

BAB 2 DASAR TEORI

2.1 TEORI DINAMIKA STRUKTUR

2.1.1 Teori Analisa Modal Untuk Sistem MDOF^{[1],[2]}

Analisa modal adalah suatu proses yang ditujukan untuk menentukan karakteristik-karakteristik dinamik dari suatu sistem struktur. Dimana karakteristik-karakteristik tersebut adalah :

- Frekuensi natural
- Moda getar, dan
- Rasio redam

Ketiga karakteristik dinamik ini didefinisikan oleh properti fisik serta distribusi spasial daripada komponen penyusun sistem struktur.

Selain menentukannya, analisa modal juga mencakup penggunaan karakteristik-karakteristik tersebut untuk memformulasikan suatu model matematis dari perilaku dinamik suatu sistem struktur yang kita tinjau.

➤ Frekuensi-frekuensi natural dan Moda-moda getar

Untuk sistem SDOF, yang dimaksud dengan frekuensi natural adalah frekuensi dimana suatu sistem struktur yang memiliki massa dan kekakuan bergerak ketika diberikan suatu eksitasi awal kemudian eksitasi tersebut dihilangkan sehingga struktur tersebut bergetar secara bebas. Lalu bentuk dari perpindahan dari struktur tersebut bergetar ketika bergetar disebut dengan moda getar. Frekuensi getar dipengaruhi oleh properti fisik dari struktur, yaitu massa dan kekakuan ($\omega_{n-sdof}=(k/m)^{1/2}$).

Ketika sistem struktur menjadi lebih kompleks dengan penambahan derajat kebebasan, frekuensi natural dan moda getar tetap dipakai dalam analisa dinamik yang mana jumlah frekuensi natural dan moda getar sejumlah dengan banyaknya derajat kebebasan (DOF) yang ada.

Untuk sistem MDOF, frekuensi natural dan moda getar diketahui dengan penggunaan persamaan karakteristik (*eigenvalue equation*). Dalam dinamika

struktur, akar dari nilai eigen dikenal dengan frekuensi natural (ω_n) dan vektor eigen dikenal dengan moda getar (ϕ_n). Dimana tiap moda memiliki satu eigen value dan satu vektor eigen. Dan layaknya SDOF, pada sistem MDOF komposisi massa dan kekakuan menentukan nilai frekuensi natural dan moda getar suatu sistem struktur.

➤ Rasio redam

Yang dimaksud dengan redaman adalah proses dimana terjadinya pengurangan amplitudo dari suatu getaran akibat terdisipasinya energi akibat gesekan dan hal lainnya.

Untuk kasus dimana terdapat redaman, persamaan gerak untuk sistem MDOF dengan kondisi getaran bebas adalah :

$$m\ddot{\mathbf{u}} + c\dot{\mathbf{u}} + k\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.1.1)$$

Dimana c adalah konstanta redaman yang merupakan energi yang terdisipasi pada suatu siklus getaran bebas ataupun getaran paksa yang harmonik. Kemudian yang dimaksud dengan rasio redaman (ζ) adalah suatu nilai tidak berdimensi yang bergantung pada properti fisik suatu sistem struktur (massa dan kekakuan), yaitu perbandingan antara konstanta redaman dengan konstanta redaman kritis ($\zeta=c/2m\omega$).

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^N \varphi_r q_r(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (2.1.2)$$

Memasukkan pers. (2.1.2) ke pers. (2.1.1), maka :

$$m\Phi\ddot{\mathbf{q}} + c\Phi\dot{\mathbf{q}} + k\Phi\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.1.3)$$

Dengan mengalikan Φ^T pada bagian kiri dari tiap penyusun pers. (2.1.3), maka :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.1.4)$$

dimana :

$$\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi \quad (2.1.5)$$

$$\mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi \quad (2.1.7)$$

\mathbf{C} adalah matriks redaman $n \times n$, yang mana dapat tidak berbentuk diagonal seperti halnya matriks massa dan matriks kekakuan sesuai dengan distribusi redaman pada sistem struktur. Jika \mathbf{C} diagonal, maka sistem disebut dengan redaman klasik. Apabila sebaliknya, maka disebut redaman non-klasik, dimana analisa modal klasik tidak dapat digunakan dan sistem tidak memiliki nilai frekuensi natural dan mode getar yang sama dengan sistem tanpa redaman.

Untuk tipe redaman klasik, resio redaman mode n adalah :

$$\zeta_n = \frac{c_n}{2M_n \omega_n} \quad (2.18)$$

➤ Persamaan modal untuk sistem tanpa redaman

Persamaan gerak untuk sistem MDOF linier tanpa redaman dengan pembebanan dinamik adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad (2.1.9)$$

Persamaan gerak ini merupakan matriks persamaan, dimana persamaan pada suatu baris pada matriks persamaan berhubungan dengan satu atau lebih persamaan baris lainnya pada matriks persamaan tersebut (*coupled equation*). Matriks persamaan tipe ini akan menuntut banyak waktu dan proses dalam penyelesaian apabila DOF struktur yang kita tinjau cukup banyak. Dikarenakan semakin banyak jumlah DOF, semakin besar dimensi matriks persamaan yang terbentuk. Sehingga untuk mempermudah proses penyelesaian, akan lebih mudah apabila persamaan gerak diatas dimodifikasi sedemikian rupa sehingga menjadi *uncoupled equations*, yaitu dengan mentransformasikan persamaan-persamaan dalam matriks ke dalam koordinat modal.

Pada sistem MDOF vektor perpindahan dapat direpresentasikan sebagai ekspansi dari kontribusi modal-modal. Dimana jumlah modal dapat diambil

sebanyak N, sehingga bentuk vektor perpindahan suatu sistem struktur adalah seperti pers. (2.1.2).

Untuk merubah persamaan *coupled* menjadi *uncoupled*, langkah yang diambil adalah dengan memasukkan pers. (2.1.2) ke pers. (2.1.9) dan mengalikan φ_n^T pada awal setiap bagian penyusun pers. (2.1.9), maka akan didapatkan persamaan berikut:

$$\sum_{r=1}^N \varphi_n^T \mathbf{m} \varphi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \varphi_n^T \mathbf{k} \varphi_r q_r(t) = \varphi_n^T p(t) \quad (2.1.10)$$

Perubahan tipe persamaan *coupled* menjadi persamaan *uncoupled* dibantu oleh sifat ortogonalitas dari *eigenvector*. Dimana :

$$\varphi_n^T \mathbf{k} \varphi_r = 0 \text{ dan } \varphi_r^T \mathbf{m} \varphi_n = 0 \quad (2.1.11)$$

Sehingga pers. (2.1.10) menjadi :

$$(\varphi_n^T \mathbf{m} \varphi_n) \ddot{q}_n(t) + (\varphi_n^T \mathbf{k} \varphi_n) q_n(t) = \varphi_n^T p(t) \quad (2.1.12)$$

Atau :

$$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad (2.1.13)$$

Persamaan ini adalah suatu persamaan differensial orde dua yang menerangkan kontribusi modal ke-n. Dimana apabila kesemua modal yang diinginkan dibentuk menjadi suatu persamaan matriks besar, maka persamaannya adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t) \quad (2.1.14)$$

Persamaan matriks menjadi *uncoupled* karena matriks M dan K adalah matriks diagonal, dimana tiap modal-n dapat diselesaikan seperti permasalahan SDOF, dimana hanya $q_n(t)$ sebagai komponen yang tidak diketahui. Kemudian untuk mengetahui vektor perpindahan, setelah mengetahui nilai \mathbf{q} (vektor $q_n(t)$), kita kembali ke pers. (2.1.2).

➤ Persamaan modal untuk sistem dengan redaman

Dengan memasukkan faktor redaman pada pers. (2.1.9), maka persamaan gerak menjadi :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (2.1.15)$$

Metode yang digunakan dalam penurunan persamaan sama dengan bagian sebelumnya. Sehingga pada akhirnya akan didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$M_n \ddot{q}_n(t) + \sum_{r=1}^N C_{nr} \dot{q}_r(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad (2.1.16)$$

Dimana :

$$C_{nr} = \varphi_n^T c \varphi_r \quad (2.1.17)$$

Pers. (2.1.16) dalam bentuk matriksial :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t) \quad (2.1.18)$$

\mathbf{C} adalah matriks non-diagonal dari koefisien C_{nr} , sehingga nilai $q_n(t)$ masih *coupled*. Persamaan modal dapat bersifat *uncoupled* apabila sistem struktur memiliki tipe redaman klasik, dimana $C_{nr}=0$ apabila $n \neq r$. Sehingga pers. (2.1.16) menjadi :

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad (2.1.19)$$

Dengan membagi pers. (2.1.19) dengan M_n , maka :

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad (2.1.20)$$

Jumlah moda yang dibutuhkan dalam analisa

Setiap moda pada suatu analisa dinamik memiliki kontribusi. Dari berbagai literatur yang ada telah dijelaskan bahwa moda-moda awal relatif memiliki andil yang besar terhadap hasil analisa yang dilakukan (i.e. respon dinamik), namun tentunya moda-moda lainnya tidak dapat diabaikan, hal yang dapat kita lakukan adalah menentukan seberapa banyak jumlah moda yang akan kita ambil untuk dianalisa.

Sebelum membahas langsung ke jumlah moda yang dibutuhkan, kita kembali mengulang mengenai faktor kontribusi dari modal. Karena faktor kontribusi inilah yang akan menjadi dasar perhitungan jumlah moda yang dibutuhkan.

Anil K. Chopra telah membahas bahwa kontribusi dari suatu moda ke-n terhadap suatu respon r dapat diekspresikan sebagai berikut :

$$r_n(t) = r^{st} \bar{r}_n [\omega_n^2 D_n(t)] \quad (2.1.21)$$

Dimana $r_n(t)$ adalah respon dari mode ke-n, r^{st} respon statis dari r , $D_n = \frac{q_n(t)}{\Gamma_n}$, $\Gamma_n = \frac{\varphi_n^T s}{M_n}$, $s = \sum_{r=1}^N s_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r m \varphi_r$, s adalah distribusi spasial dari suatu respon atau eksitasi, Γ_n adalah faktor partisipasi modal, dan \bar{r}_n adalah faktor kontribusi moda yang direpresentasikan oleh persamaan berikut :

$$\bar{r}_n = \frac{r_n^{st}}{r^{st}} \quad (2.1.22)$$

r_n^{st} adalah respon statik dari moda ke-n.

Faktor kontribusi moda memiliki tiga properti yang penting. Pertama faktor ini tidak memiliki dimensi sehingga bersifat universal. Kedua faktor ini tidak bergantung terhadap bagaimana proses normalisasi moda-moda dan properti modal tidak masuk ke dalam r^{st} . Yang ketiga, jumlah dari keseluruhan faktor kontribusi moda adalah 1 :

$$\sum_{n=1}^N \bar{r}_n = 1 \quad (2.1.23)$$

Properti terakhir dari faktor kontribusi moda ini berpengaruh terhadap penentuan jumlah yang dibutuhkan.

Jumlah moda yang dapat diambil adalah tidak terhingga. Semakin banyak moda yang diambil, hasil analisa dinamik suatu sistem struktur akan lebih baik (mendekati nilai eksak). Namun dengan jumlah moda dapat dikurangi tanpa mengurangi aspek keakurasian hasil analisa yang diharapkan. Cara yang dilakukan adalah dengan menentukan error margin yang diinginkan, sehingga jumlah moda dapat ditentukan. Hal tersebut dijelaskan oleh persamaan berikut :

$$e_j = 1 - \sum_{n=1}^J \bar{r}_n \quad (2.1.24)$$

J adalah moda terakhir yang diambil dan e_j adalah error margin yang ditentukan oleh ahli struktur.

2.1.2 Aplikasi Analisa Modal^[2]

Analisa modal menjadi salah satu fenomena dunia dinamika struktur, dikarenakan banyaknya aplikasi yang dapat diterapkan. Pada bagian ini kita akan membahas beberapa aplikasi analisa modal, salah satunya adalah yang berkaitan dengan penelitian ini, yaitu pendeteksian kerusakan struktur.

