BAB 2
TEORI PENUNJANG

2.1 Konsep Dasar *Model Predictive Control*

Model Predictive Control (MPC) atau sistem kendali prediktif termasuk dalam konsep perancangan pengendali berbasis model proses, dimana model proses digunakan secara eksplisit untuk merancang pengendali dengan cara meminimumkan suatu fungsi kriteria. Ide yang mendasari pada setiap jenis MPC adalah [4]:

1. Penggunaan model proses secara eksplisit untuk memprediksi keluaran proses yang akan datang dalam rentang waktu tertentu (*horizon*).
2. Perhitungan rangkaian sinyal kendali dengan meminimasi suatu fungsi kriteria.
3. Strategi surut; pada setiap waktu pencuplikan (pada waktu k) *horizon* dipindahkan menuju waktu pencuplikan berikutnya (pada waktu k+1) dengan melibatkan pemakaian sinyal kendali pertama (yaitu $u(k)$) untuk mengendalikan proses, dan kedua prosedur di atas diulang dengan menggunakan informasi terakhir.

Metode MPC memiliki beberapa keunggulan dibandingkan dengan metode pengendali lainnya, di antaranya adalah[4] :

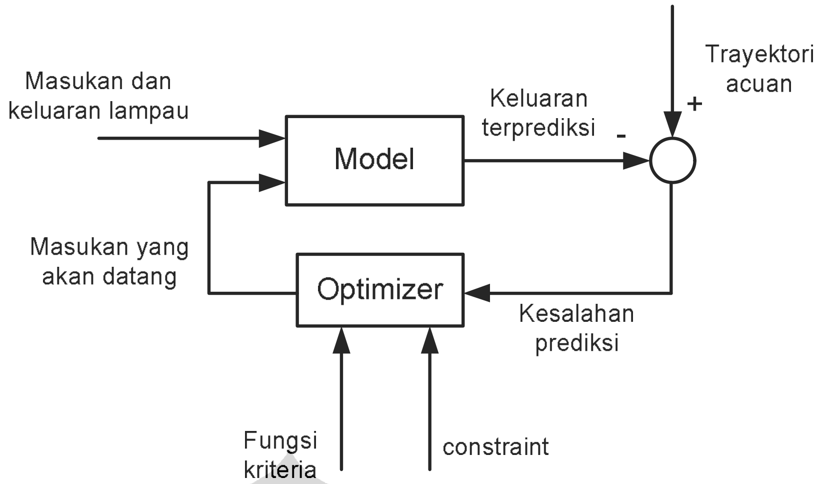
1. Konsepnya sangat intuitif serta penalaannya mudah.
2. Dapat digunakan untuk mengendalikan proses yang beragam, mulai dari proses yang sederhana, hingga proses yang kompleks, memiliki waktu tunda yang besar, *non-minimum phase* atau proses yang tidak stabil.
3. Dapat menangani sistem *multivariable*.
4. Mempunyai kompensasi terhadap waktu tunda.
5. Mempunyai kemampuan dari pengendali *feed forward* untuk mengkompensasi gangguan yang terukur.
6. Mudah untuk mengimplementasikan pengendali yang diperoleh.
7. Dapat memperhitungkan batasan atau *constraint* dalam merancang pengendali.

