

BAB 2 STABILITAS SISTEM TENAGA LISTRIK

2.1. Pengertian Stabilitas ¹⁾

Suatu sistem tenaga listrik yang baik harus memenuhi beberapa syarat, seperti : ”**Reliability, Quality dan Stability**”.

* **Reliability** adalah :

”Kemampuan suatu sistem untuk menyalurkan daya atau energi secara terus menerus”.

* **Quality** adalah :

”Kemampuan sistem tenaga listrik untuk menghasilkan besaran-besaran standart yang ditetapkan untuk tegangan dan frekuensi”.

* **Stability** adalah :

”Kemampuan dari sistem untuk kembali bekerja secara normal setelah mengalami suatu gangguan”.

Dalam sistem tenaga listrik yang baik maka ketiga syarat tersebut harus dipenuhi yaitu sistem harus mampu memberi pasokan listrik secara terus menerus dengan standar besaran untuk tegangan dan frekuensi sesuai dengan aturan yang berlaku dan harus segera kembali normal bila sistem terkena gangguan.

Untuk jaringan yang sangat kompleks dimana beberapa pembangkit saling terkoneksi satu sama lain maka keluaran daya elektris berupa besaran seperti tegangan dan frekuensi haruslah diperhatikan agar tidak ada pembangkit yang kelebihan beban dan pembangkit yang lain bebannya kecil.

Sistem tenaga listrik mempunyai variasi beban yang sangat dinamis dimana setiap detik akan berubah-ubah, dengan adanya perubahan ini pasokan daya listrik tetap dan harus disupply dengan besaran daya yang sesuai, bila pada saat tertentu terjadi lonjakan atau penurunan beban yang tidak terduga maka perubahan ini sudah dapat dikategorikan ke dalam gangguan pada sistem tenaga listrik yakni kondisi tidak seimbang antara pasokan listrik dan permintaan energi listrik akibat adanya gangguan baik pada pembangkit ataupun pada sistem

transmisi sehingga mengakibatkan kerja dari pembangkit yang lain menjadi lebih berat. Untuk itu diperlukan satu penelaahan kestabilan agar pembangkit yang terganggu tidak terlepas dari sistem.

Analisis kestabilan biasanya digolongkan kedalam tiga jenis, tergantung pada sifat dan besarnya gangguan yaitu :

- 1) Kestabilan keadaan tetap (*Steady State Stability*)
- 2) Kestabilan Dinamis (*Dynamic Stability*)
- 3) Kestabilan Peralihan (*Transient Stability*)

2.1.1. Kestabilan keadaan tetap

Kestabilan keadaan tetap adalah :

“Kemampuan sistem tenaga listrik untuk menerima gangguan kecil yang bersifat gradual, yang terjadi disekitar titik keseimbangan pada kondisi tetap”.

Kestabilan ini tergantung pada karakteristik komponen yang terdapat pada sistem tenaga listrik antara lain : Pembangkit, Beban, Jaringan transmisi, dan Kontrol sistem itu sendiri.

Model pembangkit yang digunakan adalah pembangkit yang sederhana (sumber tegangan konstan) karena hanya menyangkut gangguan kecil disekitar titik keseimbangan.

2.1.2. Kestabilan Dinamis

Kestabilan Dinamis adalah :

”Kemampuan sistem tenaga listrik untuk kembali ke titik keseimbangan setelah timbul gangguan yang relatif kecil secara tiba-tiba dalam waktu yang lama”

Analisa kestabilan dinamis lebih kompleks karena juga memasukkan komponen kontrol otomatis dalam perhitungannya.

2.1.3. Kestabilan Peralihan

Kestabilan Peralihan adalah :

”Kemampuan sistem untuk mencapai titik keseimbangan / sinkronisasi setelah mengalami gangguan yang besar sehingga sistem kehilangan stabilitas karena gangguan terjadi diatas kemampuan sistem”

Analisis kestabilan peralihan merupakan analisis yang utama untuk menelaah perilaku sistem daya misalnya gangguan yang berupa :

- 1) Perubahan beban yang mendadak karena terputusnya unit pembangkit.
- 2) Perubahan pada jaringan transmisi misalnya gangguan hubung singkat atau pemutusan saklar (*switching*).