Aplikasi analisa modal juga ditunjang oleh kemajuan teori analisa modal dan teknologi. Kemajuan analisa modal berkembang pesat ketika algoritma transformasi fourier (FFT) ditemukan oleh J.W Cooly dan J.W Turkey pada tahun 1965. Dengan FFT, respon frekuensi dari suatu struktur dapat dihitung melalui pengukuran. Perlu dijelaskan bahwa dengan analisa modal teoritis, modal data dibentuk oleh properti fisik dari sistem struktur yaitu matriks massa dan matriks kekakuan, sedangkan analisa modal pengukuran atau eksperimental, modal data diketahui melalui pengukuran. Menghubungkan teori dengan pengukuran dapat dilakukan dengan menggunakan suatu fungsi respon frekuensi atau disebut juga dengan FRF (*Frequency Response Function*). Fungsi ini adalah fungsi yang menghubungkan antara respon dinamik dengan beban dinamik yang diberikan. Dimana FRF inilah yang mendefinisikan modal data (frekuensi natural, moda getar, dan rasio redam) dari suatu sistem struktur yang diukur. Modal data ini lah yang digunakan dalam aplikasi-aplikasi analisa modal. Berikut beberapa contoh aplikasi analisa modal :

➤ *Troubleshooting*^[3]

Troubleshooting adalah penggunaan analisis eksperimental dari modal analisis sehingga ditemukan modal data dari suatu sistem, untuk memperbaiki suatu sistem dinamik yang bermasalah. Dengan penggunaan data frekuensi natural, moda getar dan rasio redam akan memberikan suatu pengertian yang fundamental terhadap permasalahan fisik yang ada.

➤ Korelasi model matematis suatu struktur (FEM) dengan hasil pengukuran

Korelasi model matematis dengan hasil pengukuran berguna untuk memperbaiki pemodelan matematis yang telah dibentuk berdasarkan properti fisik suatu sistem struktur. Korelasi yang dilakukan berupa pencocokkan modal data hasil model matematis dengan modal data hasil pengukuran.

➤ Modifikasi struktural

Dengan modal data, kita dapat memprediksi perilaku dinamik suatu struktur yang mengalami perubahan fisik, contoh : suatu ruangan gedung universitas yang berubah fungsi dari ruangan kelas menjadi ruangan perpustakaan. Atau juga seorang ahli struktur yang ingin memperbaiki perilaku dinamik suatu struktur dengan memodifikasi struktur yang ada, hal ini berhubungan dengan analisa sensitifitas.

➤ Identifikasi gaya

Gaya yang berlaku pada struktur hingga menyebabkan getaran dapat diidentifikasi dengan menggunakan analisa modal data yang ada.

➤ Prediksi respon struktur

Dengan adanya modal data yang lengkap, suatu respon dinamik suatu struktur dari beban dinamik dapat diprediksi. Hal ini cukup penting dalam studi integritas dan umur fatigue dari struktur.

➤ Deteksi kerusakan struktur

Modal data digunakan juga untuk mendeteksi kerusakan yang terjadi pada struktur. Dasar teori dan modelisasi akan dijelaskan dengan lengkap pada bagian berikutnya.

2.2 KERUSAKAN PADA STRUKTUR

Setiap sistem struktur memiliki kerentanan terhadap kerusakan selama digunakan, dan dapat berbahaya bagi manusia yang menggunakan struktur tersebut apabila kerusakan yang terjadi dibiarkan tanpa dilakukan langkah perbaikan.

Secara umum pada bidang teknik sipil, material yang digunakan untuk struktur adalah beton bertulang, kayu dan baja. Kerusakan dapat disebabkan oleh faktor-faktor seperti korosi pada material, fatigue, beban hantak (*impacts*), dan beban yang berlebihan. Kerusakan struktur menyebabkan deviasi atau perubahan dari kondisi normal baik secara geometrik maupun properti material^[4].

2.2.1 Index dan Skala Kerusakan

Amziane dan Dubé menyatakan bahwa kerusakan struktur dapat dibedakan pada tiga skala yaitu^[5] :

- Skala lokal, dimana kerusakan terjadi pada tingkat *cross-section*. Sebagai contoh penjelasan adalah kerusakan bagian beton akibat tegangan tekan yang melebihi f_c' dari beton bertulang, ataupun sebaliknya tegangan pada baja yang melebihi tegangan plastisnya pada beton bertulang.
- Skala menengah atau *intermediate*, dimana kerusakan dilihat pada skala suatu elemen atau member penyusun suatu sistem struktur.
- Skala global, dimana kerusakan dilihat pada skala yang lebih besar, yaitu suatu sistem struktur secara utuh.

Setiap skala kerusakan baik itu lokal, intermediate dan global diukur oleh suatu index kerusakan. Dimana index ini biasanya tidak memiliki dimensi dan memiliki nilai yang berkisar dari 0 hingga 1. 0 untuk suatu bagian yang tidak rusak sama sekali dan 1 untuk bagian yang mengalami kerusakan total atau runtuh.

Banyak penelitian yang telah dilakukan untuk menjelaskan mengenai index kerusakan. Sebagai contoh kerusakan lokal yang ditinjau berdasarkan deformasi maksimum dan disipasi energi (Chai 1998, Park dan Ang 1985), daktilitas (Banon 1981, Park 1987, Gupta 2001) , infleksibilitas (Lybas 1977) dll. Pada kesempatan ini akan dijelaskan index kerusakan berdasarkan kerusakan material lokal pada material untuk struktur beton bertulang (Amziane dan Dubé 2008).

Secara lokal, index kerusakan ditentukan oleh kerusakan beton akibat tekan atau kerusakan plastis baja akibat tarik. Berikut persamaan yang menjelaskan index kerusakan tersebut :

- Index kerusakan lokal tekan

$$D_c = 1 - \frac{1}{1 + (4.2 - 0.034 \times f_c) \times \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_o}\right)} \quad (2.2.1)$$

D_c adalah index kerusakan lokal tekan, f_c adalah tekan beton maksimum, ε_r adalah regangan residual dan ε_o adalah regangan pada f_c .

- Index kerusakan lokal tarik

$$D_t = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_e} \quad (2.2.2)$$

D_t adalah index kerusakan lokal tarik, ε_p adalah regangan plastis, ε_e adalah regangan pada saat *yield* dan ε_{max} adalah regangan maksimum diambil 1% pada penelitian.

- Index kerusakan elemen (intermediate)

$$D_{element} = \text{Max}(D_c, D_t) \quad (2.2.3)$$

- Index kerusakan global

Kerusakan global dari suatu struktur ditentukan oleh kondisi-kondisi sebagai berikut :

- Memperhitungkan semua zona yang rusak pada struktur.
- Memperhitungkan zona yang mungkin rusak selain zona sendi plastis. Zona-zona ini adalah seperti zona tengah bentang balok atau zona-zona dimana beban terpusat.
- Keruntuhan terjadi ketika index kerusakan global mencapai nilai 1 (100%).
- Semua penampang kritis memiliki andil yang sama (*equally weighted*) dalam pengukuran index kerusakan global.

$$D_{global} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i + \sum_j D_j}{m + \sum_j D_j} \quad (2.24)$$

Dimana m adalah jumlah penampang kritis dimana kemungkinan terjadi sendi plastis, i adalah elemen ke- i yang mengalami sendi plastis (kerusakan lokal), dan j adalah elemen atau zona lain yang mengalami kerusakan.

Dari persamaan yang menjelaskan index kerusakan pada skala lokal hingga skala global dapat dilihat secara jelas bahwa terdapat hubungan antara tiap skala tersebut. Secara sederhana dapat ditarik kesimpulan bahwa kerusakan lokal pada suatu bagian sistem struktur menentukan tingkatan kerusakan pada skala global. Dan index-index ini menjadi suatu *tool* dalam penentuan keputusan apakah suatu sistem struktur harus diperbaiki, diperkuat atau diruntuhkan.

2.2.2 Index dan Skala Kerusakan Berdasarkan Parameter Modal^[6]

Cakmak dan DiPasquale (1990) telah menjelaskan dalam penelitiannya bahwa untuk mengetahui tingkat kerusakan suatu sistem struktur secara global dapat digunakan parameter modal sebagai dasar pengukuran. Disebutkan pula bahwa tidak digunakannya parameter redaman untuk mengukur tingkat kerusakan dikarenakan kesulitan dalam pengukuran parameter redaman ketika struktur pada suatu fase nonlinier. Cakmak dan DiPasquale mengajukan ide bahwa perubahan frekuensi natural fundamental sebagai alat ukur dari kerusakan global, yang direpresentasikan oleh persamaan berikut:

$$GDI = 1 - \frac{\omega_u - \omega_d}{\omega_u} \quad (2.2.5)$$

Penulis mencoba melakukan sedikit modifikasi dari persamaan diatas dengan memasukkan nilai frekuensi natural untuk setiap moda, bukan hanya moda fundamental seperti yang diajukan oleh Cakmak dan DiPasquale. Kemudian perubahan frekuensi untuk tiap moda akan dikalikan dengan faktor pemberat yang merupakan perbandingan antara massa efektif moda dibagi dengan massa total dari sistem struktur. Persamaannya adalah sebagai berikut:

$$GDI = 1 - \sum_{n=1}^N \left(\frac{m_{eff-n}}{m_{tot}} \right) \left(\frac{\omega_{un} - \omega_{dn}}{\omega_{un}} \right) \quad (2.2.6)$$

Massa efektif moda (m_{eff-n}) menjadi suatu cara untuk mengukur seberapa besar kontribusi suatu moda terhadap suatu respon struktur. Moda-moda dengan

massa efektif yang relatif besar akan lebih mudah tereksitasi oleh beban dinamik seperti gempa. Hal ini dikarenakan massa efektif moda ke-n adalah nilai equivalen dari gaya geser dasar statik moda ke-n. Berikut adalah cara bagaimana kita menghitung massa efektif untuk moda ke-n^[1]:

$$m_{eff-n} = \frac{(\sum_{j=1}^N m_j \phi_{jn})^2}{\phi_n^T m \phi_n} \quad (2.2.7)$$

Dimana j adalah baris ke-j dari matriks massa ataupun moda getar ke-n.

Perbedaan frekuensi natural antara struktur sebelum dan sesudah rusak akan selalu memberikan hasil positif dan semakin besar seiring dengan semakin besarnya tingkat kerusakan yang terjadi. Nilai 0 untuk GDI (*Global Damage Index*) memiliki artian bahwa tidak terjadi kerusakan pada struktur dan 1 apabila struktur runtuh.

2.2.3 Pemodelan Kerusakan

Peneliti di bidang struktur telah banyak melakukan penelitian mengenai pemodelan kerusakan pada struktur dengan metode elemen hingga semenjak lebih dari tiga puluh tahun yang lalu, untuk tiap tipe material yang ada (beton bertulang, baja, kayu, komposit, dll), dengan tipe pembebanan yang berbeda-beda (ledakan, statik, siklik, dll) serta dengan sifat yang berbeda-beda seperti isotropik, orthotropik dll. Namun secara general kerusakan yang terjadi didefinisikan sebagai peristiwa pelemahan (*softening*) atau deteriorasi kekakuan dari beberapa titik penting dari sistem struktur yang memberikan efek global^[7].

Secara sederhana banyak peneliti yang melakukan penyederhanaan dari pemodelan, dikarenakan bukan pemodelan kerusakan yang menjadi pokok pembahasannya tetapi hal lain seperti efek kerusakan terhadap properti dinamik. Sebagai contoh Ge dan Lui (2005) memodelkan kerusakan pada bagian pada sistem struktur dengan penambahan beban massa dan mereduksi inersia penampang dari suatu elemen, Liu dan Yang (2006) dengan hanya mereduksi inersia, mereduksi dimensi penampang, ataupun dengan mendefinisikan keretakan seperti yang dilakukan oleh Casas dan Aparicio (1994).

Sendi plastis dapat menjadi suatu representasi kerusakan pada struktur, walaupun secara teoritis struktur masih mampu menjalankan perannya menahan beban-beban. Khususnya pada struktur beton bertulang, konfigurasi penulangan pada pertemuan balok dan kolom di modifikasi, sehingga pada saat terjadinya pembebanan maksimum seperti gempa yang besar, energi gempa dapat disebarkan dan diserap^[8].

Dengan terbentuknya sendi plastis, komposisi fisik suatu sistem struktur telah berubah. Hal ini dikarenakan pada titik-titik dimana sendi plastis terbentuk material sudah tidak lagi bersifat elastis. Sehingga hal ini berpengaruh juga terhadap properti modal dari pada struktur, yang menjadi fokus khusus dari penelitian ini. Hal ini akan dibuktikan pada modelisasi yang akan dilakukan pada bagian berikutnya dari penelitian ini.

Keberadaan sendi plastis menyebabkan suatu elemen struktur untuk tidak mampu menjalankan gaya-gaya dalam ke elemen struktur lainnya yang bersebelahan dengan elemen struktur dimana sendi plastis terbentuk. Dalam modelisasi hal ini disebut dengan *end-release*, dimana apabila pada ujung-ujung elemen terjadi sendi plastis, maka ujung-ujung elemen tersebut di-*release* sehingga tidak mampu menyalurkan suatu gaya dalam^[9].