8. Sangat berguna jika sinyal acuan untuk masa yang akan datang diketahui.

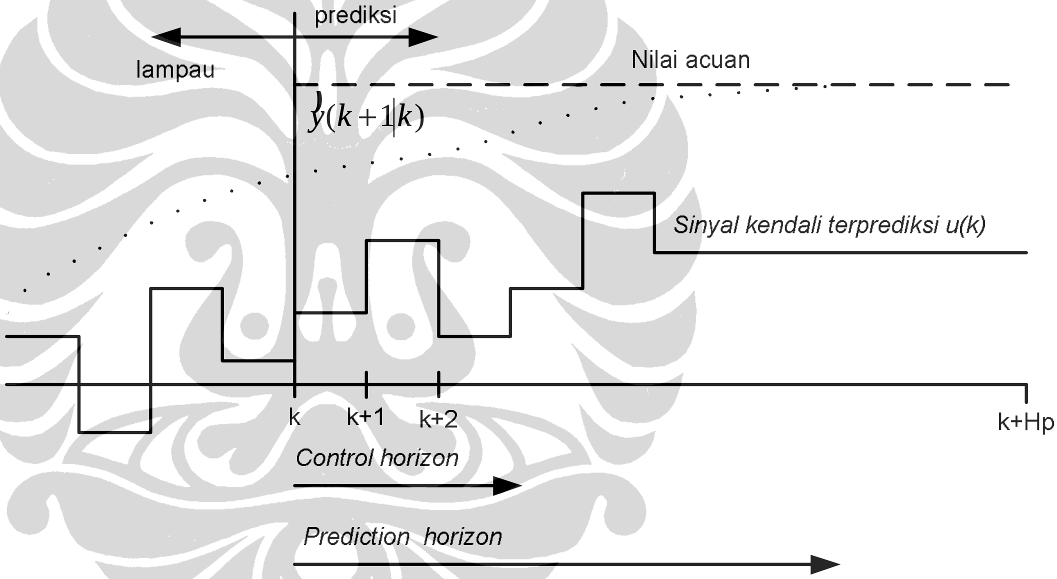
Selain beragam keuntungan yang dimiliki, metode MPC juga mempunyai kelemahan, yaitu masalah penurunan aturan sinyal kendali yang cukup kompleks dan keperluan akan model proses yang baik.

Struktur dasar dari pengendali MPC dapat dilihat pada Gambar 2.1. Metodologi semua jenis pengendali yang termasuk kedalam kategori MPC dapat dikenali oleh strategi berikut [4]:

1. Keluaran proses yang akan datang untuk rentang *horizon* H_p yang ditentukan yang dinamakan sebagai *prediction horizon*, diprediksi pada setiap waktu pencuplikan dengan menggunakan model proses. Keluaran proses terprediksi ini $y(k+i|k)$ untuk $i = 1 \ldots Hp$ bergantung pada nilai masukan dan keluaran lampau dan kepada sinyal kendali yang akan datang $u(k+i|k)$, $i = 0 \ldots Hp-1$, yang akan digunakan sistem dan harus dihitung.
2. Serangkaian sinyal kendali dihitung dengan mengoptimasi suatu fungsi kriteria yang ditetapkan sebelumnya, dengan tujuan untuk menjaga proses sedekat mungkin terhadap trayektori acuan $r(k+i)$. Fungsi kriteria tersebut umumnya berupa suatu fungsi kuadratik dari kesalahan antara sinyal keluaran terprediksi dengan trayektori acuan. Solusi eksplisit dapat diperoleh jika fungsi kriteria adalah kuadratik, model linier, dan tidak ada *constraint*, jika tidak, optimasi iteratif harus digunakan untuk memecahkannya. Langkah pertama dan kedua dapat diilustrasikan pada Gambar 2.2.
3. Sinyal kendali $u(k|k)$ dikirim ke proses, sedangkan sinyal kendali terprediksi berikutnya dibuang, karena pada pencuplikan berikutnya $y(k+1)$ sudah diketahui nilainya. Maka langkah pertama diulang dengan nilai keluaran proses yang baru dan semua prosedur perhitungan yang diperlukan diperbaiki. Sinyal kendali yang baru $u(k+1|k+1)$ (nilainya berbeda dengan $u(k+1|k)$) dihitung dengan menggunakan konsep *receding horizon*.



