secara khusus, pertidaksamaan linear, pertidaksamaan kuadratik (*convex*), pertidaksamaan *norm* matriks, dan *constraints* yang muncul dalam teori kendali, seperti Lyapunov, pertidaksamaan matriks kuadratik *convex*, dapat dinyatakan dalam bentuk LMI. Bentuk majemuk LMI:  $F_1(x) > 0, \dots, F_p(x) > 0$ , dapat dinyatakan dalam bentuk tunggal LMI, yaitu: **diag**( $F_1(x) > 0, \dots, F_p(x) > 0$ ).

Banyak persyaratan dalam perancangan dan pemasalahan kendali dapat dinyatakan dalam formulasi LMI. Khususnya berlaku untuk disain dan analisa berbasis metoda Lyapunov, dan juga kendali optimal LQG (*linear quadratic Gaussian*), kendali  $H_\infty$ , kendali *covariance* dan sebagainya. Aplikasi LMI lebih lanjut diterapkan dalam estimasi, identifikasi, disain optimal, dan seterusnya. Kekuatan utama formulasi LMI adalah kemampuannya untuk mengkombinasikan berbagai batasan dalam perancangan ataupun sasaran kendali dalam cara yang mudah dikerjakan secara numerik.

Sering dijumpai permasalahan dimana variabelnya dalam bentuk matriks, seperti pada pertidaksamaan Lyapunov

$$A^T P + P A < 0, \quad (2.16)$$

dimana  $A \in R^{n \times n}$  ditentukan, dan  $P = P^T$  adalah variabel. Pada kasus seperti ini, formulasi LMI tidak perlu dituliskan dalam bentuk (2.15), tetapi yang perlu diperjelas adalah yang mana matriks variabel. Pernyataan ‘LMI  $A^T P + P A < 0$  dalam  $P$ ’ berarti bahwa matriks  $P$  adalah variabel. Memformulasikan LMI dalam bentuk singkat seperti pada (2.16), selain menghemat penulisan, juga berpengaruh pada efisiensi perhitungan.

## 2.5 Model Kinematik Mobil Robot Tipe Truk-Trailer

Sistem robotik dapat dianalisa dalam dua domain kajian, yaitu analisa kinematik dan dinamik. Analisa kinematik berhubungan dengan gerakan robot

tanpa memperhitungkan adanya gaya-gaya yang mempengaruhi gerakan robot tersebut. Sementara analisa dinamik berkaitan dengan efek inersia atau kelembaman dan gaya-gaya yang mempengaruhi pergerakan robot. Model dinamik memberikan gambaran yang lebih akurat dari sistem yang sebenarnya namun melibatkan persamaan-persamaan yang lebih rumit dan sering kali melibatkan parameter yang sulit untuk diukur. Pendekatan yang lebih sederhana digunakan dalam model kinematik dengan mengabaikan komponen-komponen dinamis, sehingga diperoleh model yang lebih sederhana. Dalam hal ini, model kinematik kurang akurat untuk menggambarkan sistem yang sebenarnya jika dibandingkan dengan model dinamik. Kepresisian gerak tidak menjadi fokus utama dari model kinematik, yang penting robot dapat dikontrol (*controllable*) selama dan sepanjang referensi trayektori yang diberikan.

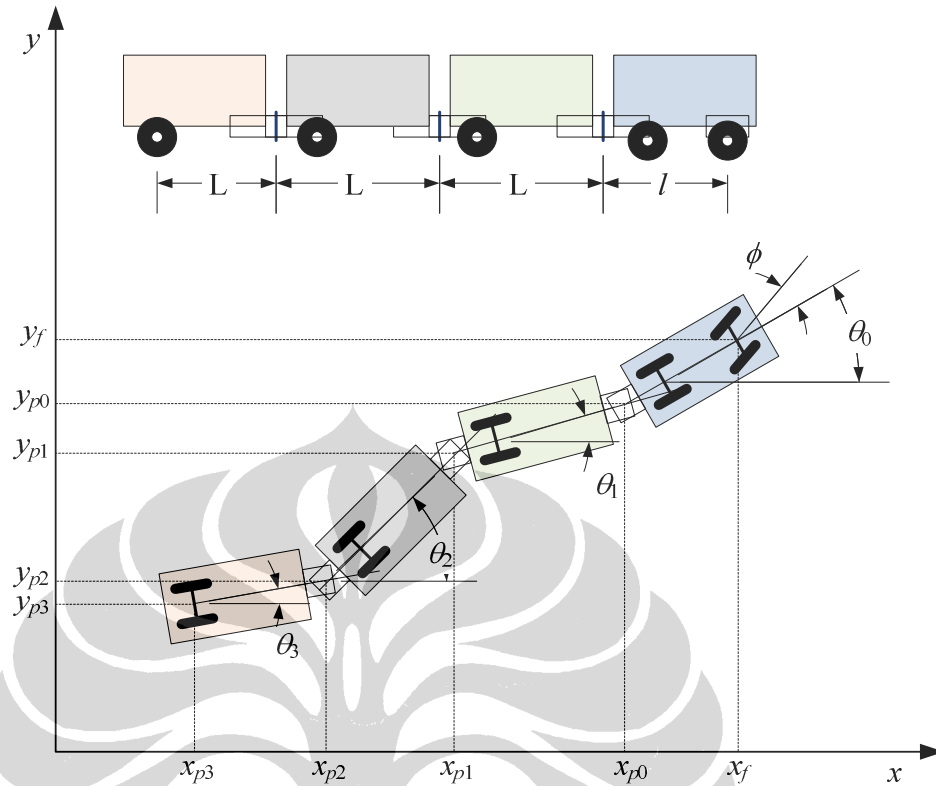
Berdasarkan tipe pergerakannya, model kinematik robot dapat dibedakan dalam dua model pergerakan [1], yaitu :

