



UNIVERSITAS INDONESIA

**KONSTRUKSI KELAS GRAF TANGGA UMUM
BERLABEL TOTAL BUSUR-AJAIB SUPER
DENGAN MENGGUNAKAN
MATRIKS KETETANGGAAN $(a,1)$ SIMPUL ANTIAJAIB BUSUR**

TESIS

**Ahmad Sabri
0906495324**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
2011**



UNIVERSITAS INDONESIA

**KONSTRUKSI KELAS GRAF TANGGA UMUM
BERLABEL TOTAL BUSUR-AJAIB SUPER
DENGAN MENGGUNAKAN
MATRIKS KETETANGGAAN $(a,1)$ SIMPUL ANTIAJAIB BUSUR**

TESIS


Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains

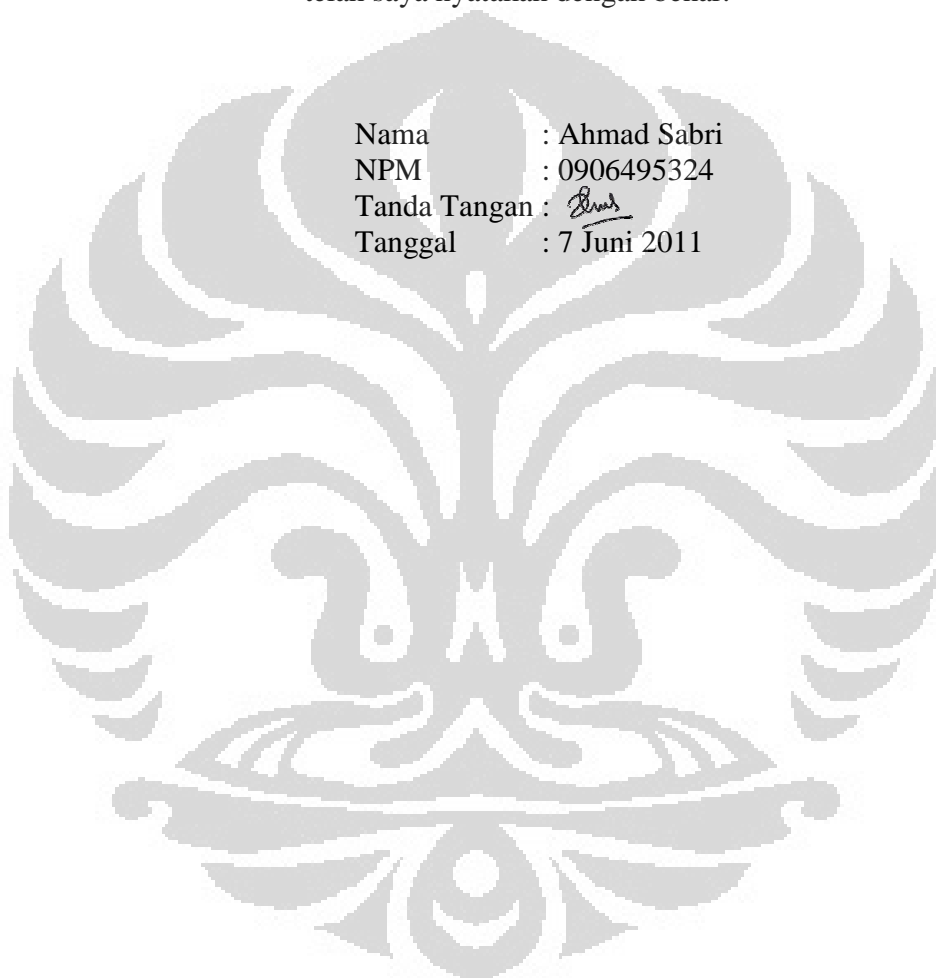
**Ahmad Sabri
0906495324**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
DEPOK
JUNI 2011**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Tesis ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk,
telah saya nyatakan dengan benar.