Gambar 2.1. Struktur pengendali MPC



Gambar 2.2 Kalkulasi keluaran proses dan pengendali terprediksi

2.2 Fungsi Kriteria pada *Model Predictive Control*

Seperti yang telah dinyatakan sebelumnya bahwa perhitungan sinyal kendali pada MPC dilakukan dengan meminimumkan suatu fungsi kriteria. Fungsi kriteria yang digunakan dalam algoritma MPC berbentuk kuadratik seperti berikut:

$$V(k)=\sum_{i=1}^{Hp}\|\underline{\hat{y}}(k+i\,|\,k)-\underline{r}(k+i\,|\,k)\|^2_{\underline{Q}(i)}+\sum_{i=0}^{Hu-1}\|\underline{D\hat{u}}(k+i\,|\,k)\|^2_{\underline{R}(i)} \qquad (2.1)$$

dengan :

$\underline{\hat{y}}(k+i\,|\,k)$ = keluaran terprediksi untuk *i*-langkah kedepan saat waktu k

$\underline{r}(k+i\,|\,k)$ = nilai trayektori acuan (*reference trajectory*)

$\underline{D\hat{u}}(k+i\,|\,k)$ = perubahan nilai sinyal kendali terprediksi untuk *i*-langkah kedepan saat waktu k

Q(i) dan *R(i)* = faktor bobot

H_p = *prediction horizon*

H_u = *control horizon*

Dari persamaan fungsi kriteria tersebut, selalu dibuat asumsi bahwa nilai *Hu*<*Hp* dan $\underline{D\hat{u}}(k+i\,|\,k)=0$ untuk $i \geq Hu$, sehingga nilai masukan terprediksi $\underline{\hat{u}}(k+i\,|\,k)=\underline{\hat{u}}(k+Hu-i\,|\,k)$ untuk semua $i \geq Hu$ seperti yang terlihat pada Gambar 2.2.

Bentuk dari fungsi kriteria pada persamaan (2.1) menyatakan bahwa vektor kesalahan $\underline{\hat{y}}(k+i\,|\,k)-\underline{r}(k+i\,|\,k)$ dibebankan pada setiap rentang *prediction horizon*. Walaupun demikian tetap ada kemungkinan untuk menghitung vektor kesalahan pada titik-titik tertentu saja dengan cara mengatur matriks faktor bobot *Q(i)* bernilai nol pada langkah yang diinginkan. Selain vektor kesalahan, fungsi kriteria pada persamaan (2.1) juga memperhitungkan perubahan vektor masukan dalam rentang *control horizon*. Pemilihan penggunaan $\underline{D\hat{u}}(k+i\,|\,k)$ yang pada fungsi kriteria bertujuan untuk meminimumkan perubahan sinyal kendali yang masuk ke *plant*.

2.2 Model Proses

Pada pembahasan ini, model proses yang digunakan berupa model ruang keadaan diskrit linier seperti berikut :

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) \tag{2.2}$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}\underline{x}(k) \tag{2.3}$$

dengan :

$\underline{u}(k)$ = vektor masukan berdimensi-(*l x 1)*

$\underline{x}(k)$ = vektor keadaan berdimensi-(*n x 1)*

$\underline{y}(k)$ = vektor keluaran berdimensi-(*m x 1)*

$\underline{A}$ = matriks keadaan berdimensi *n x n*

$\underline{B}$ = matriks masukan berdimensi *n x l*

$\underline{C}$ = matriks keluaran berdimensi *m x n*

Model ruang keadaan pada persamaan (2.2) dan (2.3) adalah model ruang keadaan untuk kondisi ideal.

2.3 Prediksi

Sinyal masukan yang digunakan dalam perhitungan prediksi keluaran adalah perubahan nilai sinyal masukan $\Delta u(k)$ pada setiap waktu pencuplikan k. Dimana perubahan tersebut merupakan selisih antara sinyal masukan saat k atau $u(k)$ dan sinyal masukan satu langkah sebelumnya $\underline{u}(k-1)$. Dalam menyelesaikan masalah pengendali prediktif, nilai keluaran terprediksi $\underline{\hat{y}}(k+i\,|\,k)$ harus dapat dihitung dengan menggunakan estimasi terbaik dari variabel keadaan saat ini $\underline{x}(k)$, nilai masukan yang lampau $\underline{u}(k-1)$, dan nilai perkiraan dari perubahan masukan yang akan datang $\underline{D\hat{u}}(k+i\,|\,k)$. Sebelum melangkah lebih jauh, hal pertama yang harus dilakukan adalah memprediksi nilai variabel keadaan dengan melakukan iterasi model ruang keadaan pada persamaan (2.2) dan (2.3). Perhitungan prediksi variabel keadaan adalah sebagai berikut