- *holonomic* : gerakan robot ke segala arah tidak dibatasi oleh arah hadapnya. Artinya, dengan mengabaikan batasan dari obyek eksternal, robot dapat bergerak dari satu titik koordinat ke koordinat lainnya secara langsung.
- *nonholonomic*, gerakan robot harus memenuhi fungsi geometri tertentu yang berhubungan dengan arah hadap (arah kecepatan) untuk mendapatkan gerak yang sesuai.

Sistem dikatakan terbatas secara *nonholonomic* jika sistem mempunyai pembatasan dalam kecepatannya tetapi pembatasan itu tidak menyebabkan pembatasan dalam posisinya. Contoh yang paling nyata adalah manuver untuk parkir paralel. Untuk dapat parkir secara paralel, pengemudi mobil tidak dapat begitu saja melajukan kendaraannya ke lokasi parkir. Mobil tidak dapat bergerak menyamping, ini adalah pembatasan dalam arah kecepatan. Untuk mencapai posisi parkir, memerlukan gerakan maju, mundur dan sedikit memutar dari mobil.

Penerapan batasan-batasan sistem *nonholonomic* (*nonholonomic constraints*) dapat dilakukan pada penurunan model kinematik sistem truk dengan tiga trailer [10]. Arah kecepatan yang tegak lurus roda sama dengan nol, sehingga tidak terjadi slip (*no-slippage constraint*).





Gambar 2.2 Sistem robot bergerak tipe truk dengan 3 trailer

Posisi dan orientasi dari masing-masing truk dan trailer pada sistem koordinat diperlihatkan pada gambar 2.2 di atas, dimana  $x_f$  dan  $y_f$  berturut-turut menunjukkan koordinat posisi titik tengah poros roda kemudi.

Dengan menerapkan *no-slippage constraint*, kecepatan truk dalam arah sumbu- $x$  dan sumbu- $y$ :

$$\dot{x}_{p0} = v \cos \theta_0 \quad \dot{y}_{p0} = v \sin \theta_0 \quad (2.16)$$

Hal yang sama untuk roda kemudi (*steering wheel*) dan roda lainnya berlaku :

$$\dot{x}_f \sin(\theta_0 + \phi) - \dot{y}_f \cos(\theta_0 + \phi) = 0 \quad (2.17)$$

$$\dot{x}_{p_i} \sin \theta_i - \dot{y}_{p_i} \cos \theta_i = 0 \quad i = 0,1,2,3 \quad (2.18)$$

Koordinat posisi dari roda kemudi dan roda lainnya diberikan oleh:

$$x_f = x_{p0} + l \cos \theta \quad y_f = y_{p0} + l \sin \theta \quad (2.19)$$

$$x_{pi} = x_{p0} - \sum_{j=1}^i L \cos \theta_j \quad y_{pi} = y_{p0} - \sum_{j=1}^i L \sin \theta_j \quad i = 1,2,3 \quad (2.20)$$

dimana  $x_{p0}$  dan  $y = y_{p0}$  adalah posisi titik poros sambungan truk – trailer ke-1,  $\phi$  adalah sudut kemudi truk,  $\theta_0$  adalah sudut truk terhadap sumbu- $x$ ,  $\theta_i$  adalah sudut trailer ke- $i$  terhadap sumbu- $x$ ,  $l$  adalah panjang panjang truk, dan  $L$  adalah panjang trailer.

Dengan memasukkan (2.18) ke dalam (2.16) dan (2.19) ke dalam (2.17), maka persamaan *constraints* menjadi:

$$\dot{x}_{p0} \sin(\theta_0 + \phi) - \dot{y}_{p0} \cos(\theta_0 + \phi) - \dot{\theta}_0 l \cos \phi = 0 \quad (2.21)$$

$$\dot{x}_{p0} \sin \theta_i - \dot{y}_{p0} \cos \theta_i + \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j L \cos(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad i = 1,2,3 \quad (2.22)$$

Model kinematik diperoleh dari (2.16) dan dari penyelesaian (2.21) dan (2.22) untuk masing-masing  $\dot{x}_{p0}$ ,  $\dot{y}_{p0}$ , dan  $\dot{\theta}_i$ .