Nama : Ahmad Sabri
NPM : 0906495324
Tanda Tangan : 
Tanggal : 7 Juni 2011



HALAMAN PENGESAHAN

Tesis ini diajukan oleh:

Nama : Ahmad Sabri
NPM : 0906495324
Program Studi : Matematika
Judul Tesis : Konstruksi Kelas Graf Tangga Umum Berlabel Total Busur-Ajaib Super dengan Menggunakan Matriks Ketetanggaan $(a,1)$ -Simpul Antiajaib Busur

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Magister Sains pada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dr. Kiki Ariyanti S., M.Si.	(..... )
Penguji	: Prof. Dr. Djati Kerami	(..... )
Penguji	: Dr. Sri Mardiyati, M.Kom.	(..... )
Penguji	: Dr. Yudi Satria, M.T.	(..... )
Penguji	: Dr.rer.nat.Hendri Murfi, M.Kom.	(..... )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 15 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji syukur kepada Allah SWT atas terselesaikannya tesis ini. Penulisan tesis ini dilakukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains, Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Di dalam pembuatan tesis ini, saya banyak mendapat bimbingan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu saya ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Kiki Ariyanti, selaku dosen pembimbing yang telah banyak menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran, untuk mengarahkan saya dalam penulisan tesis ini
2. Prof. Dr. Djati Kerami, selaku Ketua Program Studi Magister Matematika, yang telah banyak memberikan motivasi kepada saya
3. Dr. Dian Lestari DEA, selaku pembimbing akademis, yang telah banyak memberikan bimbingan dan masukan-masukan demi kelancaran kegiatan akademis saya
4. Isteriku Vini, yang banyak memberikan dukungan sehingga saya tetap bersemangat
5. Anak-anakku Difa dan Fatma, yang banyak memberikan penyegaran di sela-sela pengerjaan tesis ini
6. Ayah dan Ibuku, yang selalu mendoakan anak-anaknya agar tercapai cita-cita dan impiannya.
7. Pihak-pihak lainnya yang turut membantu penyelesaian tesis ini, yang tidak dapat saya sebutkan satu per satu.

Semoga Allah Yang Maha Kuasa berkenan membalas amal kebaikan yang telah mereka berikan. Semoga tesis ini dapat memberikan manfaat.

Depok, 7 Juni 2011

Ahmad Sabri

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI TUGAS AKHIR
UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:


Nama : Ahmad Sabri
NPM : 0906495324
Program Studi : Magister Matematika
Departemen : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis Karya : Tesis

demikian pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia **Hak Bebas Royalti Noneksklusif** (*Non-exclusive Royalty-Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul:

Konstruksi Kelas Graf Tangga Umum Berlabel Total Busur-Ajaib Super dengan Menggunakan Matriks Ketetanggaan $(a,1)$ -Simpul Antiajaib Busur

berserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (*database*), merawat, dan mempublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di: Depok
Pada tanggal: 7 Juni 2011
Yang menyatakan

(Ahmad Sabri)

ABSTRAK

Nama : Ahmad Sabri
Program Studi : Magister Matematika
Judul : Konstruksi Kelas Graf Tangga Umum Berlabel Total Busur-Ajaib Super dengan Menggunakan Matriks Ketetanggaan $(a,1)$ -Simpul Antiajaib Busur