2.3 TEORI IDENTIFIKASI LOKASI DAN TINGKAT KERUSAKAN STRUKTUR DENGAN MENGGUNAKAN PROPERTI MODAL^[10]

Aplikasi properti modal dapat digunakan untuk mendeteksi kerusakan yang terjadi pada struktur, dan aplikasi ini merupakan suatu evaluasi non-destruktif dan cukup sederhana tetapi akurat. Sehingga penelitian mengenai hal ini telah mendapat perhatian khusus oleh para peneliti selama lebih dari 20 tahunan.

Seperti dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa properti modal dari suatu sistem struktur terdiri dari tiga bagian, yaitu frekuensi natural, moda getar dan rasio redaman. Namun dalam penelitian ini kita akan hanya menggunakan dua properti pertama yang disebutkan diatas untuk mengidentifikasi kerusakan dan mengukur tingkat kerusakan yang terjadi.

Secara general (Ge dan Lui 2005) dijelaskan bahwa metode identifikasi kerusakan stuktur dengan menggunakan properti modal dibedakan kedalam dua pendekatan, yaitu :

- Pendekatan energi, dimana variasi energi regangan (*strain energy*) dari suatu sistem struktur dihubungkan dengan perubahan frekuensi naturalnya.
- Pendekatan fisik, dimana perubahan properti kekakuan dan massa suatu sistem stuktur dihubungkan dengan perubahan frekuensi naturalnya dan juga perubahan moda getarnya.

Pendekatan pertama yang dipioniri oleh Gudmundson 1982, awalnya ditujukan untuk memprediksi retakan, dan perubahan geometris lainnya serta menunjukkan bahwa perubahan frekuensi natural berhubungan dengan perubahan energi regangan suatu sistem struktur. Namun, penelitian ini ditujukan untuk sistem strukturyang relatif sederhana, dimana dilakukan identifikasi kerusakan pada sistem balok kantilever berupa retakan. Sehingga apabila sistem struktur menjadi lebih kompleks dan tipe kerusakan yang lebih parah, maka hubungan antara lokasi dan tingkat kerusakan yang terjadi dengan perubahan frekuensi dan perubahan energi regangan dari struktur akan menjadi sangat rumit.

Kemudian metode yang lebih mampu beradaptasi dengan variasi jenis sistem struktur dan tingkat kerusakan yang terjadi adalah pendekatan kedua. Dimana kerusakan struktur diidentifikasi dan diukur dengan menggunakan perubahan yang terjadi pada frekuensi natural dan moda getar yang kemudian dihubungkan dengan satu set matriks kekakuan dan matriks massa. Metode ini telah terbukti lebih mudah untuk diformulasi dan lebih aplikatif.

Yang menjadi kekurangan dari metode ini hanyalah bahwa moda getar yang akurat akan sangat sulit didapatkan. Namun untuk metode yang ditawarkan pada penelitian ini, moda getar hanya diperlukan pada saat identifikasi lokasi kerusakan. Selain itu proses perhitungan yang cukup rumit menjadi tambahan kekurangan metode ini, namun hal ini tidak menjadi suatu permasalahan fundamental dikarenakan akan dilakukan penyederhanaan proses perhitungan dengan metode kondensasi matriks. Pada bagian berikut akan dijelaskan secara

lengkap metode perhitungan untuk identifikasi lokasi kerusakan dan tingkat kerusakan dengan menggunakan pendekatan fisik.

2.3.1 Identifikasi Kerusakan dan Lokasi Kerusakan pada Struktur

Identifikasi kerusakan dan penentuan lokasinya akan dilakukan dalam satu langkah. Dimana akan digunakan hasil modelisasi metode elemen hingga dari sistem struktur, yang akan berujung pada suatu matriks pseudo-gaya residual yang akan menentukan ada tidak dan lokasi terjadinya kerusakan.

Jika suatu struktur dimodelkan dengan baik dengan menggunakan metode elemen hingga, kerusakan yang terjadi pada struktur akan menampakkan keberadaannya secara matematis kedalam bentuk perubahan pada matriks kekakuan dan matriks massa dari model elemen hingga yang telah dibentuk sebelumnya.

Untuk memulai, kita kembali ke persamaan gerak sederhana untuk sistem MDOF tanpa redaman berikut :

$$m\ddot{u} + ku = p(t) \quad (2.3.1)$$

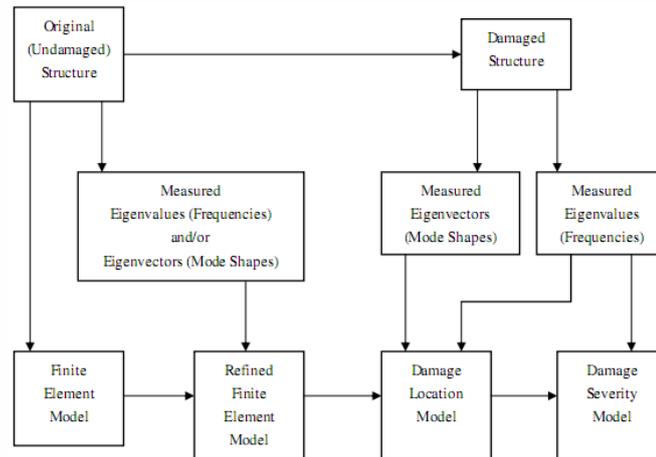
Dimana m dan k adalah matriks $n \times n$ untuk kekakuan dan massa dari sistem struktur, lalu \ddot{u} dan u adalah vektor $n \times 1$ untuk percepatan dan perpindahan serta $p(t)$ adalah vektor $n \times 1$ untuk gaya luar.

Pada permasalahan getaran bebas dimana tidak terdapat gaya luar, suatu persamaan karakteristik dapat diturunkan dari pers. (2.3.1) dan dituliskan sebagai berikut :

$$(k - \lambda_n m)\varphi_n = 0 \quad (2.3.2)$$

λ_n adalah nilai eigen (pangkat dua dari frekuensi natural) untuk moda ke- n dan φ_n adalah moda getar untuk moda ke- n . Pers. (2.3.2) adalah persamaan yang menjadi basis untuk pendeteksian kerusakan.

Untuk menjelaskan secara global proses pendeteksian kerusakan dan identifikasi tingkat kerusakan yang terjadi, berikut skema yang menggambarkan proses tersebut :



Gambar 1. Skema Proses Identifikasi Lokasi dan Tingkat Kerusakan Struktur

Berdasarkan gambar diatas, dapat dilihat bahwa struktur (yang tidak rusak) dimodelkan dengan metode elemen hingga dalam fase desain. Kemudian setelah melalui fase konstruksi, struktur kemudian diukur untuk mengetahui nilai frekuensi natural dan moda getar riil-nya dan kemudian dicocokkan dengan hasil modelisasi dengan metode elemen hingga. Apabila terdapat perbedaan, hasil pemodelan akan disesuaikan menjadi suatu model baru yang disebut dengan “*refined finite element model*”. Model terbaru ini lah yang akan menjadi model acuan untuk struktur tanpa kerusakan.

Ketika kerusakan terjadi, terjadi perubahan pada properti modal struktur. Kemudian berdasarkan frekuensi natural dan moda getar hasil pengukuran, lokasi kerusakan dapat diketahui dengan model identifikasi lokasi kerusakan struktur. Berikut adalah model yang diusulkan yang menjadi acuan pada penelitian ini.

➤ Model Identifikasi Kerusakan

Model ini berdasarkan metode gaya residual. Dimana akan dibentuk suatu set vektor yang disusun berdasarkan nilai frekuensi natural dan moda getar hasil pengukuran dari struktur yang mengalami kerusakan. Dimana vektor ini menjelaskan letak dimana kerusakan terjadi.

Kita akan membentuk persamaan yang serupa dengan pers. (2.3.2), hanya saja kali ini untuk sistem yang mengalami kerusakan, dimana akan ditambahkan subskrip d yang melambakan struktur yang rusak.

$$(\mathbf{k}_d - \lambda_{dn} \mathbf{m}_d) \boldsymbol{\varphi}_{dn} = \mathbf{0} \quad (2.3.3)$$

Dengan berasumsi bahwa kerusakan akan merubah matriks kekakuan dan matriks massa sebesar $\Delta \mathbf{k}$ dan $\Delta \mathbf{m}$ dari matriks-matriks pada struktur yang belum rusak, maka :

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_u + \Delta \mathbf{k} \quad (2.3.4a)$$

$$\mathbf{m}_d = \mathbf{m}_u + \Delta \mathbf{m} \quad (2.3.4b)$$

Dimana \mathbf{k}_u dan \mathbf{m}_u adalah matriks kekakuan dan massa sebelum terjadi kerusakan.

Dengan mensubstitusikan pers. (2.3.4a) dan (2.3.4b) ke dalam persamaan (2.3.3), maka :

$$\Delta \mathbf{k} \boldsymbol{\varphi}_{dn} - \lambda_{dn} \Delta \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_{dn} = (-\mathbf{k}_u + \lambda_{dn} \mathbf{m}_u) \boldsymbol{\varphi}_{dn} \quad (2.3.5)$$

Bagian kiri dari persamaan diatas memiliki satuan gaya, dan apabila bagian ini kita definisikan sebagai vektor gaya residu untuk moda ke-n, maka pers. (2.3.5) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathbf{R}_n = \Delta \mathbf{k} \boldsymbol{\varphi}_{dn} - \lambda_{dn} \Delta \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_{dn} \quad (2.3.6)$$

$$\mathbf{R}_n = (-\mathbf{k}_u + \lambda_{dn} \mathbf{m}_u) \boldsymbol{\varphi}_{dn} \quad (2.3.7)$$

Jika terdapat satu set hasil pengukuran frekuensi natural dan moda getar, maka vektor gaya residual dapat dihitung dengan persamaan diatas. Apabila secara ideal, pada saat pengukuran tidak terjadi gangguan (*noise*) pada alat pengukur, maka nilai R_{jn} (j adalah urutan DOF pada sistem) akan bernilai 0 apabila tidak terjadi kerusakan dan tidak bernilai 0 apabila pada DOF yang ditinjau terjadi kerusakan. Hal ini sesuai dengan definis vektor gaya residu pada pers. (2.3.6). Sehingga dengan adanya vektor gaya residu ini, kita dapat menentukan jika terjadi kerusakan pada struktur beserta lokasi dimana kerusakan tersebut terjadi, karena nilai pada vektor gaya residu ini berpasangan dengan nomor DOF yang menjelaskan letak dari DOF tersebut secara fisik.

Secara teori berdasarkan penurunan persamaan-persamaan diatas, kita hanya membutuhkan data satu moda saja untuk mengidentifikasi kerusakan beserta lokasinya. Namun secara praktis modal data untuk lebih dari satu moda biasanya dibutuhkan. Hal ini disebabkan karena *noise* yang selalu muncul pada saat pengukuran sehingga nilai frekuensi natural dan moda getar yang didapatkan tidak akan pernah *unpolluted* secara eksperimental ataupun pada saat perhitungan numerik dilakukan.

Sehingga untuk menghindari terjadinya hasil yang tidak menggambarkan keadaan sebenarnya akibat gangguan (*noise*), maka hasil vektor gaya residu yang didapat dari proses perhitungan yang telah dijelaskan sebelumnya akan melalui proses penguatan sinyal (*signal magnification*).

Apabila terdapat sejumlah p ($p > 1$) frekuensi natural dan moda getar untuk struktur rusak, maka vektor \mathbf{R} didefinisikan sebagai :

$$\mathbf{R} = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_m\}^T \quad (2.3.8)$$

Dimana r_j ($j = 1, 2, 3, \dots, m$), dan :

$$r_j = \left[\prod_{n=1}^p (|r_j|_n) \right]^{1/p} \quad (2.3.9)$$

Dengan adanya data yang lebih banyak, maka dengan metode diatas sinyal-sinyal gangguan dapat dikurangi pengaruhnya terhadap keberadaan sinyal yang diharapkan muncul. Sehingga hasil identifikasi kerusakan dan lokasi kerusakan dapat menjadi lebih akurat.

2.3.2 Identifikasi Tingkat Kerusakan pada Struktur

Untuk identifikasi tingkat kerusakan yang terjadi, kita hanya akan menggunakan data frekuensi natural tiap moda yang didapatkan.

