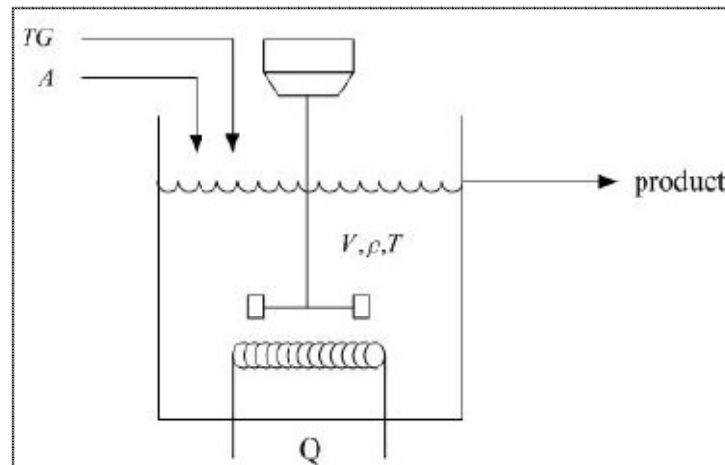


BAB 3 PEMODELAN TANGKI REAKTOR BIODIESEL

3.1. Proses Reaksi Biodiesel

Dari serangkaian proses pembuatan biodiesel, proses yang terpenting adalah proses reaksi biodiesel yang berlangsung di dalam tangki CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*). Proses reaksi biodiesel ini digambarkan di gambar (4) sebagai berikut[4]



Gambar 10 Tangki Reaktor Biodiesel[4]

Pada gambar di atas, TG melambangkan minyak sawit (Trigliserida) dan A melambangkan alkohol. V , ρ , dan T berturut-turut melambangkan volume reaktor, massa jenis cairan, dan temperatur reaksi. Q adalah laju alih panas yang digunakan untuk memanaskan reaktor pada temperatur reaksi yang diinginkan.

3.2. Pemodelan reaksi biodiesel

Sebelum reaktor biodiesel ini dimodelkan, dibuat dulu beberapa asumsi berikut[4]

1. CSTR tercampur dengan sempurna
2. Massa jenis dari bahan baku dan produk sama dan konstan (ρ).
3. Volume cairan V dalam reaktor dibuat konstan dengan adanya aliran keluar
4. Pertukaran entalpi antara campuran bahan baku dalam tangki diabaikan terhadap pertukaran entalpi di reaksi kimia.
5. Gaya baling-baling dan rugi-rugi panas dapat diabaikan.

Dalam pemodelan ini, digunakan persamaan reaksi (1.1), (1.2), dan (1.3). untuk memudahkan dan mempersingkat penulisan, CH_3OH dituliskan A , R_1COOCH_3

dituliskan E (Ester). Dengan demikian persamaan (1.1), (1.2) dan (1.3) menjadi berikut ini:



Dimana $k_i = k_{0i}e^{-E_i/RT}$

Untuk asumsi-asumsi di atas, kesetimbangan massa untuk CSTR adalah berikut ini

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho q_{TGi} + \rho q_{Ai} - \rho q_o \quad (3.4)$$

Dimana q_{TGi} adalah laju volume trigliserida masuk, q_{Ai} adalah laju volume alkohol masuk dan q_o adalah laju volume keluar. Karena V dan ρ konstan, persamaan (3.4) dapat direduksi menjadi

$$q_o = q_{TGi} + q_{Ai} \quad (3.5)$$

Dengan demikian, meskipun laju aliran masuk dan keluar berubah-ubah tergantung kondisi di hulu dan hilir, persamaan di atas harus terpenuhi.

Untuk asumsi-asumsi yang telah ditetapkan, kesetimbangan komponen TG dalam satuan molar adalah

$$\frac{d[TG]}{dt} = \frac{q_{TGi}}{V} [TG]_i - \frac{q_o}{V} [TG] + r_{TG} \quad (3.6)$$

Dimana

$$r_{TG} = -k_{01}e^{-E_1/RT} [TG][A] + k_{02}e^{-E_2/RT} [DG][E] \quad (3.7)$$

Sehingga

$$\frac{d[TG]}{dt} = \frac{q_{TGi}}{V} [TG]_i - \frac{q_o}{V} [TG] - k_{01}e^{-E_1/RT} [TG][A] + k_{02}e^{-E_2/RT} [DG][E] \quad (3.8)$$

Kesetimbangan komponen DG dalam satuan molar adalah

$$\frac{d[DG]}{dt} = -\frac{q_o}{V} [DG] + r_{DG} \quad (3.9)$$

Dimana

$$r_{DG} = k_{01}e^{-E_1/RT}[TG][A] - k_{02}e^{-E_2/RT}[DG][E] - k_{03}e^{-E_3/RT}[DG][A] + k_{04}e^{-E_4/RT}[MG][E] \quad (3.10)$$

Sehingga

$$\frac{d[DG]}{dt} = -\frac{q_0}{V}[DG] + k_{01}e^{-E_1/RT}[TG][A] - k_{02}e^{-E_2/RT}[DG][E] - k_{03}e^{-E_3/RT}[DG][A] + k_{04}e^{-E_4/RT}[MG][E] \quad (3.11)$$

Kesetimbangan komponen MG dalam satuan molar adalah

$$\frac{d[MG]}{dt} = -\frac{q_0}{V}[MG] + r_{MG} \quad (3.12)$$

Dimana

$$r_{MG} = k_{03}e^{-E_3/RT}[DG][A] - k_{04}e^{-E_4/RT}[MG][E] - k_{05}e^{-E_5/RT}[MG][A] + k_{06}e^{-E_6/RT}[GL][E] \quad (3.13)$$

Sehingga

$$\frac{d[MG]}{dt} = -\frac{q_0}{V}[MG] + k_{03}e^{-E_3/RT}[DG][A] - k_{04}e^{-E_4/RT}[MG][E] - k_{05}e^{-E_5/RT}[MG][A] + k_{06}e^{-E_6/RT}[GL][E] \quad (3.14)$$