$$\underline{\hat{x}}(k+1\,|\,k) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{\hat{u}}(k\,|\,k) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\underline{\hat{x}}(k+2\,|\,k) &= \underline{A}\underline{\hat{x}}(k+1\,|\,k) + \underline{B}\underline{\hat{u}}(k+1\,|\,k) \\ &= \underline{A}^2\underline{x}(k) + \underline{A}\underline{B}\underline{\hat{u}}(k\,|\,k) + \underline{B}\underline{\hat{u}}(k+1\,|\,k)\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\vdots$$

$$\hat{\underline{x}}(k+Hp\,|\,k) = \underline{A}\hat{\underline{x}}(k+Hp-1\,|\,k) + \underline{B}\hat{\underline{u}}(k+Hp-1\,|\,k)$$

$$= \underline{A}^{Hp}\,\underline{x}(k) + \underline{A}^{Hp-1}\,\underline{B}\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \ldots + \underline{B}\hat{\underline{u}}(k+Hp-1\,|\,k) \qquad (2.6)$$

Pada setiap langkah prediksi digunakan $\hat{\underline{u}}(k\,|\,k)$ bukan $\underline{u}(k)$, karena besarnya nilai $\underline{u}(k)$ belum diketahui ketika menghitung prediksi.

Sekarang, diasumsikan bahwa nilai masukan hanya berubah pada waktu k, k+1, …, k+Hu–1, dan setelah itu menjadi konstan, sehingga didapatkan bahwa $\hat{\underline{u}}(k+i\,|\,k) = \hat{\underline{u}}(k+Hu-1\,|\,k)$ untuk $Hu \leq i \leq Hp$-1. Selanjutnya, perhitungan prediksi diubah sehingga mengandung $\underline{D}\hat{\underline{u}}(k+i\,|\,k)$ daripada $\hat{\underline{u}}(k+i\,|\,k)$, dengan

$$\underline{D}\hat{\underline{u}}(k+i\,|\,k) = \hat{\underline{u}}(k+i\,|\,k) - \hat{\underline{u}}(k+i-1\,|\,k) \qquad (2.7)$$

dan pada setiap waktu pencuplikan k nilai yang sudah diketahui hanya $\underline{u}(k$-1), maka

$$\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) = \underline{D}\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1\,|\,k) \qquad (2.8)$$

$$\hat{\underline{u}}(k+1\,|\,k) = \underline{D}\hat{\underline{u}}(k+1\,|\,k) + \underline{D}\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1\,|\,k) \qquad (2.9)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\underline{u}}(k+Hu-1\,|\,k) = \underline{D}\hat{\underline{u}}(k+Hu-1\,|\,k) + \ldots + \underline{D}\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1\,|\,k) \qquad (2.10)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.8) – (2.10) ke persamaan (2.4) – (2.6), diperoleh persamaan:

$$\hat{\underline{x}}(k+1\,|\,k) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\left[\underline{D}\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1)\right] \qquad (2.11)$$

$$\hat{\underline{x}}(k+2\,|\,k) = \underline{A}^2\underline{x}(k) + \underline{A}\underline{B}\left[\Delta\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1)\right] + \underline{B}\underbrace{\left[\Delta\hat{\underline{u}}(k+1\,|\,k) + \Delta\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \underline{u}(k-1)\right]}_{\hat{\underline{u}}(k+1|k)}$$

$$= \underline{A}^2\underline{x}(k) + \left(\underline{A}+\underline{I}\right)\underline{B}\underline{D}\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \underline{B}\underline{D}\hat{u}(k+1\,|\,k) + \left(\underline{A}+\underline{I}\right)\underline{B}\underline{u}(k-1) \qquad (2.12)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\underline{x}}(k+Hu\,|\,k) = \underline{A}^{Hu}\,\underline{x}(k) + \left(\underline{A}^{Hu-1} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{D}\hat{\underline{u}}(k\,|\,k) + \ldots + \underline{B}\underline{D}\hat{\underline{u}}(k+Hu-1\,|\,k) + \left(\underline{A}^{Hu-1} + \ldots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{u}(k-1) \qquad (2.13)$$