Ketika kerusakan terjadi terjadi perubahan pada matriks kekakuan sebesar $\Delta \mathbf{k}$ dan perubahan pada matriks massa sebesar $\Delta \mathbf{m}$. Perubahan juga terjadi pada properti modal struktur, perubahan tersebut adalah sebesar $\Delta \lambda_n$ untuk nilai eigen dan $\Delta \varphi_n$ untuk vektor eigen. Dengan memperhitungkan perubahan-perubahan ini kedalam pers. (2.3.3), maka :

$$[(\mathbf{k}_u + \Delta\mathbf{k}) - (\lambda_n + \Delta\lambda_n)(\mathbf{m}_u + \Delta\mathbf{m})][\boldsymbol{\varphi}_n + \Delta\boldsymbol{\varphi}_n] = \mathbf{0} \quad (2.3.10)$$

Lalu :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{k}_u - \lambda_n \mathbf{m}_u) \boldsymbol{\varphi}_n + (\mathbf{k}_u - \lambda_n \mathbf{m}_u) \Delta \boldsymbol{\varphi}_n + (\Delta \mathbf{k} - \lambda_n \Delta \mathbf{m}) \boldsymbol{\varphi}_n - \\ & \Delta \lambda_n \mathbf{m}_u \boldsymbol{\varphi}_n + (\Delta \mathbf{k} - \lambda_n \Delta \mathbf{m}) \Delta \boldsymbol{\varphi}_n - \Delta \lambda_n (\mathbf{m}_u \Delta \boldsymbol{\varphi}_n + \Delta \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_n + \\ & \Delta \mathbf{m} \Delta \boldsymbol{\varphi}_n) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Bagian pertama dari persamaan diatas adalah persamaan karakteristik permasalahan eigen yang mengacu pada struktur tanpa kerusakan, sehingga nilainya adalah 0. Lalu dengan mengabaikan orde-orde tinggi dari persamaan diatas dan mengalikan $\boldsymbol{\varphi}_n^T$ pada bagian depan tiap bagian persamaan, maka:

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T (\mathbf{k}_u - \lambda_n \mathbf{m}_u) \Delta \boldsymbol{\varphi}_n + \boldsymbol{\varphi}_n^T (\Delta \mathbf{k} - \lambda_n \Delta \mathbf{m}) \boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_n^T \Delta \lambda_n \mathbf{m}_u \boldsymbol{\varphi}_n = 0 \quad (2.3.12)$$

Karena matriks massa dan matriks kekakuan adalah matriks simetris, maka bagian pertama dari persamaan diatas adalah 0. Dan jika $\boldsymbol{\varphi}_n$ dinormalisir, sehingga $\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_n = \mathbf{1}$, dan pers. (2.3.12) dapat disederhanakan menjadi :

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \Delta \mathbf{k} \boldsymbol{\varphi}_n - \lambda_n \boldsymbol{\varphi}_n^T \Delta \mathbf{m} \boldsymbol{\varphi}_n = \Delta \lambda_n \quad (2.3.13)$$

Perlu diketahui bahwa matriks $\Delta \mathbf{k}$ dan $\Delta \mathbf{m}$ adalah matriks dengan nilai tidak nol yang jauh lebih sedikit dibanding nilai nol (*sparse matrices*), hal ini disebabkan nilai non-nol untuk matriks-matriks tersebut hanya diasosiasikan pada DOF dimana terjadi kerusakan. Dengan mengeliminasi kolom dan baris pada matriks yang kesemua nilainya nol dan hanya menyisakan kolom dan baris non-nol, maka matriks $\Delta \mathbf{k}$ dan $\Delta \mathbf{m}$ terkondensasi menjadi matriks $\Delta \mathbf{k}'$ dan $\Delta \mathbf{m}'$ yang merepresentasikan keseluruhan dari matriks kekakuan dan matriks massa yang berhubungan dengan kerusakan elemen pada suatu model elemen hingga. Dengan mengkondensasi matriks $\Delta \mathbf{k}$ dan $\Delta \mathbf{m}$ kita juga harus mengkondensasi vektor eigen yang kita gunakan menjadi $\boldsymbol{\varphi}'_n$ yang hanya mengikutsertakan DOF yang berhubungan dengan elemen yang mengalami kerusakan. Lalu pada akhirnya proses kondensasi ini merubah pers. (2.3.13) menjadi :

$$\boldsymbol{\varphi}'_n{}^T \Delta \mathbf{k}' \boldsymbol{\varphi}'_n - \lambda_n \boldsymbol{\varphi}'_n{}^T \Delta \mathbf{m}' \boldsymbol{\varphi}'_n = \Delta \lambda_n \quad (2.3.14)$$

Dengan kondensasi matriks yang dilakukan, maka ukuran matriks-matriks dan vektor-vektor pada pers. (2.3.14) berukuran jumlah titik kerusakan yang terjadi. Sehingga sekompleks apapun sistem struktur yang kita analisa, matriks yang kita hadapi hanya berukuran titik kerusakan yang ada.

Kemudian untuk lebih menyederhanakan permasalahan, matriks $\Delta \mathbf{k}'$ dan $\Delta \mathbf{m}'$ dapat direpresentasikan sebagai fungsi dari matriks kekakuan dan matriks massa per elemen untuk sistem tanpa kerusakan sebagai berikut :

$$\Delta \mathbf{k}' = \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{k}_j^e \delta k_j \quad (2.3.15a)$$

$$\Delta \mathbf{m}' = \sum_{j=1}^{n_d} \mathbf{m}_j^e \delta m_j \quad (2.3.15b)$$

Dimana \mathbf{k}_j^e dan \mathbf{m}_j^e adalah matriks elemen untuk elemen ke-j yang berkontribusi terhadap matriks terkondensasi $\Delta \mathbf{k}'$ dan $\Delta \mathbf{m}'$. Lalu n_d adalah jumlah elemen yang mengalami kerusakan, kemudian δk_j dan δm_j adalah faktor modifikasi kerusakan untuk matriks kekakuan dan matriks massa untuk elemen j. Dengan mendefinisikan $\Delta \mathbf{k}'$ dan $\Delta \mathbf{m}'$ seperti ini, maka jumlah variabel yang tidak diketahui dikurangi hingga hanya dua (δk_j dan δm_j) per elemen. Sehingga permasalahan menjadi jauh lebih sederhana.

Dengan mensubstitusikan pers. (2.3.15a dan b) kedalam pers. (2.3.14) maka akan didapatkan :

$$\sum_{j=1}^{n_d} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^T \mathbf{k}_j^e \boldsymbol{\varphi}'_n \delta k_j - \lambda_n \sum_{j=1}^{n_d} \boldsymbol{\varphi}'_n{}^T \mathbf{m}_j^e \boldsymbol{\varphi}'_n \delta m_j = \Delta \lambda_n \quad (2.3.16)$$

$\boldsymbol{\varphi}'_n$, \mathbf{k}_j^e , \mathbf{m}_j^e , dan λ_n dapat diketahui berdasarkan pemodelan metode elemen hingga untuk struktur dalam keadaan tidak rusak. Kemudian yang tersisa untuk menentukan nilai δk_j dan δm_j adalah dengan menentukan secara pengukuran nilai λ_{dn} sehingga nilai $\Delta \lambda_n$ dapat dihitung.

Apabila terdapat p nilai eigen, maka pers. (2.3.16) dapat ditulis dalam bentuk matriksial seperti berikut :

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{k} + \mathbf{B}\delta\mathbf{m} = \Delta\lambda \quad (2.3.17)$$

Dimana \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah matriks berukuran $p \times n_d$, $\delta\mathbf{k}$ dan $\delta\mathbf{m}$ adalah vektor $n_d \times 1$ dan $\Delta\lambda$ adalah vektor $p \times 1$.

$$\mathbf{A}_{.j} = \boldsymbol{\varphi}'_n{}^T \mathbf{k}_j^e \boldsymbol{\varphi}'_n \quad (2.3.18)$$

$$\mathbf{B}_{.j} = \boldsymbol{\varphi}'_n{}^T \mathbf{m}_j^e \boldsymbol{\varphi}'_n \quad (2.3.19)$$

$$\delta\mathbf{k} = [\delta k_1, \delta k_2, \delta k_3, \dots, \delta k_{n_d}]^T \quad (2.3.20)$$

$$\delta\mathbf{m} = [\delta m_1, \delta m_2, \delta m_3, \dots, \delta m_{n_d}]^T \quad (2.3.21)$$

$$\Delta\lambda = [\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3, \dots, \Delta\lambda_p]^T \quad (2.3.22)$$

Persamaan (2.3.17) juga dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{D} = \Delta\lambda \quad (2.3.23)$$

Dimana :

$$\mathbf{L} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \quad (2.3.24)$$

$$\mathbf{D} = [\delta\mathbf{k}, \delta\mathbf{m}]^T \quad (2.3.25)$$

Untuk mendapat solusi yang unik secara matematis, jumlah nilai eigen hasil pengukuran minimal harus sama dengan jumlah faktor modifikasi kerusakan untuk matriks massa dan matriks kekakuan, sehingga $p = 2n_d$. Namun untuk memperkecil error yang kemungkinan terjadi akibat *human error* dalam pengukuran, diharapkan $p > 2n_d$.

Sehingga dibutuhkan sangat banyak data perhitungan dan dibutuhkan suatu prosedur optimisasi untuk mengetahui nilai pada matriks \mathbf{D} yang terisi oleh faktor modifikasi kerusakan. Untuk penelitian ini akan digunakan metode *least square*, dimana pada metode ini digunakan error norm yang memperkecil pangkat dua dari error dalam menyelesaikan pers. (2.3.23). Apabila kita memberi nama error yang terjadi dengan \mathbf{E} , maka :

$$\mathbf{E} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} - \Delta\lambda \quad (2.3.26)$$

Sedangkan seperti dijelaskan diatas, kondisi yang harus dipenuhi adalah :

$$\frac{\partial \mathbf{E}^T \mathbf{E}}{\partial d_k} = 0, k = 1, 2, \dots, 2n_d \quad (2.3.27)$$

Dimana d_k adalah komponen penyusun vektor \mathbf{D} ke-k. Dengan mensubstitusikan pers. (2.3.26) ke persamaan (2.3.27) maka :

$$\mathbf{D} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \Delta\lambda \quad (2.3.28)$$

Persamaan diatas dapat digunakan untuk menyelesaikan semua variabel yang tidak diketahui (faktor modifikasi kerusakan) yang tersusun ke dalam matriks \mathbf{D} . Dikarenakan apabila $\delta k = \delta m = 0$ maka hal ini menjelaskan bahwa tidak terjadi kerusakan, dan deviasi nilai diatas dapat digunakan sebagai indikator seberapa parah kerusakan yang terjadi pada suatu titik pada struktur. Dan pada pengukuran tingkat keparahan kerusakan struktur, tidak digunakan data moda getar hasil pengukuran, sehingga kesalahan pengukuran moda getar tidak akan mempengaruhi metode ini.

2.4 PENGUKURAN PROPERTI MODAL (*MODAL TESTING*)

Pada bagian ini akan dibahas mengenai proses pengukuran properti modal suatu struktur, teori yang melatarbelakangi proses pengukuran, beserta tipe eksitasi yang diberikan agar struktur bergetar.

Respon suatu sistem struktur terhadap beban dinamik berbeda-beda tergantung atas fungsi fisik komponen penyusun sistem struktur serta sebaran spasialnya pada sistem tersebut dan juga jenis dan intensitas pembebanan yang diberikan. Secara eksperimental ataupun pengukuran, para *engineers* ataupun peneliti kerap memodelkan beban dinamik yang diinginkan kemudian menganalisis respon yang diberikan oleh struktur, baik dalam ukuran sebenarnya ataupun dalam ukuran miniatur.

Sebagai contoh, dalam dunia teknik sipil, beban dinamik yang sering menjadi permasalahan adalah beban gempa. Di laboratorium para peneliti

melakukan 3 metode dalam memodelkan beban dinamik gempa terhadap struktur, yaitu dengan *shaking tables*, *pseudo-dynamic testing* dan *real time testing*^[11].

Namun ada saatnya dimana hanya properti modal dari sistem struktur yang kita inginkan untuk dapat mengetahui respon dari struktur ataupun keperluan lainnya seperti identifikasi kerusakan dll. Pengukuran dengan tujuan seperti ini disebut dengan *modal testing*^[12]. Untuk hal ini, tidak diperlukan pemodelan pembebanan dinamik yang begitu rumit untuk menyamai dengan bentuk pembebanan sebenarnya. Bahkan dalam *modal testing*, dengan hanya pembebanan atau eksitasi level rendah, properti modal dapat diekstrak dari suatu sistem struktur¹. Yang dimaksud dengan eksitasi level rendah disini adalah seperti beban yang biasa diterima oleh struktur (*ambient excitation vibration*) atau pemberian gaya level rendah. Namun *ambient excitation vibration* harus dibedakan dengan *forced vibration*, pada *forced vibration* struktur diberikan suatu gaya yang telah diketahui secara keseluruhan besaran, arah dan dimana kira-kira bekerja gaya tersebut. Sebagai contoh adalah penggunaan *dynamic shakers*, ledakan atau pelepasan massa di dekat struktur berada sehingga menghasilkan efek impuls ataupun gempa lokal yang mengeksitasi struktur untuk bergetar. Namun, Oliveira dan Navarro (2009) menyatakan dalam penelitiannya bahwa hasil pengukuran properti dinamik suatu struktur dengan menggunakan *forced vibration* ataupun dengan *ambient vibration* tidak memiliki perbedaan yang signifikan^[13].