Keseluruhan model kinematik adalah:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{p0} &= v \cos \theta_0 \\ \dot{y}_{p0} &= v \sin \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 &= \frac{\tan \phi}{l} v \\ \dot{\theta}_1 &= \frac{1}{L} \sin(\theta_0 - \theta_1) v \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{1}{L} \cos(\theta_0 - \theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_2) v \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{1}{L} \cos(\theta_0 - \theta_1) \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_3) v \end{aligned} \quad (2.23)$$

## 2.6 Pemodelan Fuzzy Sistem Truk-Trailer

Sesuai metodologi perancangan model fuzzy T-S yang disebutkan pada sub bab 2.1, digunakan pendekatan penurunan model dari persamaan nonlinear sistem, dalam hal ini adalah model kinematik truk-trailer.

### 2.6.1 Penurunan Model Linear Fuzzy Takagi - Sugeno

Model kinematik (2.23) dapat dinyatakan dalam bentuk model ruang keadaan (model *state space*) dengan mendefinisikan variabel-variabel keadaan dan variabel-variabel input sesuai tabel 2.1, sehingga diperoleh persamaan nonlinear ruang keadaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{u_1}{l} \tan u_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{u_1}{l} \tan u_2 - \frac{u_1}{L} \sin x_2 \\
 \dot{x}_3 &= \frac{u_1}{L} \sin x_2 - \frac{u_1}{L} \sin x_3 \cos x_2 \\
 \dot{x}_4 &= \frac{u_1}{L} \sin x_3 \cos x_2 - \frac{u_1}{L} \sin x_4 \cos x_3 \cos x_2 \\
 \dot{x}_5 &= u_1 \cos x_1 \\
 \dot{x}_6 &= u_1 \sin x_1
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Untuk memudahkan dalam disain kendali, dapat dilakukan penyederhanaan pada (2.24) dengan mengasumsikan bahwa besaran  $u_2$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , dan  $x_4$  adalah relatif kecil (pendekatan penaksiran lokal) sehingga berlaku

$$\lim_{u_2 \rightarrow 0} \tan u_2 = u_2 ; \quad \lim_{x_i \rightarrow 0} \sin x_i = x_i ; \quad \text{dan} \quad \lim_{x_i \rightarrow 0} \cos x_i = 1 \quad \text{untuk} \quad i = 2,3,4$$

Tabel.2.1 Representasi variabel keadaan dan variabel input

Variabel	Representasi	Keterangan
$x_1$	$\theta_0$	Sudut truk terhadap sumbu- $x$
$x_2$	$\theta_0 - \theta_1$	Sudut relatif antara truk dan trailer pertama
$x_3$	$\theta_1 - \theta_2$	Sudut relatif antara trailer pertama dan kedua
$x_4$	$\theta_2 - \theta_3$	Sudut relatif antara trailer kedua dan ketiga
$x_5$	$x_{p0}$	Koordinat- $x$ poros sambungan truk dan trailer pertama
$x_6$	$y_{p0}$	Koordinat- $y$ poros sambungan truk dan trailer pertama
$u_1$	$v$	Input kecepatan linear truk
$u_2$	$\Phi$	Input sudut kemudi truk

Dengan penyederhanaan, empat baris pertama dari persamaan nonlinear (2.24) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{u_1}{l} u_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{u_1}{l} u_2 - \frac{u_1}{L} x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{u_1}{L} x_2 - \frac{u_1}{L} x_3 \\ \dot{x}_4 &= \frac{u_1}{L} x_3 - \frac{u_1}{L} x_4\end{aligned}\tag{2.25}$$

Titik kesetimbangan dari sistem dapat berada pada  $x_2^0 = 0$ ,  $x_3^0 = 0$ ,  $x_4^0 = 0$ ,  $u_1^0 = v_0$ , dan  $u_2^0 = 0$ , dimana  $v_0$  merupakan konstanta yang berubah-ubah (*arbitrary constant*). Linearisasi persamaan (2.25) disekitar titik kesetimbangan menghasilkan:

$$\dot{x}_1 = \frac{v_0}{l} u_2\tag{2.26}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{v_0}{L} x_2 + \frac{v_0}{l} u_2\tag{2.27}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{v_0}{L} x_2 - \frac{v_0}{L} x_3\tag{2.28}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{v_0}{L} x_3 - \frac{v_0}{L} x_4\tag{2.29}$$

Besar  $x_1$  pada dua baris terakhir dari persamaan (2.24) berada pada daerah nonlinear  $-90^\circ \leq x_1 \leq 90^\circ$ . Salah satu hal yang harus diperhatikan pada sistem truk-trailer adalah fenomena *jack-knife*, yang terjadi saat sudut antara truk dan trailer atau antara trailer yang berdekatan saling tegak lurus. Dalam hal ini, *jack-knife* terjadi jika  $|x_2| = |x_3| = |x_4| = 90^\circ$  yang menyebabkan sistem menjadi tidak terkendali (*uncontrollable*). Untuk menjaga agar model sistem tetap dapat dikendalikan, maka diasumsikan  $x_1 \in [-88^\circ, 88^\circ]$ .

