



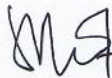


HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Murni

NPM : 0906495381

Tanda Tangan : 

Tanggal : 6 Juli 2011

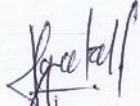
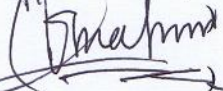
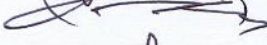
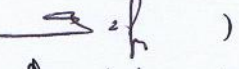
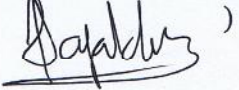
HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh :

Nama : Murni
NPM : 0906495381
Program Studi : Matematika
Judul Tesis : Analisis Stabilitas dan Penaksiran Parameter Model Rendleman-Bartter

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Gatot F. Hertono, Ph.D.	()
Pembimbing	: Bevina D. Handari, Ph.D.	()
Penguji	: Prof. Dr. Djati Kerami	()
Penguji	: Dr. rer. nat. Hendri Murfi	()
Penguji	: Dr. Al Haji Akbar B., M.Sc.	()

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 6 Juli 2011

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Yang Maha Kuasa karena hanya atas berkat dan rahmat-Nya sajalah sehingga penyusunan Tugas Akhir ini dapat diselesaikan.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas dukungan, bimbingan, dan pengarahan yang sangat berharga dalam penyelesaian Tugas Akhir ini kepada:

1. Kedua orang tuaku (Lauw Eng Tjoan dan Lo Er Nie), kedua mertuaku (Muchid Arifin dan Yati Rani Anggraini), suamiku (Tri Handhika) serta keluarga besarku yang memberikan doa, semangat, dan kasih sayang kepada penulis untuk menyelesaikan Tesis ini.
2. Drs. Gatot Fatwanto Hertono, M.Sc., Ph.D dan Dra. Bevina Desjwiandra Handari, M.Sc., Ph.D selaku pembimbing Tesis yang telah membimbing dan mengarahkan penulis.
3. Prof. Dr. Djati Kerami dan Dr. rer. nat. Hendri Murfi selaku Ketua dan Sekretaris Program Magister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia serta Dr. Dian Lestari selaku Dosen Wali.
4. Prof. Dr. Djati Kerami, Gatot F. Hertono, Ph.D, dan Dr. Alhaji Akbar B., M.Sc. selaku penguji sidang Tesis.
5. Universitas Gunadarma selaku penyandang dana bagi penulis selama menjalani pendidikan Program Magister, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia tahun anggaran 2009-2011.
6. Rekan-rekan Staf Pengajar pada Pusat Studi Komputasi Matematika (PSKM), Universitas Gunadarma, Ernastuti, Edi Sukirman, Ahmad Sabri, Lismanto, Onggo Wiryawan, Ias Sri Wahyuni, Dina Indarti, Nola Marina, Aini Suri Talita, dan Tri Handhika.

7. Segenap Staf Pengajar, Karyawan Tata Usaha, dan Perpustakaan Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.
8. Sahabatku Bong Novi Herawati, Eva Rida Meilyna Simatupang, Milka Hutagalung, dan Tri Handhika yang selalu berbagi cerita dan memberi inspirasi bagi penulis.
9. Rekan-rekan Asisten Dosen Departemen Manajemen, Fakultas Ekonomi, Universitas Indonesia.
10. Rekan-rekan peneliti SISORCO (*Science and Social Research Consultant*), Reza Henganing Ayodya, Tri Handhika, Adhika Jati, Dina Indarti, Ias Sri Wahyuni, Nola Marina, M. Yuko, dan Yanuar Singgih yang memberi banyak pengalaman dalam berorganisasi.
11. Teman-teman Program Magister Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia angkatan 2009.
12. Semua pihak yang telah membantu penulis baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih belum sempurna dan perlu dilakukannya studi yang lebih mendalam. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran sebagai bekal penyempurnaan penulisan-penulisan selanjutnya di kemudian hari.

Akhir kata, penulis berharap semoga tulisan ini dapat bermanfaat dalam pengembangan Ilmu Matematika dan disiplin ilmu lainnya.

Depok, Juli 2011

Penulis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS
AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Murni
NPM : 0906495381
Program Studi : Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Tesis

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Analisis Stabilitas dan Penaksiran Parameter Model Rendleman-Bartter

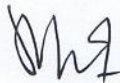
beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat dan memublikasikan Tugas Akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok

Pada tanggal : 6 Juli 2011

Yang menyatakan



(Murni)

ABSTRAK

Nama : Murni
Program Studi : Matematika
Judul : Analisis Stabilitas dan Penaksiran Parameter Model Rendleman-Bartter

Model tingkat bunga yang akan dibahas pada Tesis ini adalah model ekuilibrium satu faktor, yaitu model Rendleman–Bartter (RB) yang diasumsikan dalam ukuran *risk-neutral*. Tesis ini membahas mengenai stabilitas model RB, yaitu stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*. Stabilitas model RB ini terkait dengan parameter model RB. Namun, nilai parameter model RB tidak diketahui nilainya sehingga untuk implementasi model diperlukan penaksiran parameter model RB. Penaksiran parameter model RB membutuhkan data historis tingkat bunga. Model RB terkait dengan data historis berada pada ukuran aktual (*actual measure*). Sedangkan, model RB berada pada ukuran *risk-neutral*, sehingga sebelum menentukan taksiran parameter dilakukan perubahan ukuran pada model RB menggunakan Teorema Girsanov. Metode yang digunakan dalam penaksiran parameter adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan dilanjutkan dengan metode numerik Newton – Raphson. Dengan menggunakan data tingkat bunga bulanan suatu *zero-coupon bond* dengan *maturity time* 5 tahun periode Januari tahun 1982 hingga Februari 2011 yang diunduh dari <http://www.bankofengland.co.uk> dapat diperoleh nilai taksiran parameter yang memenuhi stabilitas model RB.

Kata kunci: Model Rendleman-Bartter, Stabilitas Model Stokastik, Teorema Girsanov, Metode *Maximum Likelihood Estimation*, Metode Newton-Raphson.

Bibliografi: 25 (1974-2010)

ABSTRACT

Name : Murni

Study Program: Mathematics

Title : Stability Analysis and Parameter Estimation of Rendleman-
Bartter Model

The Rendleman-Bartter (RB) model is a one-factor equilibrium interest rate model under risk-neutral measure. This thesis presents the stability of RB model, that is, stochastically asymptotically stable and mean-square stable, and their stability corresponds to parameter RB model. However, in the application the value of parameters RB model is unknown and needs to be estimated. Parameter estimation of RB model requires historical data of interest rates under actual measure. Therefore, Girsanov Theorem is used to change measure. Also, Maximum Likelihood Estimation (MLE) and Newton-Raphson method can be used to estimate these parameters. Parameter estimators are obtained by data of a zero-coupon bond with maturity time of five years from January 1982 to February 2011. This data can be downloaded from <http://www.bankofengland.co.uk>.

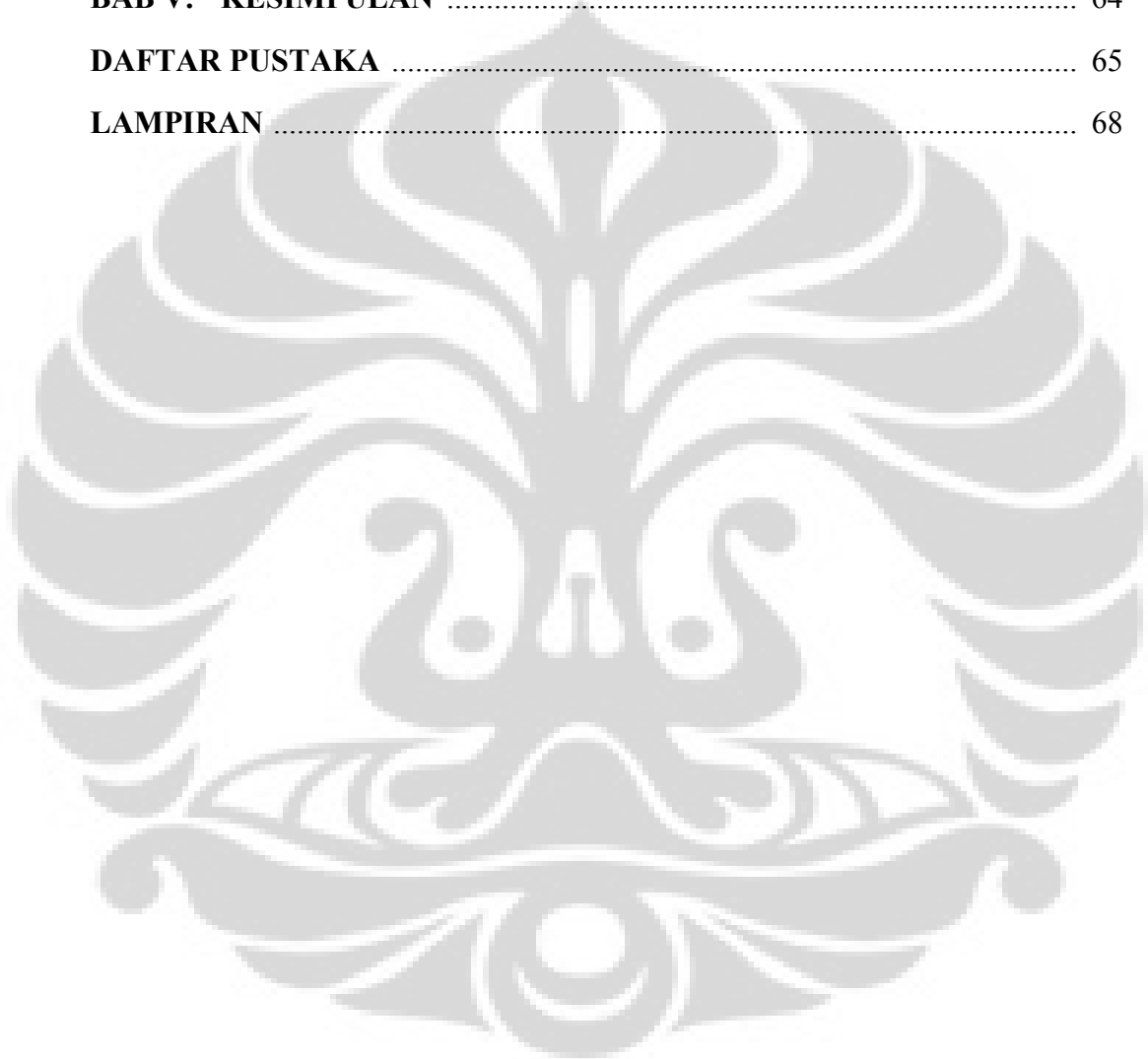
Key words: Rendleman–Bartter Model, Stability of Stochastic Model, Girsanov Theorem, Maximum Likelihood Estimation, Newton-Raphson Method.

Bibliography: 25 (1974-2010)

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR ORISINALITAS	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH	vi
ABSTRAK	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penulisan	2
1.4 Pembatasan masalah	2
1.5 Sistematika Penulisan	3
BAB II. LANDASAN TEORI	
2.1 Teori Probabilitas	4
2.2 Perubahan Ukuran (<i>Measure</i>)	12
2.3 <i>Brownian Motion</i>	15
2.4 Formula Ito-Doeblin	18
2.5 Stabilitas Persamaan Diferensial Stokastik Ito	20
2.6 Estimasi Parameter	
2.6.1 Metode <i>Maximum Likelihood</i>	21
2.6.2 Newton Raphson	22

BAB III. HASIL DAN PEMBAHASAN	
3.1 Model Rendleman-Bartter	28
3.2 Stabilitas Model Rendleman-Bartter	32
3.3 Penaksiran Parameter Model Rendleman-Bartter	41
BAB IV. IMPLEMENTASI	55
BAB V. KESIMPULAN	64
DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	68



DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.2.a	Daerah stabilitas stokastik asimtotik model RB terkait parameter μ dan σ berada pada daerah dengan warna biru.....	40
Gambar 3.2.b	Daerah stabilitas <i>mean-square</i> model RB terkait parameter μ dan σ berada pada daerah dengan warna merah	40
Gambar 4.1	Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik	56
Gambar 4.2	Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik	57
Gambar 4.3	Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik	58

Gambar 4.4	Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dengan $r_0 = 14,94\%$ dan beberapa nilai parameter yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik	58
Gambar 4.5	Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan <i>mean-square</i>	59
Gambar 4.6	Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan <i>mean-square</i>	60
Gambar 4.7	Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan <i>mean-square</i>	61
Gambar 4.8	Simulasi beberapa solusi model RB dengan $r_0 = 14,94\%$ (100 simulasi) dan beberapa nilai parameter yang berbeda untuk menguji kestabilan <i>mean-square</i>	61

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.3.a Perbandingan model RB dalam ukuran <i>risk-neutral</i> dengan dua model RB dalam ukuran aktual	49



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1 Data tingkat bunga bulanan dari suatu <i>zero coupon bond</i> pada Bank of England periode Januari 1982 hingga Februari 2011	68
Lampiran 2 Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik.....	72
Lampiran 3 Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik.....	73
Lampiran 4 Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik.....	74
Lampiran 5 Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dengan $r_0 = 14,94\%$ dan beberapa nilai parameter yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik	75

Lampiran 6 Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dimana $\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan <i>mean-square</i>	76
Lampiran 7 Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dimana $\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan <i>mean-square</i>	77
Lampiran 8 Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dimana $\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan <i>mean-square</i>	78
Lampiran 9 Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dengan $r_0 = 14.94\%$ dan beberapa nilai parameter yang berbeda untuk menguji kestabilan <i>mean-square</i>	79
Lampiran 10 Algoritma Newton-Raphson dalam menaksir parameter model Rendleman-Bartter terkait model ukuran aktual $dr(t) = \sigma r(t)dW(t)$	80
Lampiran 11 Algoritma Newton-Raphson dalam menaksir parameter model Rendleman-Bartter terkait model ukuran aktual $dr(t) = vr(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$	81

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Stabilitas Persamaan Diferensial Stokastik (PDS) merupakan suatu sifat yang sangat penting untuk dibahas. Dengan adanya stabilitas maka dapat diketahui kekonsistenan suatu model PDS. Hal ini berarti bahwa jika dilakukan sedikit gangguan pada solusi awal atau parameter PDS, maka solusi dari PDS akan tetap stabil (Arnold, 1974).

PDS yang akan dibahas dalam Tesis ini merepresentasikan model tingkat bunga. Tingkat bunga digunakan dalam menghargai suatu aset, seperti obligasi (*bond*), saham (*stock*), dan opsi (*option*). Berdasarkan jenisnya, ada dua kategori model tingkat bunga, yaitu model *equilibrium* (ekuilibrium) dan *no-arbitrage* (Hull, 2003). Adapun contoh dari model ekuilibrium adalah model Rendleman-Bartter (RB), Vasicek, Brennan-Schwartz (BS), dan Cox-Ingersoll-Ross (CIR), sedangkan contoh model *no-arbitrage* diantaranya adalah model Ho-Lee dan Hull-White. Model tingkat bunga yang akan dibahas pada Tesis ini adalah salah satu model ekuilibrium, yaitu model Rendleman-Bartter (RB). Ada banyak asumsi yang diperhatikan dalam model ekuilibrium, diantaranya adalah asumsi ekonomi (perilaku permintaan, penawaran, dan harga di pasar), asumsi perilaku stokastik dari satu atau lebih variabel atau faktor ekonomi, serta asumsi mengenai preferensi investor terhadap aset yang dipilih (Longstaff, 1992). Berdasarkan asumsi-asumsi inilah, maka dapat diturunkan model tingkat bunga, salah satunya adalah model RB. Berdasarkan asumsi perilaku stokastik dari satu atau lebih variabel atau faktor ekonomi, maka ada dua bentuk model ekuilibrium, yaitu model ekuilibrium satu faktor dan model ekuilibrium dua faktor (Hull, 2003). Model RB merupakan model ekuilibrium satu faktor. Model satu faktor ini mendeskripsikan pergerakan tingkat bunga menurut satu sumber resiko, yaitu $r(t)$.

Tesis ini membahas stabilitas model RB dengan stabilitas yang dibahas adalah stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*. Pada Tesis ini juga ditunjukkan bahwa stabilitas model RB terkait dengan parameter model RB. Nilai parameter model RB tidak diketahui nilainya sehingga untuk aplikasi model diperlukan penaksiran parameter model RB.

Penaksiran parameter model RB membutuhkan data historis tingkat bunga. Model RB terkait dengan data historis berada pada ukuran aktual (*actual measure*). Sedangkan model RB berada pada ukuran *risk-neutral*. Dengan demikian, sebelum dilakukan penaksiran parameter dilakukan perubahan ukuran pada model RB. Perubahan ukuran ini diperlukan agar terdapat keterkaitan antara model dalam ukuran *risk-neutral* dengan model dalam ukuran aktual (Brigo, 2006), sehingga model RB dalam ukuran aktual dapat digunakan untuk penaksiran parameter. Selanjutnya, taksiran parameter dapat diperoleh dengan menggunakan metode penaksiran parameter dalam statistika dan dilanjutkan dengan pendekatan numerik.

1.2 Permasalahan

Permasalahan dari tesis ini adalah bagaimana cara menentukan stabilitas dan penaksiran parameter model Rendleman-Bartter.

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan Tesis ini adalah menentukan stabilitas dan taksiran parameter model Rendleman-Bartter. Selain itu, akan dianalisis juga apakah taksiran nilai parameter yang diperoleh memenuhi daerah stabilitas model.

1.4 Pembatasan masalah

Pembatasan masalah pada Tesis ini adalah stabilitas yang dibahas hanya stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*. Selain itu, metode yang digunakan dalam penaksiran parameter adalah *Maximum Likelihood Estimation* dan metode numerik Newton-Raphson.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tesis ini dibagi menjadi lima bab, yaitu:

- Bab I membahas mengenai latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan, pembatasan masalah dan sistematika penulisan.
- Bab II membahas landasan teori mengenai teori probabilitas, *Brownian Motion* dan kalkulus stokastik, stabilitas persamaan diferensial stokastik, dan penaksiran parameter.
- Bab III membahas mengenai model Rendleman Bartter, stabilitas dan penaksiran parameter model Rendleman-Bartter
- Bab IV membahas implementasi stabilitas dan penaksiran nilai parameter model Rendleman-Bartter menggunakan data historis tingkat bunga bulanan dari suatu *zero-coupon bond* dengan *maturity time* 5 tahun periode Januari 1982 hingga Februari 2011 yang diperoleh dari *Bank of England*.
- Bab V berisi kesimpulan untuk Tesis ini.

BAB 2

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai dasar-dasar teori yang digunakan dalam Tesis ini. Model RB merupakan model tingkat bunga yang merupakan proses stokastik dan direpresentasikan sebagai persamaan diferensial stokastik. Sehingga teori-teori yang digunakan untuk menjelaskan model RB diantaranya adalah teori probabilitas, proses stokastik, *Brownian motion*, persamaan diferensial stokastik, dan formula Ito-Doebelin. Definisi stabilitas model stokastik juga dijelaskan dalam bab ini. Teori yang akan dibahas berikutnya digunakan untuk penaksiran parameter yaitu teori berkaitan dengan perubahan ukuran (*measure*) yang dikenal sebagai Teorema Radon-Nikodym dan Teorema Girsanov. Selain itu, metode *Maximum Likelihood Estimation* dan metode numerik Newton-Raphson juga dibahas pada bab ini.