Dengan mengacu pada persamaan $\hat{u}(k+i\,|\,k) = \hat{u}(k+Hu-i\,|\,k)$ untuk $i>H_u$, maka perhitungan prediksi untuk $i>H_u$ adalah

$$
\begin{aligned}
\underline{\hat{x}}(k+Hu+1\,|\,k) = {} & \underline{A}^{Hu+1}\underline{x}(k) + \left(\underline{A}^{Hu} + \cdots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{D}\underline{\hat{u}}(k\,|\,k) + \cdots \\
& + \left(\underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{D}\underline{\hat{u}}(k+Hu-1\,|\,k) + \left(\underline{A}^{Hu} + \cdots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{u}(k-1)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\hat{x}}(k+Hp\,|\,k) = {} & \underline{A}^{Hp}\underline{x}(k) + \left(\underline{A}^{Hp-1} + \cdots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{D}\underline{\hat{u}}(k\,|\,k) + \cdots \\
& + \left(\underline{A}^{Hp-Hu} + \cdots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{D}\underline{\hat{u}}(k+Hu-1\,|\,k) \\
& + \left(\underline{A}^{Hp-1} + \cdots + \underline{A} + \underline{I}\right)\underline{B}\underline{u}(k-1)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Akhirnya, persamaan (2.11) – (2.15) dapat disusun ke dalam bentuk vektor matriks sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \underline{\hat{x}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \underline{\hat{x}}(k+Hu|k) \\ \underline{\hat{x}}(k+Hu+1|k) \\ \vdots \\ \underline{\hat{x}}(k+Hu|k) \end{bmatrix}
= {} & \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{A}^{Hu} \\ \underline{A}^{Hu+1} \\ \vdots \\ \underline{A}^{Hp} \end{bmatrix}}_{\Psi} \underline{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{Hu-1} \underline{A}^{i}\underline{B} \\ \sum_{i=0}^{Hu} \underline{A}^{i}\underline{B} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{Hp-1} \underline{A}^{i}\underline{B} \end{bmatrix}}_{\Gamma} \underline{u}(k-1)}_{lampau} \\
& + \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{B} & \cdots & \underline{0}_{nxl} \\ \underline{A}\underline{B}+\underline{B} & \cdots & \underline{0}_{nxl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{Hu-1} \underline{A}^{i}\underline{B} & \cdots & \underline{B} \\ \sum_{i=0}^{Hu} \underline{A}^{i}\underline{B} & \cdots & \underline{A}\underline{B}+\underline{B} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{Hp-1} \underline{A}^{i}\underline{B} & \cdots & \sum_{i=0}^{Hp-Hu} \underline{A}^{i}\underline{B} \end{bmatrix}}_{\Theta} \begin{bmatrix} \Delta\underline{\hat{u}}(k) \\ \vdots \\ \Delta\underline{\hat{u}}(k+Hu-1) \end{bmatrix}}_{Prediksi}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Selain itu, persamaan prediksi keluaran $\underline{\hat{y}}(k+i\,|\,k)$ dapat ditulis seperti berikut ini

$$\underline{\hat{y}}(k+1\,|\,k) = \underline{C}\underline{\hat{x}}(k+1\,|\,k) \tag{2.17}$$

$$\underline{\hat{y}}(k+2\,|\,k) = \underline{C}\underline{\hat{x}}(k+2\,|\,k) \tag{2.18}$$

$$\vdots$$

$$\underline{\hat{y}}(k+Hp\,|\,k)=\underline{C}\,\underline{\hat{x}}(k+Hp\,|\,k) \tag{2.19}$$