Dengan pendekatan nonlinearitas sektor yakni membatasi fungsi  $f(x_1)$  dalam daerah  $-90^\circ < x_1 < 90^\circ$ , maka dua baris terakhir persamaan nonlinear (2.24),

yaitu  $\dot{x}_5 = u_1 \cos x_1$  dan  $\dot{x}_6 = u_1 \sin x_1$ , masing-masing dapat dinyatakan dalam bentuk model fuzzy T-S sebagai berikut:

- untuk  $\dot{x}_5 = u_1 \cos x_1$

$$u_1 \cos x_1 = u_1 \sum_{i=1}^2 m_i(x_1) q_i = u_1 m_1(x_1) q_1 + u_1 m_2(x_1) q_2 \quad (2.30)$$

dimana

$$q_1 = \max_{x_1} (\cos x_1) = 1 \quad \text{dan} \quad q_2 = \min_{x_1} (\cos x_1) = \cos(88^\circ)$$

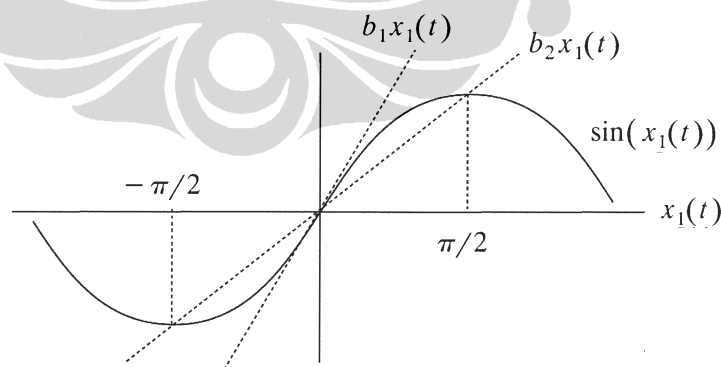
Fungsi keanggotaan  $m_1(x_1)$  dan  $m_2(x_1)$  ditentukan dari sifat  $m_1(x_1) + m_2(x_1) = 1$ , sehingga diperoleh:

$$m_1(x_1) = \frac{\cos x_1 - q_2}{q_1 - q_2} \quad (2.31)$$

$$m_2(x_1) = \frac{q_1 - \cos x_1}{q_1 - q_2} \quad (2.32)$$

- untuk  $\dot{x}_6 = u_1 \sin x_1$

Persamaan  $f(x) = u_1 \sin x_1$  dan daerah batasannya, dimana  $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ , ditunjukkan pada gambar 2.3.



Gambar 2.3 Grafik  $\sin x_1$  dan daerah batasannya

Dari gambar di atas, terlihat grafik sinus dengan amplitudu  $u_1$  yang dibatasi untuk area  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Area tersebut terdiri atas dua garis  $b_1 x_1$  dan  $b_2 x_2$ , dimana

kemiringan masing-masing adalah  $b_1 = 1$  dan  $b_2 = 2/\pi$ . Besar amplitudo  $u_1$  menyatakan besar kecepatan linear dari truk-trailer, dan dalam hal ini nilainya ditentukan sama dengan nilai kecepatan awal  $v_0$ .

Dengan demikian dapat dituliskan:

$$u_1 \sin x_1 = v_0 \left( \sum_{i=1}^2 n_i(x_1) b_i \right) x_1 \quad (2.33)$$

Dari sifat fungsi keanggotaan [ $n_1(x_1) + n_2(x_1) = 1$ ], maka dapat ditentukan fungsi keanggotaan untuk  $n_1(x_1)$  dan  $n_2(x_1)$  berturut-turut adalah :

$$n_1(x_1) = \begin{cases} \frac{\sin(x_1) - b_2 x_1}{(1 - b_2)x_1} & x_1 \neq 0 \\ 1 & x_1 = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

$$n_2(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1 - \sin x_1}{(1 - b_2)x_1} & x_1 \neq 0 \\ 0 & x_1 = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Pada saat  $x_1$  sekitar  $0^0$ , maka  $m_1(x_1) = 1$ ,  $m_2(x_1) = 0$ ,  $n_1(x_1) = 1$  dan  $n_2(x_1) = 0$ , diperoleh:

$$\dot{x}_5 = u_1 \quad (2.36)$$

$$\dot{x}_6 = v_0 x_1 \quad (2.37)$$

Maka, dengan menggabungkan persamaan (2.26) – (2.29), (2.36) dan (2.37), model nonlinear truk-trailer dari persamaan (2.12) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_0/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0/L & -v_0/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0/L & -v_0/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & v_0/l \\ 0 & v_0/l \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Dengan cara yang sama, pada saat  $x_1$  sekitar  $90^\circ$  atau  $-90^\circ$  ( $\pm\pi/2$  rad), maka  $m_1(x_1) = 0$ ,  $m_2(x_1) = 1$ ,  $n_1(x_1) = 0$  dan  $n_2(x_1) = 1$ , sehingga diperoleh:

$$\dot{x}_5 = \beta u_1 \quad (2.39)$$

$$\dot{x}_6 = v_0 \alpha x_1 \quad (2.40)$$

dimana  $\beta = q_2 = \cos 88^\circ$  dan  $\alpha = b_2 = 2/\pi$ . Model nonlinear truk-trailer dapat dinyatakan menjadi:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_0/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0/L & -v_0/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0/L & -v_0/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & v_0/l \\ 0 & v_0/l \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Dari persamaan (2.38) dan (2.41), dan jika  $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$ ,  $U = [u_1 \ u_2]^T$  maka dapat dirumuskan persamaan model T-S berikut:

*Aturan 1*

IF  $x_1$  mendekati 0 rad,

THEN  $\dot{X} = A_1 X + B_1 U$

*Aturan 2*

IF  $x_1$  mendekati  $\pi/2$  rad atau  $-\pi/2$  rad,

THEN  $\dot{X} = A_2 X + B_2 U$

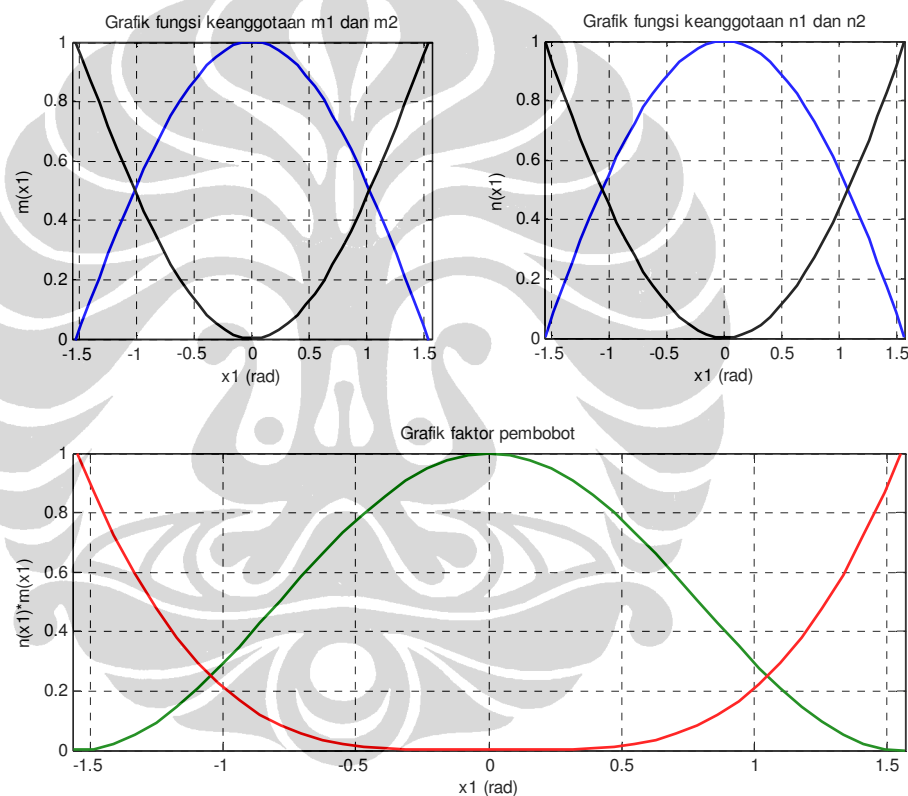
Fungsi keanggotaan untuk masing-masing aturan adalah  $n_1(x_1)$  dan  $n_2(x_1)$  untuk aturan 1, dan  $m_1(x_1)$  dan  $m_2(x_1)$  untuk aturan 2.

Faktor pembobot untuk masing-masing aturan adalah :

$$w_1(x_1) = m_1(x_1) \cdot n_1(x_1) \quad (2.42)$$

$$w_2(x_1) = m_2(x_1) \cdot n_2(x_1) \quad (2.43)$$

Kurva fungsi keanggotaan untuk masing-masing  $n(x_1)$  dan  $m(x_1)$ , dan kurva faktor pembobot untuk masing-masing aturan terlihat pada gambar 2.4. Dalam hal ini  $x_1$  dibatasi untuk area  $-\pi/2$  s/d  $\pi/2$ .



Gambar 2.4 Fungsi keanggotaan

Keseluruhan model fuzzy dapat dituliskan sebagai:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) \{A_i x + B_i u\} \quad (2.44)$$

dimana,



$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) = 1 \\ h_i(x_1) = \frac{w_i(x_1)}{\sum_{i=1}^2 w_i(x_1)} \quad i=1,2 \end{cases}$$

Dalam perancangan model fuzzy sistem truk dengan tiga trailer digunakan parameter-parameter seperti pada tabel berikut:

Tabel 2.2 Parameter-parameter dalam pemodelan sistem truk-trailer

Parameter	Nilai	Keterangan
$v_0$	0.5 m/s	Kecepatan
$l$	30 cm	Panjang truk
$L$	15 cm	Panjang trailer
$\beta$	$\cos 88^\circ$	$\pm 88^\circ$ : asumsi batas kestabilan
$\alpha$	$2/\pi$	Gradien pada kurva sinus untuk titik $\pm \pi/2$