Kelas Graf Tangga Umum $GTU(n,m)$ adalah graf lingkaran C_n dengan penambahan $(m-1)$ tali-busur, yang disebut busur partisi, dengan syarat tidak ada busur partisi yang memiliki simpul persekutuan, tidak ada busur partisi yang saling bersilangan di sisi dalam graf, dan setiap blok graf memiliki maksimal 2 busur partisi. Untuk mengkonstruksi $GTU(n,m)$ berlabel Total Busur Ajaib Super (TBAS), bobot busur partisi yang ditambahkan adalah $\min\{W\}-1$ atau $\max\{W\}+1$, di mana W adalah himpunan bobot busur dari $GTU(n,m-1)$. Berdasarkan bobot busur partisinya, $GTU(n,m)$ dapat digolongkan menjadi 3 jenis yaitu $GTU(n,m)$ dengan busur partisi berbobot minimal, $GTU(n,m)$ dengan busur partisi berbobot maksimal, atau $GTU(n,m)$ dengan busur partisi berbobot kombinasi minimal dan maksimal. Di dalam tesis ini, konstruksi Kelas Graf Tangga Umum $GTU(n,m)$ dilakukan dengan menggunakan matriks ketetanggaan $(a,1)$ -Simpul Antiajaib Busur (SAB). Pola pelabelan TBAS yang digunakan adalah pola pelabelan TBAS untuk C_n dari Enomoto et al. (1998) untuk n ganjil, dan pola pelabelan TBAS untuk C_n^t dari MacDougall dan Wallis (2003) untuk n genap. Berdasarkan sifat-sifat pada matriks ketetanggaan SAB untuk $GTU(n,m)$, sifat-sifat dari kelas $GTU(n,m)$ dapat diketahui

Kata Kunci:
graf tangga umum, pelabelan graf, total busur-ajaib super, simpul antiajaib busur matriks ketetanggaan,

ABSTRACT

Name : Ahmad Sabri
Program : Magister in Mathematics
Title : On The Construction of General Ladder Graph with Super Edge-Magic Total Labeling by Using $(a,1)$ -Edge Antimagic Vertex Adjacency Matrix

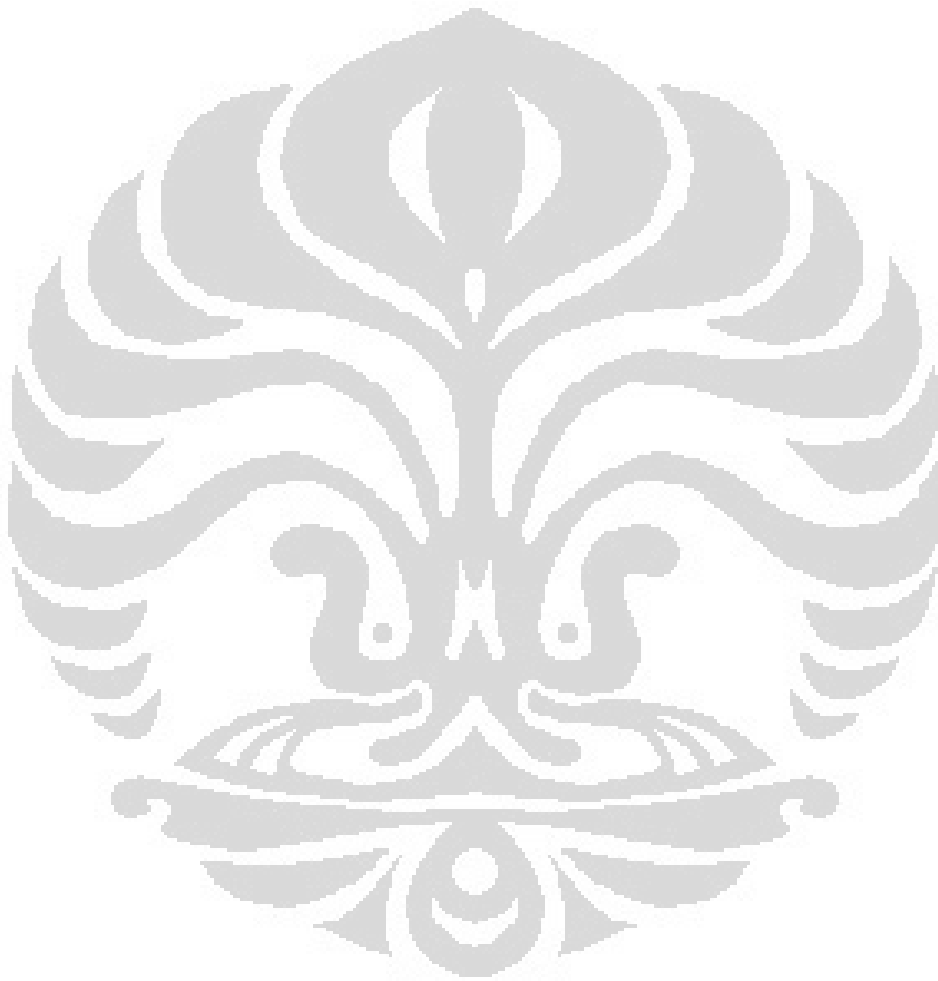
General Ladder Graph class $GTU(n,m)$ is a cycle graph C_n added with $(m-1)$ chords, called as partition edges, by conditions that there are no partition edges sharing a vertex, there are no partition edges crossing each other in the inner side of the graph, and every block has maximum 2 partition edges. To construct $GTU(n,m)$ with Super Edge-Magic Total (SEMT) labeling, the weight of the newly added partition edge is $\min\{W\}-1$ or $\max\{W\}+1$, where W is a set of edge weights of $GTU(n,m-1)$. Based on the weight of partition edges, $GTU(n,m)$ is divided into three categories. There are $GTU(n,m)$ with minimum weight of partition edges, $GTU(n,m)$ with maximum weight of partition edges, and $GTU(n,m)$ with combination of minimum and maximum weight of partition edges. The construction of General Ladder Graph class $GTU(n,m)$ explained in this thesis is done by using $(a,1)$ -Edge-Antimagic Vertex (EAV) adjacency matrix. SEMT labeling function for C_n from Enomoto et. al (1998) is used for n odd, and SEMT labeling function for C_n' from MacDougall and Wallis (2003) is used for n even. Based on the properties of EAV adjacency matrix for $GTU(n,m)$, the properties of $GTU(n,m)$ graph can be discovered.