Kesetimbangan biodiesel (komponen E) dalam satuan molar adalah

$$\frac{d[E]}{dt} = -\frac{q_0}{V}[E] + r_E \quad (3.15)$$

Dimana

$$r_E = k_{01}e^{-E_1/RT}[TG][A] - k_{02}e^{-E_2/RT}[DG][E] + k_{03}e^{-E_3/RT}[DG][A] - k_{04}e^{-E_4/RT}[MG][E] + k_{05}e^{-E_5/RT}[MG][A] - k_{06}e^{-E_6/RT}[GL][E] \quad (3.16)$$

Sehingga

$$\frac{d[E]}{dt} = -\frac{q_0}{V}[E] + k_{01}e^{-E_1/RT}[TG][A] - k_{02}e^{-E_2/RT}[DG][E] + k_{03}e^{-E_3/RT}[DG][A] - k_{04}e^{-E_4/RT}[MG][E] + k_{05}e^{-E_5/RT}[MG][A] - k_{06}e^{-E_6/RT}[GL][E] \quad (3.17)$$

Kesetimbangan alkohol (komponen A) dalam satuan molar adalah

$$\frac{d[A]}{dt} = \frac{q_{Ai}}{V} [A]_i - \frac{q_o}{V} [A] + r_A \quad (3.18)$$

Dimana

$$r_A = -k_{01}e^{-E_1/RT} [TG][A] + k_{02}e^{-E_2/RT} [DG][E] - k_{03}e^{-E_3/RT} [DG][A] + k_{04}e^{-E_4/RT} [MG][E] - k_{05}e^{-E_5/RT} [MG][A] + k_{06}e^{-E_6/RT} [GL][E] \quad (3.19)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} = & \frac{q_{Ai}}{V} [A]_i - \frac{q_o}{V} [A] - k_{01}e^{-E_1/RT} [TG][A] + k_{02}e^{-E_2/RT} [DG][E] - \\ & k_{03}e^{-E_3/RT} [DG][A] + k_{04}e^{-E_4/RT} [MG][E] - k_{05}e^{-E_5/RT} [MG][A] + \\ & k_{06}e^{-E_6/RT} [GL][E] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Kesetimbangan gliserol (komponen GL) dalam satuan molar adalah

$$\frac{d[GL]}{dt} = -\frac{q_o}{V} [GL] + r_{GL} \quad (3.21)$$

Dimana

$$r_{GL} = k_{05}e^{-E_5/RT} [MG][A] - k_{06}e^{-E_6/RT} [GL][E] \quad (3.22)$$

Sehingga

$$\frac{d[GL]}{dt} = -\frac{q_o}{V} [GL] + k_{05}e^{-E_5/RT} [MG][A] - k_{06}e^{-E_6/RT} [GL][E] \quad (3.23)$$

Dari persamaan (3.6) sampai (3.23), keterangan dari besaran-besaran yang digunakan adalah berikut ini:

K_{01} sampai k_{05} adalah konstanta preekspensial laju reaksi persamaan (3.1) sampai (3.3) (1/(mol menit))

E_1 sampai E_5 adalah energi aktivasi (J/kg mol)

V adalah volume reaktor (liter)

$[TG]$ adalah konsentrasi molar minyak sawit (trigliserida) (mol)

q_{TG_i} adalah laju aliran minyak sawit yang masuk ke dalam reaktor (liter/menit)

q_o adalah laju aliran produk yang keluar reaktor (liter/menit)

$[TG]_i$ adalah konsentrasi minyak sawit yang dimasukkan ke reaktor (mol)

r_{TG} adalah laju reaksi minyak sawit per volume

$[DG]$ adalah konsentrasi digliserida (mol)

r_{DG} adalah laju reaksi digliserida per volume

[MG] adalah konsentrasi monogliserida (mol)

r_{MG} adalah laju reaksi monogliserida per volume

[E] adalah konsentrasi biodiesel (ester) (mol)

r_E adalah laju reaksi biodiesel per volume

[A] adalah konsentrasi alkohol (mol)

q_{Ai} adalah laju aliran alkohol yang masuk ke dalam reaktor (liter/menit)

[A]_i adalah konsentrasi alkohol yang masuk ke reaktor

r_A adalah laju reaksi alkohol per volume

[GL] adalah konsentrasi gliserol (mol)

r_{GL} adalah laju reaksi gliserol per volume

Kesetimbangan energi dari CSTR yang didapat dari asumsi-asumsi di atas adalah berikut ini

$$V\rho C_p \frac{dT}{dt} = \dot{m}_{TGi} C_{pTG} (T_{Gi} - T) + \dot{m}_{Ai} C_{pA} (T_{Ai} - T) - \dot{m}_o C_{po} (T - T_o) + Q_{Rx} + Q \quad (3.24)$$

Dimana

$$\dot{m}_{TGi} = \rho q_{TGi} \quad (3.25),$$

$$\dot{m}_{Ai} = \rho q_{Ai} \quad (3.26),$$

Dan

$$\dot{m}_o = \rho q_o \quad (3.27)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.25), (3.26) dan (3.27) ke persamaan (3.24) didapat persamaan berikut ini

$$V\rho C_p \frac{dT}{dt} = \rho q_{TGi} C_{pTG} (T_{Gi} - T) + \rho q_{Ai} C_{pA} (T_{Ai} - T) - \rho q_o C_{po} (T - T_o) + Q_{Rx} + Q \quad (3.28)$$

Dengan membagi persamaan (3.28) dengan $V\rho C_p$ didapat persamaan berikut

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q_{TGi} C_{pTG}}{V C_p} (T_{Gi} - T) + \frac{q_{Ai} C_{pA}}{V C_p} (T_{Ai} - T) - \frac{q_o C_{po}}{V C_p} (T - T_o) + \frac{Q_{Rx}}{V\rho C_p} + \frac{Q}{V\rho C_p} \quad (3.29)$$

Keterangan besaran-besaran yang digunakan dari persamaan (3.24) hingga (3.29) adalah sebagai berikut:

V adalah volume reaktor (liter)

ρ adalah massa jenis larutan (kg/liter)