2.4.1 Klasifikasi Modal Testing

Metode pengukuran properti modal dibedakan menjadi dua, yaitu :

- *Experimental Modal Analysis* (EMA)

Metode yang diambil adalah suatu sistem struktur diberikan eksitasi satu titik (*single point excitation*) ataupun *multiple point excitations*. Kemudian input dan output dari pengukuran dicatat dan menjadi suatu dasar dari pembentukan modal model yang pada akhirnya akan mengeluarkan properti modal dari struktur yang ditinjau.

- *Operational Modal Analysis* (OMA)

Sedangkan pada metode kedua ini, hanya output dari pengukuran yang dibutuhkan untuk membentuk modal model. Sehingga eksitasi aritifisial tidak dibutuhkan dalam metode pengukuran ini.

Dengan penggunaan eksitasi level rendah dalam pengukuran, Chul-Young Kim dkk dalam jurnalnya membagi dua tipe pengkuran getaran^[14]: Disebutkan bahwa pada jembatan dimana eksitasi *ambient* dibagi oleh beban lalu lintas dan angin. Beban lalu lintas biasanya digunakan untuk jembatan berbentang pendek, walaupun beban lalu lintas memiliki rentangan frekuensi yang kecil, namun amplitudo getaran yang dihasilkan lebih besar dari yang dihasilkan oleh angin sehingga lebih mudah untuk dianalisa. Pada kasus jembatan dengan bentang panjang, kedua tipe eksitasi *ambient* ini digunakan.

Contoh lainnya adalah *modal testing* yang dilakukan pada menara gereja *Hagia-Sophia* Turki oleh Alemda Bayraktar dkk (2009)^[15]. Pada penelitian ini, dilakukan pengukuran terhadap menara gereja berumur lebih dari 700 tahun, dimana hasil pemodelan analitik dengan metode elemen hingga dibandingkan dengan hasil pengukuran melalui eksitasi *ambient* berupa beban angin. Hasil yang didapat menyatakan bahwa hasil pengukuran dan analisa MEH cukup konvergen.

2.4.2 Teori *Modal Testing*^[11]

Dalam teori *modal testing* asumsi penting yang diambil adalah sebagai berikut :

- Sistem struktur berperilaku linier
- Sistem struktur paling tidak ketika dilakukan pengukuran tidak berubah terhadap waktu (*time invariant*)

Kembali merunut pada pers. (2.1.2) dan (2.1.19) dimana respon dinamik dan persamaan gerak dinamik direpresentasikan kedalam suatu ekspansi modal. Dan dengan memanfaatkan properti orthogonal dari pada moda getar, maka sistem struktur MDOF dapat dipecah menjadi n sistem struktur SDOF.

Dalam pengukuran properti modal suatu sistem struktur, suatu pembebanan atau eksitasi dibutuhkan. Pada umumnya pemberian eksitasi pada

suatu sistem struktur dibedakan menjadi dua, yaitu eksitasi satu titik (*single point excitation*) dan eksitasi banyak titik (*multiple excitation*).

Single Point Excitation

Pemberian eksitasi pada satu titik untuk tiap kali pengukuran adalah cara paling umum yang dilakukan untuk mendapatkan properti modal. Ketika suatu beban atau eksitasi hanya bekerja pada suatu titik i pada sistem struktur yang kita tinjau, maka persamaan gerak untuk modal ke- n adalah :

$$M_n \ddot{q}_n(t) + C_n \dot{q}_n + K_n q_n(t) = \varphi_{in} p(t) \quad (2.4.1)$$

Solusi dari persamaan diatas dapat diselesaikan dengan *fourier transformation* dimana domain waktu diubah kedalam domain frekuensi. Dengan mengasumsikan :

$$p_i(t) = p_i e^{j\omega t} \text{ dan } q_n(t) = \overline{B}_n e^{j\omega t} \quad (2.4.2)$$

Dimana ω adalah frekuensi eksitasi, $j = \sqrt{-1}$ dan \overline{B}_n adalah kuantitas kompleks yang mengandung informasi besaran simpangan (*magnitude*) dan beda fase (*phase*).

Kemudian, dengan mensubstitusikan pers. (2.4.2) ke dalam pers. (2.4.1) maka respon simpangan akibat eksitasi adalah sebagai berikut :

$$\overline{B}_n = \frac{\varphi_{in} p_i}{K_n - M_n \omega^2 + j C_n \omega} \quad (2.4.3)$$

Apabila persamaan diatas disubstitusikan ke dalam pers. (2.4.2) dan hasilnya disubstitusikan ke pers. (2.1.18), maka respon struktur pada titik p akibat eksitasi pada titik i dengan memanfaatkan kontribusi modal adalah :

$$u_p(t) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\varphi_{pn} \varphi_{in}}{K_n - M_n \omega^2 + j C_n \omega} \right] p_i e^{j\omega t} \quad (2.4.4)$$

Apabila kita definisikan $H_{pi}(\omega)$ sebagai fungsi respon frekuensi (FRF) *receptance* maka :

$$H_{pi}(\omega) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\varphi_{pn} \varphi_{in}}{K_n - M_n \omega^2 + j C_n \omega} \right] = \frac{U_p(\omega)}{p_i(\omega)} \quad (2.4.5)$$

Dimana $U_p(\omega)$ adalah spektrum frekuensi dari respon $u_p(t)$ pada lokasi p dan $p_i(\omega)$ adalah frekuensi spektrum dari input eksitasi $p_i(t)$.

Kemudian $H_{pi}(\omega)$ adalah respon pada lokasi p akibat satu unit eksitasi gaya pada lokasi i yang mana memiliki frekuensi ω . Ketika p dan i adalah titik yang berbeda, $H_{pi}(\omega)$ disebut dengan *transfer receptance* (compliance) dan ketika p=i maka disebut dengan *driving point receptance* (compliance).

Dari pers. (2.4.5) sangat jelas bahwa FRF mengandung properti modal yang ada (frekuensi natural, moda getar, dan rasio redaman).

Mobility dan Accelerance

Respon dalam fungsi *receptance* adalah berupa perpindahan, terkadang dalam pengukuran respon struktur yang diukur adalah dalam bentuk respon kecepatan ataupun percepatan. Sehingga FRF untuk respon kecepatan disebut *mobility* ($Y_{pi}(\omega)$), dimana menghubungkan antara output berupa kecepatan pada titik p dalam fungsi frekuensi ($V_p(\omega)$) akibat eksitasi pada titik i ($p_i(\omega)$). Lalu kemudian *accelerance* $A_{pi}(\omega)$ yang menghubungkan respon percepatan pada titik p terhadap eksitasi pada titik i.

Berikut adalah persamaan yang menghubungkan *receptance* dengan *mobility* dan *accelerance*:

$$Y_{pi}(\omega) = j\omega H_{pi}(\omega) = \frac{V_p(\omega)}{p_i(\omega)} \quad (2.4.6)$$

$$A_{pi}(\omega) = j\omega Y_{pi}(\omega) = -\omega^2 H_{pi}(\omega) = \frac{a_p(\omega)}{p_i(\omega)} \quad (2.4.7)$$

$a_p(\omega)$ adalah percepatan hasil pengukuran pada titik p.

Multiple-Point Excitation

Ketika eksitasi terjadi pada beberapa titik secara bersamaan, maka pers. (2.4.7) akan memberikan *accelerance* untuk tiap titik, akibat tiap eksitasi secara independen. Dengan asumsi sistem linier, maka keseluruhan pengukuran respon percepatan untuk tiap eksitasi pada suatu titik p adalah sebagai berikut :

$$a_p(\omega) = \sum_{i=1}^N A_{pi}(\omega) p_i(\omega) \quad (2.4.8)$$

Dari persamaan diatas, sangat jelas bahwa sangat sulit untuk mengekstraksi properti modal dikarenakan fungsi-fungsi *accelerance* dan spektrum-spektrum gaya bercampur. Namun, apabila kondisi eksitasi memenuhi asumsi bahwa tiap vektor gaya atau eksitasi memiliki alur perubahan terhadap waktu (*time history*) yang sama, sehingga vektor gaya dapat direpresentasikan sebagai berikut :

$$\{p(t)\} = \{p\}f(t) \quad (2.4.9)$$

Maka dengan kondisi ini pers. (2.4.8) dapat direduksi menjadi sebagai berikut:

$$a_p(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{-\omega^2 \varphi_{pn} Q_n}{K_n - M_n \omega^2 + j C_n \omega} F(\omega) \quad (2.4.10)$$

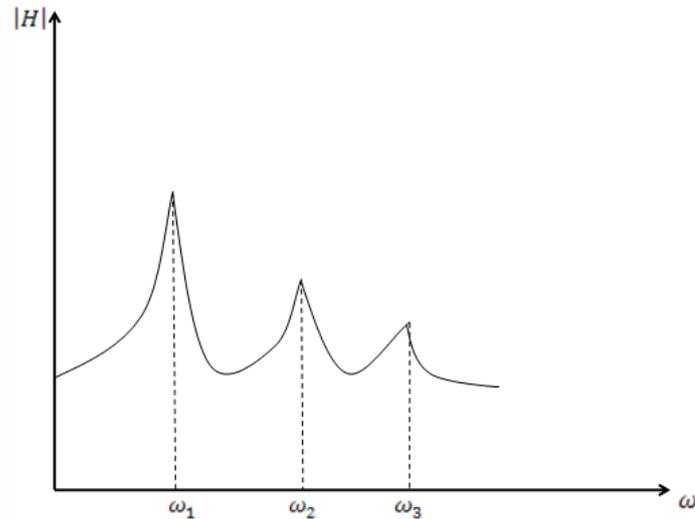
Q_n adalah eksitasi pada moda ke-n, yaitu :

$$Q_n = \sum_{i=1}^N \varphi_{in} p_i \quad (2.4.11)$$

Lalu $F(\omega)$ adalah spektrum frekuensi untuk *time history* dari vektor gaya.

2.4.3 Ekstraksi Properti Modal^[16]

Ketika FRF (fungsi respon frekuensi) telah dianalisa dengan menggunakan hasil pengukuran dan pers. (2.4.5), analisa dilanjutkan dengan membentuk suatu parameter-parameter getaran, yaitu properti modal (frekuensi natural, moda getar dan rasio redaman). Properti-properti modal diasosiasikan dengan nilai puncak resonansi dari FRF hasil analisa data pengukuran untuk tiap modanya, lihat gambar dibawah ini.



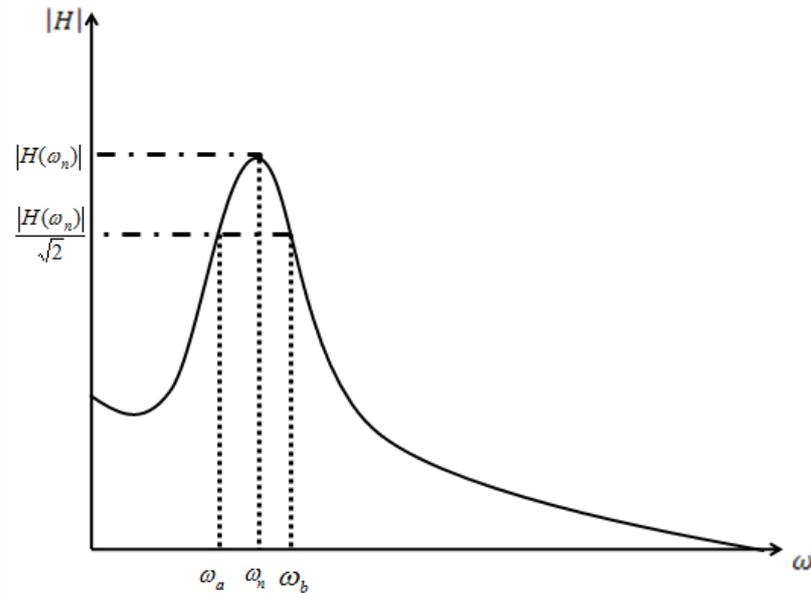
Gambar 2. Hubungan Nilai FRF dengan Frekuensi Natural

1. Frekuensi Natural

Frekuensi natural dapat ditentukan secara langsung dari kurva FRF, dengan mengacu pada nilai puncak. Nilai puncak pertama diasosiasikan dengan frekuensi natural moda pertama dan seterusnya. Tetapi cara ini tidak akurat apabila struktur yang ditinjau memiliki nilai frekuensi natural yang berdekatan atau memiliki nilai frekuensi natural yang berulang.