Keywords:
general ladder graph, graph labeling, super edge-magic total, edge-antimagic vertex, adjacency matrix

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS.....	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
LEMBAR PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH.....	v
ABSTRAK.....	vi
ABSTRACT.....	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR GAMBAR	x
1. PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Perumusan dan Batasan Masalah	2
1.3. Tujuan Penulisan.....	2
1.4. Metode Penelitian	3
1.5. Sistematika Penulisan	3
2. LANDASAN TEORI.....	4
2.1. Teori Graf.....	4
2.2. Beberapa Kelas Graf Sederhana	5
2.2.1. Kelas Graf Lingkaran.....	5
2.2.2. Kelas Graf Lingkaran Bertali-busur.....	5
2.2.3. Kelas Graf Lengkap	6
2.3. Kelas Graf yang Dibentuk dari Beberapa Blok	6
2.3.1. Kelas Graf Rantai	6
2.3.2. Kelas Graf Tangga	9
2.3.3. Kelas Graf Tangga Umum	9
2.4. Pelabelan Graf.....	12
2.4.1. Pelabelan Total Busur-Ajaib Super.....	12
2.4.3. Pelabelan (a,d) Simpul Antiajaib Busur	13
2.5. Matriks Ketetangaan	14
3. PELABELAN TOTAL BUSUR AJAIB SUPER	18
3.1. Sifat-sifat Pelabelan Total Busur Ajaib Super.....	18
3.2. Graf yang Ekuivalen-SAB	24
4. KONSTRUKSI GRAF TANGGA UMUM.....	27
4.1. Aturan Partisi $GTU(n,m)$ Tanpa Pelabelan	27
4.2. Aturan Partisi $GTU(n,m)$ Berlabel TBAS.....	28
4.3. Konstruksi Kelas $GTU(n,m)$ berlabel TBAS dengan Matriks Ketetangaan $(a,1)$ -Simpul Antiajaib Busur	29
4.3.1. Ilustrasi untuk n ganjil.....	29
4.3.2. Konstruksi $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n dengan n ganjil	36