Sistem daya listrik masa kini jauh lebih luas, ditambah interkoneksi antar sistem yang rumit dan melibatkan beratus-ratus mesin yang secara dinamis saling mempengaruhi melalui perantara jala-jala tegangan extra tinggi, mesin-mesin ini mempunyai sistem penguatan yang berhubungan.

Kisaran masalah yang dianalisis banyak menyangkut gangguan yang besar dan tidak lagi memungkinkan menggunakan proses kelinearan. Masalah kestabilan peralihan dapat lebih lanjut dibagi kedalam ”Kestabilan ayunan pertama (*first swing*) dan ayunan majemuk (*multi swing*).

Kestabilan ayunan pertama didasarkan pada model generator yang cukup sederhana tanpa memasukkan sistem pengaturannya, biasanya periode waktu yang diselidiki adalah detik pertama setelah timbulnya gangguan pada sistem. Bila pada sistem, mesin dijumpai tetap berada dalam keadaan serempak sebelum berakhirnya detik pertama, ini dikategorikan sistem masih stabil.

2.2. Persamaan Ayunan (Swing Equation)

Untuk melakukan analisis kestabilan suatu sistem tenaga listrik, maka hal pertama yang harus dilakukan adalah membangun model matematika yang dapat menggambarkan dinamika sistem tenaga listrik saat ada gangguan besar. Model matematika yang dipakai untuk pembangkit listrik adalah persamaan ayunan (*swing equation*)

Persamaan ayunan adalah persamaan yang mengatur gerakan rotor suatu mesin serempak didasarkan pada prinsip dalam dinamika yang menyatakan :

Universitas Indonesia

”Momen putar percepatan (*accelerating torque*) adalah hasil kali momen kelembaban (*moment of inertia*) rotor dan percepatan sudutnya”

Untuk generator serempak, persamaan ayunan ditulis⁸⁾ :

$$J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} = T_m - T_e \quad (2.1)$$

Dengan :

J = Momen inersia dari massa rotor ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)

θ_m = Pergeseran sudut rotor terhadap sumbu yang stasioner (radian-mekanis)

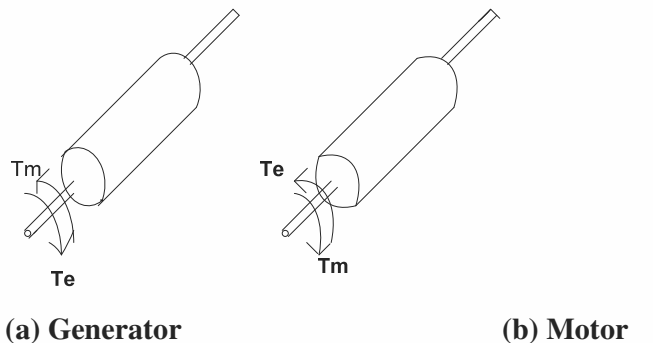
t = Waktu (detik)

T_m = Momen putar mekanis atau poros (penggerak) yang diberikan oleh penggerak mula dikurangi dengan momen putar perlambatan (*retarding*) yang disebabkan oleh rugi-rugi perputaran (N-m)

T_e = Momen putar listrik (N-m)

Jika T_m dan T_e dianggap positif untuk generator serempak berarti bahwa T_m adalah resultan momen putar poros yang mempunyai kecenderungan untuk mempercepat rotor dalam arah θ_m yang positif. Prinsip dasar ini diilustrasikan pada Gambar 2.1 berikut.

Untuk generator yang bekerja dalam keadaan diam maka $T_m = T_e$, dalam keadaan ini tidak ada percepatan ataupun perlambatan terhadap massa rotor, sedang kecepatan tetap resultan adalah kecepatan serempak. Bila terjadi gangguan akan menghasilkan suatu percepatan ($T_m > T_e$) atau perlambatan ($T_m < T_e$)



Gambar 2.1. Representasi suatu rotor mesin yang membandingkan arah perputaran serta medan putar mekanis dan listrik.