2.1 Teori Probabilitas

Tesis ini membahas salah satu model tingkat bunga, yaitu model Rendleman-Bartter (RB). Model RB dapat dimodelkan dalam persamaan diferensial stokastik (PDS) dengan variabelnya yaitu tingkat bunga merupakan suatu proses stokastik yang didefinisikan pada ruang probabilitas. Oleh karena itu, pertama-tama akan diberikan teori mengenai ruang probabilitas (Boes, 1974).

Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ dari suatu percobaan acak, dengan Ω merupakan ruang sampel, yaitu himpunan seluruh hasil yang mungkin dari suatu percobaan acak, \mathfrak{F} menotasikan koleksi *subset-subset* dari ruang sampel yang disebut sebagai ruang kejadian dan merupakan suatu σ -aljabar, sedangkan P merupakan himpunan fungsi dengan *domain* \mathfrak{F} dan *codomain* $[0,1]$.

Definisi 2.1.1 (Peubah acak)

Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathfrak{F}, P[\cdot])$, suatu peubah acak X atau $X(\cdot)$ merupakan suatu fungsi dengan *domain* Ω dan *codomain* R sedemikian sehingga himpunan $A_r, A_r = \{\omega : X(\omega) \leq r\} \in \mathfrak{F}, \forall r \in R$.

Setelah definisi peubah acak, teori berikutnya yang terkait dengan tingkat bunga adalah mengenai *Cumulative Distribution Function* (CDF). Pada CDF ini juga akan dibahas mengenai sifat-sifat CDF. CDF ini digunakan untuk menggambarkan distribusi dari peubah acak. Selain itu, berdasarkan CDF maka dapat ditentukan nilai probabilitas dari suatu kejadian, ekspektasi, serta variansi dari peubah acak.

Definisi 2.1.2 (*Cumulative Distribution Function*)

Cumulative Distribution Function (CDF) dari suatu peubah acak X yang dinotasikan dengan $F_X(\cdot)$ didefinisikan sebagai fungsi dengan *domain* R dan *codomain* $[0,1]$ yang memenuhi

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \forall x \in R.$$

Berikut adalah sifat-sifat dari CDF:

- $F_X(-\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ dan $F_X(+\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- $F_X(\cdot)$ merupakan fungsi yang monoton dan tidak turun atau dengan kata lain $F_X(a) \leq F_X(b)$ untuk $a < b$.
- $F_X(\cdot)$ merupakan fungsi yang kontinu kanan atau dengan kata lain $\lim_{0 < h \rightarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x)$.

Setelah membahas definisi CDF serta sifatnya, pembahasan akan dilanjutkan mengenai jenis dari peubah acak. Ada dua jenis peubah acak, yaitu peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu dengan distribusinya dapat digambarkan dengan menggunakan *Probability Mass Function* (PMF) untuk

diskrit dan *Probability Density Function* (PDF) untuk kontinu. Karena model tingkat bunga merupakan fungsi kontinu, maka teori yang akan dibahas hanya untuk variabel kontinu saja. Berikut merupakan definisi peubah acak kontinu, PDF, serta teorema yang berkaitan dengan peubah acak kontinu.

Definisi 2.1.3 (Peubah Acak Kontinu)

Suatu peubah acak X dikatakan kontinu jika terdapat suatu fungsi $f_X(\cdot)$ sedemikian sehingga $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$; $\forall x \in \mathfrak{R}$.

Definisi 2.1.4 (PDF dari Suatu Peubah Acak Kontinu)

Jika X merupakan peubah acak kontinu, fungsi $f_X(\cdot)$ pada $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$ disebut pdf dari X .

Teorema 2.1.5

Misalkan X adalah suatu peubah acak kontinu. $F_X(\cdot)$ dapat diperoleh dari $f_X(\cdot)$ dan begitupun sebaliknya.

Berdasarkan teorema di atas maka PDF dapat pula digunakan untuk menentukan probabilitas suatu kejadian yang terdefinisi pada peubah acak kontinu X . Sebagai contoh adalah $P[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx$ untuk $a < b$.

Teori selanjutnya adalah mengenai ekspektasi dan variansi. Ekspektasi dan variansi dari peubah acak X digunakan dalam Bab 3 untuk menentukan distribusi dari model tingkat bunga Rendleman-Bartter dan untuk penaksiran parameter dari model tersebut.

Definisi 2.1.6 (Ekspektasi)

Misalkan X peubah acak. Ekspektasi dari X yang dinotasikan dengan μ_X atau $E(X)$, dan didefinisikan sebagai

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx$$

jika X kontinu dengan pdf $f_X(x)$.

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx$$

untuk sebarang peubah acak X .

Definisi 2.1.7 (Variansi)

Misalkan X peubah acak. Variansi dari X yang dinotasikan dengan σ_X^2 atau $Var(X)$ secara umum didefinisikan sebagai

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx.$$

jika X kontinu dengan pdf $f_X(x)$. Selain itu variansi dari X juga dapat didefinisikan sebagai

$$Var(X) = \int_0^{\infty} 2x [1 - F_X(x) + F_X(-x)] dx - \mu_X^2$$

untuk sebarang peubah acak X .

Karena X kontinu, $E(X)$ dan $Var(X)$ dapat terdefinisi jika integralnya ada. Selain itu maka ekspektasi dan variansinya tidak ada atau tidak terdefinisi.

Setelah diberikan definisi ekpektasi dan variansi di atas, pada bab ini juga diberikan Teorema mengenai ekspektasi bersyarat yang akan digunakan pada Bab 3. Namun, sebelum diberikan Teorema tersebut, terlebih dahulu akan diberikan definisi mengenai *measurable* dan independen yang digunakan pada Teorema tersebut (Shreve, 2004).

Definisi 2.1.8 (Measurable)

Misalkan X suatu peubah acak yang terdefinisi pada suatu ruang sampel tidak kosong Ω . Misalkan \mathcal{G} suatu σ -aljabar dari subset Ω . Jika setiap himpunan di

dalam σ -aljabar $\sigma(X)$ juga termasuk di dalam \mathcal{G} , maka X disebut *measurable* di \mathcal{G} .

Definisi 2.1.9 (Independen)

Misalkan $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ merupakan suatu ruang probabilitas dan misalkan $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$ adalah barisan dari sub- σ -aljabar \mathfrak{S} . Untuk suatu bilangan bulat positif n , dikatakan bahwa n σ -aljabar $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$ independen jika

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

untuk setiap $A_1 \in \mathcal{G}_1, A_2 \in \mathcal{G}_2, \dots, A_n \in \mathcal{G}_n$.

Misalkan X_1, X_2, X_3, \dots adalah barisan peubah acak pada $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$. Dikatakan bahwa n peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n independen jika σ -aljabar- σ -aljabar $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots, \sigma(X_n)$ independen. Dikatakan bahwa seluruh barisan σ -aljabar $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$ independen jika untuk setiap bilangan bulat positif n , n σ -aljabar $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ independen. Dikatakan bahwa seluruh barisan peubah acak X_1, X_2, X_3, \dots independen jika untuk setiap bilangan bulat positif n , n peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n independen.

Teorema 2.1.10 (Ekspektasi Bersyarat)

Misalkan diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ dan misalkan pula \mathcal{G} merupakan sub- σ -aljabar dari \mathfrak{S} .

- a) Jika X dan Y merupakan peubah acak yang *integrable* ($E(|X|) < \infty, E(|Y|) < \infty$), dan c_1 serta c_2 merupakan konstanta, maka

$$E(c_1X + c_2Y | \mathcal{G}) = c_1E(X | \mathcal{G}) + c_2E(Y | \mathcal{G}).$$

- b) Jika X , Y , dan XY merupakan peubah acak - peubah random yang *integrable*, dan X *measurable* di \mathcal{G} , maka

$$E(XY | \mathcal{G}) = XE(Y | \mathcal{G}).$$

- c) Jika \mathcal{H} suatu sub- σ -aljabar dari \mathcal{G} dan X merupakan peubah acak yang *integrable*, maka

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}).$$

- d) Jika X *integrable* dan *independent* dari \mathcal{G} , maka

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X).$$

Dalam statistika, ada beberapa jenis distribusi yang dikenal, diantaranya adalah distribusi normal, lognormal, eksponensial, poisson, F, *t-student*, dan distribusi lainnya. Namun, pada bab ini hanya akan dibahas dua distribusi yang berkaitan dengan penaksiran parameter yang akan dibahas pada Bab 3, yaitu distribusi normal dan distribusi lognormal (Karlin, 1998).

Definisi 2.1.11 (Distribusi Normal)

Suatu peubah acak X dengan parameter μ dan σ^2 dikatakan berdistribusi Normal jika memiliki PDF sebagai berikut:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}; \quad -\infty < x < \infty.$$

Definisi 2.1.12 (Distribusi Lognormal)

Jika logaritma natural dari suatu peubah acak V yang nonnegatif berdistribusi normal, maka V memiliki distribusi lognormal. Sebaliknya, jika X berdistribusi normal dengan ekspektasi μ dan variansi σ^2 , maka $V = e^X$ merupakan peubah acak berdistribusi lognormal. Berikut ini diberikan PDF dari V :

$$f_V(v) = \frac{1}{\sigma v\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(v)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},$$

dengan ekspektasi dan variansi masing-masing adalah

$$E(V) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right),$$

dan

$$\text{Var}(V) = \exp\left\{2\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\} \cdot \{\exp(\sigma^2) - 1\}.$$

Selanjutnya, akan dibahas beberapa definisi terkait dengan tingkat bunga. Nilai tingkat bunga terkait dengan waktu. Oleh karena itu, pada setiap waktu perlu didefinisikan suatu peubah acak sehingga pada bab ini diperlukan definisi lebih dari satu peubah acak. Berikut definisi-definisi yang terkait (Dokuchaev, 2007).

Definisi 2.1.13

Suatu barisan peubah acak $\xi_t, t = 0, 1, 2, \dots$, disebut sebagai suatu proses stokastik (acak) dengan waktu diskrit.

Definisi 2.1.14

Misalkan diberikan $T \in [0, +\infty]$. Suatu pemetaan $\xi: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ disebut sebagai suatu proses stokastik (acak) dengan waktu kontinu jika $\xi(t, \omega)$ merupakan peubah acak untuk hampir setiap t .

Suatu proses stokastik memiliki dua peubah *independent* (t dan ω), proses tersebut dapat ditulis sebagai $\xi_t(\omega)$, $\xi(t, \omega)$, atau hanya ξ_t , $\xi(t)$. Pada Tesis ini nilai tingkat bunga dinyatakan sebagai suatu proses stokastik yang dinotasikan dengan $r(t)$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai definisi *white noise* dan *random walk* yang menjadi dasar pembentukan *Brownian motion* pada Subbab 2.3.

Definisi 2.1.15 (White Noise)

Misalkan $\xi_t, t = 0, 1, 2, \dots$, merupakan proses stokastik dengan waktu diskrit sedemikian sehingga ξ_t *mutually independent* dan memiliki distribusi yang sama, serta $E(\xi_t) \equiv 0$. Maka, proses ξ_t disebut sebagai suatu *white noise* dengan waktu diskrit.

Definisi 2.1.16 (Random Walk)

Misalkan ξ_t *white noise* dengan waktu diskrit, dan misalkan $x_t \in \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_t, t = 0, 1, 2, \dots$ di mana $x \in X$ berarti bahwa x terdefinisi sedemikian sehingga $x = X$. Maka, proses x_t disebut sebagai suatu *random walk*.

Berikut ini diberikan sebuah definisi yang dapat digunakan dalam proses stokastik (Kloeden, 1992):

Definisi 2.1.17 (Sample Path)

Untuk setiap $\omega \in \Omega$, $\xi(\cdot, \omega): [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$ disebut sebagai suatu realisasi, *sample path*, atau *trajectory*.

Teori proses stokastik mempelajari sifat-sifat *sample path* (sifat-sifat *trajectories*) $\xi(t, \omega)$ untuk ω yang diberikan, seperti halnya perubahan pada distribusi probabilitas.

Definisi 2.1.18

Suatu proses $x_t = \xi(t, \omega)$ dengan waktu kontinu disebut kontinu (*sample path* kontinu), jika *trajectories* $\xi(t, \omega)$ hampir pasti (*almost surely*) kontinu di t (dengan probabilitas 1 atau untuk hampir setiap (*almost every*) ω).

Berikut ini akan dibahas beberapa definisi terkait konsep ekspektasi suatu proses stokastik bersyarat informasi sebelumnya. Asumsikan bahwa definisi-definisi berikut ini berlaku untuk waktu $t \in [0, +\infty)$ atau $t = 0, 1, 2, \dots$ (Dokuchaev, 2007):

Definisi 2.1.19 (Filtrasi)

Suatu himpunan dari σ -aljabar $\{\mathfrak{F}_t\}$ disebut sebagai suatu filtrasi jika $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$ untuk $s < t$.

Definisi 2.1.20

Misalkan ξ_t merupakan suatu proses stokastik, dan misalkan pula bahwa \mathfrak{F}_t adalah suatu filtrasi. Proses $\xi(\cdot)$ disebut *adapted* terhadap filtrasi \mathfrak{F}_t , jika

sebarang peubah acak ξ_t *measurable* terhadap \mathfrak{F}_t (contohnya: $\{\xi_t \in B\} \in \mathfrak{F}$ dengan $B \subset \mathfrak{R}$ merupakan sebarang interval buka).

Definisi 2.1.21

Misalkan ξ_t merupakan suatu proses stokastik. Filtrasi \mathfrak{F}_t yang dibangun oleh ξ_t didefinisikan sebagai filtrasi minimal sedemikian sehingga ξ_t *adapted* terhadap \mathfrak{F}_t .

Definisi 2.1.22

Proses stokastik $\xi(\cdot)$ dan $\eta(\cdot)$ disebut *independent* jika dan hanya jika kejadian-kejadian $\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in A\}$ dan $\{(\eta_{\tau_1}, \dots, \eta_{\tau_m}) \in B\}$ *independent* untuk semua m, n , semua waktu (t_1, \dots, t_n) dan (τ_1, \dots, τ_m) , serta semua himpunan $A \subset \mathfrak{R}^n$ dan $B \subset \mathfrak{R}^m$.

Proses-proses *independent* jika dan hanya jika semua kejadian-kejadian dari filtrasi yang dibangun oleh proses-proses tersebut *mutually independent*.

2.2 Perubahan Ukuran (*Measure*)

Pada model keuangan, pembentukan model-modelnya didasarkan pada suatu ruang sampel Ω yang dapat dianggap sebagai himpunan skenario-skenario yang mungkin di masa depan. Himpunan skenario-skenario yang mungkin ini memiliki suatu *actual probability measure* P . Namun, untuk tujuan *asset pricing* akan digunakan suatu *risk-neutral probability measure* \tilde{P} . Hal ini dikarenakan, dalam menentukan harga suatu aset di tempat yang berbeda haruslah sama, sehingga dalam keuangan kondisi yang harus dipenuhi adalah *no-arbitrage*. Oleh karena ada dua ukuran yang berbeda maka dilakukan perubahan ukuran agar terdapat keterkaitan antara ukuran *risk-neutral* dengan aktual. Perubahan dari

aktual ke *risk-neutral probability measure* hanya mengubah distribusi dari harga asetnya saja tanpa mengubah harga aset itu sendiri (Shreve, 2004).

Perubahan ukuran dapat dilakukan dengan menerapkan Teorema Girsanov. Beberapa Definisi dan Teorema penting terkait perubahan ukuran dan menjadi dasar Teorema Girsanov akan dibahas berikut ini (pembuktian selengkapnya dapat dilihat pada Shreve (2004)):

Teorema 2.2.1

Misalkan $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ merupakan suatu ruang probabilitas dan Z merupakan suatu peubah acak *almost surely* non-negatif dengan $E(Z)=1$. Untuk $A \in \mathfrak{F}$, definisikan

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega),$$

Maka \tilde{P} merupakan suatu *probability measure*. Lebih jauh lagi, jika X adalah suatu peubah acak non-negatif, maka

$$E^{\tilde{P}}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\tilde{P}(\omega) = E^P(XZ).$$

Jika Z *almost surely strictly positive*, dapat juga didefinisikan

$$E^P(Y) = E^{\tilde{P}}\left(\frac{Y}{Z}\right),$$

untuk setiap peubah acak non-negatif Y .

Definisi 2.2.2

Misalkan Ω merupakan suatu himpunan tidak kosong dan \mathfrak{F} adalah suatu σ -aljabar dari subhimpunan-subhimpunan Ω . *Probability measure* P dan \tilde{P} pada (Ω, \mathfrak{F}) disebut ekivalen jika keduanya memberikan nilai probabilitas nol untuk himpunan-himpunan yang sama pada \mathfrak{F} .

Definisi 2.2.3

Misalkan $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ merupakan suatu ruang probabilitas, misalkan \tilde{P} *probability measure* lain pada (Ω, \mathfrak{F}) yang ekuivalen dengan P , dan misalkan Z merupakan suatu peubah acak *almost surely* positif yang menghubungkan P dan \tilde{P} melalui Teorema 2.2.2. Maka Z disebut turunan Radon-Nikodym dari \tilde{P} terhadap P dan ditulis $Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}$.

Teorema 2.2.4 (Radon-Nikodym)

Misalkan P dan \tilde{P} merupakan dua *probability measure* yang ekuivalen dan terdefinisi pada (Ω, \mathfrak{F}) . Maka terdapat sebuah peubah acak Z yang *almost surely* positif sedemikian sehingga $E^P(Z) = 1$ dan $\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega)$ untuk setiap $A \in \mathfrak{F}$.

Teorema 2.2.5 (Teorema Girsanov)

Misalkan $W(t)$ merupakan *Brownian motion* pada ruang probabilitas $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $\mathfrak{F}(t)$ merupakan *filtrasi* untuk $0 \leq t \leq T$, dan merupakan $\theta(t)$ *adapted process* untuk $0 \leq t \leq T$. Definisikan,

$$Z(t) = \exp \left\{ -\int_0^t \theta(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u) du \right\},$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(u) du.$$

Asumsikan bahwa

$$E \int_0^T \theta^2(u) Z^2(u) du < \infty$$

dan tetapkan $Z = Z(T)$. Maka $EZ = 1$ dan dalam *probability measure* proses \tilde{P} , $\tilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$ adalah *Brownian motion*.

2.3 Brownian Motion

Model RB diberikan sebagai berikut, $dr(t) = \mu r(t)dt + \sigma r(t)d\tilde{W}(t)$ (Yolcu, 2005). Berdasarkan bentuk model RB, terlihat bahwa model RB tersebut terkait dengan *Brownian motion*, $\tilde{W}(t)$. Berikut ini akan dibahas teori-teori pembentukan *Brownian motion* (Shreve, 2004).

2.3.1 Symmetric Random Walk

Pembentukan *Brownian motion* diawali dengan *symmetric random walk*. Misalkan $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \dots$, merupakan barisan tak hingga pelemparan koin, dengan ω_n adalah kejadian pelemparan ke-n, dan

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{jika } \omega_j = \text{Head}, \\ -1, & \text{jika } \omega_j = \text{Tail}, \end{cases}$$

definisikan $M_0 = 0$, maka

$$M_k = \sum_{j=1}^k X_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Proses $M_k, k = 1, 2, \dots$ disebut *symmetric random walk*.