C_p adalah kapasitas panas larutan dalam reaktor

\dot{m}_{TG_i} adalah laju massa minyak sawit (TG) yang masuk ke reaktor (kg/menit)

C_{pTG} adalah kapasitas panas minyak sawit (TG)

T_{TG_i} adalah temperatur minyak sawit yang masuk ke reaktor ($^{\circ}\text{C}$)

T adalah temperatur larutan dalam reaktor ($^{\circ}\text{C}$)

\dot{m}_{A_i} adalah laju massa alkohol yang masuk ke reaktor (kg/menit)

C_{pA} adalah kapasitas panas alkohol

T_{A_i} adalah temperatur alkohol yang masuk ke reaktor ($^{\circ}\text{C}$)

\dot{m}_o adalah laju massa yang dihasilkan (kg/menit)

C_{po} adalah kapasitas panas cairan yang dihasilkan

T_o adalah temperatur cairan yang dihasilkan ($^{\circ}\text{C}$)

Q_{Rx} adalah laju panas yang dihasilkan oleh reaksi

Q adalah laju pengalihan panas dari pemanas ke reaktor

3.3. Penurunan persamaan ruang keadaan proses reaksi biodiesel

Dengan memasukkan nilai-nilai yang telah ditetapkan di tabel 1 dan tabel 2[4][8] pada persamaan (3.8), (3.11), (3.14), (3.17), (3.20), (3.23) dan (3.29) maka didapatkan persamaan berikut

Dengan memasukkan nilai-nilai pada tabel 2, maka didapatkan persamaan berikut ini

$$\frac{d[TG]}{dt} = 8,3 \times 10^{-4} - 8,3 \times 10^{-4}[TG] - 661937,618e^{-\frac{6619,24}{T}}[TG][A] + 9723,779e^{-5001,316/T}[DG][E] \quad (3.30)$$

$$\frac{d[DG]}{dt} = -8,3 \times 10^{-4}[DG] + 661937,618e^{-\frac{6619,24}{T}}[TG][A] - 9723,779e^{-\frac{5001,316}{T}}[DG][E] - 1,001766 \times 10^{11}e^{-10000,617/T}[DG][A] + 1,669468 \times 10^8 e^{-7371,552/T}[MG][E] \quad (3.31)$$

$$\frac{d[MG]}{dt} = -8,3 \times 10^{-4}[MG] + 1,001766 \times 10^{11}e^{-\frac{10000,617}{T}}[DG][A] - 1,669468 \times 10^8 e^{-7371,552/T}[MG][E] - 89,761e^{-3233,331/T}[MG][A] + 361,935e^{-4828,992/T}[GL][E] \quad (3.32)$$

$$\frac{d[E]}{dt} = -8,3 \times 10^{-4}[E] + 661937,618e^{-\frac{6619,24}{T}}[TG][A] - 9723,779e^{-\frac{5001,316}{T}}[DG][E] + 1,001766 \times 10^{11}e^{-10000,617/T}[DG][A] - 1,669468 \times 10^8e^{-7371,552/T}[MG][E] + 89,761e^{-3233,331/T}[MG][A] - 361,935e^{-4828,992/T}[GL][E] \quad (3.33)$$

Tabel 2 nilai besaran besaran

Besaran	Nilai	Satuan	Nilai	Satuan
k ₀₁	39716257,1	Liter/(mol menit)	661937,618	Liter/(mol detik)
k ₀₂	583426,71	Liter/(mol menit)	9723,779	Liter/(mol detik)
k ₀₃	6,010594 X 10 ¹²	Liter/(mol menit)	1,001766 x 10 ¹¹	Liter/(mol detik)
k ₀₄	1,001680 X 10 ¹⁰	Liter/(mol menit)	1,669468 x 10 ⁸	Liter/(mol detik)
k ₀₅	5385,67	Liter/(mol menit)	89,761	Liter/(mol detik)
k ₀₆	21716,1	Liter/(mol menit)	361,935	Liter/(mol detik)
E ₁	13145	Cal/ mol	13145	Cal/ mol
E ₂	9932	Cal/ mol	9932	Cal/ mol
E ₃	19860	Cal/ mol	19860	Cal/ mol
E ₄	14639	Cal/ mol	14639	Cal/ mol
E ₅	6421	Cal/ mol	6421	Cal/ mol
E ₆	9588	Cal/ mol	9588	Cal/ mol
V	200	Liter	200	Liter
ρ	839	Gr/liter	839	Gr/liter
q _{TG_i}	5	Liter/menit	0.083	Liter/detik
q _{A_i}	5	Liter/menit	0.083	Liter/detik
q _o	10	Liter/menit	0.167	Liter/detik
[TG] _i	2	Mol/liter	2	Mol/liter
[A] _i	12	Mol/liter	12	Mol/liter
C _p	0,537	cal/g°C	0,537	cal/g°C
C _{pTG}	0,48	cal/g°C	0,48	cal/g°C
C _{pA}	0,599	cal/g°C	0,599	cal/g°C
C _{po}	0,537	cal/g°C	0,537	cal/g°C
T _{TG_i}	70	°C	343	K
T _{A_i}	70	°C	343	K
T _o	70	°C	343	K

$$\begin{aligned}
\frac{d[A]}{dt} &= 0,005 - 8,3 \times 10^{-4}[A] - 661937,618e^{-\frac{6619,24}{T}}[TG][A] + \\
&9723,779e^{-\frac{5001,316}{T}}[DG][E] - 1,001766 \times 10^{11}e^{-\frac{10000,617}{T}}[DG][A] + \\
&1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{T}}[MG][E] - 89,761e^{-3233,331/T}[MG][A] + \\
&361,935e^{-4828,992/T}[GL][E] \\
\frac{d[GL]}{dt} &= -8,3 \times 10^{-4}[GL] + 89,761e^{-\frac{3233,331}{T}}[MG][A]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
&-361,935e^{-4828,992/T}[GL][E] \\
&\tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= 3,724 \times 10^{-4}(343 - T) + 4,648 \times 10^{-4}(343 - T) - 8,3 \times 10^{-4}(T - 343) + \\
&1,109 \times 10^{-5}Q_{Rx} + 1,109 \times 10^{-5}Q
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Dengan mengabaikan Q_{Rx} , maka didapatkan persamaan sebagai berikut

$$\frac{dT}{dt} = 0,572 - 1,667 \times 10^{-3}T + 1,109 \times 10^{-5}Q \tag{3.37}$$