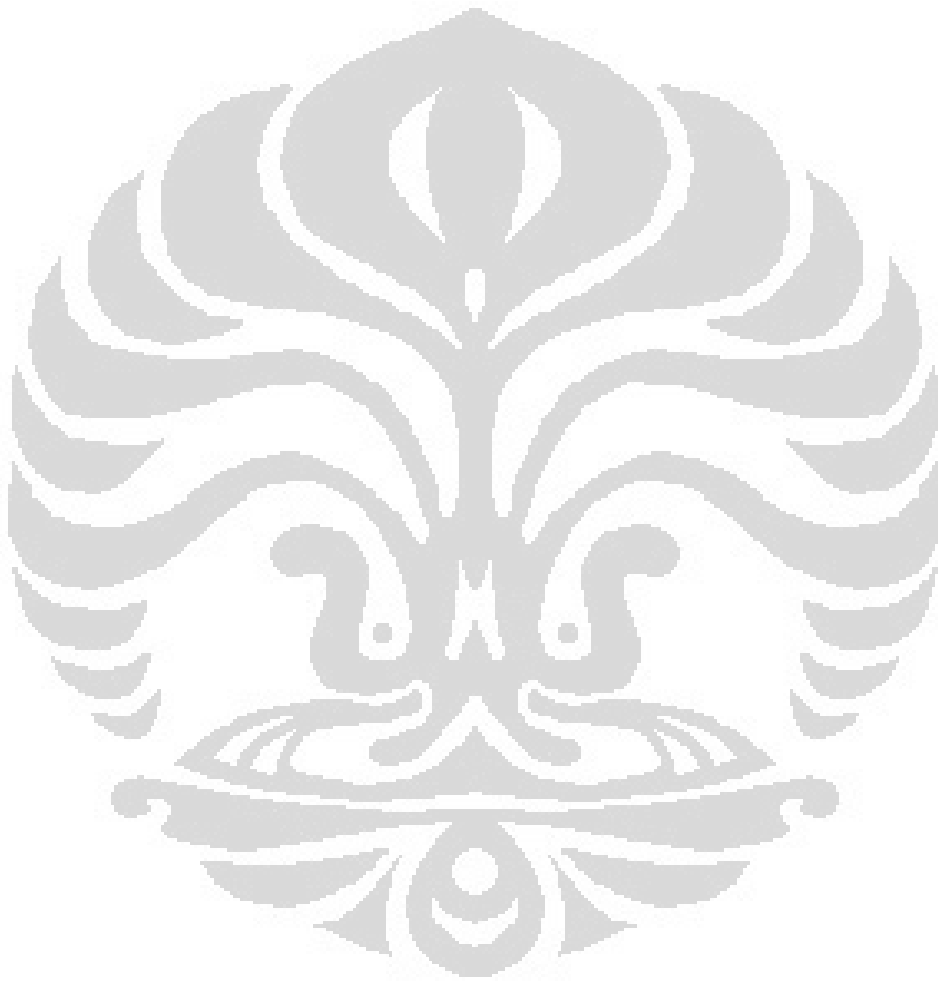
4.3.3. Ilustrasi untuk $n = 4r$	42
4.3.4. Konstruksi $GTU(n,m)$ Berlabel TBAS- C_n^t dengan $n = 4r$	45
5. KESIMPULAN DAN SARAN	53
DAFTAR PUSTAKA	54