Karena θ_m diukur terhadap sumbu diam pada stator maka untuk mengukur posisi sudut rotor terhadap sumbu yang berputar dengan kecepatan sinkron maka :

$$\theta_m = \omega_{sm} t + \delta_m \quad (2.2)$$

Sehingga kecepatan putaran rotor :

$$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt} = \omega_{sm} + \frac{d\delta_m}{dt} \quad (2.3)$$

Dengan : ω_{sm} = Kecepatan serempak mesin (rad-mekanis / detik)

δ_m = Pergeseran sudut rotor terhadap sumbu yang berputar dalam kecepatan serempak (rad-mekanis)

$d\delta_m/dt$ = Penyimpangan kecepatan rotor keadaan serempak (rad/dtk)

Sehingga persamaan (2.1) dapat diubah menjadi :

$$J \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = T_m - T_e$$

Jika dikalikan dengan ω_m maka :

$$J \omega_m \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = (T_m - T_e) \omega_m = \omega_m T_m - \omega_m T_e$$

Jika kecepatan putar dikali torsi = daya, Maka

$$J \omega_m \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = P_m - P_e \quad (2.4)$$

Dengan : $J \omega_m$ = Momen sudut (momentum anguler) rotor dinyatakan dengan M.

Persamaan ayunan dalam hubungan dengan moment sudut adalah :

$$M \frac{d^2 \delta_m}{dt^2} = P_m - P_e \quad (2.5)$$

$$\text{Jika : } \delta = \frac{p}{2} \delta_m \text{ dan } \omega = \frac{p}{2} \omega_m \quad (2.6)$$

Dengan : δ = Parameter sudut daya listrik

p = Jumlah kutub generator serempak

δ_m = Sudut daya mekanik

Maka persamaan ayunan dalam hubungan sudut daya listrik :

$$J\omega_m \frac{d^2\delta_m}{dt^2} = \frac{2}{p} M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \dots\dots\dots (2.7)$$

Satu konstanta lain yang sering dijumpai dalam kelambanan adalah H didefinisikan :

$$H = \frac{\text{Energi kinetik dalam } M_j \text{ pada kecepatan serempak}}{\text{Rating Mesin (MVA)}}$$

$$\text{Atau : } H = \frac{\omega_k}{S_B} \dots\dots\dots (2.8)$$

Sehingga persamaan (2.7) jika diubah dalam satuan perunit (pu) :

$$\frac{2}{p} \frac{2H}{\omega_{sm}} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_{m(pu)} - P_{e(pu)} \dots\dots\dots (2.9)$$

Dengan : $P_{m(pu)}$ = Daya Mekanik perunit

$P_{e(pu)}$ = Daya elektrik perunit.

Hubungan kecepatan putar listrik dan kecepatan putar mekanik :

$$\omega_{sm} = (2/p) \omega_s$$

Sehingga persamaan (2.9) menjadi :

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_{m(pu)} - P_{e(pu)} \dots\dots\dots (2.10)$$

Dengan : ω_s = Kecepatan serempak dalam satuan listrik

ω_{sm} = Kecepatan serempak dalam satuan mekanik

Jika persamaan diatas diekspresikan dalam bentuk frekuensi f,

Dengan : $\omega_s = 2\pi f$

dan subscript perunit dihilangkan, sehingga daya dinyatakan dalam satuan perunit:

$$\frac{H}{\pi f} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_{m(pu)} - P_{e(pu)} \dots\dots\dots (2.11)$$

Bila δ dinyatakan dalam derajat listrik maka :

$$\frac{H}{180f} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \dots\dots\dots (2.12)$$

Persamaan (2.12) disebut persamaan ayunan mesin yaitu persamaan dasar yang mengatur dinamika (gerak) perputaran mesin serempak dalam kestabilan peralihan. Kita lihat bahwa persamaan tersebut adalah persamaan diffrensial orde dua yang dapat dituliskan menjadi dua buah persamaan orde satu dengan ω , ω_s .