Dengan memasukkan $x_1=[TG]$, $x_2=[DG]$, $x_3=[MG]$, $x_4=[E]$, $x_5=[A]$, $x_6=[GL]$, $x_7=T$, $u=Q$ dan $y=[E]$ didapatkan persamaan ruang keadaan dan keluaran sebagai berikut

$$\dot{x}_1 = -8,3 \times 10^{-4}x_1 - 661937,618e^{-\frac{6619,24}{x_7}}x_1x_5 + 9723,779e^{-5001,316/x_7}x_2x_4 + 8,3 \times 10^{-4} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= 661937,618e^{-\frac{6619,24}{x_7}}x_1x_5 - 8,3 \times 10^{-4}x_2 - 9723,779e^{-\frac{5001,316}{x_7}}x_2x_4 - \\
&1,001766 \times 10^{11}e^{-10000,617/x_7}x_2x_5 + 1,669468 \times 10^8 e^{-7371,552/x_7}x_3x_4
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= 1,001766 \times 10^{11}e^{-\frac{10000,617}{x_7}}x_2x_5 - 8,3 \times 10^{-4}x_3 - \\
&1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{x_7}}x_3x_4 - 89,761e^{-\frac{3233,331}{x_7}}x_3x_5 + \\
&361,935e^{-\frac{4828,992}{x_7}}x_4x_6
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_4 &= 661937,618e^{-\frac{6619,24}{x_7}}x_1x_5 - 9723,779e^{-\frac{5001,316}{x_7}}x_2x_4 + \\
&1,001766 \times 10^{11}e^{-\frac{10000,617}{x_7}}x_2x_5 - 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{x_7}}x_3x_4 \\
&+ 89,761e^{-\frac{3233,331}{x_7}}x_3x_5 - 8,3 \times 10^{-4}x_4 \\
&- 361,935e^{-\frac{4828,992}{x_7}}x_4x_6
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 = & -661937,618e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 + 9723,779e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 x_4 \\ & -1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 x_5 + 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{T}} x_3 x_4 - \\ & 89,761e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 + 361,935e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 x_6 - 8,3 \times 10^{-4} x_5 + 0,005 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\dot{x}_6 = 89,761e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 - 361,935e^{-4828,992/x_7} x_4 x_6 - 8,3 \times 10^{-4} x_6 \quad (3.43)$$

$$\dot{x}_7 = 0,572 - 1,667 \times 10^{-3} x_7 + 1,109 \times 10^{-5} u \quad (3.44)$$

$$y = x_4 \quad (3.45)$$

Dari persamaan ruang keadaan yang didapat pada persamaan (3.38) hingga (3.44), terlihat bahwa persamaan ruang keadaan ini adalah persamaan yang tidak linier sehingga untuk dapat melakukan analisa lebih lanjut perlu dilakukan linierisasi.

3.4. Linierisasi persamaan ruang keadaan

Dari pemodelan didapatkan persamaan ruang keadaan pada persamaan (3.38) hingga (3.44). Karena persamaan ruang keadaan yang didapat tidak linier, maka akan dilakukan linierisasi dengan ekspansi deret Taylor setiap persamaan ruang keadaan pada titik-titik tertentu dengan mengabaikan orde tinggi. Persamaan umum linierisasi dengan ekspansi deret Taylor adalah berikut ini.

$$\begin{aligned} f_i = & f_i(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}, x_{7s}, u_s) \\ & + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg|_{x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}, x_{7s}, u_s} (x_j - x_{js}) \\ & + \frac{\partial f_i}{\partial u} \bigg|_{x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}, x_{7s}, u_s} (u - u_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g = & g(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}, x_{7s}, u_s) + \sum_{j=1}^7 \frac{\partial g}{\partial x_j} \bigg|_{x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}, x_{7s}, u_s} (x_j - x_{js}) \\ & + \frac{\partial g}{\partial u} \bigg|_{x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}, x_{7s}, u_s} (u - u_s) \end{aligned}$$

Dari linierisasi di sekitar titik mapan didapat

$$f_i(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}, x_{7s}, u_s) = 0$$

dan

$$g(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, x_{5s}, x_{6s}, x_{7s}, u_s) = y_s$$

Karena turunan dari konstanta adalah nol

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i - (x_{is}))}{dt}$$

Maka persamaan ruang keadaan dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_7} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_7}{\partial x_1} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} & \dots & \left. \frac{\partial f_7}{\partial x_7} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1s} \\ \vdots \\ x_7 - x_{7s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f_7}{\partial u} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} \end{bmatrix} [u - u_s]$$

$$y - y_s = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} & \dots & \left. \frac{\partial g}{\partial x_7} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1s} \\ \vdots \\ x_7 - x_{7s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_{1s} \dots x_{7s}, u_s} \end{bmatrix} [u - u_s]$$

Dari persamaan ruang keadaan yang didapat, maka turunan parsial dari setiap fungsi adalah berikut ini

$$f_1 = \dot{x}_1 = -8,3 \times 10^{-4} x_1 - 661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 + 9723,779 e^{-5001,316/x_7} x_2 x_4 + 8,3 \times 10^{-4}$$

Turunan parsial dari f_1 adalah

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -8,3 \times 10^{-4} - 661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_5 \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 9723,779 e^{-5001,316/x_7} x_4 \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_6} = \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 9723,779 e^{-5001,316/x_7} x_2 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = -661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_7} = -\frac{4,3815 \times 10^9}{x_7^2} e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 + \frac{4,863 \times 10^7}{x_7^2} e^{-5001,316/x_7} x_2 x_4 \quad (3.51)$$

$$f_2 = \dot{x}_2 = 661937,618e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 - 8,3 \times 10^{-4} x_2 - 9723,779e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 x_4 - 1,001766 \times 10^{11} e^{-10000,617/x_7} x_2 x_5 + 1,669468 \times 10^8 e^{-7371,552/x_7} x_3 x_4$$