Persamaan (2.17) – (2.19) kemudian dapat ditulis kedalam vektor matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\underline{\hat{y}}(k+1\,|\,k)\\ \vdots \\ \underline{\hat{y}}(k+Hp\,|\,k)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{C} & \underline{0}_{mxn} & \cdots & \underline{0}_{mxn}\\ \underline{0}_{mxn} & \underline{C} & \cdots & \underline{0}_{mxn}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \underline{0}_{mxn} & \underline{0}_{mxn} & \cdots & \underline{C}\end{bmatrix}}_{\underline{C}_y}\begin{bmatrix}\underline{\hat{x}}(k+1\,|\,k)\\ \vdots \\ \underline{\hat{x}}(k+Hp\,|\,k)\end{bmatrix} \tag{2.20}$$

2.4 Strategi Pengendali *Model Predictive Control* tanpa *Constraint*

Fungsi kriteria yang akan diminimumkan sama seperti pada persamaan (2.1) dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$V(k)=\left\|\underline{Y}(k)-\underline{T}(k)\right\|_{\underline{Q}}^{2}+\left\|\underline{DU}(k)\right\|_{\underline{R}}^{2} \tag{2.21}$$

Dengan

$$\underline{Y}(k)=\begin{bmatrix}\underline{\hat{y}}(k+1\,|\,k)\\ \vdots \\ \underline{\hat{y}}(k+Hp\,|\,k)\end{bmatrix},\ \underline{T}(k)=\begin{bmatrix}\underline{r}(k+1\,|\,k)\\ \vdots \\ \underline{r}(k+Hp\,|\,k)\end{bmatrix},$$

$$\underline{DU}(k)=\begin{bmatrix}\underline{\hat{u}}(k\,|\,k)\\ \vdots \\ \underline{\hat{u}}(k+Hu-1\,|\,k)\end{bmatrix}$$

dan matriks faktor bobot $\underline{Q}$ dan $\underline{R}$ adalah sebagai berikut

$$\underline{Q}=\begin{bmatrix}Q(1) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & Q(Hp)\end{bmatrix} \tag{2.22}$$

$$\underline{R}=\begin{bmatrix}R(0) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & R(Hu-1)\end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Berdasarkan pada persamaan ruang keadaan (2.16) dan (2.20), maka matriks $\underline{Y}(k)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\underline{Y}(k)=\underline{C}_Y\underline{Y}\ \underline{x}(k)+\underline{C}_Y\underline{G}\ \underline{u}(k-1)+\underline{C}_Y\underline{Q}\,\underline{DU}(k) \tag{2.24}$$

Selain matriks-matriks di atas, didefinisikan juga suatu matriks penjejakan kesalahan $\underline{E}(k)$, yaitu selisih antara nilai trayektori acuan yang akan datang dengan tanggapan bebas dari sistem. Tanggapan bebas adalah tanggapan yang akan terjadi pada rentang *prediction horizon* jika tidak ada perubahan nilai masukan ($\Delta\underline{U}(k) = \underline{0}$). Persamaan matematis dari matriks $\underline{E}\,(k)$ adalah sebagai berikut

$$\underline{E}\,(k) = \underline{T}(k) - \underline{C}_Y \underline{Y}\,\underline{x}(k) - \underline{C}_Y \underline{G}\,\underline{u}(k-1) \qquad (2.25)$$

Persamaan (2.21) kemudian dapat ditulis kembali dalam bentuk yang mengandung matriks $\underline{E}(k)$ dan $\Delta\underline{U}(k)$ sebagai berikut

$$V(k) = \left\| \underline{C}_y \underline{Q}\,\Delta\underline{U}(k) - \underline{E}\,(k) \right\|^2_{\underline{Q}} + \left\| \Delta\underline{U}(k) \right\|^2_{\underline{R}} \qquad (2.26)$$

$$= \left[\Delta\underline{U}^T(k)\underline{Q}^T \underline{C}_y^T - \underline{E}^T(k)\right]\underline{Q}\left[\underline{C}_y \underline{Q}\,\Delta\underline{U}(k) - \underline{E}\,(k)\right] + \Delta\underline{U}^T(k)\underline{R}\Delta\underline{U}(k) \qquad (2.27)$$

$$= \underbrace{\underline{E}^T(k)\underline{Q}\underline{E}\,(k)}_{\underline{c}_1} - \Delta\underline{U}^T(k)\underbrace{2\underline{Q}^T \underline{C}_y^T \underline{Q}\underline{E}\,(k)}_{\underline{G}} + \Delta\underline{U}^T(k)\underbrace{\left[\underline{Q}^T \underline{C}_y^T \underline{Q}\underline{C}_y \underline{Q} + \underline{R}\right]}_{\underline{H}}\Delta\underline{U}(k) \qquad (2.28)$$