$$\frac{2H}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e \quad (2.13)$$

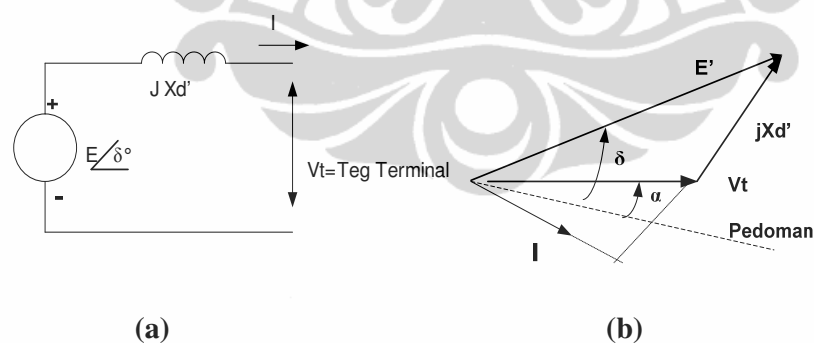
Dan
$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_s \quad (2.14)$$

Grafik dalam penyelesaian persamaan diatas disebut "Kurva Ayunan" (*swing curve*) mesin, dan dengan meneliti kurva ayunan semua mesin dalam sistem daya yaitu diselesaikan dalam besaran δ terhadap waktu, maka akan terlihat grafik penyelesaian mesin akan tetap serempak sekalipun terjadi gangguan.

2.3. Persamaan Sudut Daya^{1,8)}

Sudut daya adalah besarnya perbedaan sudut fasor antara tegangan pada bus pembangkit dengan tegangan di bus penerima. Suatu sistem yang mengalami gangguan akan membuat sudut daya menjadi membesar dan akan mengecil bila sudah distabilkan.

Untuk studi kestabilan peralihan, mesin serempak diwakili oleh tegangan dalam peralihannya (*Transient Internal Voltage*) E' yang terhubung seri dengan reaktansi peralihan X_d' .



Gambar 2.2. Diagram fasor mesin serempak untuk studi kestabilan peralihan

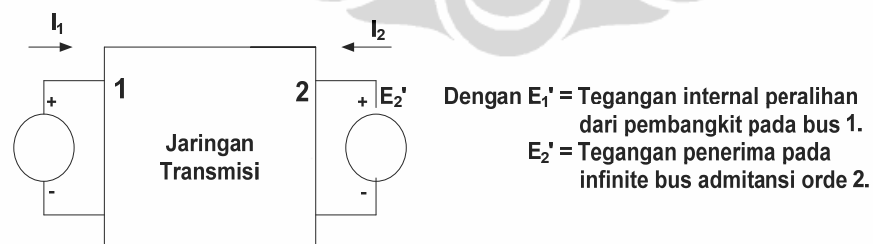
Gambar 2.2a. merepresentasikan satu mesin serempak yang diwakili oleh tegangan dalam transien (E') yang terhubung seri dengan reaktansi transien (X_d') dengan V_t adalah tegangan terminal, resistansi jangkar dapat diabaikan, diagram fasornya terlihat pada gambar 2.2b.

Untuk mempermudah penyelesaian permasalahan diperlukan beberapa asumsi anantara lain :

- 1) Masukan daya mekanis dari penggerak mula P_m dianggap konstan.
- 2) Keluaran daya listrik P_e dapat berubah sesuai dengan kecepatan rotor yang mengalami percepatan, perlambatan atau tetap pada kecepatan serempak.
- 3) Pada kondisi daya mekanik (P_m) sama dengan daya elektrik (P_e) mesin berkerja dalam kecepatan serempak kondisi tetap.
- 4) Bila P_e berubah dari nilai rotornya menyimpang dari kecepatan serempak artinya perubahan P_e ini ditentukan oleh keadaan aliran daya (*Load Flow Equation*) hal ini disebabkan karena pengaruh kecepatan mesin pada tegangan diabaikan.

Gangguan jaringan listrik yang disebabkan perubahan yang hebat atau oleh bekerjanya pemutus rangkaian (MCB) dapat mengakibatkan output generator (P_e) berubah dengan cepat sehingga menimbulkan perubahan elektromekanis.

Gambar 2.3. adalah gambaran skema generator yang mencatu daya melalui sistem tranmisi yang terdiri dari komponen rangkaian pasif linear seperti Transformator, saluran Transmisi, Kapasitor dan Reaktansi peralihan generator. Karena itu tegangan E_1' mewakili tegangan dalam transien generator pada rel 1, sedang E_2' pada ujung penerima dianggap sebagai tegangan tak hingga yang reaktansi peralihannya sudah dimasukkan dalam jaringan.