Increment dari *random walk* independen yang berarti bahwa jika dipilih bilangan bulat nonnegatif $k_i; i = 0, 1, \dots, m$, dengan $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_m$, maka peubah acak-peubah acak berikut independen,

$$M_{k_1} = (M_{k_1} - M_{k_0}), (M_{k_2} - M_{k_1}), \dots, (M_{k_m} - M_{k_{m-1}}).$$

Setiap peubah acak,

$$(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j,$$

disebut *increment* dari *random walk*. Setiap *increment* $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ mempunyai ekspektasi nol dan variansi $k_{i+1} - k_i$.

2.3.2 Scaled Symmetric Random Walk

Untuk mengaproksimasi sebuah *Brownian motion*, dengan n bilangan bulat positif didefinisikan *scaled symmetric random walk*,

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt},$$

dengan nt bilangan bulat.

Sama halnya seperti *random walk*, *scaled random walk* juga memiliki *increment* yang independen. Jika $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ sehingga setiap nt_j merupakan bilangan bulat, maka

$$(W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0)), (W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)), \dots, (W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_{m-1}))$$

independen. Jika $0 \leq s \leq t$ sedemikian sehingga ns dan nt bilangan bulat, maka

$$E[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = 0,$$

$$\text{Var}[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = t - s.$$

Teorema 2.3.3 (Teorema Limit Central)

Ditetapkan $t \geq 0$, maka untuk $n \rightarrow \infty$, distribusi *scaled random walk* yang dievaluasi saat t akan konvergen ke distribusi normal dengan ekspektasi nol dan variansi t .

Selanjutnya, berdasarkan teori-teori di atas, maka *Brownian motion* diperoleh dengan mengambil nilai limit dari *scaled random walk* $W^{(n)}(t)$ untuk $n \rightarrow \infty$.

Definisi 2.3.4 (Brownian motion)

Misalkan $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ merupakan ruang probabilitas. Untuk setiap $\omega \in \Omega$, misalkan terdapat sebuah fungsi kontinu $W(t)$ dengan $t \geq 0$ yang memenuhi $W(0) = 0$ dan bergantung pada ω . Maka $W(t)$, $t \geq 0$, merupakan *Brownian motion* jika untuk semua $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ *increment*,

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

independent dan setiap *increment* berdistribusi normal dengan

$$E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0,$$

$$\text{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i.$$

Definisi 2.3.5 (Filtrasi Brownian motion)

Misalkan $(\Omega, \mathfrak{F}, P[\cdot])$ ruang probabilitas yang didefinisikan pada *Brownian motion* $W(t)$, $t \geq 0$. Filtrasi untuk *Brownian motion* adalah koleksi σ -aljabar $\mathfrak{F}(t)$, $t \geq 0$ yang memenuhi:

- i. (*Information accumulates*). Untuk $0 \leq s < t$, setiap himpunan pada $\mathfrak{F}(s)$ juga terdapat pada $\mathfrak{F}(t)$. Dengan kata lain, setidaknya ada banyak informasi yang tersedia pada saat $\mathfrak{F}(t)$ dengan diketahui waktu sebelumnya $\mathfrak{F}(s)$.
- ii. (*Adaptivity*). Untuk setiap $t \geq 0$, *Brownian motion* $W(t)$ saat t merupakan $\mathfrak{F}(t)$ -*measurable*. Dengan kata lain, informasi yang tersedia pada waktu t cukup untuk mengevaluasi *Brownian motion* $W(t)$ pada waktu itu.
- iii. (*Independence of future increment*). Untuk $0 \leq t < u$, *increment* $W(u) - W(t)$ independen terhadap $\mathfrak{F}(t)$. Dengan kata lain, setiap

increment Brownian motion setelah waktu t independen dari informasi yang tersedia pada waktu t .

Misalkan $\Delta(t), t \geq 0$ merupakan proses stokastik. Maka dikatakan bahwa $\Delta(t)$ adapted pada filtrasi $\mathfrak{F}(t)$ jika untuk setiap $t \geq 0$, peubah acak $\Delta(t)$ merupakan $\mathfrak{F}(t)$ -measurable.

2.4 Formula Ito-Doeblin

Formula Ito-Doeblin ini digunakan dalam menentukan solusi model RB pada Bab 3. Sebelum dibahas mengenai formula Ito-Doeblin, berikut diberikan teorema-teorema yang digunakan dalam pembentukan formula Ito-Doeblin, (Shreve, 2004).

Teorema 2.4.1

Misalkan T adalah suatu konstanta positif dan $\Delta_t, 0 \leq t \leq T$, merupakan suatu proses stokastik yang *adapted* dan memenuhi $E\left(\int_0^T \Delta_t^2 dt\right) < \infty$. Maka

$I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u$ memiliki sifat:

- Kekontinuan, yaitu sebagai fungsi dari limit atas terhadap integrasi t , lintasan I_t kontinu.
- Adapted*, yaitu untuk setiap t , I_t merupakan \mathfrak{F}_t -measurable.
- Linier, yaitu jika $I_t = \int_0^t \Delta_u dW_u$ dan $J_t = \int_0^t \Gamma_u dW_u$ maka $I_t \pm J_t = \int_0^t (\Delta_u \pm \Gamma_u) dW_u$. Lebih jauh lagi, untuk setiap konstanta c berlaku $cI_t = \int_0^t c\Delta_u dW_u$.
- Martingale*, yaitu I_t memenuhi *martingale*.

e) Ito isometri, yaitu $E(I_t^2) = E\left(\int_0^t \Delta_u^2 du\right)$.

f) Variasi kuadrat tidak nol, yaitu $[I, I]_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$.

Definisi 2.4.2

Misalkan $W_t, t \geq 0$, adalah suatu *Brownian motion* dan misalkan $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$, adalah suatu filtrasi yang bersesuaian. Proses Ito adalah suatu proses stokastik yang berbentuk

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Delta_u dW_u + \int_0^t \theta_u du,$$

di mana X_0 tidak acak (*non-random*) dan Δ_u serta θ_u merupakan proses stokastik yang *adapted*.

Proses Ito memiliki variasi kuadrat $[X, X]_t = \int_0^t \Delta_u^2 du$. Proses Ito dapat dituliskan pula ke dalam notasi diferensial $dX_t = \Delta_t dW_t + \theta_t dt$. Proses Ito dalam notasi diferensial ini dikenal dengan Persamaan Diferensial Stokastik (PDS) Ito yang akan dijelaskan lebih lanjut pada Subbab 2.5. Selanjutnya, diberikan definisi integral terhadap suatu proses Ito sebagai berikut (Shreve, 2004):

Definisi 2.4.3

Misalkan $X_t, t \geq 0$, adalah suatu proses Ito pada Definisi 2.4.2, dan misalkan pula $\Gamma_t, t \geq 0$, adalah suatu proses yang *adapted*. Maka dapat didefinisikan integral terhadap suatu proses Ito berikut ini

$$\int_0^t \Gamma_u dX_u = \int_0^t \Gamma_u \Delta_u dW_u + \int_0^t \Gamma_u \theta_u du.$$

Selanjutnya, dapat diperoleh formula Ito-Doebelin sebagai berikut (Shreve, 2004):

Teorema 2.4.4

Misalkan $X_t, t \geq 0$, adalah suatu proses Ito pada Definisi 2.4.3, dan misalkan $f(t, x)$ adalah suatu fungsi dengan turunan parsial $f_t(t, x), f_x(t, x)$, dan $f_{xx}(t, x)$ terdefinisi serta kontinu. Maka, untuk setiap $T \geq 0$ berlaku

$$\begin{aligned} f(T, X_T) &= f_0(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) dX_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) d[X, X]_t, \\ &= f_0(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) \Delta_t dW_t \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, X_t) \theta_t dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) \Delta_t^2 dt. \end{aligned}$$

2.5 Stabilitas Persamaan Diferensial Stokastik Ito

Pada Tesis ini model Rendleman-Bartter (RB) dinyatakan dalam persamaan diferensial stokastik (PDS). Model ini termasuk ke dalam kategori PDS Ito yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t).$$

Selanjutnya, akan diberikan definisi stabilitas dari suatu PDS. Misalkan diberikan masalah nilai awal stokastik berikut ini (Kloeden, 1992):

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))d\tilde{W}(t), & \text{untuk } 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

dengan $f(t, 0) = g(t, 0) = 0$, maka $X(t) \equiv 0$ merupakan solusi stasioner dari masalah nilai awal stokastik tersebut. Terdapat beberapa cara dalam mendefinisikan stabilitas stokastik solusi stasioner sebuah PDS. Akan tetapi, dalam tesis ini hanya akan dibahas dua jenis stabilitas, yaitu stabilitas stokastik

asimtotik dan stabilitas *mean-square*. Selanjutnya, asumsikan bahwa $X(0) \neq 0$, maka stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* masing-masing didefinisikan sebagai berikut (Allen, 2007):

Definisi 2.5.1

Jika $\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0$ dengan probabilitas 1, maka $X_t \equiv 0$ stabil secara stokastik asimtotik.

Definisi 2.5.2

Jika $\lim_{t \rightarrow \infty} E(|X(t)|^2) = 0$, maka $X(t) \equiv 0$ stabil secara *mean-square*.

2.6 Estimasi Parameter

2.6.1 Metode *Maximum Likelihood*

Model RB mengandung parameter yang tidak diketahui nilainya, sehingga dalam implementasi model diperlukan penaksiran parameter. Dalam penaksiran parameter diperlukan suatu metode penaksiran. Metode penaksiran parameter yang digunakan pada Bab 3 adalah metode *Maximum Likelihood Estimation*. Berikut akan dibahas teori mengenai penaksiran parameter model.

Misalkan $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ vektor *random* dengan PDF $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Omega \in \mathbb{R}^p$ dan $\boldsymbol{\theta}$ suatu vektor dari p -parameter yang tidak diketahui nilainya. Ada beberapa tahapan yang harus dilakukan dalam metode *Maximum Likelihood Estimation*. Pertama, tentukan *joint pdf* dari X_1, X_2, \dots, X_n , yaitu $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta})$. Oleh karena X adalah vektor random dari X_1, X_2, \dots, X_n maka $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\theta}) = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$.

Selanjutnya, tentukan fungsi *likelihood* yang didefinisikan sebagai *joint pdf* dari X_1, X_2, \dots, X_n . Fungsi *likelihood* ini dapat dianggap sebagai fungsi dari θ . Misalkan fungsi *likelihood* $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = L(\theta; \mathbf{x})$, maka (Casella, 1992)

$$L(\theta; \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \theta).$$

Selanjutnya akan dilakukan penaksiran terhadap θ . Dalam metode *Maximum Likelihood Estimation* diperoleh dengan menentukan nilai θ , dinotasikan dengan $\hat{\theta}$, yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Maka $\hat{\theta}$ ini disebut taksiran *Maximum Likelihood* dari θ .

Menentukan nilai θ yang memaksimumkan fungsi $\ln L(\theta; \mathbf{x})$, dinotasikan dengan $l(\theta; \mathbf{x})$, akan memberikan hasil yang sama dengan menentukan nilai θ yang memaksimumkan $L(\theta; \mathbf{x})$. Dengan demikian, baik $L(\theta; \mathbf{x})$ atau $l(\theta; \mathbf{x})$ dapat digunakan untuk menentukan nilai $\hat{\theta}$.

Nilai θ yang memaksimumkan $l(\theta; \mathbf{x})$ dapat diperoleh dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_j} l(\theta; \mathbf{x}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta; \mathbf{x}) &= 0, \\ \frac{1}{L(\theta; \mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial \theta_j} L(\theta; \mathbf{x}) &= 0; \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Terkadang nilai $\hat{\theta}$ tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka selanjutnya untuk memperoleh nilai $\hat{\theta}$ digunakan metode numerik, yaitu metode Newton-Raphson.

2.6.2 Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson adalah salah satu metode numerik yang paling sering digunakan untuk mencari akar dari permasalahan $f(x) = 0$, (Burden,

2001). Salah satu penurunan metode Newton-Raphson secara iteratif adalah berikut ini:

$$\begin{aligned} f'(x^{(m)}) &= \frac{0 - f(x^{(m)})}{x^{(m+1)} - x^{(m)}}, \\ \Leftrightarrow f'(x^{(m)})(x^{(m+1)} - x^{(m)}) &= -f(x^{(m)}), \\ \Leftrightarrow x^{(m+1)} &= x^{(m)} - \frac{f(x^{(m)})}{f'(x^{(m)})}. \end{aligned}$$

Misalkan δ adalah vektor dari q -buah parameter yang tidak diketahui, yaitu $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_q)^T$, $l(\delta)$ adalah fungsi log-likelihood dari vektor δ , $\mathbf{s}(\delta)$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l(\delta)$ dengan elemen

$$s_j(\delta) = \partial l(\delta) / \partial \delta_j, j = 0, 1, \dots, q, \text{ yaitu } \mathbf{s}(\delta) = \begin{pmatrix} s_0(\delta) \\ s_1(\delta) \\ \vdots \\ s_q(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial l(\delta) / \partial \delta_0 \\ \partial l(\delta) / \partial \delta_1 \\ \vdots \\ \partial l(\delta) / \partial \delta_q \end{pmatrix}, \text{ dan } \mathbf{H}(\delta)$$

adalah matriks turunan parsial kedua dari $l(\delta)$ dengan elemen

$$H_{jk}(\delta) = \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_k \partial \delta_j}; j, k = 0, 1, \dots, q. \text{ , maka}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\delta) &= \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_0} & \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_q} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial s_0(\delta)}{\partial \delta_0} & \frac{\partial s_0(\delta)}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial s_0(\delta)}{\partial \delta_q} \\ \frac{\partial s_1(\delta)}{\partial \delta_0} & \frac{\partial s_1(\delta)}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial s_1(\delta)}{\partial \delta_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_q(\delta)}{\partial \delta_0} & \frac{\partial s_q(\delta)}{\partial \delta_1} & \dots & \frac{\partial s_q(\delta)}{\partial \delta_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_1 \partial \delta_0} & \dots & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_q \partial \delta_0} \\ \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_0 \partial \delta_1} & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_q \partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_0 \partial \delta_q} & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_1 \partial \delta_q} & \dots & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_q^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & \cdots & H_{0q} \\ H_{10} & H_{11} & \cdots & H_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{q0} & H_{q1} & \cdots & H_{qq} \end{pmatrix}.$$

Dengan menggunakan metode Newton-Raphson akan dicari taksiran dari δ yang merupakan penyelesaian dari $\mathbf{s}(\delta) = \mathbf{0}$. Jika diberikan taksiran awal dari δ , yaitu $\hat{\delta}^{(0)}$, maka dapat diperoleh pendekatan deret Taylor orde pertama dari vektor $\mathbf{s}(\delta)$ sekitar $\mathbf{s}(\delta) = \hat{\mathbf{s}}^{(0)}$, yaitu:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\delta) &\approx \mathbf{s}(\hat{\delta}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_0} \right|_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} (\delta_0 - \hat{\delta}_0^{(0)}) + \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_1} \right|_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} (\delta_1 - \hat{\delta}_1^{(0)}) + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_q} \right|_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} (\delta_q - \hat{\delta}_q^{(0)}), \\ &\approx \mathbf{s}(\hat{\delta}^{(0)}) + \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_0} \right|_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} & \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_1} \right|_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} & \cdots & \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\delta)}{\partial \delta_q} \right|_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\delta_0 - \hat{\delta}_0^{(0)}) \\ (\delta_1 - \hat{\delta}_1^{(0)}) \\ \vdots \\ (\delta_q - \hat{\delta}_q^{(0)}) \end{pmatrix}, \\ &\approx \mathbf{s}(\hat{\delta}^{(0)}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial s_0(\delta)}{\partial \delta_0} & \frac{\partial s_0(\delta)}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial s_0(\delta)}{\partial \delta_q} \\ \frac{\partial s_1(\delta)}{\partial \delta_0} & \frac{\partial s_1(\delta)}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial s_1(\delta)}{\partial \delta_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial s_q(\delta)}{\partial \delta_0} & \frac{\partial s_q(\delta)}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial s_q(\delta)}{\partial \delta_q} \end{pmatrix}_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} (\delta - \hat{\delta}^{(0)}), \\ &\approx \mathbf{s}(\hat{\delta}^{(0)}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_1 \partial \delta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_q \partial \delta_0} \\ \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_0 \partial \delta_1} & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_q \partial \delta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_0 \partial \delta_q} & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_1 \partial \delta_q} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_q^2} \end{pmatrix}_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} (\delta - \hat{\delta}^{(0)}), \\ &\approx \mathbf{s}(\hat{\delta}^{(0)}) + \begin{pmatrix} H_{00}(\delta) & H_{01}(\delta) & \cdots & H_{0q}(\delta) \\ H_{10}(\delta) & H_{11}(\delta) & \cdots & H_{1q}(\delta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{q0}(\delta) & H_{q1}(\delta) & \cdots & H_{qq}(\delta) \end{pmatrix}_{\delta=\hat{\delta}^{(0)}} (\delta - \hat{\delta}^{(0)}), \end{aligned}$$

atau

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\delta}) \approx \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}) + \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}).$$

dengan

$\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\delta})$ dengan elemen

$s_j(\boldsymbol{\delta}) = \partial l(\boldsymbol{\delta}) / \partial \delta_j$ dihitung pada $\boldsymbol{\delta} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}$.

$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}) = \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{\delta}^T} \right|_{\boldsymbol{\delta}=\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}}$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\delta})$ dengan

elemen $H_{jk}(\boldsymbol{\delta}) = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_k \partial \delta_j}$ dihitung pada $\boldsymbol{\delta} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}$.

Oleh karena ingin dicari penyelesaian dari $\mathbf{s}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$, maka dapat ditulis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\delta}) &\approx \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}) + \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}), \\ \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}) &= -\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}). \end{aligned}$$

Jika matriks $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})$ nonsingular maka

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})\right)^{-1} \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}) &= -\left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})\right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}), \\ (\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}) &= -\left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})\right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}), \\ \boldsymbol{\delta} &= \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)} - \left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})\right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}). \end{aligned}$$

Nilai $\boldsymbol{\delta}$ menjadi taksiran baru yang kemudian dinotasikan dengan $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}$, yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)} - \left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)})\right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}).$$

Jika $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)} \approx \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}$ (misalkan $\|\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}\| < 10^{-5}$) maka hentikan proses iterasi dan

kemudian ambil $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}$ sebagai taksiran dari $\boldsymbol{\delta}$. Jika tidak dipenuhi, lanjutkan iterasi.

Jika diberikan $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}$, maka dapat diperoleh pendekatan Deret Taylor orde pertama dari vektor $\mathbf{s}(\boldsymbol{\delta})$ sekitar $\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})$, yaitu:

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\delta}) \approx \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}) + \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}),$$

dengan

$\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\delta})$ dengan elemen

$s_j(\boldsymbol{\delta}) = \partial l(\boldsymbol{\delta}) / \partial \delta_j$ dihitung pada $\boldsymbol{\delta} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}$.