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1.	Graf Lingkaran C_8	5
Gambar 2.2.	Graf Lingkaran Bertali-busur C_9^4	6
Gambar 2.3.	Graf Lengkap K_7	6
Gambar 2.4a.	Graf rantai blok lengkap $CK(3;(3,4,5))$	7
Gambar 2.4b.	Graf rantai blok lingkaran $3C_5$ -snake	7
Gambar 2.5a.	Graf $3C_5$ - snake non-linier.....	8
Gambar 2.5b.	Graf $C_{4,6,4,5}$ - snake non-linier.....	8
Gambar 2.6a.	Graf tangga L_5	9
Gambar 2.6b.	Graf tangga L_5	9
Gambar 2.7a.	Graf tangga umum homogen dengan blok C_5	10
Gambar 2.7b.	Graf tangga umum homogen dengan blok C_6	10
Gambar 2.7c.	Graf tangga umum non-homogen dengan blok C_4, C_5, C_6, C_4	10
Gambar 2.7d.	Graf tangga umum non-homogen dengan blok C_4, C_8, C_6, C_4, C_5 ...	10
Gambar 2.8.	GTU non-linier.....	11
Gambar 2.9.	Graf dengan pelabelan TBAS	13
Gambar 2.10.	Graf dengan pelabelan SAB.....	14
Gambar 2.11.	Graf C_7 dengan pelabelan SAB.....	16
Gambar 3.1a.	Graf G dengan pelabelan SAB.....	25
Gambar 3.1b.	Matriks ketetanggaan A dari graf G	25
Gambar 3.1c.	Matriks ketetanggaan A^*	25
Gambar 3.1d.	Graf G^* berdasarkan matriks ketetanggaan A^*	25
Gambar 4.1.	Graf lingkaran C_{11} berlabel TBAS- C_n	30
Gambar 4.2.	Matriks ketetanggaan dari Graf lingkaran C_{11} berlabel TBAS- C_n .	30
Gambar 4.3.	GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n	31
Gambar 4.4.	Matriks ketetanggaan dari GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n	32
Gambar 4.5.	Matriks ketetanggaan dari GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n	32
Gambar 4.6.	GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n	33
Gambar 4.7.	GTU(11,3) berlabel TBAS- C_n	33
Gambar 4.8.	Matriks ketetanggaan GTU(11,3) berlabel TBAS- C_n	34
Gambar 4.9.	Graf dari kelas GTU (11,2) berlabel TBAS- C_n	35
Gambar 4.10.	Graf dari kelas GTU (11,3) berlabel TBAS- C_n	35
Gambar 4.11.	Pola matriks ketetanggaan graf C_n berlabel TBAS- C_n , n ganjil	37
Gambar 4.12.	Graf GTU(12,2)	42

Gambar 4.13. Matriks ketetangaan GTU(12,2)	43
Gambar 4.14. Graf GTU(12,3)	44
Gambar 4.15. Matriks ketetangaan GTU(12,3)	44
Gambar 4.12. Pola matriks ketetangaan C'_n berlabel TBAS-, C'_n $n = 4r$	46



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Pelabelan graf adalah cabang dari teori graf yang terus berkembang sampai sekarang. Banyaknya jenis pelabelan yang dapat digunakan untuk melabel berbagai jenis graf, mengakibatkan banyak sekali kemungkinan pelabelan yang dapat dilakukan. Salah satu jenis pelabelan adalah pelabelan Total Busur-Ajaib Super (TBAS) atau *Super Edge Magic Total* (SEMT). Survey yang dilakukan oleh Gallian (2010) menunjukkan bahwa pelabelan TBAS untuk graf rantai dengan blok berupa graf lengkap telah dibahas oleh Lee dan Wang dalam pracetak makalahnya. Namun, belum ada penelitian tentang pelabelan TBAS untuk graf rantai dengan blok graf lingkaran.

Pengkajian yang telah dilakukan penulis terhadap pelabelan TBAS untuk graf rantai dengan 2 blok lingkaran C_m dan C_n , dimana $3 \leq m \leq 6$ dan $3 \leq n \leq 6$, hasil diperoleh adalah graf-graf tersebut tidak memiliki pelabelan TBAS. Hipotesa penulis adalah tidak terdapat graf rantai dengan 2 blok lingkaran yang TBAS.

Jika dilakukan modifikasi pada konstruksi graf rantai, yaitu di mana setiap blok yang bertetangga tidak dihubungkan oleh sebuah simpul persekutuan, namun oleh sebuah busur persekutuan, maka graf yang terbentuk menyerupai graf tangga (*ladder-like graph*), atau dalam tesis ini disebut graf tangga umum (*general ladder graph*). Dari penelusuran pada survey yang dilakukan Gallian (2010), belum ada pembahasan tentang pelabelan TBAS pada kelas graf ini.