Pada persamaan (2.28), bagian $\underline{E}^T(k)\underline{Q}\underline{E}\,(k)$ tidak mengandung unsur $\Delta\underline{U}(k)$ sehingga bagian tersebut bisa dianggap konstan sehingga bagian tersebut tidak diikutsertakan dalam proses optimasi untuk menghitung nilai $\Delta\underline{U}(k)$. Persamaan (2.28) kemudian dapat ditulis kembali menjadi

$$V(k) = \underline{c}_1 - \Delta\underline{U}^T(k)\underline{G} + \Delta\underline{U}^T(k)\underline{H}\,\Delta\underline{U}(k) \qquad (2.29)$$

dengan

$$\underline{G} = 2\underline{Q}^T \underline{C}_y^T \underline{Q}\underline{E}\,(k) \qquad (2.30)$$

dan

$$\underline{H} = \underline{Q}^T \underline{C}_y^T \underline{Q}\underline{C}_y \underline{Q} + \underline{R} \qquad (2.31)$$

Nilai optimal $\Delta\underline{U}(k)$ dapat dihitung dengan membuat gradien dari $V(k)$ bernilai nol. Gradien $V(k)$ dari persamaan (2.29) adalah

$$\nabla_{\Delta\underline{U}(k)}\underline{V}(k) = -\underline{G} + 2\underline{H}\,\Delta\underline{U}(k) \qquad (2.32)$$

Dengan membuat nol nilai $\nabla_{\Delta\underline{U}(k)}\underline{V}(k)$ pada persamaan (2.32), maka didapatkan nilai optimal dari perubahan sinyal kendali sebagai berikut:

$$\underline{DU}(k)_{opt} = \frac{1}{2}\underline{H}^{-1}\underline{G} \tag{2.33}$$

$$= \frac{1}{2\left(\underline{\Theta}^T \underline{C}_y^T \underline{Q}\underline{C}_y \underline{\Theta} + R\right)} 2\underline{\Theta}^T \underline{C}_y^T \underline{Q}\underline{E}(k) \tag{2.34}$$

$$= \underbrace{\left(\underline{\Theta}^T \underline{Q}\underline{\Theta} + \underline{R}\right)^{-1} \underline{\Theta}^T \underline{Q}}_{K_{MPC}} \underline{E}(k) \tag{2.35}$$

Setelah nilai matriks $\Delta\underline{U}(k)$ didapatkan, maka nilai yang digunakan untuk mengubah sinyal kendali hanya nilai dari baris pertama matriks $\Delta\underline{U}(k)$ sedangkan nilai dari baris yang lain dari matriks $\Delta\underline{U}(k)$ dibuang.

2.4 *Full-Order State* Observer [6]

Observer adalah sebuah perangkat sistem dinamik yang mengestimasi keadaan sistem berdasarkan masukan dan keluarannya. Dalam banyak kasus praktikal, hanya sedikit variabel *state* yang terukur dan sisanya adalah *state* yang tidak dapat terukur oleh sensor. Oleh karena itu, variabel *state* yang tidak terukur dapat di estimasi dan hal ini sering disebut dengan proses observasi.

Observer dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem yang mempunyai *state* vektor yang tidak lengkap, selain itu observer dapat digunakan dalam sistem yang menggunakan sensor atau tanpa sensor. Diagram blok observer dapat dilihat pada Gambar 2.3.