$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}) = \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\delta})}{\partial \boldsymbol{\delta}^T} \right|_{\boldsymbol{\delta} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}}$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\delta})$ dengan

elemen $H_{jk}(\boldsymbol{\delta}) = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_k \partial \delta_j}$ dihitung pada $\boldsymbol{\delta} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}$.

Dengan menyelesaikan $\mathbf{0} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\delta}) \approx \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}) + \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})$ diperoleh

$$\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}) = -\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}).$$

Jika matriks $\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})$ nonsingular maka diperoleh

$$\left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})\right)^{-1} \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}) = -\left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})\right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}),$$

$$(\boldsymbol{\delta} - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}) = -\left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})\right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}),$$

$$\boldsymbol{\delta} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)} - \left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})\right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}).$$

Nilai $\boldsymbol{\delta}$ menjadi taksiran baru yang dinotasikan dengan $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(2)}$, yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(2)} = \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)} - \left(\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)})\right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}).$$

Dengan mengulang langkah yang sama dapat diperoleh taksiran $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(3)}$, $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(4)}$, dan seterusnya. Secara umum dapat ditentukan taksiran dari $\boldsymbol{\delta}$ pada iterasi ke- $m+1$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(m+1)}$ secara iteratif menggunakan formula:

$$\hat{\delta}^{(m+1)} = \hat{\delta}^{(m)} - \left(\mathbf{H}(\hat{\delta}^{(m)}) \right)^{-1} \mathbf{s}(\hat{\delta}^{(m)}); m = 0, 1, \dots,$$

dengan

$\mathbf{s}(\hat{\delta}^{(m)})$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $l(\delta)$ dengan elemen $s_j(\delta) = \partial l(\delta) / \partial \delta_j$ dihitung pada $\delta = \hat{\delta}^{(m)}$.

$\mathbf{H}(\hat{\delta}^{(m)})$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $l(\delta)$ dengan elemen

$$H_{jk}(\delta) = \frac{\partial^2 l(\delta)}{\partial \delta_k \partial \delta_j} \text{ dihitung pada } \delta = \hat{\delta}^{(m)}.$$

Hentikan proses iterasi jika $\hat{\delta}^{(m+1)} \approx \hat{\delta}^{(m)}$ (misalkan $\|\hat{\delta}^{(m+1)} - \hat{\delta}^{(m)}\| < 10^{-5}$), lalu ambil $\hat{\delta}^{(m+1)}$ sebagai taksiran dari δ .

BAB 3

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas model tingkat bunga, yaitu Rendleman-Bartter. Pada Subbab 3.1 dibahas mengenai solusi analitik model Rendleman-Bartter yang dapat diperoleh dengan menggunakan formula Ito-Doebelin.

Setelah diperoleh solusi analitik model Rendleman-Bartter, selanjutnya pada Subbab 3.2 akan dibahas mengenai stabilitas model Rendleman-Bartter. Stabilitas yang dibahas pada Tesis ini adalah stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*. Berdasarkan jenis stabilitas tersebut akan ditunjukkan daerah stabilitas model Rendleman-Bartter.

Parameter model Rendleman-Bartter terkait dengan stabilitas model Rendleman-Bartter, sehingga untuk implementasi model diperlukan penaksiran parameter. Oleh karena itu, pada Subbab 3.3 akan dibahas mengenai penaksiran parameter model Rendleman-Bartter. Adapun metode yang digunakan untuk menaksir parameter adalah *Maximum Likelihood Estimation* dan dilanjutkan dengan metode numerik, yaitu metode Newton-Raphson.

3.1 Model Rendleman-Bartter

Ada dua pendekatan dalam memodelkan suatu model tingkat bunga, salah satunya adalah pendekatan ekuilibrium (Longstaff, 1992). Model ekuilibrium ini terkait dengan asumsi-asumsi ekonomi seperti perilaku permintaan, penawaran, dan harga barang di pasar. Selain itu, model ekuilibrium juga memperhatikan asumsi mengenai perilaku stokastik dari satu atau lebih variabel atau faktor dalam ekonomi, serta memperhatikan asumsi mengenai preferensi investor terhadap aset yang dipilih (Longstaff, 1992). Asumsi-asumsi model ekuilibrium ini digunakan untuk memodelkan model tingkat bunga. Berdasarkan jenisnya, ada dua jenis

model ekuilibrium, yaitu model ekuilibrium satu faktor dan model ekuilibrium dua faktor (Hull, 2003). Pada Tesis ini hanya akan dibahas mengenai model ekuilibrium satu faktor, yaitu model Rendleman-Bartter. Model ekuilibrium satu faktor ini hanya mempunyai satu sumber ketidakpastian, yaitu $r(t)$.

Model Rendleman-Bartter yang diasumsikan dalam *risk-neutral probability measure* \tilde{P} didefinisikan sebagai berikut,

$$dr(t) = \mu r(t) dt + \sigma r(t) d\tilde{W}(t) \quad (3.1.1)$$

dengan:

$r(t)$: tingkat bunga pada waktu t ,

μ : parameter ekspektasi laju pengembalian (*expected return*) yang merupakan bilangan real,

σ : parameter standar deviasi yang menunjukkan volatilitas tingkat bunga yang merupakan konstanta positif, dan

$\tilde{W}(t)$: *Brownian motion* dalam *risk-neutral probability measure* \tilde{P} .

Selanjutnya, penulisan model Rendleman-Bartter akan disingkat menjadi model RB. Model RB ini telah dibahas pada Tesis (Mulyani, 2010). Namun berbeda dengan Tesis (Mulyani, 2010), Tesis ini membahas mengenai stabilitas model RB dan penaksiran parameter model RB dengan perubahan ukuran.

Berikut akan dibahas mengenai solusi analitik model RB. Pembahasan ini diperlukan untuk melengkapi pembuktian dalam menentukan solusi analitik model RB.

Asumsikan solusi analitik model RB unik dan ada untuk setiap $T \geq 0$ pada interval $[0, T]$, (Yolcu, 2005). Misalkan bahwa $f(t, r(t)) = \ln r$, maka berdasarkan formula Ito-Doebelin (Teorema 2.4.4) diperoleh,

$$\begin{aligned}
f(t, r(t)) &= f(0, r(0)) + \int_0^t f_u(u, r(u)) du + \int_0^t f_u(u, r(u)) \Delta(u) d\tilde{W}(u) \\
&\quad + \int_0^t f_r(u, r(u)) \theta(u) dt + \frac{1}{2} \int_0^t f_{rr}(u, r(u)) \Delta^2(u) du \\
&= f(0, r(0)) + 0 + \int_0^t \sigma r(u) \frac{1}{r(u)} d\tilde{W}(u) \\
&\quad + \int_0^t \left\{ \mu r(u) \frac{1}{r(u)} + \frac{1}{2} \sigma^2 r^2(u) \left(-\frac{1}{r^2(u)} \right) \right\} du \\
&= f(0, r(0)) + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) du + \int_0^t \sigma d\tilde{W}(u) \\
&= f(0, r(0)) + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) du + \sigma \left(\lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} (\tilde{W}(t_{j+1}) - \tilde{W}(t_j)) \right); t_j = j\delta t, \delta t = \frac{t}{N} \\
&= f(0, r(0)) + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) du + \sigma \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} (\tilde{W}(t_{j+1}) - \tilde{W}(t_j)) \right) \\
&= f(0, r(0)) + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) du + \sigma (\tilde{W}(t_N) - \tilde{W}(t_0)) \\
&= f(0, r(0)) + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) du + \sigma (\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0)) \\
&= f(0, r(0)) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t)
\end{aligned}$$

sehingga,

$$f(t, r(t)) - f(0, r(0)) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t),$$

$$\ln r(t) - \ln r(0) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t),$$

$$\ln \frac{r(t)}{r(0)} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t),$$

$$\frac{r(t)}{r(0)} = \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\},$$

$$r(t) = r(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\}.$$

(3.1.2)

Dengan demikian, solusi analitik model RB (3.1.1) adalah

$$r(t) = r_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\}.$$

Berdasarkan Definisi 2.1.12 (Distribusi lognormal), jika X berdistribusi normal dengan ekspektasi μ dan variansi σ^2 ,

maka $V = e^X$ merupakan peubah acak berdistribusi lognormal. Solusi analitik model RB, yaitu $r(t) = r_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\tilde{W}(t)\right\}$ dapat dibentuk menjadi

$$r(t) = r_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0))\right\}$$

dengan $\tilde{W}(t)$ *Brownian motion* dan $\tilde{W}(0) = 0$. Berdasarkan Definisi 2.3.4, $\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0)$ berdistribusi normal dengan ekspektasi nol dan variansi t , sehingga solusi analitik (3.1.2) pada suku eksponensial, yaitu $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\tilde{W}(t)$ akan berdistribusi normal dengan ekspektasi $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ dan variansi $\sigma^2 t$. Selanjutnya, karena solusi analitik (3.1.2) merupakan fungsi eksponensial dari $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\tilde{W}(t)$, maka berdasarkan Definisi 2.1.12, solusi analitik model RB (3.1.2) memiliki distribusi lognormal dengan mean dan variansi bersyarat terhadap $\mathfrak{F}(0)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(r(t)|\mathfrak{F}(0)) &= E\left(r(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\tilde{W}(t)\right\} \middle| \mathfrak{F}(0)\right) \\ &= r(0) E\left(\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0))\right\} \middle| \mathfrak{F}(0)\right), \text{ (karena } \tilde{W}(0) = 0) \\ &= r(0) E\left(\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \cdot \exp(\sigma(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0))) \middle| \mathfrak{F}(0)\right) \\ &= r(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} E\left(\exp(\sigma(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0))) \middle| \mathfrak{F}(0)\right) \\ &= r(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 t\right), \text{ (Definisi 2.1.12)} \\ &= r(0) \exp\left\{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \\ &= r(0) \exp(\mu t). \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned}
\text{var}(r(t)|\mathfrak{I}(0)) &= \text{var}\left(r(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\tilde{W}(t)\right\}|\mathfrak{I}(0)\right) \\
&= \text{var}\left(r(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0))\right\}|\mathfrak{I}(0)\right), (\text{karena } \tilde{W}(0) = 0) \\
&= (r(0))^2 \text{var}\left(\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0))\right\}|\mathfrak{I}(0)\right) \\
&= (r(0))^2 \text{var}\left(\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \cdot \exp(\sigma(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0)))|\mathfrak{I}(0)\right) \\
&= (r(0))^2 \exp\left\{2\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \text{var}\left(\exp(\sigma(\tilde{W}(t) - \tilde{W}(0)))|\mathfrak{I}(0)\right) \\
&= (r(0))^2 \exp\{(2\mu - \sigma^2)t\} \cdot \exp(\sigma^2 t) \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1], (\text{Definisi 2.1.12}) \\
&= (r(0))^2 \exp\{2\mu t - \sigma^2 t + \sigma^2 t\} \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1] \\
&= (r(0))^2 \exp(2\mu t) \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1]. \tag{3.1.4}
\end{aligned}$$

Oleh karena $r(t)$ berdistribusi lognormal maka $r(t)$ selalu positif untuk setiap t (Brigo, 2006). Distribusi solusi analitik ini nantinya akan dibandingkan dengan distribusi solusi analitik model RB pada ukuran aktual pada Subbab 3.3. Setelah diperoleh solusi analitik beserta distribusinya, maka subbab selanjutnya akan dibahas mengenai stabilitas model RB.

3.2 Stabilitas Model Rendleman-Bartter

Pada Subbab ini akan dibahas mengenai stabilitas model RB. Model RB dapat dinyatakan sebagai persamaan diferensial stokastik (PDS). Pada PDS, stabilitas merupakan sifat yang sangat penting untuk dibahas. Stabilitas dapat diartikan bahwa jika dilakukan sedikit gangguan pada nilai awal solusi atau parameter PDS, maka solusi dari PDS akan tetap stabil (Arnold, 1974). Jadi, dengan adanya stabilitas ini dapat diketahui kekonsistenan model PDS, dalam hal ini model RB.

Ada beberapa jenis kriteria stabilitas yaitu stabilitas stokastik, stabilitas stokastik asimtotik, stabilitas *mean*, dan stabilitas *mean-square*. Namun Tesis ini hanya membahas kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*.

Berdasarkan definisi 2.5.1 dan 2.5.2 akan ditentukan stabilitas model RB. Namun, sebelumnya diberikan persamaan differensial stokastik sebagai berikut:

Pandang

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))d\tilde{W}(t) \text{ untuk } 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan $f(X(t)) = aX(t)$ dan $g(X(t)) = bX(t)$ pada persamaan di atas diperoleh

$$\begin{cases} dX(t) = aX(t)dt + bX(t)d\tilde{W}(t) \text{ untuk } 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

dengan $a, b \in C$ dan $\tilde{W}(t)$ merupakan *Brownian Motion* pada waktu t . Sekarang, akan ditunjukkan stabilitas stokastik asimtotik dari $X(t)$. Namun sebelumnya, terlebih dahulu diberikan solusi analitik persamaan (3.2.1) berdasarkan (3.1.2) sebagai berikut:

$$X(t) = X(0) \exp \left\{ \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t + b \tilde{W}(t) \right\},$$

dengan $a, b \in C$.

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$X(t) = X(0) \exp \{ at \} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} b^2 t \right\} \cdot \exp \{ b \tilde{W}(t) \}. \quad (3.2.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.2) diperoleh modulus $X(t)$ berikut ini:

$$\begin{aligned}
|X(t)| &= \left| X(0) \exp(at) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}b^2t\right) \cdot \exp(bW(t)) \right| \\
&= |X(0)| \cdot |\exp(at)| \cdot \left| \exp\left(-\frac{1}{2}b^2t\right) \right| \cdot |\exp(bW(t))|. \quad (3.2.3)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan bahwa $a = u + vi$ dan $b = m + ni$, maka persamaan (3.2.3) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
|X(t)| &= |X(0)| \cdot |\exp\{(u + vi)t\}| \cdot \left| \exp\left\{-\frac{1}{2}(m + ni)^2t\right\} \right| \cdot |\exp\{(m + ni)\tilde{W}(t)\}| \\
&= |X(0)| \cdot \sqrt{\exp\{(u + vi)t\} \cdot \exp\{(u - vi)t\}} \cdot \left| \exp\left\{-\frac{1}{2}(m^2 - n^2 + 2mni)t\right\} \right| \\
&\quad \cdot \sqrt{\exp\{(m + ni)\tilde{W}(t)\} \cdot \exp\{(m - ni)\tilde{W}(t)\}} \\
&= |X(0)| \exp\left(\frac{1}{2} \cdot 2ut\right) \cdot \sqrt{\exp\left\{-\frac{1}{2}(m^2 - n^2 + 2mni)t\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(m^2 - n^2 - 2mni)t\right\}} \\
&\quad \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot 2m\tilde{W}(t)\right) \\
&= |X(0)| \exp(ut) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(m^2 - n^2)t\right\} \cdot \exp(m\tilde{W}(t)) \\
&= |X(0)| \exp(ut) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(m^2 - n^2)t\right\} \cdot \exp(m\tilde{W}(t)) \\
&= |X(0)| \exp\left\{\left(u - \frac{1}{2}(m^2 - n^2)\right)t\right\} \cdot \exp(m\tilde{W}(t)). \quad (3.2.4)
\end{aligned}$$

dengan

$$a - \frac{1}{2}b^2 = u + vi - \frac{1}{2}(m + ni)(m + ni) = u + vi - \frac{1}{2}(m^2 - n^2) + mni$$

dan

$$\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right) = u - \frac{1}{2}(m^2 - n^2).$$

Sehingga persamaan (3.2.4) dapat ditulis sebagai berikut

$$|X(t)| = |X(0)| \exp(m\tilde{W}(t)) \cdot \exp\left\{\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t\right\}. \quad (3.2.5)$$

Persamaan (3.2.5) memiliki bentuk limit sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[|X(0)| \exp(m\tilde{W}(t)) \cdot \exp\left\{\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t\right\} \right] \\ &= |X(0)| \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp(m\tilde{W}(t)) \cdot \exp\left\{\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t\right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Sekarang, akan ditunjukkan stabilitas stokastik asimtotik dari $X(t)$. Selanjutnya, dengan asumsi bahwa $X(0) \neq 0$, akan dibuktikan bahwa $X(t) \equiv 0$ stabil secara stokastik asimtotik jika dan hanya jika $\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right) < 0$, (Higham, 2001). Pembuktian ini dilakukan melalui dua tahap sebagai berikut:

Tahap pertama, jika diketahui $\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right) < 0$, maka akan ditunjukkan $X(t) \equiv 0$ stabil secara stokastik asimtotik. Berdasarkan Definisi 2.5.1, dengan asumsi bahwa $X(0) \neq 0$, $X_t \equiv 0$ stabil secara stokastik asimtotik, berarti bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0$ dengan probabilitas 1. Jika diketahui $\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right) < 0$, maka persamaan (3.2.6) menjadi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = |X(0)| \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp(m\tilde{W}(t)) \right] \cdot 0 = 0 \text{ dengan probabilitas 1.}$$

Selanjutnya pada tahap kedua, jika diketahui $X(t) \equiv 0$ stabil secara stokastik asimtotik, maka akan ditunjukkan $\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right) < 0$. Hal ini akan dibuktikan dengan kontradiksi. Misalkan $\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right) \geq 0$, jika diketahui bahwa $X(t) \equiv 0$ stabil secara stokastik asimtotik maka persamaan (3.2.6) yaitu,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = |X(0)| \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp(mW(t)) \cdot \exp \left\{ \operatorname{Re} \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t \right\} \right],$$

dengan $X(0) \neq 0$, menjadi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp(mW(t)) \cdot \exp \left\{ \operatorname{Re} \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t \right\} \right] = 0.$$

Persamaan terakhir dapat dipenuhi jika $\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(mW(t))] = 0$ atau $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp \left\{ \operatorname{Re} \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t \right\} \right] = 0$. Karena dimisalkan $\operatorname{Re} \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) \geq 0$, maka $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp \left\{ \operatorname{Re} \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) t \right\} \right] \neq 0$ sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(mW(t))]$ harus 0 atau $mW(t) \rightarrow -\infty$. Tetapi, berdasarkan definisi 2.3.4, $W(t)$ merupakan fungsi kontinu sehingga $mW(t)$ tidak menuju ke $-\infty$. Akibatnya $\lim_{t \rightarrow \infty} [\exp(mW(t))]$ tidak sama dengan nol. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0$ dengan probabilitas 1. Oleh karena itu, harus dipenuhi $\operatorname{Re} \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) < 0$.