Turunan parsial dari f_2 adalah

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 661937,618e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_5 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -8,3 \times 10^{-4} - 9723,779e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_4 - 1,001766 \times 10^{11} e^{-10000,617/x_7} x_5 \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 1,669468 \times 10^8 e^{-7371,552/x_7} x_4 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = -9723,779e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 + 1,669468 \times 10^8 e^{-7371,552/x_7} x_3 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_5} = 661937,618e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 - 1,001766 \times 10^{11} e^{-10000,617/x_7} x_2 \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_6} = \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_7} = \frac{4,382 \times 10^9}{x_7^2} e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 - \frac{4,863 \times 10^7}{x_7^2} e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 x_4 - \frac{1,002 \times 10^{15}}{x_7^2} e^{-10000,617/x_7} x_2 x_5 + \frac{1,231 \times 10^{12}}{x_7^2} e^{-7371,552/x_7} x_3 x_4 \quad (3.58)$$

$$f_3 = \dot{x}_3 = 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 x_5 - 8,3 \times 10^{-4} x_3 - 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{x_7}} x_3 x_4 - 89,761e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 + 361,935e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 x_6$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_5 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -8,3 \times 10^{-4} - 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{x_7}} x_4 - 89,761e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_5 \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = -1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{x_7}} x_3 + 361,935e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_6 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 - 89,761 e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_6} = 361,935 e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial x_7} = & \frac{1,231 \times 10^{12}}{x_7^2} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 x_5 - \frac{1,314 \times 10^{12}}{x_7^2} e^{-\frac{7371,552}{x_7}} x_3 x_4 - \frac{2,902 \times 10^5}{x_7^2} e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 + \\ & \frac{1,748 \times 10^6}{x_7^2} e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 x_6 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = 0 \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} f_4 = \dot{x}_4 = & 661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 - 9723,779 e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 x_4 + \\ & 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 x_5 - 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{x_7}} x_3 x_4 \\ & + 89,761 e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 + 8,3 \times 10^{-4} x_4 \\ & - 361,935 e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 x_6 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_5 \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = -9723,779 e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_4 + 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_5 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = -1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{x_7}} x_4 + 89,761 e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_5 \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -9723,779 e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 - 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{x_7}} x_3 - 8,3 \times 10^{-4}$$

$$-361,935 e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_6 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_5} = 661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 + 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 + 89,761 e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_6} = -361,935 e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_7} = & \frac{4,382 \times 10^9}{x_7^2} e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 - \frac{4,863 \times 10^7}{x_7^2} e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 x_4 + \frac{1,002 \times 10^{15}}{x_7^2} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 x_5 - \\ & \frac{1,231 \times 10^{12}}{x_7^2} e^{-\frac{7371,552}{x_7}} x_3 x_4 + \frac{2,902 \times 10^5}{x_7^2} e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 - \frac{1,748 \times 10^6}{x_7^2} e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 x_6 \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial u} = 0 \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} f_5 = \dot{x}_5 = & -661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 + 9723,779 e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 x_4 \\ & - 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 x_5 + 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{T}} x_3 x_4 \\ & - 89,761 e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 + 361,935 e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 x_6 - 8,3 \times 10^{-4} x_5 \\ & + 0,005 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = -661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_5 \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_2} = 9723,779 e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_4 - 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_5 \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3} = 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{T}} x_4 - 89,761 e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_5 \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_4} = 9723,779 e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 + 1,669468 \times 10^8 e^{-\frac{7371,552}{T}} x_3 + 361,935 e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_6 \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_5}{\partial x_5} = & -661937,618 e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 - 1,001766 \times 10^{11} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 - 89,761 e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 - \\ & 8,3 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_6} = 361,935 e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_5}{\partial x_7} = & -\frac{4,382 \times 10^9}{x_7^2} e^{-\frac{6619,24}{x_7}} x_1 x_5 + \frac{4,864 \times 10^7}{x_7^2} e^{-\frac{5001,316}{x_7}} x_2 x_4 - \frac{1,002 \times 10^{15}}{x_7^2} e^{-\frac{10000,617}{x_7}} x_2 x_5 + \\ & \frac{1,231 \times 10^{12}}{x_7^2} e^{-\frac{7371,552}{T}} x_3 x_4 - \frac{2,902 \times 10^5}{x_7^2} e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 + \frac{1,748 \times 10^6}{x_7^2} e^{-\frac{4828,992}{x_7}} x_4 x_6 \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial u} = 0 \quad (3.82)$$

$$f_6 = \dot{x}_6 = 89,761 e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 - 361,935 e^{-4828,992/x_7} x_4 x_6 - 8,3 \times 10^{-4} x_6$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1} = 0 \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_2} = 0 \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_3} = 89,761e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_5 \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_4} = -361,935e^{-4828,992/x_7} x_6 \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_5} = 89,761e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_6} = -361,935e^{-4828,992/x_7} x_4 - 8,3 \times 10^{-4} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_7} = \frac{2,902 \times 10^5}{x_7^2} e^{-\frac{3233,331}{x_7}} x_3 x_5 - \frac{1,748 \times 10^6}{x_7^2} e^{-4828,992/x_7} x_4 x_6 \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial u} = 0 \quad (3.90)$$

$$f_7 = \dot{x}_7 = 0,572 - 1,667 \times 10^{-3} x_7 + 1,109 \times 10^{-5} u$$

Karena persamaan pada f_7 dan keluaran y sudah linier, maka tidak dilakukan penurunan parsial