2. Rasio Redam

Cara termudah untuk mendapatkan nilai rasio redam tiap moda dengan menggunakan hasil pengukuran (FRF) adalah dengan menggunakan metode SDOF. Dimana tiap rasio redam per-moda didapatkan dari analisa individu per-moda dari kurva FRF, baik itu *receptance*, *mobility* ataupun *accelerance*. Untuk lebih jelas lihat gambar dibawah ini dimana dianalisa secara individual moda ke-n:



Gambar 3. Analisa Individual per-moda dengan FRF

Untuk sistem teredam ringan, rasio redam untuk moda ke- n ζ_n berhubungan dengan frekuensi natural pada moda tersebut dan frekuensi-frekuensi yang berada diantaranya. Hal ini direpresentasikan oleh persamaan berikut :

$$\zeta_n = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_n} \quad (2.4.12)$$

Dimana :

$$|H(\omega_a)| = |H(\omega_b)| = \frac{|H(\omega_n)|}{\sqrt{2}} \quad (2.4.13)$$

Terdapat metode lain dalam menentukan ω_n dan ζ_n , seperti metode *circle fitting* dll, namun tidak akan dibahas, dikarenakan hal tersebut tidak menjadi pokok pembahasan pada penelitian ini.

3. Moda getar

Menentukan moda getar dari hasil pengukuran sedikit lebih kompleks dibandingkan dengan properti modal lainnya dan membutuhkan beberapa fungsi transfer (FRF yang menghubungkan antara input gaya pada satu titik dan output respon pada titik lainnya).

Dengan asumsi tipe redaman proporsional dan kondisi *underdamped*, kita merunut kembali kepada pers. (2.4.5). Ketika frekuensi eksitasi mendekati

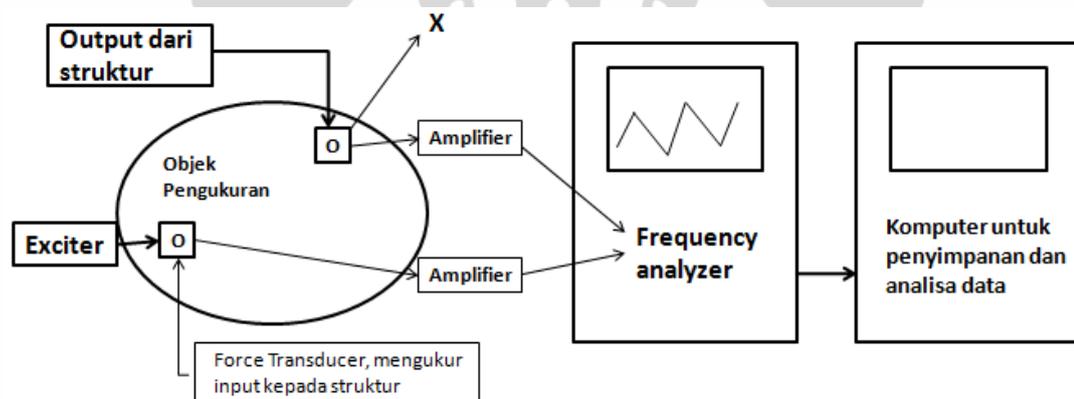
atau sama dengan besar frekuensi natural (asumsi data frekuensi natural dan rasio redaman telah diketahui), maka persamaan tersebut menjadi untuk moda ke-n :

$$|\varphi_{pn}\varphi_{in}| = |2\zeta_n\omega_n^2| |H_{pi}(\omega_n)| \quad (2.4.14)$$

Dengan persamaan diatas kita mampu meng-ekstrak moda getar untuk tiap moda. Namun persamaan diatas hanya mendeskripsikan perubahan gerak suatu elemen saja, sehingga untuk mendapatkan moda getar yang akurat diperlukan banyak pengukuran (pada beberapa titik).

2.4.4 Proses Umum Pengukuran

Pengukuran dinamik dilakukan dengan berbagai macam cara, sesuai dengan tujuan data yang dibutuhkan, ataupun tipe eksitasi yang diberikan kepada struktur dll. Namun secara umum, proses pengukuran dinamik dapat dijelaskan oleh gambar dibawah ini^[17]:



Gambar 4. Skema Umum Pengukuran Dinamik

Suatu sistem struktur dieksitasi suatu gaya (input) yang menghasilkan respon(output). Input dan output diukur oleh *transducer* dan *accelerator* yang kemudian sinyalnya diperbesar oleh *amplifier*. Untuk mengukur input dan output biasanya digunakan elemen *strain gage sensing* ataupun sensor piezoelectric yang merubah respon fisik (deformasi, kecepatan ataupun percepatan) menjadi sinyal elektrik.

Kemudian setelah amplifikasi sinyal, sinyal dianalisa secara otomatis oleh *frequency analyzer*, dan hasil yang didapatkan dianalisa lebih mendalam oleh tenaga ahli dan kemudian disimpan untuk keperluan lebih lanjut.

Exciter menjadi suatu komponen yang memberikan suatu eksitasi gaya dengan besaran dan frekuensi yang cukup untuk menggetarkan suatu sistem struktur. Dua tipe *exciter* yang paling sering digunakan adalah *hammer* dan *shaker*.

Hammer secara keseluruhan terdiri atas ujung palu (*hammer tip*), *force transducer*, penyeimbang massa dan gagang *hammer*. Untuk mengontrol frekuensi dari gaya eksitasi *hammer* yang diberikan pada struktur adalah dengan memodifikasi jenis material yang digunakan pada ujung (*tip*) dari *hammer*. Tipe eksitasi ini mudah untuk diaplikasikan dan sederhana namun bentang frekuensi eksitasi tidak terlalu besar. Selain itu beban yang diberikan oleh *hammer* mampu merusak bagian struktur yang bersentuhan langsung dengan *hammer*.

Kemudian untuk *shaker* (*electrodynamic shaker* yang sering digunakan pada *modal testing*), tipe eksitasi ini memiliki rentang frekuensi eksitasi yang cukup besar. Apabila dibutuhkan eksitasi untuk besaran yang besar dan rentang frekuensi eksitasi yang pendek, maka dianjurkan untuk menggunakan *electrohydraulic exciter*.

2.4.5 Pengukuran Dengan Ambient Excitation

Pada bagian ini akan dibahas lebih mendalam salah satu contoh eksitasi struktur yang telah disebutkan diatas sebagai cara untuk mendapatkan atau mengekstraksi properti modal atau properti dinamik dari suatu struktur secara general. Dimana penjelasan akan difokuskan kepada *ambient excitation*.

Tipe eksitasi lainnya adalah *forced excitation vibration*. Dimana gaya artifisial tertentu digunakan untuk mengeksitasi getaran pada struktur sehingga properti modal dari struktur tersebut dapat diketahui. Kata “artifisial tertentu” disini memiliki artian bahwa gaya luar yang diberikan kepada struktur untuk bergetar adalah gaya yang besarnya telah ditentukan pada titik tertentu pada struktu, yang kemudian responnya diukur oleh alat pengukur seperti *accelerometer*. Lalu kemudian FRF yang merupakan hubungan antara gaya

eksitasi atau pembebanan dengan respon struktur akan memberikan data properti modal yang kita butuhkan dengan berbagai macam metode analisa, salah satunya yang telah dijelaskan diatas.

Forced excitation vibration banyak digunakan untuk struktur jembatan dan cukup berhasil memberikan properti dinamik yang dibutuhkan. Namun muncul metode eksitasi baru, yaitu *ambient excitation*. Metode ini telah dibuktikan oleh beberapa penelitian bahwa memiliki hasil yang relatif seirama dengan hasil *forced excitation vibration*^[18]. Kemudian muncul batasan untuk getaran paksa, yaitu kesulitan untuk mengeksitasi struktur dengan frekuensi natural dibawah 1 Hz, dibutuhkan peralatan berat sehingga kesulitan dalam aplikasi serta biaya yang cukup mahal, lalu penjalaran gaya akibat gaya paksa biasanya tidak serupa dengan penjalaran gaya akibat gempa yang biasanya menjadi permasalahan utama dalam dinamika struktur. Sehingga dengan menutupi semua kekurangan yang dimiliki eksitasi getaran paksa, *ambient excitation* berubah dari alternatif menjadi pilihan utama dalam *modal testing*^[19].

Struktur teknik sipil seperti gedung selalu bergetar akibat angin, getaran kecil pada tanah (*microtremors, microseism*), eksitasi yang disebabkan oleh kegiatan manusia dll. Getaran kecil (*ambient vibration*) pada tanah biasanya disebabkan oleh perilaku alam seperti gelombang laut atau kondisi atmosfer pada frekuensi yang rendah (dibawah 1 Hz) dan gelombang getaran yang disebabkan oleh aktifitas manusia (lalu lintas, industri dll) pada frekuensi > 1Hz. Getaran pada tanah yang disebabkan oleh hal-hal diatas dapat diklasifikasikan sebagai *white noise input* (sinyal acak) yang berada pada rentangan frekuensi dari gedung-gedung pada biasanya yaitu kira-kira antara 1 hingga 10 Hz.

Dari sini dapat kita simpulkan bahwa, gaya yang diberikan pada struktur untuk bergetar tidak diketahui secara pasti, sehingga analisa properti modal dilakukan dengan hanya menggunakan hasil pengukuran respon getaran dilokasi dimana *accelerometer* diletakkan (*output-only modal identification*). Selain itu, dikarenakan getaran yang terjadi memiliki amplitudo yang kecil, maka getaran yang disebabkan oleh tipe eksitasi ini dapat menjelaskan perilaku getaran linier dari struktur dan tentunya memenuhi asumsi awal untuk proses penentuan lokasi

dan besar kerusakan struktur dengan menggunakan properti modal. Kemudian perlu diperhatikan bahwa getaran yang kecil akan menghasilkan respon yang kecil juga, sehingga untuk metode ini diperlukan sensor yang cukup sensitif. Sebagai contoh Zhang Lingmi dkk (2002) menggunakan sensor dengan sensitifitas tinggi dan resolusi akselerasi 10^{-6} V/g^[20].

Dalam pengukuran, pengukuran dilakukan selama satu rentang waktu dan peletakan sensor harus disesuaikan dengan kebutuhan (untuk mengetahui pergerakan translasi dan torsi). Dari beberapa penelitian yang dilakukan, diperlukan puluhan sensor untuk mendapatkan hasil yang baik. Dan juga perlu diperhatikan, untuk setiap pengukuran diletakkan beberapa sensor acuan atau referensi, dikarenakan *ambient excitation vibration* ini disebabkan oleh gaya yang tidak diketahui secara pasti.

Sebagai contoh adalah pengukuran gedung perkantoran 15 lantai yang terletak di daerah Ichiga Tokyo Jepang. Dimana dipergunakan 48 sensor. Untuk pengukuran secara keseluruhan, digunakan instrumen dengan 14 saluran. Sehingga proses pengukuran dibagi menjadi 4 *setup* pengukuran. Dimana untuk setiap *setup*, dua *accelerometer* difungsikan sebagai acuan atau referensi. Kemudian, setiap *setup* dilakukan dalam waktu 1800 detik dan secara keseluruhan hanya dibutuhkan 6 jam waktu pengukuran. Hasil yang didapat adalah properti modal yang seirama dengan hasil modelisasi elemen hingga dari moda 1 hingga ke moda ke-9^[19].

Namun, dalam proses identifikasi kerusakan pada struktur, penggunaan pengukuran properti modal struktur dengan *ambient excitation vibration*, masih memiliki beberapa kekurangan yang harus ditangani, yaitu^[21] :

- Kerusakan dengan sensitifitas yang rendah
Properti modal juga dipengaruhi oleh kerusakan lokal, namun properti modal tidak terlalu sensitif terhadap kerusakan dengan tipe ini. Sehingga diperlukan pengukuran yang sangat akurat untuk melakukan identifikasi kerusakan dengan tipe lokal.
- Kompleksitas dari algoritma untuk identifikasi kerusakan

Untuk mendapatkan hasil pengukuran yang akurat, diperlukan banyak sensor dan terlebih lagi, algoritma yang berdasarkan pada hasil penelitian sampai saat ini mengasumsikan bahwa struktur masih bersifat linier, sedangkan tidak menutup kemungkinan struktur telah bersifat non-linier terlebih setelah terjadi kerusakan.