Gambar 2.3. Skema jaringan untuk studi kestabilan

Matrik admitansi rel untuk jala-jala jaringan pada gambar diatas dinyatakan dalam 2 buah simpul yaitu :

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

Sedang hubungan antara daya nyata dan daya reaktif dari kedua generator dirumuskan sebagai berikut :

$$P_1 - jQ_1 = E_1' (Y_{11} E_1')^* + E_1' (Y_{12} E_2')^* \quad (2.15)$$

$$\text{Jika : } E_1' = |E_1'| \angle \delta_1 \quad \text{dan} \quad E_2' = |E_2'| \angle \delta_2$$

$$Y_{11} = G_{11} + j B_{11}, \quad Y_{12} = |Y_{12}| \angle \theta_{12}$$

Akan diperoleh :

$$P_1 = |E_1'|^2 G_{11} + |E_1'| |E_2'| |Y_{11}| \cos(\delta_1 - \delta_2 - \theta_{12}) \quad (2.16)$$

$$Q_1 = -|E_1'|^2 B_{11} + |E_1'| |E_2'| |Y_{12}| \sin(\delta_1 - \delta_2 - \theta_{12}) \quad (2.17)$$

Persamaan serupa berlaku pada rel 2 dengan saling menukarkan subskrip pada kedua persamaan tersebut, jika kita buat $\delta = \delta_1 - \delta_2$ dan menetapkan sudut baru γ sedemikian rupa sehingga $\gamma = \theta_{12} - \pi/2$ didapat persamaan :

$$P_1 = |E_1'|^2 G_{11} + |E_1'| |E_2'| |Y_{12}| \sin(\delta - \gamma) \quad (2.18)$$

$$Q_1 = -|E_1'|^2 B_{11} - |E_1'| |E_2'| |Y_{12}| \cos(\delta - \gamma) \quad (2.19)$$

Sehingga pers.(2.18) dapat dituliskan lebih sederhana sbb:

$$P_e = P_c + P_{maks} \sin(\delta - \gamma)$$

$$\text{Dengan : } P_c = |E_1'|^2 G_{11}, \quad P_{maks} = |E_1'| |E_2'| |Y_{12}| \quad (2.20)$$

$$|E_1'| \quad \text{dan} \quad |E_2'| = \text{Konstan}$$

$$Y_{rel} = \text{Suseptansi}, \quad G_{11} \text{ dan } \gamma = \text{nol}$$

Karena P_1 mewakili keluaran daya listrik dari generator (rugi jangkar diabaikan) kita telah menggantinya dengan P_e pada gambar (2.20) yang disebut persamaan sudut daya, grafik yang dibuat sebagai fungsi δ dinamakan lengkung (kurva) sudut daya, untuk konfigurasi jaringan tertentu P_e , P_{maks} , $\gamma = \text{konstanta}$.

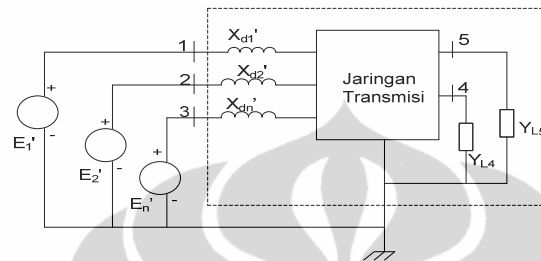
Persamaan sudut daya yang untuk jala-jala reaktansi murni adalah

$$P_e = P_{maks} \sin \delta \quad \text{dan} \quad P_{maks} = |E_1'| |E_2'| / X_{12} \quad (2.21)$$

X_T = Reaktansi transfer antara E_1' dan E_2'

2.4. Pemodelan Mesin Majemuk Studi Kestabilan Peralihan^{1,2)}

Penggambaran model sederhana sistem pembangkitan



Gambar 2.4. Sistem multi machine infinite bus (MMIB)

Langkah pertama dalam analisis peralihan mesin majemuk ini adalah harus diketahui nilai untuk daya aktif, daya reaktif, dan tegangan pada setiap rel generator dan rel beban dengan semua sudutnya yang diukur terhadap rel berayun.