Dengan pembuktian dua tahap tersebut, telah terbukti bahwa solusi stasioner $X(t) \equiv 0$ stabil secara stokastik asimtotik jika dan hanya jika

$$\operatorname{Re} \left(a - \frac{1}{2} b^2 \right) < 0. \quad (3.2.7)$$

Berikut ini akan ditunjukkan pula bahwa solusi stasioner $X(t) \equiv 0$ juga stabil secara *mean-square*. Berdasarkan persamaan (3.2.3) diperoleh bentuk modulus kuadrat sebagai berikut:

$$|X(t)|^2 = |X(0)|^2 \cdot |\exp(at)|^2 \cdot \left| \exp \left(-\frac{1}{2} b^2 t \right) \right|^2 \cdot |\exp(b\tilde{W}(t))|^2.$$

Misalkan $a = u + vi$ dan $b = m + ni$, maka $|X(t)|^2$ menjadi

$$\begin{aligned}
 |X(t)|^2 &= |X(0)|^2 \cdot \left| \exp\{(u+vi)t\} \right|^2 \cdot \left| \exp\left\{-\frac{1}{2}(m+ni)^2 t\right\} \right|^2 \cdot \left| \exp\{(m+ni)\tilde{W}(t)\} \right|^2 \\
 &= |X(0)|^2 \exp\{(u+vi)t\} \cdot \exp\{(u-vi)t\} \cdot \left| \exp\left\{-\frac{1}{2}(m^2-n^2+2mni)t\right\} \right|^2 \cdot \\
 &\quad \exp\{(m+ni)\tilde{W}(t)\} \cdot \exp\{(m-ni)\tilde{W}(t)\} \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(m^2-n^2+2mni)t\right\} \cdot \\
 &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(m^2-n^2-2mni)t\right\} \cdot \exp(2m\tilde{W}(t)) \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot 2(m^2-n^2)t\right\} \cdot \exp(2m\tilde{W}(t)) \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\{-(m^2-n^2)t\} \cdot \exp(2m\tilde{W}(t)).
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 E(|X(t)|^2) &= E\left[|X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\{-(m^2-n^2)t\} \cdot \exp(2m\tilde{W}(t))\right] \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\{-(m^2-n^2)t\} \cdot E\left[\exp(2m\tilde{W}(t))\right] \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\{-(m^2-n^2)t\} \cdot \exp\left(\frac{1}{2}(2m)^2 t\right), \text{ (Definisi 2.1.12)} \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\{-(m^2-n^2)t\} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot 4m^2 t\right) \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\{-(m^2-n^2)t\} \cdot \exp(2m^2 t) \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp(2m^2 t - m^2 t + n^2 t) \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp(m^2 t + n^2 t) \\
 &= |X(0)|^2 \exp(2ut) \cdot \exp\{(m^2 + n^2)t\} \\
 &= |X(0)|^2 \exp\{2ut + (m^2 + n^2)t\} \\
 &= |X(0)|^2 \exp\{(2u + (m^2 + n^2))t\}.
 \end{aligned}$$

karena $u = \operatorname{Re}(a)$ dan $m^2 + n^2 = (m + ni)(m - ni) = |b|^2$, maka $E(|X(t)|^2)$ menjadi

$$E(|X(t)|^2) = |X_0|^2 \exp\{(2\operatorname{Re}(a) + |b|^2)t\},$$

dengan bentuk limit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(|X(t)|^2) = |X(0)|^2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp\{(2\operatorname{Re}(a) + |b|^2)t\} \right]. \quad (3.2.8)$$

Selanjutnya, dengan asumsi bahwa $X(0) \neq 0$, akan ditunjukkan bahwa $X(t) \equiv 0$ stabil secara *mean-square* jika dan hanya jika $2\operatorname{Re}(a) + |b|^2 < 0$, (Higham, 2001). Pembuktian stabilitas *mean-square* dari $X(t)$ (3.2.8) juga akan dilakukan melalui dua tahap sebagai berikut:

Tahap pertama, jika diketahui $X(t) \equiv 0$ stabil secara *mean-square*, maka akan ditunjukkan $2\operatorname{Re}(a) + |b|^2 < 0$. Berdasarkan definisi 2.5.2, dengan asumsi bahwa $X(0) \neq 0$, $X(t) \equiv 0$ stabil secara *mean-square* berarti bahwa $\lim_{t \rightarrow \infty} E(|X(t)|^2) = 0$. Dengan demikian persamaan (3.2.8) menjadi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(|X(t)|^2) = |X(0)|^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp\{(2\operatorname{Re}(a) + |b|^2)t\} \right] = 0.$$

Oleh karena $X(0) \neq 0$, maka persamaan di atas menjadi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp\{(2\operatorname{Re}(a) + |b|^2)t\} \right] = 0.$$

Persamaan terakhir hanya dipenuhi jika $2\operatorname{Re}(a) + |b|^2 < 0$.

Selanjutnya pada tahap kedua, jika diketahui $2 \operatorname{Re}(a) + |b|^2 < 0$, maka akan ditunjukkan $X(t) \equiv 0$ stabil secara *mean-square*. Oleh karena $2 \operatorname{Re}(a) + |b|^2 < 0$, maka persamaan (3.2.8) menjadi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(|X(t)|^2) = |X(0)|^2 \cdot 0 = 0.$$

Dengan pembuktian dua tahap di atas, solusi stasioner $X(t) \equiv 0$ juga stabil secara *mean-square* jika dan hanya jika dipenuhi

$$2 \operatorname{Re}(a) + |b|^2 < 0. \quad (3.2.9)$$

Kriteria stabilitas (3.2.7), yaitu $\operatorname{Re}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right) < 0$ dan (3.2.9), yaitu $2 \operatorname{Re}(a) + |b|^2 < 0$ merupakan kriteria stabilitas model PDS persamaan (3.2.3), yaitu $dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW(t)$, dengan $a, b \in \mathbb{C}$. Kriteria ini dapat diterapkan pada model RB (3.1.1), $dr(t) = \mu r(t)dt + \sigma r(t)d\tilde{W}(t)$ dengan $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, yang persamaannya ekuivalen dengan model PDS persamaan (3.2.3), $dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW(t)$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$ dan $X(t)$ merupakan tingkat bunga.

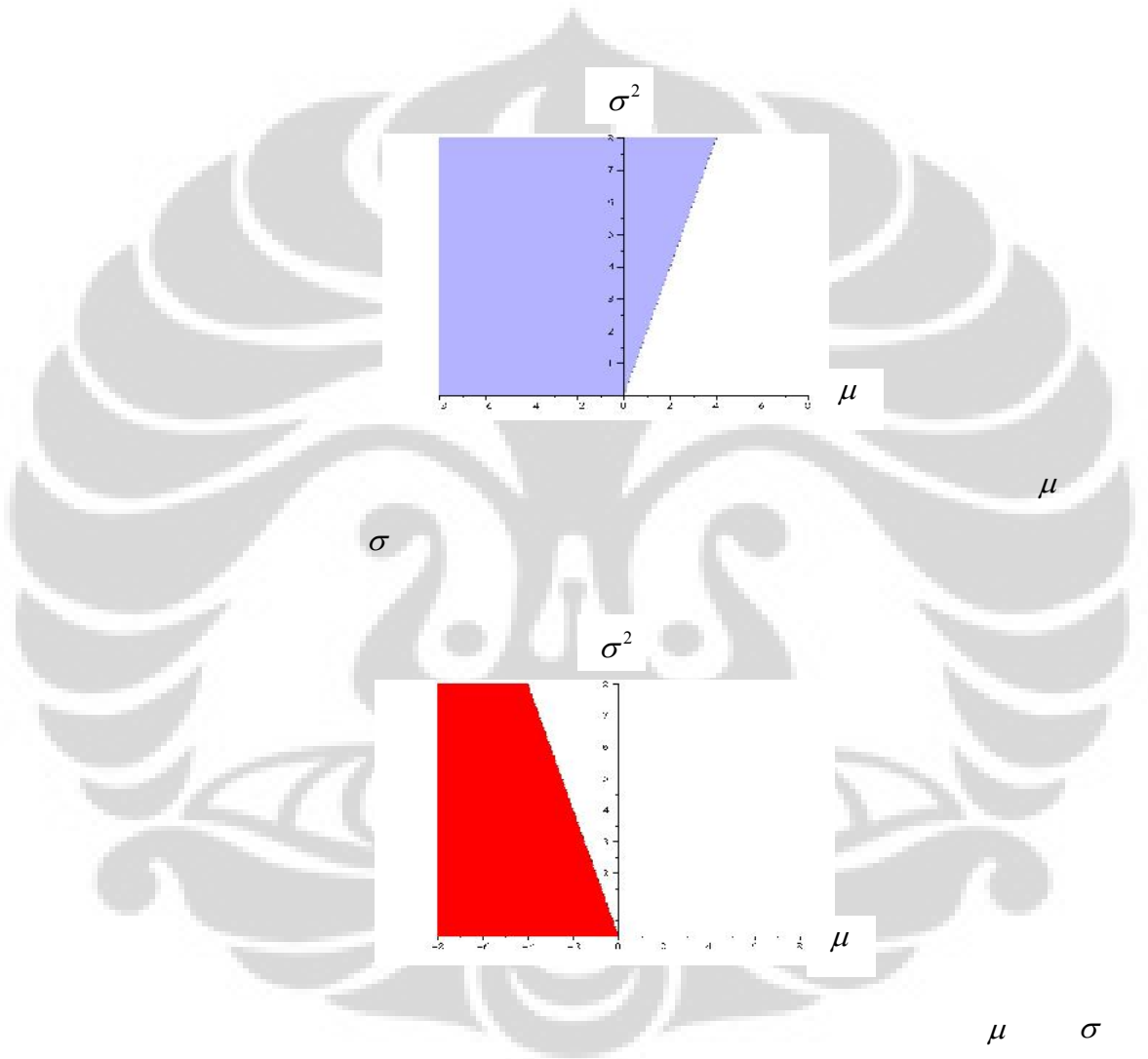
Berdasarkan (3.2.7), stabilitas stokastik asimtotik model RB (3.1.1) memenuhi $\operatorname{Re}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) < 0$. Oleh karena μ dan σ^2 merupakan bilangan real maka stabilitas stokastik asimtotik model RB (3.1.1) menjadi $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) < 0$ atau dapat ditulis menjadi

$$\sigma^2 > 2\mu. \quad (3.2.10)$$

Sedangkan, berdasarkan (3.2.9) stabilitas *mean-square* model RB (3.1.1) memenuhi $2 \operatorname{Re}(\mu) + |\sigma|^2 < 0$. Karena μ dan σ^2 merupakan bilangan real maka

$$2(\mu) + \sigma^2 < 0$$

$$\sigma^2 < -2\mu$$



secara *mean-square* juga akan stabil secara stokastik asimtotik tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Oleh karena stabilitas model RB terkait dengan parameter model RB, maka pada Subbab selanjutnya akan dibahas mengenai penaksiran parameter model RB.

3.3 Penaksiran Parameter Model Rendleman-Bartter

Pada Subbab sebelumnya, telah diperoleh kriteria stabilitas stokastik asimtotik dan *mean-square* model RB. Stabilitas model RB tersebut terkait dengan parameter model RB. Nilai parameter model RB ini pada kenyataannya tidak diketahui nilainya sehingga untuk implementasi model diperlukan penaksiran parameter. Oleh karena itu, berikut ini akan dibahas mengenai penaksiran parameter pada model RB.

Penaksiran parameter model RB membutuhkan data historis. Model RB yang terkait data historis ini berada pada ukuran aktual (*actual measure*). Sedangkan model RB berada pada ukuran *risk-neutral* (lihat persamaan 3.1.1). Oleh karena itu, distribusi model RB terkait data historis tidak sama dengan distribusi model RB pada persamaan (3.1.1) (Brigo, 2006; Shreve, 2005). Dengan demikian, sebelum dilakukan penaksiran parameter, maka terlebih dahulu dilakukan perubahan ukuran pada model RB dengan menggunakan Teorema Girsanov (Brigo, 2006; Shreve, 2005). Dengan Teorema Girsanov ini, maka terdapat keterkaitan antara model dalam ukuran *risk-neutral* dengan model dalam ukuran aktual, sehingga model dalam ukuran aktual dapat digunakan untuk menaksir parameter model.

Telah diberikan pada Subbab 3.1, bahwa model RB dalam *risk-neutral probability measure* \tilde{P} adalah,

$$dr(t) = \mu r(t) dt + \sigma r(t) d\tilde{W}(t). \quad (3.3.1)$$

Dengan menggunakan Teorema Girsanov (Teorema 2.2.5) dan memisalkan bahwa

$$\theta(u) = -\frac{\mu}{\sigma}, \text{ maka}$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}(t) &= W(t) + \int_0^t \theta(u) du, \\ &= W(t) + \int_0^t -\frac{\mu}{\sigma} du,\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

atau dalam bentuk diferensial dapat dinyatakan sebagai

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) - \frac{\mu}{\sigma} dt\tag{3.3.3}$$

sehingga, model RB dalam ukuran aktual dapat diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned}dr(t) &= \mu r(t) dt + \sigma r(t) d\tilde{W}(t) \\ &= \mu r(t) dt + \sigma r(t) \left[dW(t) - \frac{\mu}{\sigma} dt \right], \text{ (Persamaan 3.3.3),} \\ &= \mu r(t) dt + \sigma r(t) dW(t) - \mu r(t) dt \\ &= \sigma r(t) dW(t).\end{aligned}$$

Dengan demikian, model RB dalam *actual probability measure* P (ukuran aktual) adalah

$$dr(t) = \sigma r(t) dW(t),\tag{3.3.4}$$

dengan:

$r(t)$: tingkat bunga pada waktu t ,

σ : parameter standar deviasi yang menunjukkan volatilitas tingkat bunga yang merupakan konstanta positif, dan

$W(t)$: *Brownian motion* dalam *actual probability measure* P .

σ pada model RB dengan *risk-neutral probability measure* \tilde{P} sama dengan σ pada model RB dengan *actual probability measure* P.

Model RB (3.3.4) memiliki bentuk solusi analitik sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 r(t) &= r(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\} \\
 &= r(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \left(W(t) - \frac{\mu}{\sigma} t \right) \right\} \\
 &= r(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) - \mu t \right\} \\
 &= r(0) \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\}. \tag{3.3.5}
 \end{aligned}$$

Solusi analitik dalam ukuran aktual (3.3.5) berdistribusi lognormal dengan ekspektasi dan variansi bersyarat terhadap $\mathfrak{I}(0)$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 E(r(t)|\mathfrak{I}(0)) &= E \left(r(0) \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} \middle| \mathfrak{I}(0) \right) \\
 &= E \left(r(0) \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (W(t) - W(0)) \right\} \middle| \mathfrak{I}(0) \right), \text{ (karena } W(0) = 0) \\
 &= r(0) E \left(\exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (W(t) - W(0)) \right\} \middle| \mathfrak{I}(0) \right) \\
 &= r(0) E \left(\exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} \cdot \exp(\sigma (W(t) - W(0))) \middle| \mathfrak{I}(0) \right) \\
 &= r(0) \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} E \left(\exp(\sigma (W(t) - W(0))) \middle| \mathfrak{I}(0) \right) \\
 &= r(0) \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} \exp \left(\frac{1}{2} \sigma^2 t \right), \text{ (Definisi 2.1.12)} \\
 &= r(0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \\
 &= r(0) \exp(0) \\
 &= r(0). \tag{3.3.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(r(t)|\mathfrak{F}(0)) &= \text{Var}\left(r(0) \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}b^2\right)t + bW(t)\right\} \middle| \mathfrak{F}(0)\right) \\
&= \text{Var}\left(r(0) \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}b^2\right)t + b(W(t) - W(0))\right\} \middle| \mathfrak{F}(0)\right), (\text{karena } W(0) = 0) \\
&= (r(0))^2 \text{Var}\left(\exp\left\{\left(-\frac{1}{2}b^2\right)t + b(W(t) - W(0))\right\} \middle| \mathfrak{F}(0)\right) \\
&= (r(0))^2 \text{Var}\left(\exp\left\{\left(-\frac{1}{2}b^2\right)t\right\} \cdot \exp(b(W(t) - W(0))) \middle| \mathfrak{F}(0)\right) \\
&= (r(0))^2 \exp\left\{2\left(-\frac{1}{2}b^2\right)t\right\} \text{Var}\left(\exp(b(W(t) - W(0))) \middle| \mathfrak{F}(0)\right) \\
&= (r(0))^2 \exp\left\{(-b^2)t\right\} \cdot \exp(b^2t) \cdot [\exp(b^2t) - 1], (\text{Definisi 2.1.12}) \\
&= (r(0))^2 \exp\{-b^2t + b^2t\} \cdot [\exp(b^2t) - 1] \\
&= (r(0))^2 \cdot [\exp(b^2t) - 1]. \tag{3.3.7}
\end{aligned}$$

Terlihat bahwa distribusi $r(t)$ pada persamaan (3.1.2) berbeda dengan persamaan (3.3.5). Dengan demikian, jelas bahwa model yang berada pada *risk-neutral probability measure* \tilde{P} berbeda distribusinya dengan model dalam aktual *probability measure* P .

Selain persamaan (3.3.5), model RB dalam ukuran aktual dapat dinyatakan dalam bentuk lain (Baxter, 2002), yaitu dengan menggunakan Teorema Girsanov (Teorema 2.2.5) dan memisalkan $\theta(u) = -\frac{(\mu - \nu)}{\sigma}$, maka

$$\begin{aligned}
\tilde{W}(t) &= W(t) + \int_0^t \theta(u) du \\
&= W(t) + \int_0^t -\frac{(\mu - \nu)}{\sigma} du, \tag{3.3.8}
\end{aligned}$$

atau dalam bentuk diferensial dapat dinyatakan sebagai

$$d\tilde{W}(t) = dW(t) - \frac{(\mu - \nu)}{\sigma} dt, \tag{3.3.9}$$

sehingga model RB dalam ukuran aktual yang kedua dapat diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 dr(t) &= \mu r(t) dt + \sigma r(t) d\tilde{W}(t) \\
 &= \mu r(t) dt + \sigma r(t) \left[dW(t) - \frac{(\mu - \nu)}{\sigma} dt \right], \text{ (Persamaan 3.3.9)} \\
 &= \mu r(t) dt + \sigma r(t) dW(t) - (\mu - \nu) r(t) dt \\
 &= \mu r(t) dt + \sigma r(t) dW(t) - \mu r(t) dt + \nu r(t) dt \\
 &= \nu r(t) dt + \sigma r(t) dW(t).
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, model RB dalam *actual probability measure* P (ukuran aktual) yang kedua adalah

$$dr(t) = \nu r(t) dt + \sigma r(t) dW(t) \quad (3.3.10)$$

dengan:

$r(t)$: tingkat bunga pada waktu t ,

ν : parameter ekspektasi laju pengembalian (*expected return*) yang merupakan bilangan real,

σ : parameter standar deviasi yang menunjukkan volatilitas tingkat bunga yang merupakan konstanta positif, dan

$W(t)$: *Brownian motion* dalam *actual probability measure* P.

σ pada model RB dengan *risk-neutral probability measure* \tilde{P} sama dengan σ pada model RB dengan *actual probability measure* P. Sedangkan, μ pada model RB dengan *risk-neutral probability measure* \tilde{P} berbeda dengan ν pada model RB dengan *actual probability measure* P.