Dengan memasukkan nilai-nilai pada keadaan mantap adalah berikut ini:

$$x_{1s}=0 \quad x_{2s}=0,236 \quad x_{3s}=0 \quad x_{5s}=3,709$$

$$x_{4s}=2,291 \quad x_{6s}=0,764$$

$$x_{7s}=343$$

Maka didapatkan

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -0,011 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0,01 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0,001 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_5} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_6} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_7} = 1,039 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,01 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -0,092 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0,177 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = -0,001 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_5} = -0,005 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_6} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_7} =$$

$$-0,002 \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0,081 \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -0,205 \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 2,125 \times 10^{-4} \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 0,005 \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_6} = 6,373 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_7} = 2,198 \times 10^{-5} \quad \frac{\partial f_3}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0,01 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = 0,071 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = -0,15 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -0,002 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_5} = 0,005 \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_6} = -6,373 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_7} = 0,002 \quad \frac{\partial f_4}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_1} = -0,01 \quad \frac{\partial f_5}{\partial x_2} = -0,071 \quad \frac{\partial f_5}{\partial x_3} = 0,15 \quad \frac{\partial f_5}{\partial x_4} = 7,875 \times 10^{-4} \quad \frac{\partial f_5}{\partial x_5} = -0,006 \quad \frac{\partial f_5}{\partial x_6} = 6,373 \times$$

$$10^{-4} \quad \frac{\partial f_5}{\partial x_7} = -0,002 \quad \frac{\partial f_5}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_3} = 0,027 \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_4} = -2,125 \times 10^{-4} \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_5} = 0 \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_6} = -0,001 \quad \frac{\partial f_6}{\partial x_7} = -1,999 \times$$

$$10^{-5} \quad \frac{\partial f_6}{\partial u} = 0$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, serta menggunakan variable deviasi $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2 - 0,236$, $x'_3 = x_3$, $x'_4 = x_4 - 2,291$, $x'_5 = x_5 - 3,709$, $x'_6 = x_6 - 0,764$, $x'_7 = x_7 - 343$, maka didapatkan persamaan ruang keadaan yang telah dilinierisasi adalah berikut ini

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \\ \dot{x}'_4 \\ \dot{x}'_5 \\ \dot{x}'_6 \\ \dot{x}'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,011 & 0,01 & 0 & 0,001 & 0 & 0 & 1,039 \times 10^{-4} \\ 0,01 & -0,092 & 0,177 & -0,001 & -0,005 & 0 & -0,002 \\ 0 & 0,081 & -0,205 & 2,125 \times 10^{-4} & 0,005 & 6,373 \times 10^{-4} & 2,198 \times 10^{-5} \\ 0,01 & 0,071 & -0,15 & -0,002 & 0,005 & -6,373 \times 10^{-4} & 0,002 \\ -0,01 & -0,071 & 0,15 & 7,875 \times 10^{-4} & -0,006 & 6,373 \times 10^{-4} & -0,002 \\ 0 & 0 & 0,027 & -2,125 \times 10^{-4} & 0 & -0,001 & -1,999 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,667 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \\ x'_6 \\ x'_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,109 \times 10^{-5} \end{bmatrix} [u']$$

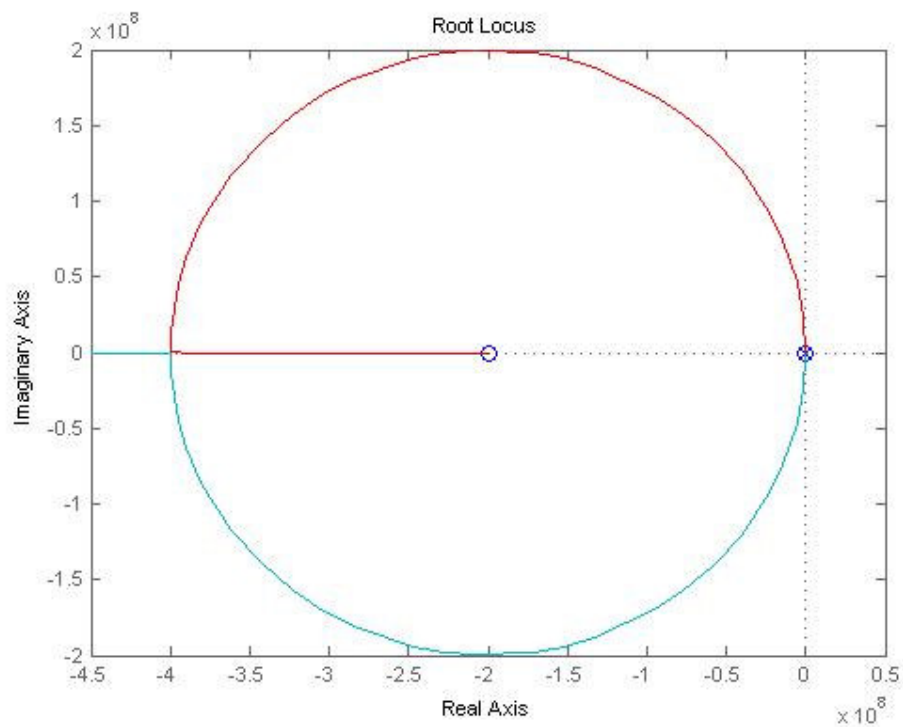
$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \\ x'_6 \\ x'_7 \end{bmatrix}$$

Dari matriks persamaan ruang keadaan di atas didapat fungsi alihnya adalah berikut ini

$$G(s) = \frac{10^{-7}(1,11 \times 10^{-9}s^6 + 0,222s^5 + 0,053s^4 + 0,001s^3 + 8,122 \times 10^{-7}s^2 - 2,18 \times 10^{-9}s - 3,1 \times 10^{-13})}{s^7 + 0,319s^6 + 0,01s^5 + 8,423 \times 10^{-5}s^4 + 2,394 \times 10^{-7}s^3 + 2,923 \times 10^{-10}s^2 + 1,6 \times 10^{-13}s}$$