Tegangan dalam peralihan

masing-masing generator kemudian dihitung dengan menggunakan persamaan :

$$E' = V_t + jX_d' I \quad (2.22)$$

Dengan : V_t = Tegangan terminal yang bersesuaian

I = Arus keluaran

X_d' = Reaktansi peralihan.

Masing-masing beban diubah menjadi admitansi konstan ke tanah pada relnya dengan menggunakan persamaan :

$$Y_L = \frac{P_L - jQ_L}{|V_L|^2} \quad (2.23)$$

Dengan : $P_L + jQ_L$ = Beban

V_L = Tegangan rel yang bersesuaian

Matriks admitansi rel dan admitansi beban shunt (seperti gambar 2.4 diatas) yang diubah dengan keadaan yang bersesuaian dengan jaringan yang mengalami gangguan yaitu sebelum gangguan, selama gangguan dan setelah gangguan.

Aliran daya ke dalam jala-jala dari setiap generator dihitung dari persamaan sudut daya yang bersesuaian yaitu

$$P_{ei} = \sum_{j=1}^n |E_i'| |E_j'| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.24)$$

$$P_{mi} = \sum_{j=1}^n |E_i'| |E_j'| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j)$$

$$E_i' = |E_i'| \angle \delta_i \quad \text{dan} \quad Y_{ij} = |Y_{ij}| \angle \theta_{ij}$$

Dengan : P_{ei} = Daya keluaran listrik generator i

P_{mi} = Daya masukan mekanik generator i

Misalnya daya listrik yang keluaran pada generator 1,2 di atas :

$$P_{e1} = |E_1'|^2 |Y_{11}| \cos \theta_{11} + |E_1'| |E_2'| |Y_{12}| \cos(\theta_{12} - \delta_1)$$

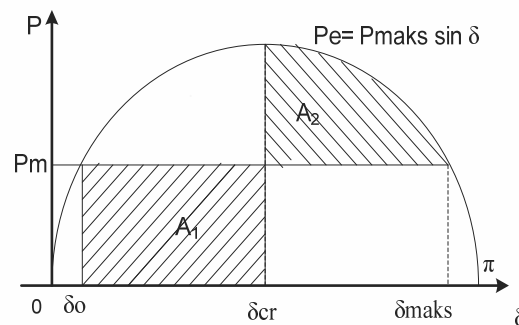
$$P_{e2} = |E_2'|^2 |Y_{22}| \cos \theta_{22} + |E_2'| |E_3'| |Y_{23}| \cos(\theta_{23} - \delta_2)$$

Persamaan sudut daya yang merupakan bagian dari persamaan ayunan dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{2H_i}{\omega_s} \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei} \quad (2.25)$$

Untuk melukiskan gerakan dari setiap rotor pada periode gangguan dan periode setelah gangguan, penyelesaiannya tergantung pada letak dan lamanya gangguan serta Y rel yang ditimbulkan bila saluran yang terganggu tersebut diputuskan.

2.5. Waktu pemutusan kritis⁷⁾



Gambar 2.5. Lengkung sudut daya yang menunjukkan sudut pemutusan kritis δ_{cr} . Luas A_1 dan A_2 adalah sama.

Pada Gambar 2.8, luas A_1 yang diarsir tergantung pada waktu yang diperlukan untuk menghilangkan gangguan. Jika ada keterlambatan dalam pemutusan gangguan ini, sudut δ_{cr} akan bertambah sehingga luas bagian yang diarsir A_1 dan juga bertambah, untuk mengembalikan rotor pada kecepatan serempak pada sudut ayunan maksimal δ_{maks} yang lebih besar.

Jika keterlambatan tersebut di atas diperpanjang sedemikian rupa sehingga sudut rotor δ berayun melebihi sudut δ_{maks} maka kecepatan rotor pada titik itu dalam lengkung sudut daya adalah lebih besar dari kecepatan serempak ketika didapat lagi daya percepatan positif. Dengan adanya pengaruh daya percepatan positif ini, sudut δ akan meningkat tanpa batas dan terjadilah ketidakstabilan. Oleh karena itu kita temukan sudut kritis untuk pemutusan (clearing) gangguan disebut *sudut pemutusan kritis δ_{cr} (critical clearing angle)*. Sedang waktu kritis yang diperlukan untuk menghilangkan gangguan disebut *waktu pemutusan kritis t_{cr} (critical clearing time)*.