Graf tangga umum dengan 2 blok adalah isomorfik dengan graf lingkaran dengan sebuah tali-busur (*cycle with a chord*), untuk selanjutnya disebut graf lingkaran bertali-busur. Penelitian yang dilakukan MacDougall dan Wallis (2003) tentang pelabelan TBAS pada graf lingkaran bertali-busur, dapat diterapkan pada graf tangga umum dengan 2 blok.

Dalam makalah yang sama, MacDougall dan Wallis menyertakan semua kemungkinan pelabelan TBAS untuk semua graf lingkaran bertali busur dengan n simpul, di mana $4 \leq n \leq 10$.

Gagasan yang timbul adalah bagaimana merumuskan konstruksi graf tangga umum yang TBAS. Pada penelitian awal yang dilakukan penulis, matriks ketetanggaan sebagai representasi graf secara aljabar dapat digunakan karena matriks ini dapat secara jelas menampilkan pola pelabelan TBAS dari Enomoto dkk (1998) pada graf lingkaran, atau dari MacDougall dan Wallis (2003) pada graf lingkaran bertali-busur..

1.2. Perumusan dan Batasan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam tesis ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimanakah sifat-sifat kelas graf tangga umum yang memiliki pelabelan TBAS?
2. Bagaimana konstruksi graf tangga umum yang memiliki pelabelan TBAS dengan menggunakan matriks ketetanggaan?

Dengan batasan berikut:

1. Untuk order ganjil, pelabelan TBAS menggunakan pola pelabelan graf lingkaran dari Enomoto dkk (1998)
2. Untuk order genap, pelabelan TBAS menggunakan pola pelabelan graf lingkaran bertali-busur dari MacDougall dan Wallis (2003)
3. Jenis graf adalah terhubung, sederhana, dan tidak berarah

1.3. Tujuan Penulisan

Setelah membaca tulisan ini, pembaca diharapkan dapat::

1. Mengetahui kelas graf yang baru yaitu kelas graf tangga umum
2. Mengetahui dan memahami sifat-sifat kelas graf tangga umum yang memiliki pelabelan TBAS, berdasarkan batasan-batasan yang telah disebutkan di atas.

3. Mengkonstruksi kelas graf tangga umum yang memiliki pelabelan TBAS, berdasarkan batasan-batasan yang telah disebutkan di atas.

1.4. Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan cara:

1. Melakukan tinjauan literatur terhadap makalah dan buku teks yang terkait dengan bidang ini, termasuk literatur yang terdapat di internet
2. Menemukan dan mengembangkan teorema-teorema yang mendasari penelitian, baik secara mandiri maupun hasil diskusi dengan peneliti lainnya

1.5. Sistematika Penulisan

Uraian dalam tesis ini dituliskan menurut sistematika berikut:

Bab 1 : Pendahuluan, mengungkap latar belakang, masalah dan tujuan pembahasan

Bab 2: Landasan Teori, membahas dasar-dasar Teori Graf, berbagai jenis graf, graf tangga umum, dan pelabelan

Bab 3: Pelabelan Total Busur-Ajaib Super (TBAS), membahas secara lebih mendalam tentang pelabelan TBAS dan sifat-sifatnya

Bab 4: Konstruksi Graf Tangga Umum, membahas penggunaan matriks ketetanggaan untuk mengkonstruksi graf tangga umum dan mengungkap sifat-sifatnya

Bab 5: Kesimpulan dan Saran, menyimpulkan hasil pembahasan dan uraian, serta merangkum masalah-masalah terbuka yang dapat diteliti lebih lanjut.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1. Teori Graf

Definisi-definisi dasar berikut ini didasarkan pada Deo (1974). Sebuah graf $G = (V(G), E(G))$ dengan p simpul dan q busur terdiri dari himpunan simpul $V(G) = \{v_1, \dots, v_p\} \neq \emptyset$ dan himpunan busur $E(G) = \{e_1, \dots, e_q\}$, dengan setiap busur menghubungkan dua simpul yang disebut titik ujung (*endpoints*). Busur dinotasikan sebagai $e = (u, v) \in E(G)$, dengan $u, v \in V(G)$. Dalam hal ini, dikatakan simpul u bertetangga (*adjacent*) dengan simpul v . Untuk selanjutnya, graf $G = (V(G), E(G))$ dituliskan sebagai graf G , himpunan $V(G)$ adalah himpunan simpul dengan $p = |V(G)|$, himpunan $E(G)$ adalah himpunan busur dengan $q = |E(G)|$.