Dengan menggunakan parameter-parameter di atas pada (2.38) dan (2.41), diperoleh matriks variabel keadaan  $A_1$  dan  $A_2$  serta variabel input  $B_1$  dan  $B_2$  adalah sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.84 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & -0.84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 & -0.84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.42 \\ 0 & 0.42 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.84 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & -0.84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 & -0.84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.198 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.42 \\ 0 & 0.42 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.035 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.6.2 Uji Controllability

Pengujian *controllability* dimaksudkan untuk mengetahui apakah model yang mewakili sistem dapat dikendalikan atau dengan kata lain penerapan suatu pengendali dapat diterapkan pada model yang telah dibuat.

Untuk mengetahui *controllability* dari masing-masing model dibuat matriks *controllability*, yakni:

$$Q_C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.45)$$

Matriks  $A$  dan  $B$  masing-masing adalah matriks keadaan dan matriks input, dan  $n$  adalah jumlah variabel keadaan. Untuk model fuzzy yang telah dibuat maka matriks  $Q_C$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$Q_{C1} = [B_1 \ A_1B_1 \ A_1^2B_1 \ A_1^3B_1 \ A_1^4B_1 \ A_1^5B_1]$$

$$Q_{C2} = [B_2 \ A_2B_2 \ A_2^2B_2 \ A_2^3B_2 \ A_2^4B_2 \ A_2^5B_2]$$

Model sistem dikatakan *controllable* jika matriks *controllability*-nya memiliki *rank* yang sama dengan *rank* matriks keadaan atau sama dengan jumlah variabel keadaan. Dalam hal ini *rank* masing-masing matriks  $Q_{C1}$  dan  $Q_{C2}$  adalah 6, sama dengan *full rank* dari matriks  $A_1$  atau  $A_2$  atau sama dengan jumlah variabel keadaan. Maka model fuzzy yang dibuat adalah *controllable* sempurna.

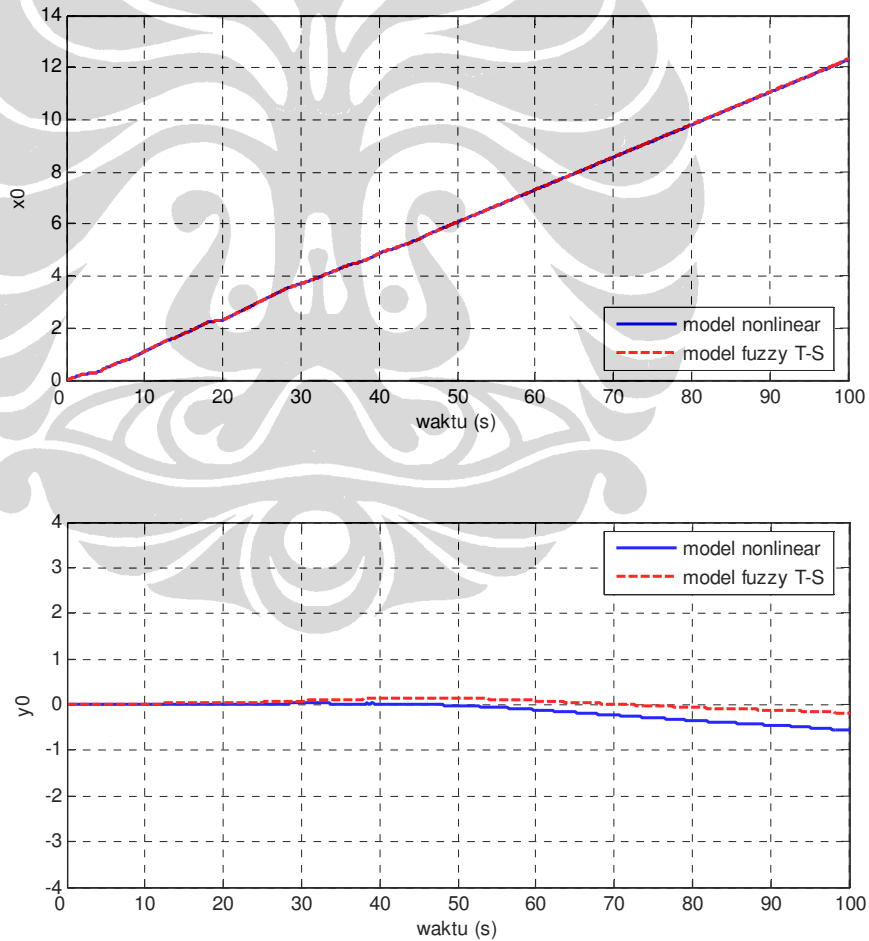
Jika nilai  $\alpha$  dan atau  $\beta$  pada persamaan (2.41) adalah sama dengan nol, maka *rank* dari matriks *controllability* yang terbentuk adalah 5, sehingga model yang terbentuk tidak dapat dikontrol secara sempurna.