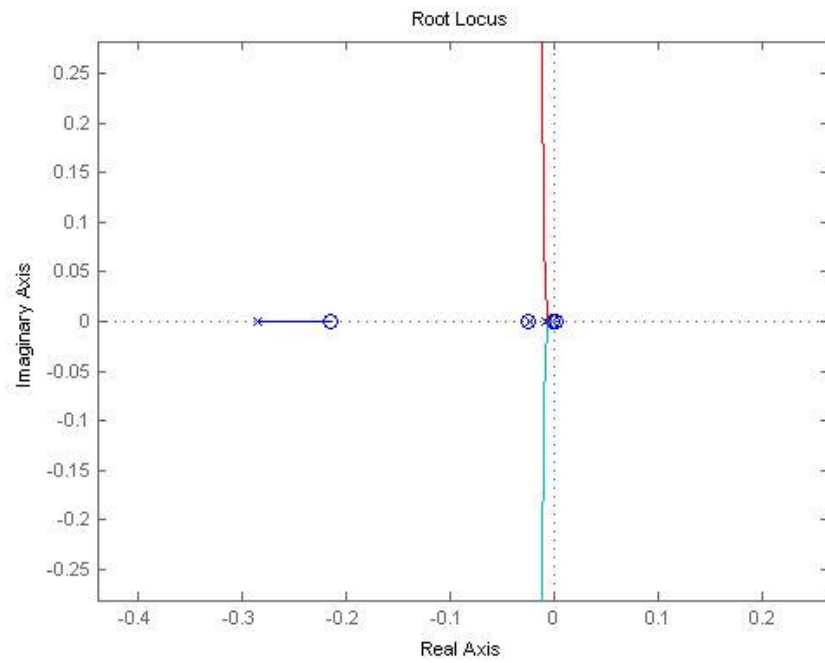
3.5. Analisa Kestabilan dengan Root Locus

Dari persamaan diatas, gambar root locusnya adalah berikut ini

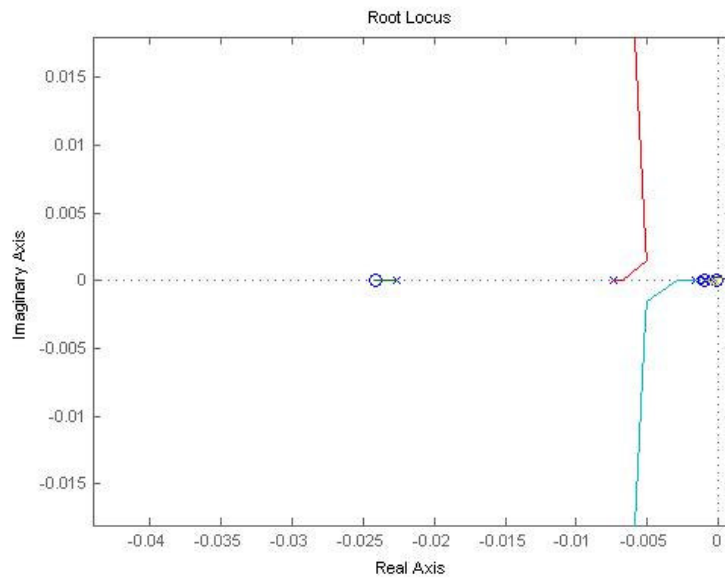


Gambar 11 Root Locus Persamaan

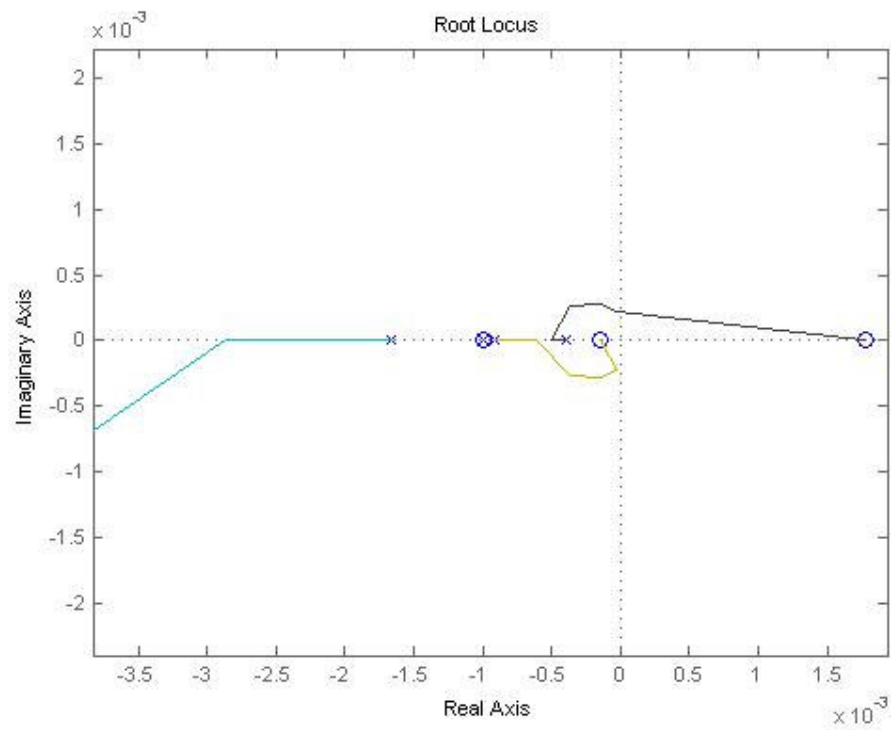
Apabila gambar diperbesar, maka didapat gambar nilai-nilai pole dan zero adalah berikut ini