Model RB (3.3.10) memiliki bentuk solusi analitik sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
r(t) &= r_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\} \\
&= r_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \left(W(t) - \frac{(\mu - \nu)}{\sigma} t \right) \right\}, \text{ (Persamaan 3.3.9)} \\
&= r_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) - \mu t + \nu t \right\} \\
&= r_0 \exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\}. \tag{3.3.11}
\end{aligned}$$

Solusi analitik yang berada pada ukuran aktual (3.3.11) berdistribusi lognormal dengan mean dan variansi bersyarat terhadap $\mathfrak{I}(0)$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
E(r(t)|\mathfrak{I}(0)) &= E \left(r(0) \exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} | \mathfrak{I}(0) \right) \\
&= r(0) E \left(\exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (W(t) - W(0)) \right\} | \mathfrak{I}(0) \right), \text{ (karena } W(0) = 0) \\
&= r(0) E \left(\exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} \cdot \exp(\sigma(W(t) - W(0))) | \mathfrak{I}(0) \right) \\
&= r(0) \exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} E \left(\exp(\sigma(W(t) - W(0))) | \mathfrak{I}(0) \right) \\
&= r(0) \exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} \exp \left(\frac{1}{2} \sigma^2 t \right), \text{ (Definisi 2.1.12)} \\
&= r(0) \exp \left\{ \nu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \\
&= r(0) \exp(\nu t). \tag{3.3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(r(t)|\mathfrak{I}(0)) &= Var \left(r(0) \exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} | \mathfrak{I}(0) \right) \\
&= Var \left(r(0) \exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (W(t) - W(0)) \right\} | \mathfrak{I}(0) \right), \text{ (karena } W(0) = 0) \\
&= (r(0))^2 Var \left(\exp \left\{ \left(\nu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (W(t) - W(0)) \right\} | \mathfrak{I}(0) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (r(0))^2 \text{Var} \left\{ \exp \left\{ \left(v - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} \cdot \exp(\sigma(W(t) - W(0))) \mid \mathfrak{F}(0) \right\} \\
&= (r(0))^2 \exp \left\{ 2 \left(v - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\} \text{Var} \left(\exp(\sigma(W(t) - W(0))) \mid \mathfrak{F}(0) \right) \\
&= (r(0))^2 \exp \left\{ (2v - \sigma^2) t \right\} \cdot \exp(\sigma^2 t) \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1], \text{ (Definisi 2.1.12)} \\
&= (r(0))^2 \exp \left\{ 2vt - \sigma^2 t + \sigma^2 t \right\} \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1] \\
&= (r(0))^2 \exp(2vt) \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1]. \tag{3.3.13}
\end{aligned}$$

Sama seperti persamaan (3.3.5), distribusi $r(t)$ persamaan (3.3.11) juga berbeda dengan persamaan (3.3.1). Dengan demikian, jelas bahwa model yang berada pada ukuran *risk-neutral* berbeda distribusinya dengan model dalam ukuran aktual. Selanjutnya model RB dalam ukuran aktual yaitu $dr(t) = \sigma r(t) dW(t)$ dan $dr(t) = vr(t) dt + \sigma r(t) dW(t)$ yang akan digunakan dalam penaksiran parameter model RB.

Berikut ini diberikan tabel perbandingan model RB dalam ukuran *risk-neutral* dan model RB dalam ukuran aktual.

Model Rendleman-Bartter		
Model dalam Ukuran <i>Risk-Neutral</i>	Model dalam Ukuran Aktual	
	Model 1	Model 2
Model $dr(t) = \mu r(t) dt + \sigma r(t) d\tilde{W}(t)$	Model $dr(t) = \sigma r(t) dW(t)$	Model $dr(t) = vr(t) dt + \sigma r(t) dW(t)$
Solusi Analitik $r(t) = r_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\}$	Solusi Analitik $r(t) = r_0 \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\}$	Solusi Analitik $r(t) = r_0 \exp \left\{ \left(v - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{W}(t) \right\}$
Distribusi Lognormal $E(r(t) \mid \mathfrak{F}(0)) = r(0) \exp(\mu t)$ $\text{Var}(r(t) \mid \mathfrak{F}(0)) = (r(0))^2 \exp(2\mu t) \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1]$	Distribusi Lognormal $E(r(t) \mid \mathfrak{F}(0)) = r(0)$ $\text{Var}(r(t) \mid \mathfrak{F}(0)) = (r(0))^2 \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1]$	Distribusi Lognormal $E(r(t) \mid \mathfrak{F}(0)) = r(0) \exp(vt)$ $\text{Var}(r(t) \mid \mathfrak{F}(0)) = (r(0))^2 \exp(2vt) \cdot [\exp(\sigma^2 t) - 1]$

Tabel 3.3.a. Perbandingan model RB dalam ukuran *risk-neutral* dengan dua model RB dalam ukuran aktual.

Selanjutnya, untuk menaksir parameter model RB digunakan salah satu metode penaksiran parameter yaitu metode *Maximum Likelihood Estimation*. Metode ini menggunakan nilai observasi $r(0), r(1), r(2), \dots, r(N)$ dari suatu proses stokastik $r(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Berdasarkan Subbab (2.6.1), metode *Maximum Likelihood Estimation* memerlukan *Probability Density Function* (PDF) dari suatu peubah acak. PDF model RB yang diperlukan adalah PDF transisi yaitu PDF dari suatu proses stokastik. Oleh karena $r(t)$ pada model RB dalam ukuran aktual yaitu $dr(t) = \sigma r(t) dW(t)$ pada persamaan (3.3.4) berdistribusi lognormal, maka PDF transisi lognormal dari $r(t)$ adalah

$$f(r(t)|\mathfrak{I}(0); \sigma) = \frac{1}{\sigma r(t) \sqrt{2\pi\Delta t}} \exp \left(-\frac{\left(\ln r(t) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2 \Delta t} \right). \quad (3.3.14)$$

Dengan demikian, *joint pdf* atau fungsi *likelihood* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(\sigma; r(i)|\mathfrak{I}(0); i=1, 2, \dots, n) &= f(r(1)|\mathfrak{I}(0)) \cdot f(r(2)|\mathfrak{I}(0)) \cdots f(r(n)|\mathfrak{I}(0)) \\ &= \frac{1}{r(1) \sqrt{2\pi\sigma^2 \Delta t}} \exp \left(-\frac{\left(\ln r(1) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2 \Delta t} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r(2)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left(-\frac{\left(\ln r(2) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right) \\
& \vdots \\
& \frac{1}{r(n)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left(-\frac{\left(\ln r(n) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right) \\
& = \prod_{i=1}^n \frac{1}{r(i)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left(-\frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right).
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Oleh karena ingin ditentukan taksiran parameter σ menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation*, maka agar lebih mudah dalam hal perhitungannya akan digunakan fungsi *log-likelihood* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\ln L(\sigma; r(t) | \mathfrak{F}(0); t=1, 2, \dots, n) &= \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{r(i)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left(-\frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{r(i)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} - \frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \\
&= \sum_{i=1}^n -\ln \sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t} - \ln r(i) - \frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \\
&= \sum_{i=1}^n -\ln(2\pi\sigma^2\Delta t)^{\frac{1}{2}} - \sum_{i=1}^n \ln r(i) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \\
&= -\frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi\sigma^2\Delta t) - \sum_{i=1}^n \ln r(i) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\ln r(i) - \ln r(0) + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \right)^2}{2\sigma^2\Delta t}.
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Selanjutnya, fungsi *log-likelihood* (3.3.16) dimaksimumkan terhadap parameter σ . Turunan pertama fungsi *log-likelihood* terhadap parameter σ dengan menggunakan perangkat lunak MAPLE diperoleh sebagai berikut,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{n(\ln r(0))^2}{\sigma^3 \Delta t} - \frac{1}{4} n \sigma \Delta t - \left(\sum_{i=1}^n -\frac{(\ln r(i))^2}{\sigma^3 \Delta t} + \frac{2 \ln r(i) \ln r(0)}{\sigma^3 \Delta t} \right). \quad (3.3.17)$$

Berdasarkan (3.3.17), terlihat bahwa taksiran parameter σ tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, taksiran σ dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* kemudian diselesaikan secara numerik. Algoritma yang digunakan adalah metode Newton-Raphson, sehingga diperlukan turunan kedua fungsi *log-likelihood* terhadap parameter σ . Dengan menggunakan perangkat lunak MAPLE, turunan kedua fungsi *log-likelihood* terhadap parameter σ adalah

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3n(\ln r(0))^2}{\sigma^4 \Delta t} - \frac{1}{4} n \Delta t - \left(\sum_{i=1}^n \frac{3(\ln r(i))^2}{\sigma^4 \Delta t} - \frac{6 \ln r(i) \ln r(0)}{\sigma^4 \Delta t} \right). \quad (3.3.18)$$

Selanjutnya, nilai taksiran σ atau $\hat{\sigma}$ dapat diperoleh dengan bentuk iteratif pada Subbab 2.6.2 sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}^{(i+1)} = \hat{\sigma}^{(i)} - \frac{\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}}{\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.19)$$

Proses iterasi akan berhenti jika $\hat{\sigma}^{(i+1)} \approx \hat{\sigma}^{(m)}$ (dengan $|\hat{\sigma}^{(m+1)} - \hat{\sigma}^{(m)}| < 10^{-3}$), lalu ambil $\hat{\sigma}^{(m+1)}$ sebagai taksiran dari σ .

Setelah diperoleh nilai taksiran parameter σ , maka taksiran parameter ini dapat digunakan untuk model RB dalam ukuran *risk-neutral* (3.3.1). Hal ini karena parameter σ pada model RB dalam ukuran *risk-neutral* sama dengan parameter σ model RB dalam ukuran aktual (lihat persamaan 3.3.1 dan 3.3.4).

Sedangkan, model RB dalam ukuran aktual tidak mengandung parameter μ , sehingga parameter μ pada model RB dalam ukuran *risk-neutral* dapat ditentukan berdasarkan daerah stabilitas yang diperoleh pada Subbab 3.2 (Gambar 3.2.a dan 3.2.b).

Cara yang sama juga dapat diterapkan untuk menentukan nilai taksiran parameter σ pada model RB dalam ukuran aktual (3.3.10), yaitu $dr(t) = vr(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$. PDF transisi $r(t)$ pada persamaan (3.3.11) yang berdistribusi lognormal adalah

$$f(r(t)|\mathfrak{I}(0);b) = \frac{1}{br(t)\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp \left[-\frac{\left(\ln r(t) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}b^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2b^2\Delta t} \right]. \quad (3.3.20)$$

Dengan demikian, *joint pdf* atau fungsi *likelihood* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(v, \sigma; r(i)|\mathfrak{I}(0); i=1, 2, \dots, n) &= f(r(1)|\mathfrak{I}(0)) \cdot f(r(2)|\mathfrak{I}(0)) \cdots f(r(n)|\mathfrak{I}(0)), \\ &= \frac{1}{r(1)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left[-\frac{\left(\ln r(1) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{r(2)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left[-\frac{\left(\ln r(2) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right] \\ &\quad \vdots \\ &\quad \cdot \frac{1}{r(n)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left[-\frac{\left(\ln r(n) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right] \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{r(i)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left[-\frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right]. \quad (3.3.21)$$

Oleh karena ingin ditentukan taksiran parameter σ dan v menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation*, maka agar lebih mudah dalam hal perhitungannya akan digunakan fungsi *log-likelihood* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ln L(v, \sigma; r(i) | \mathfrak{F}(0); i=1, 2, \dots, n) &= \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{r(i)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp \left[-\frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{r(i)\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} - \frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^n -\ln \sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t} - \ln r(i) - \frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^n -\ln(2\pi\sigma^2\Delta t)^{\frac{1}{2}} - \sum_{i=1}^n \ln r(i) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t} \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2\Delta t) - \sum_{i=1}^n \ln r(i) - \sum_{i=1}^n \frac{\left(\ln r(i) - \left\{ \ln r(0) + \left(v - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t \right\} \right)^2}{2\sigma^2\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Selanjutnya, fungsi *log-likelihood* (3.3.22) dimaksimumkan terhadap parameter σ dan v . Turunan pertama fungsi *log-likelihood* terhadap parameter σ dan v dengan menggunakan perangkat lunak MAPLE diperoleh sebagai berikut,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial v} = -\frac{n \ln r_0}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} n v \Delta t + \frac{1}{2} n \Delta t + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\ln r_i}{\sigma^2} \right), \quad (3.3.23)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{n(\ln r(0))^2}{\sigma^3 \Delta t} + \frac{2n \ln r(0)v}{\sigma^3} + \frac{nv^2 \Delta t}{\sigma^3} - \frac{1}{4}n\sigma \Delta t - \left(\sum_{i=1}^n -\frac{(\ln r(i))^2}{\sigma^3 \Delta t} + \frac{2 \ln r(i) \ln r(0)}{\sigma^3 \Delta t} + \frac{2 \ln r(i)v}{\sigma^3} \right). \quad (3.3.24)$$

Berdasarkan (3.3.23) dan (3.3.24) terlihat bahwa taksiran parameter σ dan v tidak dapat diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, taksiran σ dan v dengan metode *Maksimum Likelihood Estimation* kemudian diselesaikan secara numerik. Metode yang digunakan adalah metode Newton-Raphson, sehingga diperlukan turunan kedua fungsi *log-likelihood* terhadap parameter σ . Dengan menggunakan perangkat lunak MAPLE, turunan kedua fungsi *log-likelihood* terhadap parameter σ dan v adalah

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial v^2} = -\frac{n \Delta t}{\sigma^2} \quad (3.3.25)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3n \ln r_0^2}{\sigma^4 \Delta t} - \frac{6n \ln r_0 v}{\sigma^4} - \frac{3nv^2 \Delta t}{\sigma^4} - \frac{1}{4}n \Delta t - \left(\sum_{i=1}^n \frac{3 \ln r_i^2}{\sigma^4 \Delta t} - \frac{6 \ln r_i \ln r_0}{\sigma^4 \Delta t} - \frac{6 \ln r_i v}{\sigma^4} \right), \quad (3.3.26)$$

Selanjutnya, taksiran v dan σ dapat diperoleh dengan bentuk iteratif pada Subbab 2.6.2 sebagai berikut:

$$\hat{\delta}^{(i+1)} = \hat{\delta}^{(i)} - \left(H(\hat{\delta}^{(i)}) \right)^{-1} \cdot s(\hat{\delta}^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.27)$$

dengan,

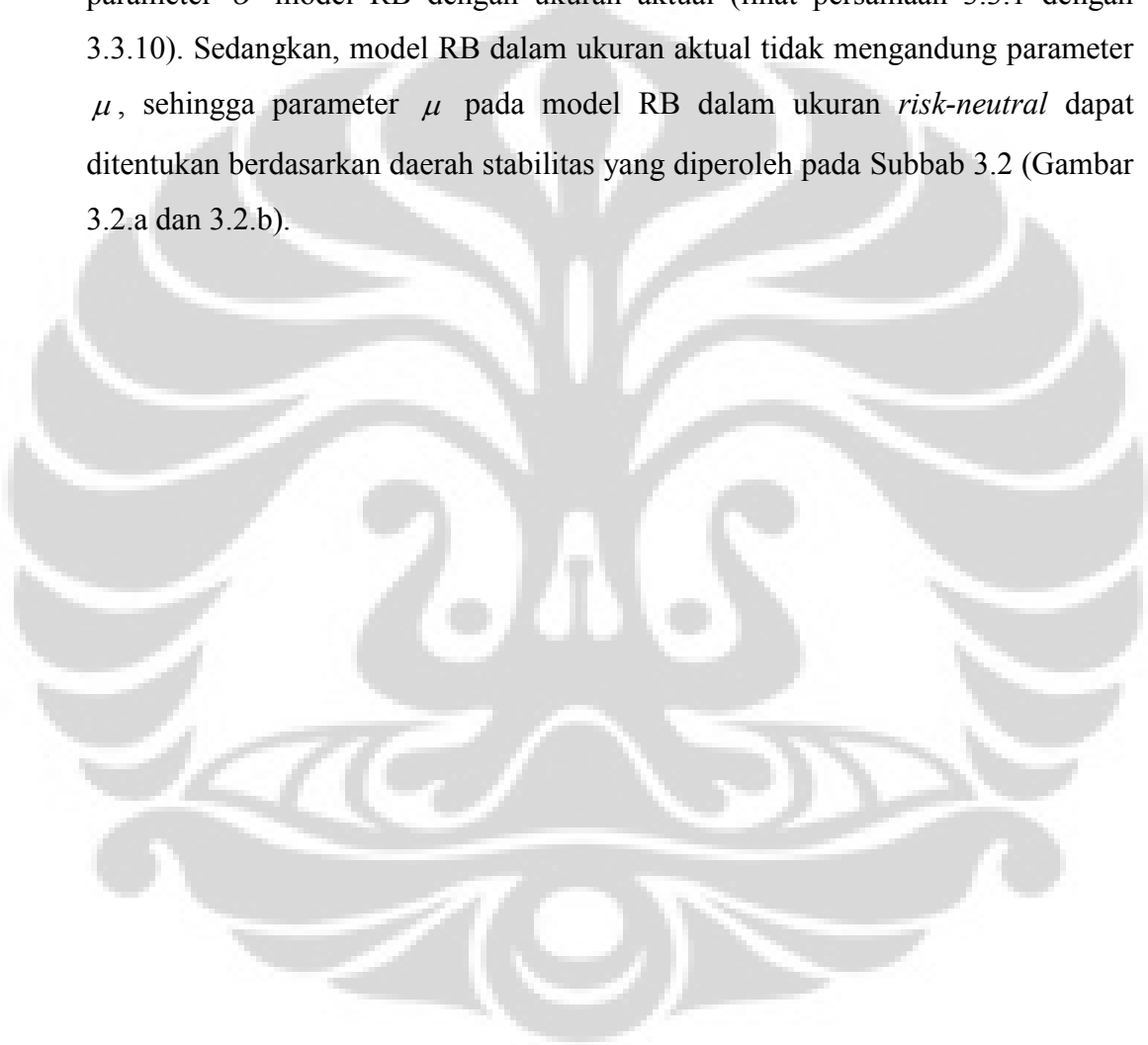
$$\delta = (v, \sigma)^T,$$

$s(\hat{\delta}^{(i)})$ adalah vektor turunan parsial pertama dari $\ln L$,

$H(\hat{\delta}^{(i)})$ adalah matriks turunan parsial kedua dari $\ln L$.

Proses iterasi jika $\hat{\delta}^{(m+1)} \approx \hat{\delta}^{(m)}$ (dengan $\|\hat{\delta}^{(m+1)} - \hat{\delta}^{(m)}\| < 10^{-3}$), lalu ambil $\hat{\delta}^{(m+1)}$ sebagai taksiran dari δ .

Setelah diperoleh taksiran parameter σ dan ν , maka taksiran parameter σ dapat digunakan untuk Model RB dalam ukuran *risk-neutral* (3.3.1). Hal ini karena parameter σ pada model RB dengan ukuran *risk-neutral* sama dengan parameter σ model RB dengan ukuran aktual (lihat persamaan 3.3.1 dengan 3.3.10). Sedangkan, model RB dalam ukuran aktual tidak mengandung parameter μ , sehingga parameter μ pada model RB dalam ukuran *risk-neutral* dapat ditentukan berdasarkan daerah stabilitas yang diperoleh pada Subbab 3.2 (Gambar 3.2.a dan 3.2.b).



BAB 4

IMPLEMENTASI

Bab ini membahas implementasi analisis stabilitas dan penaksiran parameter model Rendleman-Bartter (RB) menggunakan tingkat bunga bulanan dari *zero-coupon bond* dengan *maturity time* 5 tahun periode Januari tahun 1982 hingga Februari 2011 yang diunduh dari <http://www.bankofengland.co.uk> (Lampiran 1).