- Faktor lain yang mempengaruhi properti modal selain kerusakan
Perubahan properti modal suatu struktur juga dapat dipengaruhi oleh faktor diluar kerusakan, seperti faktor lingkungan (panas, perubahan konfigurasi massa akibat salju dll), serta perubahan kondisi batas seiring dengan waktu. Pengaruh panas mampé menambahkan beban aksial pada struktur sehingga kekakuan struktur berubah. Begitu juga dengan kondisi batas (tumpuan).

Dengan penguraian kekurangan metode pengukuran ini, maka jelas bahwa metode pengukuran beserta algoritma identifikasi kerusakan secara general harus terus dikembangkan.

2.5 METODE ELEMEN HINGGA^[22]

Metode elemen hingga (MEH) adalah suatu metode numerik yang kuat dalam modelisasi mekanik yang menggunakan metode variasional dan metode interpolasi. Metode ini cukup berguna dalam memodelkan sistem struktur mekanik yang cukup rumit secara geometrik. MEH juga sangat sistematis sehingga sangat cocok jika diimplementasikan dengan penggunaan komputer.

MEH memodelkan struktur yang rumit menjadi potongan-potongan kecil. Potongan-potongan kecil ini disebut dengan elemen hingga (*finite elements*) dan prosedur pemotongan struktur disebut dengan diskretisasi. Setiap elemen merupakan elemen-elemen sederhana yang dapat berupa batang, balok ataupun pelat yang mana persamaan gerak dapat diselesaikan dengan mudah untuk tiap elemennya. Setiap elemen memiliki titik nodal (*node*) yang menjadi suatu penghubung antara satu elemen dengan elemen lainnya, yang mana tiap nodal mengandung DOF (*degree of freedom*) yang menentukan respon elemen dan

respon global dari sistem. Kelompok dari elemen-elemen dan nodal-nodal disebut dengan *mesh* elemen hingga atau *grid* elemen hingga.

Setelah persamaan gerak tiap elemen diselesaikan, yang mana solusi dari persamaan elemen tersebut diaproksimasi dengan penggunaan kombinasi linier dari polinomial-polinomial orde rendah. Lalu kemudian, solusi-solusi polinomial tiap elemen tersebut dihubungkan dengan elemen yang berdekatan melalui nodal yang bersinggungan. Proses berikutnya adalah membentuk suatu solusi global dari solusi per elemen yang merupakan matriks massa dan matriks kekakuan global yang mendeskripsikan perilaku dinamik suatu sistem struktur secara global. Kemudian solusi akhir adalah vektor perpindahan $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ yang mendeskripsikan perpindahan setiap nodal yang didefinisikan.

Untuk penelitian ini, kita hanya akan membahas secara singkat mengenai MEH pada elemen batang dan struktur portal.

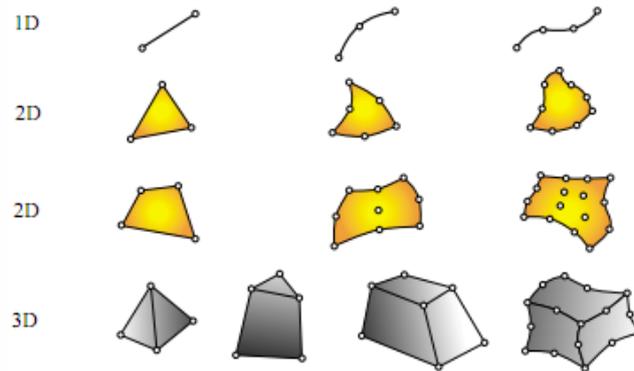
2.5.1 Atribut-Atribut Elemen^[23]

Telah disebutkan diatas beberapa istilah metode elemen hingga, pada sub-bab ini akan dibahas secara singkat mengenai atribut-atribut yang mendefinisikan elemen yang kita pilih dalam memodelisasikan suatu sistem struktur dengan menggunakan metode elemen hingga.

- Dimensi Elemen

Elemen dapat memiliki dimensi intrinsik satu, dua ataupun tiga dimensi. Terdapat juga elemen spesial dengan nol dimensi, seperti pegas terpusat (*lumped springs*) dan titik massa.

Lalu elemen-elemen tersebut dapat dirangkai menjadi suatu sistem struktur yang memiliki dimensi 2 atau 3, sebagai contoh elemen 1D seperti rangka dapat dirangkai menjadi sistem struktur 2D atau 2D.



Gambar 5 Dimensi Intrinsik Elemen

Sumber : <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/>

- **Nodal**
Setiap elemen memiliki satu set poin-poin yang disebut dengan nodal. Nodal memiliki 2 fungsi, yaitu fungsi geometris yang menjadi pembatas antara satu elemen dengan elemen lainnya dan fungsi penghubung, dimana pada tiap nodal terkandung satu set DOF.

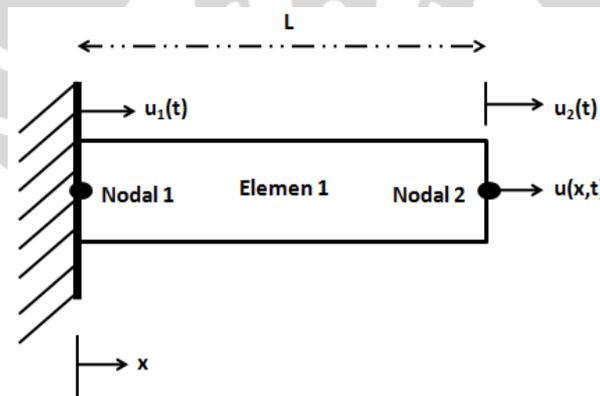
Nodal-nodal pada elemen biasanya diletakkan pada ujung-ujung atau titik sudut suatu elemen, namun nodal dapat juga berada sisi-sisi suatu elemen ataupun bagian dalam elemen yang bertujuan untuk mendapatkan hasil aproksimasi yang lebih baik.
- **Geometri**
Geometri dari suatu elemen didefinisikan oleh peletakkan nodal geometri yang memisahkan suatu elemen dengan elemen lainnya dan memberikan bentuk terhadap elemen tersebut (**cf. Gambar 5**).
- **DOF (*Degrees of Freedom*)**
DOF (*Degrees of Freedom*) terkandung didalam setiap nodal suatu elemen, sehingga menjadi penghubung antara satu elemen dengan elemen yang lainnya. DOF juga mendefinisikan kondisi dari suatu elemen, dimana dalam mekanika struktur DOF mendefinisikan arah perpindahan suatu nodal dari suatu elemen.
- **Gaya-gaya Nodal**

Gaya-gaya nodal berkorespondensi dengan perpindahan yang terjadi sesuai dengan DOF pada suatu nodal.

- **Properti Mekanik**
Pada umumnya semua elemen mekanik memiliki properti mekanik yang menjelaskan perilaku mekaniknya, seperti modulus elastisitas (E) atau koefisien ekspansi terhadap panas (α).
- **Properti Fabrikasi**
Properti-properti yang dimaksud adalah properti fisik seperti luasan penampang dari satu balok ataupun ketebalan dari suatu pelat.

2.5.2 Matriks Kekakuan dan Matriks Massa Elemen Batang

Elemen batang bergetar secara longitudinal, elemen ini merupakan elemen paling sederhana dalam metode elemen hingga. Perhatikan gambar berikut (elemen batang dengan dua nodal):



Gambar 6. Elemen Batang 2 Nodal

Perpindahan tiap titik nodal bergantung terhadap dua variabel, yaitu variabel spasial dan variabel waktu ($u(x,t)$).

Perpindahan statis (independen terhadap waktu) dari elemen batang diatas harus memenuhi persamaan berikut :

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0 \quad (2.5.1)$$

Untuk tiap nilai x dalam interval 0 sampai dengan L , pers. (2.5.1) dapat diintegrasikan secara langsung, sehingga :

$$u(x) = c_1x + c_2 \quad (2.5.2)$$

c_1 dan c_2 adalah konstanta, namun dapat berupa variabel lain, dalam hal ini t (waktu).

Pada tiap nodal, nilai u bergantung terhadap waktu, sehingga seperti tertulis pada gambar $u_1(t)$ dan $u_2(t)$. Fungsi perpindahan yang bergantung terhadap waktu ini harus diselesaikan untuk menjelaskan getaran atau perpindahan secara longitudinal dari elemen batang yang kita tinjau.

Kedua fungsi spasial $u_i(x)$ dan temporal $u_i(t)$ dihubungkan melalui nodal-nodal sebagai batasan (*boundary*) untuk mengevaluasi konstanta spasial pada pers. (2.5.2). Pada $x=0$, pers. (2.5.2) menjadi :

$$u(0) = u_1(t) = c_1(0) + c_2 \quad t \geq 0 \quad (2.5.3)$$

Sehingga $c_2 = u_1(t)$. Sama halnya pada $x=L$, pers. (2e) menjadi :

$$u(L) = u_2(t) = c_1L + c_2 \quad (2.5.4)$$

Sehingga $c_1 = [u_2(t) - u_1(t)]/L$. Kemudian hasil ini disubstitusikan kembali ke pers. (2.5.2), sehingga didapatkan pendekatan solusi perpindahan secara spasial dan temporal $u(x,t)$, yaitu :

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1(t) + \frac{x}{L} u_2(t) \quad (2.5.5)$$

Jika nilai $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ diketahui, pers. (2.5.5) dapat memberikan aproksimasi dari penyelesaian persamaan batang. Fungsi koefisien $(1-x/L)$ dan (x/L) disebut sebagai fungsi bentuk (*shape function*), dikarenakan fungsi-fungsi tersebut menjelaskan distribusi spasial atau bentuk dari solusi $u(x,t)$.

Kemudian kita meninjau energi yang dihubungkan dengan aproksimasi solusi elemen batang pada pers. (2.5.5). Energi regangan (*strain energy*) suatu elemen batang diberikan oleh persamaan berikut:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (2.5.6)$$

Substitusikan pers. (2.5.5) ke dalam pers. (2.5.6), maka :

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{EA}{L^2} [-u_1(t) + u_2(t)]^2 dx = \frac{EA}{2L} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) \quad (2.5.7)$$

Persamaan diatas dapat direpresentasikan sebagai produk transpos dari vektor $\mathbf{u}(t)$, yaitu :

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.5.8)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (2.5.9)$$

Dimana \mathbf{k} adalah matriks kekakuan elemen batang, yang mana besarnya adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.10)$$

Untuk mengetahui matriks massa untuk elemen batang, kita akan meninjau terlebih dahulu energi kinetik dari elemen batang, yaitu :

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L A\rho(x) \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (2.5.11)$$

Dimana $\rho(x)$ adalah densitas (massa persatuan luas) dari elemen batang. Dan masih menggunakan pers. (2.5.5), maka :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \dot{u}_1(t) + \frac{x}{L} \dot{u}_2(t) \quad (2.5.12)$$

Dengan mengasumsikan bahwa densitas batang adalah konstan terhadap x , maka :

$$T(t) = \frac{1}{2} \frac{\rho AL}{3} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{u}_2^2) \quad (2.5.13)$$

Persamaan diatas dapat direpresentasikan kedalam bentuk produk transpos dari vektor kecepatan elemen batang yaitu :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.5.14)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.5.15)$$

\mathbf{m} adalah matriks massa elemen batang yang didefinisikan berdasarkan persamaan diatas sebagai:

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.5.16)$$

Lalu kita kembali menilik ke pers. (2.1.1) untuk kondisi tanpa redaman, maka :

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.5.17)$$

Dengan mengaplikasikan pers. (2.5.10) dan pers. (2.5.17) pada persamaan diatas, maka:

$$\frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.5.18)$$

Sesuai dengan kondisi batas (balok kantilever), maka $u_1(t) = 0$ dan $\ddot{u}_1(t) = 0$, sehingga :

$$\ddot{u}_2(t) + \frac{3E}{\rho L^2} u_2(t) = 0 \quad (2.5.19)$$

Persamaan diatas juga dapat diturunkan dengan menggunakan pendekatan variasional atau Lagrangian.

Dari persamaan diatas hanya tersisa perpindahan pada nodal ke-2 yang harus diketahui. Dengan memanfaatkan penyelesaian persamaan differensial orde dua, maka persamaan diatas dapat diselesaikan menjadi persamaan berikut :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{3E}{\rho}} \quad (2.5.20)$$

$$u_2(t) = \sqrt{u_o^2 + \left(\frac{\dot{u}_o}{\omega_n}\right)^2} \sin\left(\omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n \dot{u}_o}{u_o}\right) \quad (2.5.21)$$

Proses penyelesaian kasus diatas adalah untuk sistem elemen hingga yang hanya terdiri dari satu elemen, dua nodal yang mana satu ujung bebas dan satu ujung kantilever (*clamped*). Sehingga untuk sistem yang lebih rumit dengan kondisi batas berbeda, proses analisa juga berbeda, namun memiliki dasar yang sama.