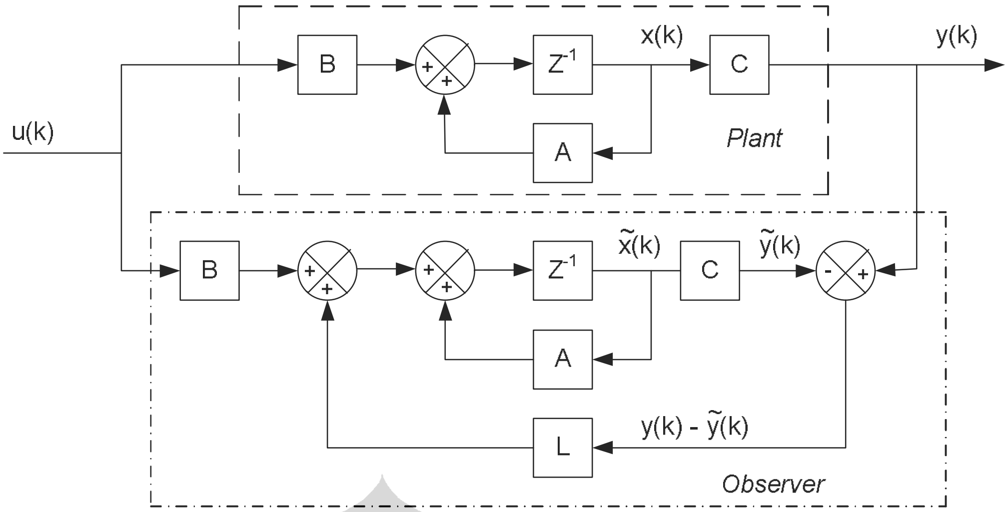
Jika variabel state pada sistem/*plant* semua diestimasi maka disebut *full-order state observer*. Orde dari *plant* dan observer mempunyai tingkat yang sama, *full order observer* disebut juga *identity observer* atau *asymtotic state estimator*.

Model sistem dinyatakan dalam bentuk *state* variabel dan keluarannya sebagai berikut:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}\underline{x}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) \tag{2.36}$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}\underline{x}(k) \tag{2.37}$$

Dengan $\underline{u}$(k) masukan, $\underline{y}$(k) keluaran dan $\underline{x}$(k) adalah *state*.



Gambar 2.3 Diagram blok observer

Persamaan variabel *state* sistem yang dimodelkan untuk kondisi yang diestimasi dinyatakan dalam persamaan:

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{A}\underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) \tag{2.38}$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}\underline{\hat{x}}(k) \tag{2.39}$$

Tanda 'topi' menunjukkan parameter estimasi, sedangkan yang tidak menggunakan topi menunjukkan nilai aktual dari sistem.

State observer hanya dapat dirancang jika dan jika kondisi *observability* dari sistem memuaskan. Model sistem dengan observer adalah sebagai berikut:

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{A}\underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) + \underline{L}\left(\underline{y}(k) - \underline{\hat{y}}(k)\right) \tag{2.40}$$

$$\underline{\hat{y}}(k) = \underline{C}\underline{\hat{x}}(k) \tag{2.41}$$

Dengan matriks L adalah *gain* observer yang merupakan faktor pengali *error* antara nilai keluaran y aktual dengan y estimasi. Dengan mensubtitusi persamaan (2.37) dan (2.41) ke persamaan (2.40), maka diperoleh persamaan:

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \underline{A}\underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) + \underline{L}\left(\underline{C}x(k) - \underline{C}\underline{\hat{x}}(k)\right)$$

$$\underline{\hat{x}}(k+1) = \left(\underline{A} - L\ \underline{C}\right)\underline{\hat{x}}(k) + \underline{B}\underline{u}(k) + \underline{L}\underline{y}(k) \tag{2.42}$$

Matriks (A-LC) sekarang menjadi matriks sistem observer. Kestabilan dan unjuk kerja observer bergantung pada matiks ini. Harga A dan C adalah tetap karena sistem *time invariant*.

Jadi, variabel keadaan yang diubah-ubah adalah matriks L. Untuk pemilihan matriks L menggunakan formula Akcermann, dengan persamaan sebagai berikut:

$$L = \Phi\ (A)\ N^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1xn}^{T} \qquad (2.43)$$

$\Phi(z)$ Persamaan karakteristik Observer yang diinginkan

N Matriks *observability*