Diberikan model RB dalam *risk-neutral probability measure* \tilde{P} sebagai berikut:

$$dr(t) = \mu r(t)dt + \sigma r(t)d\tilde{W}(t) \quad (4.1)$$

dengan:

$r(t)$: tingkat bunga pada waktu t ,

μ : parameter ekspektasi laju pengembalian (*expected return*) yang merupakan bilangan real,

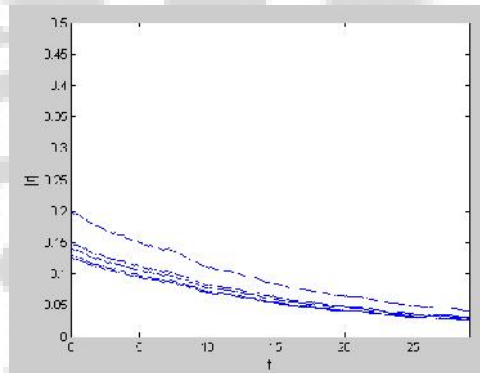
σ : parameter standar deviasi yang menunjukkan volatilitas tingkat bunga yang merupakan konstanta positif, dan

$\tilde{W}(t)$: *Brownian motion* dalam *risk-neutral probability measure* \tilde{P} .

Berikut ini akan diperlihatkan visualisasi stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* model RB berdasarkan kriteria stabilitas model RB yang dibahas pada Subbab 3.2.

Terkait dengan stabilitas stokastik asimtotik model RB, maka visualisasi yang akan diperlihatkan adalah stabilitas stokastik asimtotik model RB dengan nilai awal yang berbeda menggunakan suatu parameter model RB dengan

$\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$

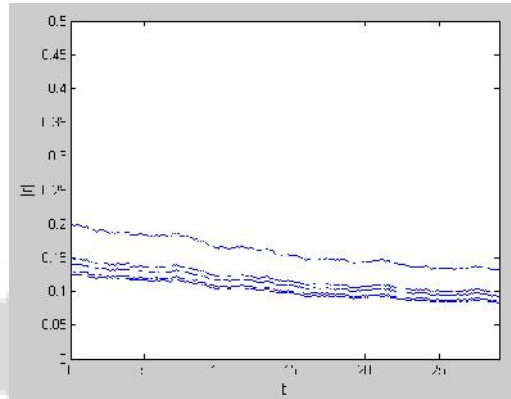


$\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = 0$$

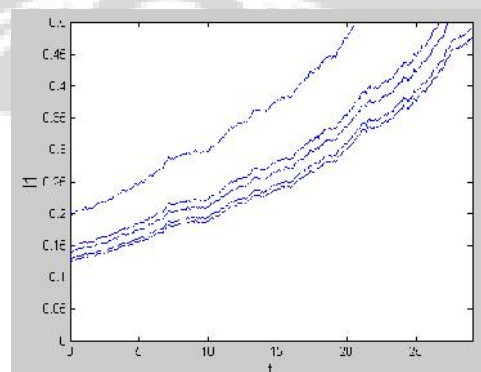
$X(t)$

$\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$



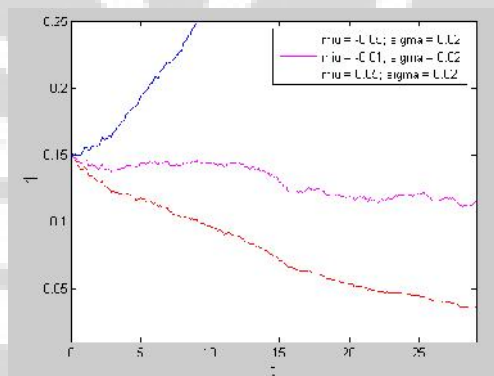
$\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$

$\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$



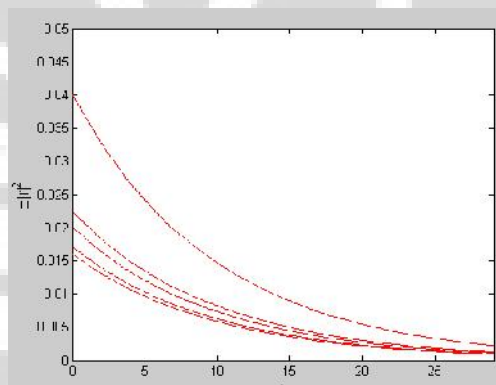
$\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$

$r_0 = 14,94\%$



$r_0 = 14,94\%$

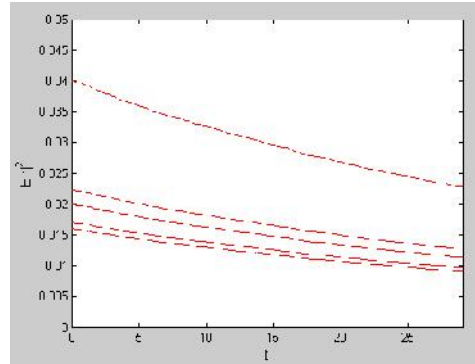
$\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$



$\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$

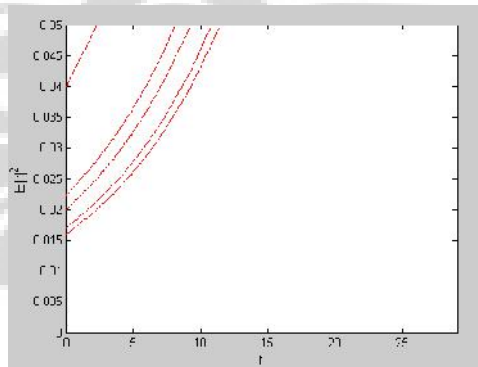
$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(|X(t)|^2) = 0 \quad X(t)$$

$\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$

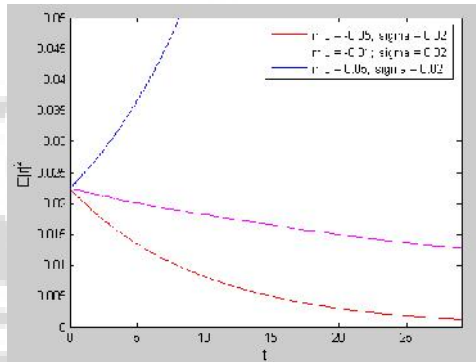


$\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$

$\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$



$\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$



$$r_0 = 14,94\%$$

μ dan σ

μ dan σ

dalam ukuran aktual, sehingga model dalam ukuran aktual dapat digunakan untuk menaksir parameter model.

Penaksiran parameter model RB dalam ukuran aktual dengan menggunakan data historis akan dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* dan dilanjutkan dengan metode numerik Newton-Raphson, seperti yang telah dijelaskan pada Subbab 3.3. Dengan menggunakan perangkat lunak MATLAB (*source code* dapat dilihat pada Lampiran 10), diperoleh hasil taksiran parameter untuk model RB dalam ukuran aktual $dr(t) = \sigma r(t)dW(t)$ (lihat persamaan 3.3.4.), yaitu

$$\hat{\sigma} = 2.9768. \quad (4.2)$$

Setelah diperoleh nilai taksiran parameter σ , maka nilai taksiran parameter σ dapat digunakan untuk model RB dalam ukuran *risk-neutral* (4.1). Hal ini karena parameter σ pada model RB dalam ukuran *risk-neutral* sama dengan parameter σ model RB dalam ukuran aktual (lihat persamaan 4.1 dengan 3.3.4). Sedangkan, model RB dalam ukuran aktual tidak mengandung parameter μ , maka nilai taksiran parameter μ pada model RB dalam ukuran *risk-neutral* dapat ditentukan berdasarkan daerah stabilitas yang diperoleh pada Subbab 3.2 (Gambar 3.2.a dan 3.2.b) sehingga memenuhi daerah stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square*. Dalam hal ini dipilih $\hat{\mu} = -5$. Dengan demikian, nilai taksiran parameter model RB dalam *risk-neutral* adalah sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = -5 \text{ dan } \hat{\sigma} = 2.9768 \quad (4.3)$$

Selanjutnya, berdasarkan data historis dan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* serta dilanjutkan dengan metode numerik Newton-Raphson diperoleh hasil taksiran parameter model RB dalam ukuran aktual $dr(t) = vr(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$ (lihat persamaan 3.3.10), (*source code* dapat dilihat pada Lampiran 11), yaitu

$$\hat{v} = -8.6896 \text{ dan } \hat{\sigma} = 1.5388. \quad (4.4)$$

Sama halnya seperti model RB dalam ukuran aktual (3.3.4), parameter μ model RB dalam ukuran *risk-neutral* diperoleh berdasarkan daerah stabilitas model RB pada Gambar 3.2.a dan 3.2.b, dalam hal ini nilai yang dipilih adalah nilai taksiran parameter ν seperti pada persamaan 4.4. Dengan demikian, nilai taksiran parameter model RB dalam *risk-neutral* adalah sebagai berikut:

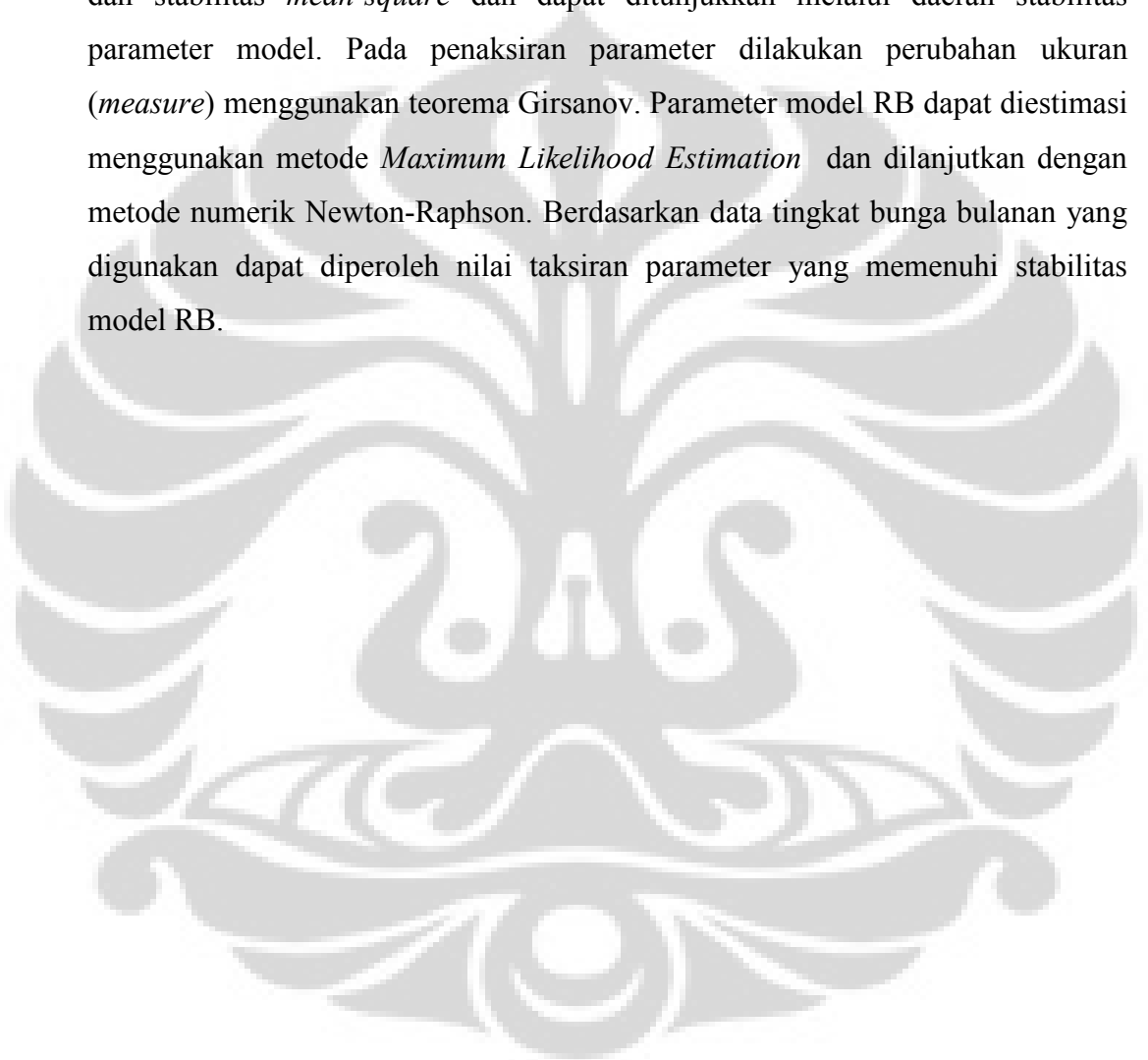
$$\hat{\mu} = -8.6896 \text{ dan } \hat{\sigma} = 1.5388 \quad (4.5)$$

Berdasarkan persamaan 4.3, persamaan 4.5, Gambar 3.2.a, dan Gambar 3.2.b dapat disimpulkan bahwa hasil taksiran parameter model RB berdasarkan data yang diunduh dari <http://www.bankofengland.co.uk> terletak dalam daerah stabilitas stokastik asimtotik dan *mean-square* model RB.

BAB 5

KESIMPULAN

Model Rendleman-Bartter (RB) memenuhi stabilitas stokastik asimtotik dan stabilitas *mean-square* dan dapat ditunjukkan melalui daerah stabilitas parameter model. Pada penaksiran parameter dilakukan perubahan ukuran (*measure*) menggunakan teorema Girsanov. Parameter model RB dapat diestimasi menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* dan dilanjutkan dengan metode numerik Newton-Raphson. Berdasarkan data tingkat bunga bulanan yang digunakan dapat diperoleh nilai taksiran parameter yang memenuhi stabilitas model RB.



DAFTAR PUSTAKA

- Allen, E. (2007). *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations*. Netherland: Springer.
- Anggono, S. (2004). *Kajian Stabilitas pada Masalah dan Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial Stokastik*. Depok: Department of Mathematics, University of Indonesia.
- Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- Baxter, Martin dan Andrew Rennie. (2002). *Financial Calculus*. Cambridge University Press.
- Bhattacharya, R. N. & Waymire, E. C. (1992). *Stochastic Processes with Applications*. Canada: John Wiley & Sons.
- Boes, D. C., Graybill, F. A., & Mood, A. M. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. New York: McGraw-Hill.
- Brigo, D. & Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Model - Theory and Practice: With Smile, Inflation, and Credit*. New York: Springer.
- Burden, Richard L., and J. Douglas Faires. (2001). *Numerical Analysis, seventh editions*. USA: Brooks / Cole.
- Casella, G., McCulloch, C. E., & Searle, S. R. (1992). *Variance Components*. New York: John Wiley & Sons.
- Dokuchaev, N. (2007). *Mathematical Finance Core Theory, Problems, and Statistical Algorithms*. New York: Routledge.
- Handhika, T. & Murni. (2010). *Kajian Stabilitas Model Tingkat Bunga Rendleman-Bartter*. *Science National Seminar Proceeding*, Vol. 3, *Mathematical Science*, No. 1, pp. 382-390.

- Higham, D. J. (2001). An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*, Vol. 43, No. 3, pp. 525-546.
- Hull, J.C. (2003). *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall, London.
- Karlin, S. & Taylor, H. M. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling (Third Edition)*. California: Academic Press.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Kloeden, P. E. & Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Kreyszig, E. (1999). *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- Longstaff, F. A. & Schwartz, E. S. (1992). *Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model*. *JSTOR*, Vol. 47, No. 4, pp. 1259-1282.
- Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. Singapore: World Scientific.
- Mulyani, S. (2010), *Implementasi Model Rendleman-Bartter dalam Pergerakan Tingkat Bunga*, Depok: Departemen Matematika, Universitas Indonesia.
- Oksendal, B. (1998). *Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications*. New York: Springer.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*. New York: Springer.
- Thygesen, U. H. (1997). A Survey of Lyapunov Techniques for Stochastic Differential Equations. *IMM Technical Report* nr. 18. <http://www.imm.dtu.dk>.

Yolcu, Y. (2005). *One-Factor Interest Rate Models: Analytic Solutions and Approximations*. Turkey: Department of Financial Mathematics, Middle East Technical University.

Bank of England, “Yields”.

<http://www.bankofengland.co.uk/statistics/yieldcurve/index.htm>

(8 Mar. 2011, pukul 21.47 WIB)



Lampiran 1

Data tingkat bunga bulanan dari suatu *zero coupon bond* pada Bank of England periode Januari 1982 hingga Februari 2011.

No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%
1	31-Jan-82	14.94	36	31-Dec-84	11.06	71	30-Nov-87	8.82	106	31-Oct-90	11.02
2	28-Feb-82	14.13	37	31-Jan-85	11.36	72	31-Dec-87	9.14	107	30-Nov-90	10.65
3	31-Mar-82	12.63	38	28-Feb-85	11.48	73	31-Jan-88	9.03	108	31-Dec-90	10.85
4	30-Apr-82	13.04	39	31-Mar-85	11.29	74	29-Feb-88	9.04	109	31-Jan-91	10.24
5	31-May-82	12.66	40	30-Apr-85	11.08	75	31-Mar-88	8.8	110	28-Feb-91	10
6	30-Jun-82	12.5	41	31-May-85	11.03	76	30-Apr-88	8.96	111	31-Mar-91	10
7	31-Jul-82	11.47	42	30-Jun-85	11.01	77	31-May-88	9.02	112	30-Apr-91	10.13
8	31-Aug-82	10.55	43	31-Jul-85	10.55	78	30-Jun-88	9.56	113	31-May-91	10.21
9	30-Sep-82	10.47	44	31-Aug-85	10.39	79	31-Jul-88	9.67	114	30-Jun-91	10.39
10	31-Oct-82	9.68	45	30-Sep-85	10.31	80	31-Aug-88	10.15	115	31-Jul-91	10.09
11	30-Nov-82	10.79	46	31-Oct-85	10.34	81	30-Sep-88	9.85	116	31-Aug-91	9.85
12	31-Dec-82	10.52	47	30-Nov-85	10.5	82	31-Oct-88	9.64	117	30-Sep-91	9.53
13	31-Jan-83	11.22	48	31-Dec-85	10.84	83	30-Nov-88	10.41	118	31-Oct-91	9.61
14	28-Feb-83	10.87	49	31-Jan-86	11.19	84	31-Dec-88	10.24	119	30-Nov-91	9.84
15	31-Mar-83	10.9	50	28-Feb-86	10.19	85	31-Jan-89	9.82	120	31-Dec-91	9.82
16	30-Apr-83	10.76	51	31-Mar-86	9.01	86	28-Feb-89	10.12	121	31-Jan-92	9.46
17	31-May-83	10.78	52	30-Apr-86	8.43	87	31-Mar-89	10.16	122	29-Feb-92	9.29
18	30-Jun-83	10.82	53	31-May-86	8.69	88	30-Apr-89	10.27	123	31-Mar-92	9.96
19	31-Jul-83	11.45	54	30-Jun-86	8.98	89	31-May-89	10.55	124	30-Apr-92	9.21
20	31-Aug-83	11.52	55	31-Jul-86	9.31	90	30-Jun-89	10.51	125	31-May-92	8.96
21	30-Sep-83	10.87	56	31-Aug-86	9.14	91	31-Jul-89	9.93	126	30-Jun-92	9.13
22	31-Oct-83	10.73	57	30-Sep-86	10.94	92	31-Aug-89	10.09	127	31-Jul-92	9.39
23	30-Nov-	10.64	58	31-Oct-	10.84	93	30-Sep-	10.68	128	31-Aug-	9.75