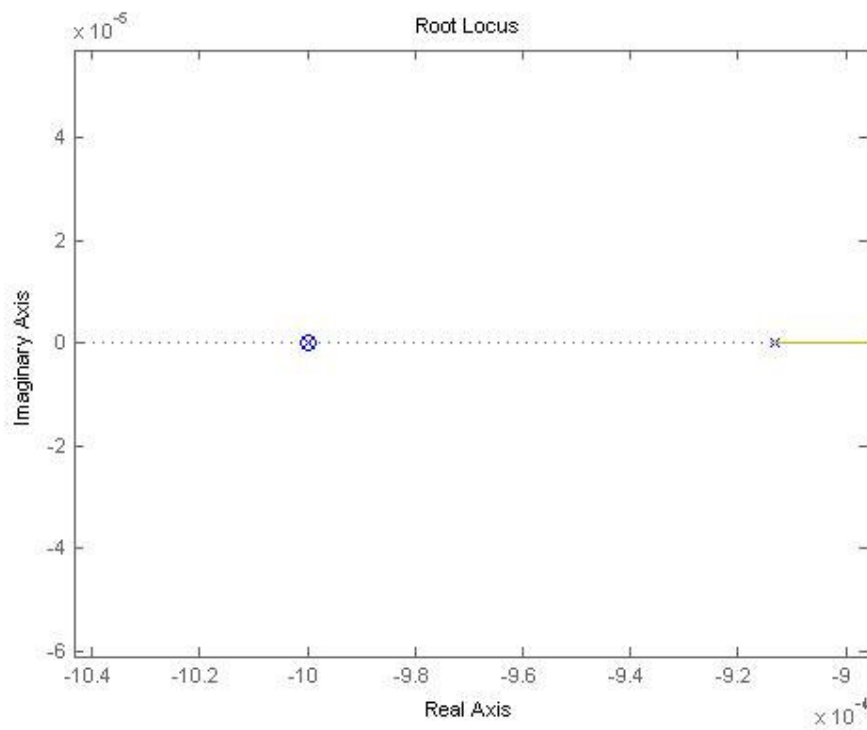
Gambar 12 Root Locus diperbesar



Gambar 13 Root Locus diperbesar



Gambar 14 Root Locus diperbesar



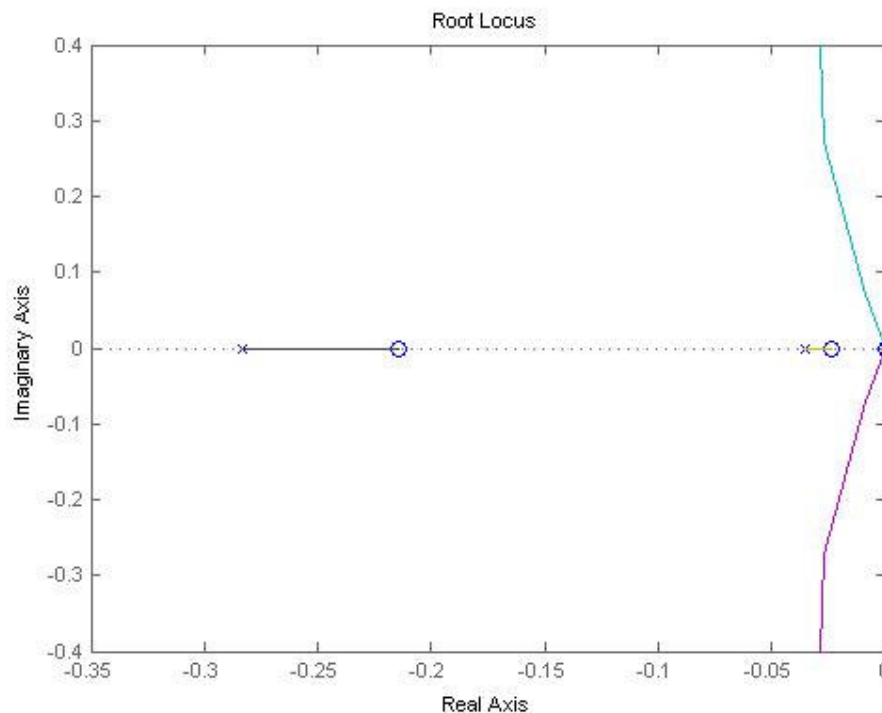
Gambar 15 Root Locus diperbesar

Fungsi alih memiliki enam buah nilai zero loop terbuka yaitu $-1,998 \times 10^8$; $-0,021$; $-0,002$; $1,772 \times 10^{-3}$; -10^{-3} ; dan $-1,51 \times 10^{-4}$. Fungsi alih memiliki tujuh buah nilai pole loop terbuka yaitu $-0,285$; $-0,023$; $-0,007$; $-0,002$; $-0,001$; $-9,133 \times 10^{-4}$; dan $-4,002 \times 10^{-4}$. Dari analisa root locus, terlihat bahwa seluruh pole terletak di sebelah kiri sumbu imajiner, sehingga sistem yang dilinierisasi ini bersifat stabil.

Karena koefisien s^0 , s^1 , s^2 dan s^6 pada pembilang serta koefisien s^4 , s^3 , s^2 , s^1 dan s^0 pada penyebut bernilai sangat kecil maka akan dilakukan analisa Root Locus pada sistem dengan mengabaikan nilai-nilai koefisien tersebut. Dengan demikian, persamaan fungsi alihnya menjadi berikut ini.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10^{-7}(0,222s^5 + 0,053s^4 + 0,001s^3)}{s^7 + 0,319s^6 + 0,01s^5} = \frac{10^{-7}(0,222s^2 + 0,053s + 0,001)}{s^4 + 0,319s^3 + 0,01s^2}$$

Root locus dari fungsi alih di atas adalah berikut ini



Gambar 16 Root Locus dengan mengabaikan nilai kecil

Fungsi alih memiliki tiga buah nilai zero loop terbuka yaitu $-0,22$; dan $-0,021$. Fungsi alih juga memiliki empat buah nilai pole loop terbuka yaitu dua buah akar kembar 0

(no); -0,284; dan -0,035. Dari analisa root locus, terlihat bahwa sistem memiliki seluruh akar pole yang bernilai negatif, sehingga sistem ini stabil.

3.6. Pengujian Controllability dan Observability

Sebuah sistem persamaan ruang keadaan dengan persamaan

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Dimana A berorde $n \times n$ dikatakan controllable sempurna jika memenuhi syarat

$$Q_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Mempunyai rank sebesar n atau bersifat independen linier. Berdasarkan perhitungan didapat

$$Q_c = 10^{-4} \begin{bmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{71} & \dots & Q_{77} \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan, matriks Q_c mempunyai rank sebesar 7. Dengan demikian Sistem bersifat controllable sempurna.

Sebuah sistem persamaan ruang keadaan dikatakan observable sempurna jika

$$Q_o = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$$

Memiliki rank sebesar n atau bersifat linier independen. Berdasarkan perhitungan didapat

$$Q_o = 10^3 \begin{bmatrix} O_{11} & \dots & O_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{71} & \dots & O_{77} \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan didapat Rank dari $Q_o=6$. Dengan demikian, sistem tidak Observable sempurna.