### 2.6.3 Validasi Model

Validasi model adalah proses untuk menentukan apakah model yang diperoleh dapat merefleksikan sistem nyata dengan tepat. Performa model fuzzy Takagi-sugeno dapat dilihat dengan membandingkan sinyal keluaran model fuzzy dengan sinyal keluaran sistem non-linear. Sebagai ukuran kinerja, digunakan persamaan *Variance Accounted For (VAF)*

$$VAF = 100\% \times \left( 1 - \frac{\text{var}(y - \hat{y})}{\text{var}(y)} \right) \quad (2.46)$$

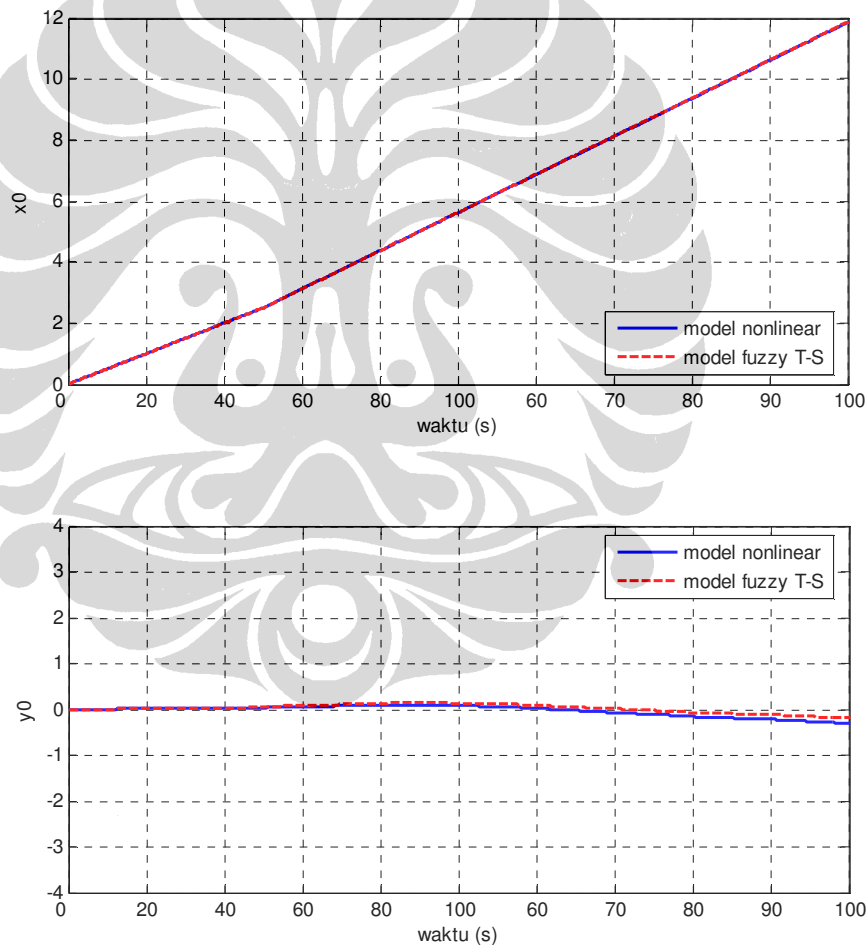
dimana  $y$  merupakan keluaran sistem non linear dan  $\hat{y}$  merupakan keluaran model fuzzy [11]. *VAF* dari dua sinyal identik adalah 100%. Semakin berbeda kedua sinyal, nilai *VAF* akan semakin kecil.



Gambar 2.5 Perbandingan keluaran ( $x_0$  dan  $y_0$ ) untuk input  $u_1$  dan  $u_2$  berupa nilai acak