	83			86			89			92	
24	31-Dec-83	10.68	59	30-Nov-86	11	94	31-Oct-89	10.52	129	30-Sep-92	8.57
25	31-Jan-84	10.83	60	31-Dec-86	10.46	95	30-Nov-89	10.88	130	31-Oct-92	7.48
26	29-Feb-84	10.59	61	31-Jan-87	10.02	96	31-Dec-89	10.57	131	30-Nov-92	7.84
27	31-Mar-84	10.41	62	28-Feb-87	9.5	97	31-Jan-90	11.2	132	31-Dec-92	7.54
28	30-Apr-84	10.84	63	31-Mar-87	8.93	98	28-Feb-90	11.73	133	31-Jan-93	7.2
29	31-May-84	11.89	64	30-Apr-87	8.65	99	31-Mar-90	12.39	134	28-Feb-93	6.96
30	30-Jun-84	11.76	65	31-May-87	8.59	100	30-Apr-90	12.93	135	31-Mar-93	7.06
31	31-Jul-84	12.74	66	30-Jun-87	8.98	101	31-May-90	11.84	136	30-Apr-93	7.52
32	31-Aug-84	11.62	67	31-Jul-87	9.57	102	30-Jun-90	11.44	137	31-May-93	7.5
33	30-Sep-84	11.41	68	31-Aug-87	10.21	103	31-Jul-90	11.5	138	30-Jun-93	7.15
34	31-Oct-84	11.19	69	30-Sep-87	10.01	104	31-Aug-90	11.57	139	31-Jul-93	6.85
35	30-Nov-84	10.67	70	31-Oct-87	9.11	105	30-Sep-90	11.7	140	31-Aug-93	6.54

No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%
141	30-Sep-93	6.59	176	31-Aug-96	7.23	211	31-Jul-99	5.73	246	30-Jun-02	5.01
142	31-Oct-93	6.4	177	30-Sep-96	7.07	212	31-Aug-99	5.71	247	31-Jul-02	4.72
143	30-Nov-93	6.25	178	31-Oct-96	7.19	213	30-Sep-99	6.15	248	31-Aug-02	4.5
144	31-Dec-93	5.78	179	30-Nov-96	6.99	214	31-Oct-99	6.02	249	30-Sep-02	4.18
145	31-Jan-94	5.87	180	31-Dec-96	7.21	215	30-Nov-99	5.96	250	31-Oct-02	4.33
146	28-Feb-94	6.55	181	31-Jan-97	7.03	216	31-Dec-99	6.04	251	30-Nov-02	4.51
147	31-Mar-94	7.37	182	28-Feb-97	6.91	217	31-Jan-00	6.29	252	31-Dec-02	4.16
148	30-Apr-94	7.74	183	31-Mar-97	7.33	218	29-Feb-00	6.01	253	31-Jan-03	4.01
149	31-May-94	8.34	184	30-Apr-97	7.13	219	31-Mar-00	5.86	254	28-Feb-03	3.8
150	30-Jun-94	8.55	185	31-May-97	7.01	220	30-Apr-00	5.7	255	31-Mar-03	3.96
151	31-Jul-94	8.45	186	30-Jun-97	6.99	221	31-May-00	5.7	256	30-Apr-03	4.01
152	31-Aug-94	8.44	187	31-Jul-97	6.93	222	30-Jun-00	5.59	257	31-May-03	3.77
153	30-Sep-94	8.75	188	31-Aug-97	6.98	223	31-Jul-00	5.64	258	30-Jun-03	3.84
154	31-Oct-	8.69	189	30-Sep-	6.41	224	31-Aug-	5.68	259	31-Jul-03	4.23

	94			97			00				
155	30-Nov-94	8.4	190	31-Oct-97	6.55	225	30-Sep-00	5.53	260	31-Aug-03	4.46
156	31-Dec-94	8.64	191	30-Nov-97	6.65	226	31-Oct-00	5.47	261	30-Sep-03	4.34
157	31-Jan-95	8.51	192	31-Dec-97	6.4	227	30-Nov-00	5.15	262	31-Oct-03	4.93
158	28-Feb-95	8.55	193	31-Jan-98	6.13	228	31-Dec-00	5.08	263	30-Nov-03	4.91
159	31-Mar-95	8.38	194	28-Feb-98	6.21	229	31-Jan-01	4.98	264	31-Dec-03	4.61
160	30-Apr-95	8.3	195	31-Mar-98	6.04	230	28-Feb-01	4.98	265	31-Jan-04	4.73
161	31-May-95	7.67	196	30-Apr-98	5.91	231	31-Mar-01	4.84	266	29-Feb-04	4.6
162	30-Jun-95	8.17	197	31-May-98	5.82	232	30-Apr-01	5.13	267	31-Mar-04	4.62
163	31-Jul-95	7.83	198	30-Jun-98	6.16	233	31-May-01	5.28	268	30-Apr-04	4.85
164	31-Aug-95	7.63	199	31-Jul-98	6.05	234	30-Jun-01	5.44	269	31-May-04	5.12
165	30-Sep-95	7.64	200	31-Aug-98	5.53	235	31-Jul-01	5.17	270	30-Jun-04	5.04
166	31-Oct-95	7.43	201	30-Sep-98	5.04	236	31-Aug-01	4.97	271	31-Jul-04	5.1
167	30-Nov-95	6.97	202	31-Oct-98	4.97	237	30-Sep-01	4.87	272	31-Aug-04	4.86
168	31-Dec-95	6.84	203	30-Nov-98	4.72	238	31-Oct-01	4.51	273	30-Sep-04	4.74
169	31-Jan-96	6.88	204	31-Dec-98	4.37	239	30-Nov-01	4.65	274	31-Oct-04	4.63
170	29-Feb-96	7.35	205	31-Jan-99	4.2	240	31-Dec-01	5.08	275	30-Nov-04	4.47
171	31-Mar-96	7.61	206	28-Feb-99	4.65	241	31-Jan-02	4.9	276	31-Dec-04	4.43
172	30-Apr-96	7.47	207	31-Mar-99	4.58	242	28-Feb-02	4.94	277	31-Jan-05	4.48
173	31-May-96	7.6	208	30-Apr-99	4.81	243	31-Mar-02	5.3	278	28-Feb-05	4.68
174	30-Jun-96	7.32	209	31-May-99	5.07	244	30-Apr-02	5.15	279	31-Mar-05	4.61
175	31-Jul-96	7.31	210	30-Jun-99	5.4	245	31-May-02	5.22	280	30-Apr-05	4.44

No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%	No.	Tanggal	r(t)%
281	31-May-05	4.21	301	31-Jan-07	5.15	321	30-Sep-08	4.21	341	31-May-10	2.41
282	30-Jun-05	4.04	302	28-Feb-07	4.97	322	31-Oct-08	3.97	342	30-Jun-10	2.21
283	31-Jul-05	4.22	303	31-Mar-07	5.13	323	30-Nov-08	3.37	343	31-Jul-10	2.228

284	31-Aug-05	4.06	304	30-Apr-07	5.19	324	31-Dec-08	2.71	344	31-Aug-10	1.758
285	30-Sep-05	4.19	305	31-May-07	5.45	325	31-Jan-09	2.88	345	30-Sep-10	1.813
286	31-Oct-05	4.29	306	30-Jun-07	5.63	326	28-Feb-09	2.62	346	31-Oct-10	1.878
287	30-Nov-05	4.21	307	31-Jul-07	5.35	327	31-Mar-09	2.45	347	30-Nov-10	2.031
288	31-Dec-05	4.1	308	31-Aug-07	5.12	328	30-Apr-09	2.59	348	31-Dec-10	2.314
289	31-Jan-06	4.17	309	30-Sep-07	4.98	329	31-May-09	2.72	349	31-Jan-11	2.586
290	28-Feb-06	4.21	310	31-Oct-07	4.94	330	30-Jun-09	2.97	350	28-Feb-11	2.651
291	31-Mar-06	4.39	311	30-Nov-07	4.57	331	31-Jul-09	3.08			
292	30-Apr-06	4.61	312	31-Dec-07	4.41	332	31-Aug-09	2.69			
293	31-May-06	4.63	313	31-Jan-08	4.3	333	30-Sep-09	2.68			
294	30-Jun-06	4.74	314	29-Feb-08	4.2	334	31-Oct-09	2.77			
295	31-Jul-06	4.66	315	31-Mar-08	3.95	335	30-Nov-09	2.66			
296	31-Aug-06	4.63	316	30-Apr-08	4.44	336	31-Dec-09	2.98			
297	30-Sep-06	4.64	317	31-May-08	4.94	337	31-Jan-10	2.94			
298	31-Oct-06	4.7	318	30-Jun-08	5.17	338	28-Feb-10	2.78			
299	30-Nov-06	4.69	319	31-Jul-08	4.77	339	31-Mar-10	2.79			
300	31-Dec-06	4.91	320	31-Aug-08	4.41	340	30-Apr-10	2.75			

Lampiran 2

Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik

```

randn('state',100000)
a = -0.05; b = 0.02;
T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; t = [dt:dt:T]; M = 1;
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per
bulan)
r=r'/100;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW,2);
r(5)=0.2;

rtaksiran = zeros(5,N);
for i = 1:1:5
    rtaksiran(i,:) = r(i)*exp((a-0.5*b^2)*t+b*W);
    plot([0:dt:T],[r(i),rtaksiran(i,:)], 'b-'), hold on
    xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
    ylabel('|r|','FontSize',12), axis([0,T,0,1/2])
end
hold off

```


Lampiran 3

Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik

```

randn('state',100000)
a = -0.01; b = 0.02;
T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; t = [dt:dt:T]; M = 1;
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per
bulan)
r=r'/100;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW,2);
r(5)=0.2;

rtaksiran = zeros(5,N);
for i = 1:1:5
    rtaksiran(i,:) = r(i)*exp((a-0.5*b^2)*t+b*W);
    plot([0:dt:T],[r(i),rtaksiran(i,:)], 'b-'), hold on
    xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
    ylabel('|r|','FontSize',12), axis([0,T,0,1/2])
end
hold off

```

Lampiran 4

Simulasi beberapa solusi model RB dimana $\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik

```

randn('state',100000)
a = 0.05; b = 0.02;
T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; t = [dt:dt:T]; M = 1;
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per
bulan)
r=r'/100;
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW,2);
r(5)=0.2;

rtaksiran = zeros(5,N);
for i = 1:1:5
    rtaksiran(i,:) = r(i)*exp((a-0.5*b^2)*t+b*W);
    plot([0:dt:T],[r(i),rtaksiran(i,:)],'b-'), hold on
    xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
    ylabel('|r|','FontSize',12), axis([0,T,0,1/2])
end
hold off

```

Lampiran 5

Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dengan $r_0 = 14,94\%$ dan beberapa nilai parameter yang berbeda untuk menguji kestabilan stokastik asimtotik

```

randn('state',100)
a = [-0.05 -0.01 0.05]; b = [0.02 0.02 0.02];
T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; t = [dt:dt:T];
dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
W = cumsum(dW,2);
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per
bulan)
r=r'/100;

rtaksiran = zeros(3,N);
for i = 1:1:3
    rtaksiran(i,:) = abs(r(1))*exp((a(i)-0.5*b(i)^2)*t+b(i)*W);
end
plot([0:dt:T],[abs(r(1)),rtaksiran(1,:)],'r-'), hold on
plot([0:dt:T],[abs(r(1)),rtaksiran(2,:)],'m-'), hold on
plot([0:dt:T],[abs(r(1)),rtaksiran(3,:)],'b-'), hold on
legend('miu = -0.05; sigma = 0.02','miu = -0.01; sigma =
0.02','miu = 0.05; sigma = 0.02',1)
xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
ylabel('|r|','FontSize',12), axis([0,T,0.08,0.25])
hold off

```

Lampiran 6

Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dimana $\mu = -0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan *mean-square*

```

randn('state',100)
a = -0.05; b = 0.02;
T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; t = [dt:dt:T]; M = 100;
dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
W = cumsum(dW,2);
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per
bulan)
r=r'/100;
r(5)=0.2;
rtaksiran = zeros(5,N);
for i = 1:1:5
    rtaksiran(i,:) = mean(abs(r(i)*exp((a-0.5*b^2)*repmat(t,[M
1])+b*W)).^2);
    plot([0:dt:T],[((r(i))^2),rtaksiran(i,:)],'r-'), hold on
    xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
    ylabel('E|r|^2','FontSize',12), axis([0,T,0,1/20])
end
hold off

```

Lampiran 7

Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dimana $\mu = -0.01$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan *mean-square*

```

randn('state',100)
a = -0.01; b = 0.02;
T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; t = [dt:dt:T]; M = 100;
dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
W = cumsum(dW,2);
r=xlsread('data.xlsx','A1:A350'); % ambil data r (asumsi per
bulan)
r=r'/100;
r(5)=0.2;
rtaksiran = zeros(5,N);
for i = 1:1:5
    rtaksiran(i,:) = mean(abs(r(i)*exp((a-0.5*b^2)*repmat(t,[M
1])+b*W)).^2);
    plot([0:dt:T],[((r(i))^2),rtaksiran(i,:)],'r-'), hold on
    xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
    ylabel('E|r|^2','FontSize',12), axis([0,T,0,1/20])
end
hold off

```

Lampiran 8

Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dimana $\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.02$ dengan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan *mean-square*

```

randn('state',100)
a = 0.05; b = 0.02;
T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; t = [dt:dt:T]; M = 100;
dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
W = cumsum(dW,2);
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per
bulan)
r=r'/100;
r(5)=0.2;
rtaksiran = zeros(5,N);
for i = 1:1:5
    rtaksiran(i,:) = mean(abs(r(i)*exp((a-0.5*b^2)*repmat(t, [M
1])+b*W)).^2);
    plot([0:dt:T],[((r(i))^2),rtaksiran(i,:)],'r-'), hold on
    xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
    ylabel('E|r|^2','FontSize',12), axis([0,T,0,1/20])
end
hold off

```

Lampiran 9

Simulasi beberapa solusi model RB (100 simulasi) dengan $r_0 = 14,94\%$ dan beberapa nilai awal yang berbeda untuk menguji kestabilan *mean-square*

```

randn('state',100)
a = [-0.05 -0.01 0.05]; b = [0.02 0.02 0.02];
T = 29+1/12; N = 349; dt = T/N; M = 100; t = [dt:dt:T];
dW = sqrt(dt)*randn(M,N);
W = cumsum(dW,2);
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350'); % ambil data r (asumsi per
bulan)
r=r'/100;

rtaksiran = zeros(3,N);
for i = 1:1:3
    rtaksiran(i,:) = mean(abs(r(1)*exp((a(i)-
0.5*b(i)^2)*repmat(t, [M 1])+b(i)*W)).^2);
end
plot([0:dt:T],[((r(1))^2),rtaksiran(1,:)],'r-'), hold on
plot([0:dt:T],[((r(1))^2),rtaksiran(2,:)],'m-'), hold on
plot([0:dt:T],[((r(1))^2),rtaksiran(3,:)],'b-'), hold on
legend('miu = -0.05; sigma = 0.02','miu = -0.01; sigma =
0.02','miu = 0.05; sigma = 0.02',1)
xlabel('t','FontSize',12), axis([0,T,1e-1/64,1e+1/4])
ylabel('E|r|^2','FontSize',12), axis([0,T,0,0.05])
hold off

```

Lampiran 10

Algoritma Newton-Raphson dalam menaksir parameter model Rendleman-Bartter
terkait model aktual $dr(t) = \sigma r(t)dW(t)$

```

syms beta;
pmt=[0.07];
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350');
r=r/100;
N=size(r,1)-1;
T=29+1/12;
Dt=T/N;
TOL=[10^(-3)];
err =[1];
U=0;V=0;
for k=2:1:N+1
    U = U+(-
        (((log(r(k)))^2)/((beta^3)*Dt))+((2*(log(r(k))))/((beta^3)*Dt)));
        V = V+((3*((log(r(k)))^2)/((beta^4)*Dt))-
            (((6*(log(r(k))))/((beta^4)*Dt)));
end

S = -(N/beta)+(N/((beta^3)*Dt))-((N*beta*Dt)/4)-U;
H = (N/(beta^2))-((3*N)/((beta^4)*Dt))-((N*Dt)/4)-V;

while norm(err,inf)>=TOL
    nH = subs(H, {beta}, {pmt});
    nS = subs(S, {beta}, {pmt});

    par = pmt;
    pmt = par - ((nH)^(-1))*nS;
    err = abs(pmt-par);
end

pmt

```


Lampiran 11

Algoritma Newton-Raphson dalam menaksir parameter model Rendleman-Bartter

terkait model aktual $dr(t) = vr(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$

```

pmt=[0.5; 0.07];
r=xlsread('data.xlsx', 'A1:A350');
r=r/100;
N=size(r,1)-1;
T=29+1/12;
Dt=T/N;
TOL=[10^(-3);10^(-3)];
err =[1; 1];
while norm(err,inf)>=TOL
    U = ((log(r(2:N+1)))/(pmt(2))^2);
    V = (-
    (((log(r(2:N+1))).^2)/((pmt(2)^3)*Dt))+((2*(log(r(2:N+1)))*(log(r
    (1))))/(pmt(2)^3)*Dt))+((2*(log(r(2:N+1))*pmt(1)))/(pmt(2)^3));
    W = ((3*((log(r(2:N+1))).^2))/(pmt(2)^4)*Dt)-
    (((6*(log(r(2:N+1)))*(log(r(1)))))/(pmt(2)^4)*Dt)-
    ((6*(log(r(2:N+1))*pmt(1))/(pmt(2)^4));
    X = ((2*(log(r(2:N+1))))/(pmt(2)^3));
    SU = cumsum(U);
    SV = cumsum(V);
    SW = cumsum(W);
    SX = cumsum(X);
    s1 = -(N*(log(r(1)))/(pmt(2)^2))-
    ((N*Dt*(pmt(1)))/(pmt(2)^2))+((1/2)*N*Dt)+SU(end);
    s2 = -
    (N/pmt(2))+N*((log(r(1)))^2)/((pmt(2)^3)*Dt))+((2*N*(log(r(1)))*p
    mt(1))/(pmt(2)^3))+((N*Dt*((pmt(1))^2))/(pmt(2)^3))-
    ((N*pmt(2)*Dt)/4)-SV(end);
    S = [s1; s2];
    h11 = -((N*Dt)/(pmt(2)^2));
    h12 =
    ((2*N*(log(r(1))))/(pmt(2)^3))+((2*N*Dt*pmt(1))/(pmt(2)^3))-
    SX(end);
    h22 = (N/(pmt(2)^2))-((3*N*((log(r(1)))^2))/(pmt(2)^4)*Dt))-
    ((6*N*(log(r(1)))*pmt(1))/(pmt(2)^4))-
    ((3*N*Dt*(pmt(1)^2))/(pmt(2)^4))-((N*Dt)/4)-SW(end);
    H = [h11 h12; h12 h22];
    par = pmt;
    pmt = par - ((1/((H(1,1)*H(2,2))-H(1,2)*H(2,1))))*[H(2,2) -
    H(1,2); -H(2,1) H(1,1)]*S;
    err = abs(pmt-par)
    pmt
    par
    pause;
end

```