2.5.3 Matriks Massa Terpusat

Matriks massa yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya disebut dengan matriks massa konsisten, dimana matriks tersebut diturunkan melalui pendefinisian fungsi bentuk (*shape function*) yang dihubungkan dengan perpindahan statis pada elemen batang. Sedangkan yang dimaksud dengan matriks massa terpusat adalah matriks yang mendefinisikan massa dari suatu elemen terpusat hanya pada nodal-nodalnya saja.

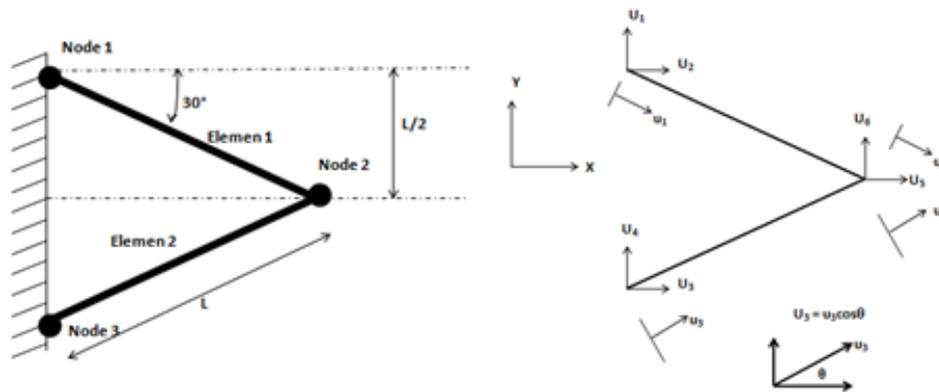
Sehingga untuk elemen batang, diasumsikan massa elemen terpusat dan terbagi pada kedua nodalnya. Asumsi ini mnghasilkan suatu model yang relatif lebih mudah untuk dihitung, dikarenakan matriks massa tipe ini bertipe matiks diagonal. Namun penggunaan matriks massa mampu menyebabkan berkurangnya akurasi dari hasil analisa atau perhitungan. Berikut adalah maktriks massa terpusat untuk elemen batang :

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.22)$$

2.5.4 Transformasi Sistem Koordinat Lokal Menuju Sistem Koordinat Global

Sistem struktur yang kompleks, memiliki jumlah elemen yang banyak, walaupun biasanya hanya terdiri dari satu atau beberapa jenis elemen (batang, balok dan pelat). Bagian sebelumnya menjelaskan matriks kekakuan dan massa elementer, dimana hanya ditinjau koordinat lokal dari satu elemen. Tetapi dalam aplikasinya, MEH mencoba mengintegrasikan keseluruhan elemen untuk mendapatkan solusi yang berupa perpindahan, tegangan, percepatan, matriks kekakuan dan massa dll ke dalam suatu sistem koordinat global. Sehingga hasil perhitungan per-elemen pada koordinat lokal harus ditransformasikan ke dalam sistem koordinat lokal.

Untuk menjelaskan permasalahan ini, kita akan mengambil contoh sistem struktur sederhana yang terdiri dari dua elemen batang seperti berikut :



Gambar 7. Struktur dengan 2 Elemen Batang

Sistem struktur terdiri dari dua elemen batang, sistem struktur seperti ini sering disebut dengan rangka batang (*trusses*). Didefinisikan oleh tiga nodal, hal ini disebabkan kedua elemen berhubungan. Sehingga u_2 dan u_4 pada nodal 2 adalah identik.

Yang dimaksud dengan sistem koordinat lokal adalah sistem koordinat dua dimensi (untuk kasus ini), arah x untuk sumbu yang sejajar dengan elemen dan arah y untuk yang tegak lurus dengan elemen. Sedangkan sistem koordinat global adalah sistem koordinat referensi yang telah ditentukan sebelumnya (X - Y). Sehingga perpindahan tiap nodal pada elemen dapat didefinisikan kedalam dua sistem koordinat ini. Kemudian hal yang harus kita lakukan adalah bagaimana kita mentransformasikan solusi pada sistem koordinat lokal ke global.

Pada kasus ini koordinat lokal dilambangkan dengan u_i dan koordinat global U_i . Apabila kita lihat elemen 2 yang perpindahannya didefinisikan oleh u_3 dan u_4 secara lokal dan didefinisikan oleh U_3 , U_4 , U_5 dan U_6 secara global. Dengan melihat proyeksi koordinat global pada arah koordinat lokal (u_3 dan u_4), maka :

$$u_3(t) = U_3 \cos \theta + U_4 \sin \theta$$

$$u_4(t) = U_5 \cos \theta + U_6 \sin \theta \quad (2.5.23)$$

Dimana θ adalah sudut antara koordinat global X-Y dan koordinat lokal yang sejajar dengan arah longitudinal batang. Kemudian persamaan diatas dapat ditulis secara matriasil sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3(t) \\ U_4(t) \\ U_5(t) \\ U_6(t) \end{bmatrix} \quad (2.5.24)$$

Atau secara simbolis :

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{U}_2(t) \quad (2.5.25)$$

Dimana $\mathbf{\Gamma}$ adalah matriks transformasi koordinat dari lokal ke global dan $\mathbf{U}_2(t)$ adalah vektor koordinat global pada elemen 2 yang kita tinjau. Lalu $\mathbf{u}_2(t)$ adalah vektor koordinat lokal pada elemen 2.

Persamaan energi kinetik dan potensial elemen 2 dapat ditulis dalam dua cara, yang mana nilainya harus sama. Sehingga persamaan energi dapat ditulis dalam kedua sistem koordinat yang memiliki nilai yang sama. Berikut adalah persamaan energi regangan (*strain energy*) dalam koordinat lokal dan global :

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{K}_e \mathbf{\Gamma} \mathbf{U} \quad (2.5.26)$$

\mathbf{K}_e adalah matriks kekakuan elemen pada koordinat lokal. Sehingga matriks kekakuan elemen 2 pada koordinat global adalah :

$$\mathbf{K}_{(2)} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{K}_e \mathbf{\Gamma} \quad (2.5.27)$$

Berikut contoh perhitungan matriks kekakuan elemen 2 dan 1 pada koordinat global :

$$\mathbf{K}_{(2)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.5.28)$$

$$\mathbf{K}_{(2)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.5.29)$$

Lalu untuk elemen 1 :

$$u_1(t) = U_1 \cos \theta - U_2 \sin \theta$$

$$u_2(t) = U_5 \cos \theta - U_6 \sin \theta \quad (2.5.30)$$

Kemudian matriks elemen 1 untuk koordinat global adalah :

$$\mathbf{K}_{(1)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.5.31)$$

Matriks kekakuan untuk elemen 1 dan 2 diatas merujuk pada vektor yang merepresentasikan koordinat global pada tiap nodal yang ada elemen masing-masing (4 untuk tiap-tiap elemen). Apabila kita ingin menggabungkan kesemua matriks kekakuan elemen menjadi suatu matriks kekakuan global, maka semua komponen koordinat global pada tiap nodal harus dirujuk, untuk kasus ini $\mathbf{U} = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6]^T$. Sehingga:

$$\mathbf{K}'_{(1)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & -\cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.5.32)$$

$$\mathbf{K}'_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \theta & 0 & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ 0 & 0 & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.5.33)$$

Pada matriks kekakuan global untuk elemen 1, nilai-nilai 0 disebabkan pada elemen ini tidak memiliki hubungan dengan komponen koordinat global U_3 dan U_4 , hal ini berlaku juga pada elemen 2.

Kemudian untuk mendapatkan suatu matriks kekakuan yang merepresentasikan kekakuan sistem struktur secara keseluruhan, kedua matriks kekakuan koordinat global untuk tiap elemen dijumlahkan. Sehingga :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{KU} &= (\mathbf{K}'_{(1)} + \mathbf{K}'_{(2)})\mathbf{U} \\
 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.4330 & 0 & 0 & -0.75 & 0.4330 \\ -0.4330 & 0.25 & 0 & 0 & 0.4330 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.4330 & -0.75 & -0.4330 \\ 0 & 0 & 0.4330 & 0.25 & -0.4330 & -0.25 \\ -0.75 & 0.4330 & -0.75 & -0.4330 & 1.5 & 0 \\ 0.4330 & -0.25 & -0.4330 & -0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.5.34}$$

Dengan memperhatikan kondisi batas, dimana $U_1=U_2=U_3=U_4=0$, maka persamaan diatas menjadi:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}
 \tag{2.5.35}$$

Dengan memanfaatkan persamaan gerak dinamik serta matriks mass terpusat , maka :

$$\rho AL \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_5 \\ \ddot{U}_6 \end{bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \mathbf{0}
 \tag{2.5.36}$$

Sehingga frekuensi natural sistem struktur rangka batang ini dengan pendekatan elemen hingga adalah :

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{0.5E}{\rho}} \\
 \omega_2 &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1.5E}{\rho}}
 \end{aligned}
 \tag{2.5.37}$$

Apabila kita amati, untuk contoh struktur 1 elemen dan 2 elemen, jumlah frekuensi natural yang mampu dihitung adalah sama dengan jumlah elemen.

Sehingga ini menjadi suatu petunjuk bahwa semakin banyak elemen yang ada pada sistem struktur, akan semakin akurat pendekatan yang kita lakukan.

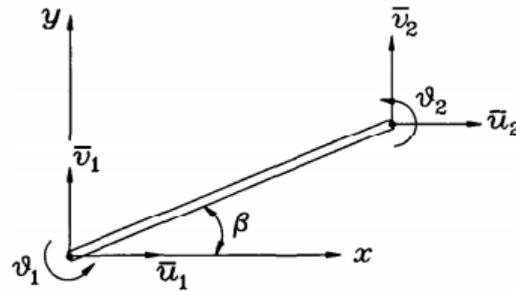
2.5.5 Matriks Kekakuan dan Massa Untuk Elemen Struktur Portal

Struktur portal merupakan suatu sistem struktur yang terdiri dari balok-balok yang terhubung secara bersama-sama. Elemen penyusun struktur portal pada umumnya terbebani oleh beban lentur dan beban aksial, sehingga terdapat dua deformasi aksial (u_i, v_i) dan deformasi putaran sudut (θ_i). Dan kemudian matriks kekakuan elemen untuk struktur portal dapat dibentuk berdasarkan prinsip superposisi kekakuan aksial dan kekakuan lentur. Berikut adalah matriks kekakuan elemen untuk sistem struktur portal 2D yang menggunakan elemen balok hermitian^[24].

$$\mathbf{k}_e = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I & 6IL & 0 & -12I & 6IL \\ 0 & 6IL & 4IL^2 & 0 & -6IL & 2IL^2 \\ -AL^2 & 0 & 0 & AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I & -6IL & 0 & 12I & -6IL \\ 0 & 6IL & 2IL^2 & 0 & -6IL & 4IL^2 \end{bmatrix} \quad (2.5.38)$$

Urutan untuk DOF secara kolom dan baris dari matriks kekakuan elemen diatas adalah $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2$ dan θ_2 .

Matriks kekakuan elemen diatas ditujukan untuk koordinat lokal dari elemen tersebut. Apabila kita menetapkan arah koordinat kartesian sebagai koordinat acuan atau koordinat dan ingin merepresentasikan hasil analisa kedalam koordinat global tersebut, maka suatu matriks elemen harus dikalikan dengan suatu matriks transformasi koordinat (cf. 2.5.27).



Gambar 8. Koordinat Lokal dan Global Elemen

Sumber : The Finite Element Method Using MATLAB

Sehingga matriks transformasi koordinat untuk struktur portal dimana β adalah sudut yang terbentuk antara koordinat lokal dan global adalah sebagai berikut :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.39)$$

Kemudian, matriks kekakuan elemen dalam koordinat global dapat dihitung melalui persamaan berikut :

$$K_e = \Gamma^T \cdot k_e \cdot \Gamma \quad (2.5.40)$$

Lalu berikut adalah matriks massa konsisten per-elemen untuk koordinat lokal :

$$m = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L^2 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.5.41)$$

Untuk membentuk matriks massa elemen dalam koordinat global, langkah yang serupa harus ditempuh seperti yang dilakukan untuk mendapatkan matriks kekakuan elemen dalam koordinat global.