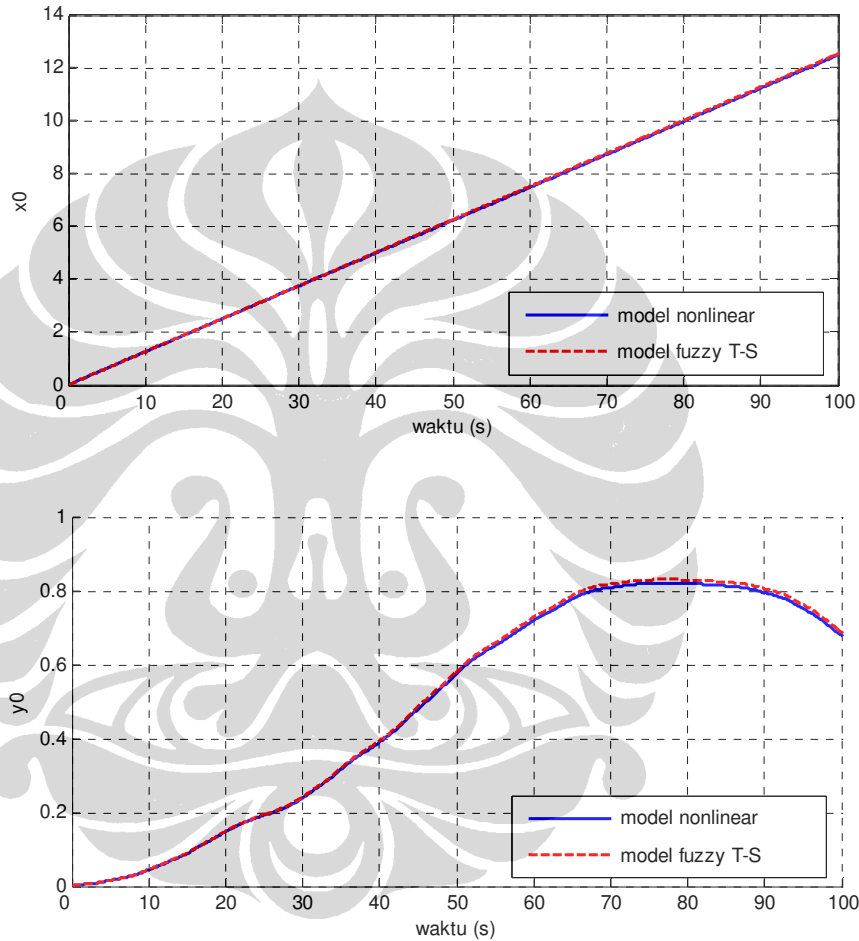
Pengujian validasi model linier fuzzy untuk sistem truk trailer dilakukan dengan memberikan masukan yang sama untuk masing-masing model linear dan model non linear, dan memperbandingkan respon keluarannya terhadap masukan tersebut. Dalam hal ini pengujian dilakukan dengan memberikan masukan yang bervariasi, yakni masukan kecepatan ( $u_1$ ) berupa nilai acak, fungsi *step*, dan konstanta, sedang masukan kecepatan berupa fungsi *random*.

Pemberian masukan berupa nilai acak untuk kecepatan linear dan fungsi random untuk sudut kemudi menghasilkan keluaran  $x_0$  dan  $y_0$  seperti pada gambar 2.5 di atas. Nilai *VAF* untuk masing-masing keluaran  $x_0$  dan  $y_0$  dari model fuzzy terhadap model nonlinear adalah 99.99% dan 59.09%.



Gambar 2.6 Perbandingan keluaran ( $x_0$  dan  $y_0$ ) untuk input  $u_1$  berupa fungsi *step* dan  $u_2$  berupa fungsi *random*

Untuk masukan berupa fungsi *step* (kecepatan) dan fungsi *random* (sudut kemudi) memberikan hasil seperti terlihat pada gambar 2.6. Terlihat bahwa terjadi peningkatan kesesuaian antara keluaran  $y_0$  dari model fuzzy terhadap model nonlinear. Diperoleh nilai *VAF* untuk masing-masing keluaran  $x_0$  dan  $y_0$  dari model fuzzy terhadap model nonlinear adalah 99.99% dan 89.72%.



Gambar 2.7 Perbandingan keluaran ( $x_0$  dan  $y_0$ ) untuk input  $u_1$  berupa konstanta dan  $u_2$  berupa fungsi *random*

Masukan berupa konstanta untuk kecepatan dan fungsi *square* untuk sudut kemudi memberikan peningkatan kesesuaian keluaran model fuzzy terhadap model nonlinear, seperti terlihat pada gambar 2.7, khususnya untuk keluaran  $y_0$ . Perbandingan keluaran kedua model tersebut memberikan nilai *VAF* untuk  $x_0$  dan  $y_0$  asimng-masing adalah 99.94% dan 99.25%.

Tabel berikut memperlihatkan keseluruhan nilai  $VAF$  untuk beberapa perubahan data masukan, pada masing-masing output variabel keadaan, yaitu posisi truk ( $x_0$  dan  $y_0$ ) serta sudut dan selisih sudut trailer ( $\theta_0, \theta_0 - \theta_1, \theta_1 - \theta_2$ , dan  $\theta_2 - \theta_3$ ).

Tabel.2.3  $VAF$  model fuzzy T-S untuk beberapa data masukan

$VAF$ (%) Keluaran	[1]	[2]	[3]	Keterangan
$x_0$	99.9995	99.9998	99.9368	[1]: masukan $v_0$ , nilai acak [2]: masukan $v_0$ , fungsi <i>random</i> [3]: masukan $v_0$ , fungsi <i>step</i> masukan $\Phi$ , fungsi <i>random</i> .
$y_0$	59.0862	89.7238	99.2507	
$\theta_0$	93.2541	99.0981	96.3045	
$\theta_0 - \theta_1$	95.8608	99.3002	97.5336	
$\theta_1 - \theta_2$	88.6999	98.1056	97.3713	
$\theta_2 - \theta_3$	86.2016	96.4126	97.5107	

Berdasarkan nilai  $VAF$  untuk beberapa perubahan data masukan, model linear fuzzy T-S yang diperoleh menunjukkan kinerja yang sangat baik khususnya pada daerah dimana masukan kecepatan cenderung konstan.