Perhitungan untuk sudut pemutusan kritis dan waktu pemutusan kritis sebagai berikut, Luas segi empat A_1 adalah :

$$A_1 = \int_{\delta_0}^{\delta_{cr}} P_m d\delta = P_m (\delta_{cr} - \delta_0) \quad (2.26)$$

Sedangkan luas A_2 adalah :

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\delta_{cr}}^{\delta_{maks}} (P_{maks} \sin \delta - P_m) d\delta \\ &= P_{maks} (\cos \delta_{cr} - \cos \delta_{maks}) - P_m (\delta_{maks} - \delta_{cr}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dengan $A_1 = A_2$

$$P_m (\delta_{cr} - \delta_0) = P_{maks} (\cos \delta_{cr} - \cos \delta_{maks}) - P_m (\delta_{maks} - \delta_{cr}) \quad (2.28)$$

Atau : $\cos \delta_{cr} = (P_m / P_{maks}) (\delta_{maks} - \delta_0) + \cos \delta_{maks}$

$$\delta_{maks} = \pi - \delta_0 \text{ rad-listrik}$$

$$P_m = P_{maks} \sin \delta_0$$

Dengan memasukkan δ_{maks} dan P_m ke dalam persamaan (2.28) maka akan diperoleh :

$$\delta_{cr} = \cos^{-1} [(\pi - 2\delta_0) \sin \delta_0 - \cos \delta_0] \quad (2.29)$$

Sudut pemutusan kritis, nilai δ_{cr} adalah :

$$\delta_{cr} = \frac{\omega_s P_m}{4H} t_{cr}^2 + \delta_0 \quad (2.30)$$

Disini akan diperoleh¹⁾ :

$$t_{cr} = \sqrt{\frac{4H(\delta_{cr} - \delta_0)}{\omega_s P_m}} \quad (2.31)$$

2.6. Teori Kestabilan Lyapunov^{2,3,6)}

Analisis kestabilan peralihan terhadap sistem tenaga listrik dilakukan dengan menggunakan teori kestabilan yang dikembangkan oleh Lyapunov melalui teorinya yaitu

Suatu sistem dinyatakan dengan persamaan berikut :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.32)$$

Terhadap persamaan ini diketahui bahwa $x=0$ adalah titik keseimbangan dari persamaan di atas dan D adalah suatu daerah yang didalamnya terdapat $x=0$.

Teori :

Apabila terdapat suatu fungsi $V:D \rightarrow R$ yang kontinu dan dapat didiferensiasikan, dan memenuhi persamaan berikut

$$V(0) = 0 \text{ dan } V(x) > 0 \text{ dan } \dot{V}(x) \leq 0 \text{ pada daerah } D \quad (2.33)$$

maka $x=0$ stabil. Dan jika

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ pada daerah } D \quad (2.34)$$

maka $x=0$ stabil asimptotik

Fungsi $V(x)$ di atas disebut fungsi Lyapunov.

Untuk memastikan suatu fungsi adalah fungsi Lyapunov bagi sistem tersebut maka dipakai :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Contoh pemakaian fungsi Lyapunov pada persamaan pendulum.

Persamaan Pendulum tanpa friksi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1\end{aligned}\quad (2.36)$$

Terhadap persamaan di atas dapat dibuat suatu fungsi Lyapunov

$$\text{Fungsi Lyapunov } V(x) = \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (2.37)$$

Fungsi ini memenuhi fungsi Lyapunov dengan pembuktian :

- 1) Untuk semua nilai x kecuali $x=0$, maka $V(x) > 0$
- 2) Pada saat $x=0$ maka $V(0) = 0$

$$3) \frac{dV}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{g}{l}\sin x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan bukti-bukti di atas dapat disimpulkan bahwa sistem pendulum di atas stabil. Dalam teori kestabilan Lyapunov, keberadaan suatu fungsi Lyapunov untuk suatu sistem hanya merupakan syarat ketercukupan (*sufficient condition*).

Kestabilan Lyapunov ini telah menjadi landasan penting dalam mempelajari sifat kestabilan sistem terutama sistem tak linear. Dalam banyak penelitian, para peneliti telah mengembangkan metode-metode dalam pembuatan fungsi Lyapunov.