Sebuah gelung (*loop*) adalah sebuah busur dengan titik ujung yang sama. Busur berganda (*multiple edges*) adalah busur-busur yang memiliki pasangan titik ujung yang sama. Sebuah graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak memiliki gelung ataupun busur berganda.

Suatu graf dikatakan berhingga (*finite*) jika himpunan simpul dan himpunan busurnya berhingga. Jika tidak demikian, maka dikatakan graf tidak berhingga (*infinite*).

Sebuah jalan (*walk*) dengan panjang k adalah barisan simpul dan busur $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ sedemikian sehingga $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika jalan tersebut tidak memiliki busur yang berulang, maka disebut jalur (*trail*). Jalur tanpa simpul yang berulang disebut lintasan (*path*). Banyaknya busur yang dilewati oleh jalan terpendek yang menghubungkan simpul v_i dan v_j disebut jarak (*distance*) antara v_i dan v_j , dan dinotasikan sebagai $d(v_i, v_j)$. Sebuah graf dikatakan terhubung (*connected*) jika terdapat jalan yang menghubungkan sebarang 2 simpul pada graf tersebut.

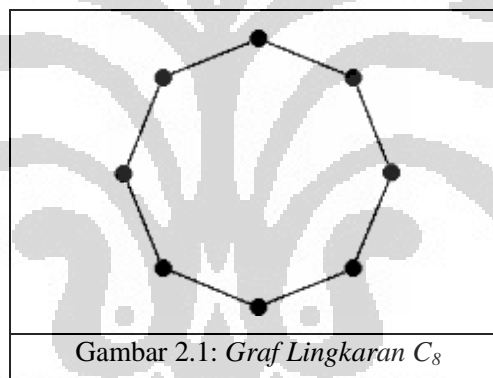
Diberikan dua graf $G = (V(G), E(G))$ dan $G^* = (V(G^*), E(G^*))$. Kedua graf tersebut dikatakan isomorfik jika terdapat bijeksi $\varphi: V(G) \rightarrow V(G^*)$, di mana $(u, v) \in E(G) \leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G^*)$, untuk semua $(u, v) \in E(G)$ (Diestel, 2006).

2.2. Beberapa Kelas Graf Sederhana

Terdapat berbagai jenis kelas graf sederhana. Tiga di antaranya adalah:

2.2.1 Kelas Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

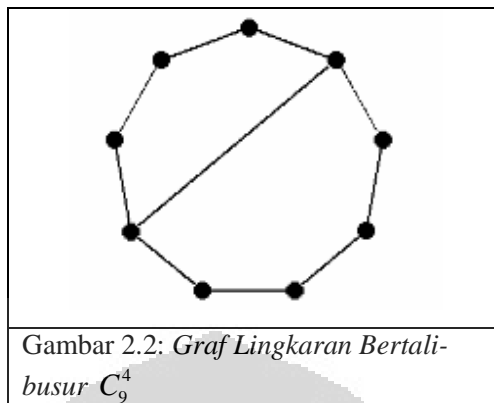
Graf lingkaran dengan n simpul, dinyatakan sebagai $C_n, n \geq 3$, adalah graf dengan simpul-simpul v_1, v_2, \dots, v_n dan busur-busur $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ dan $\{v_1, v_n\}$. Sebagai contoh, graf lingkaran C_8 ditunjukkan pada Gambar 2.1



Gambar 2.1: *Graf Lingkaran C_8*

2.2.2. Kelas Graf Lingkaran Bertali-busur (*Cycle with a Chord Graph*)

Graf lingkaran bertali-busur dibentuk dari sebuah graf lingkaran, dan menambahkan sebuah busur uv , di mana simpul u dan v sebelumnya tidak bertetangga.



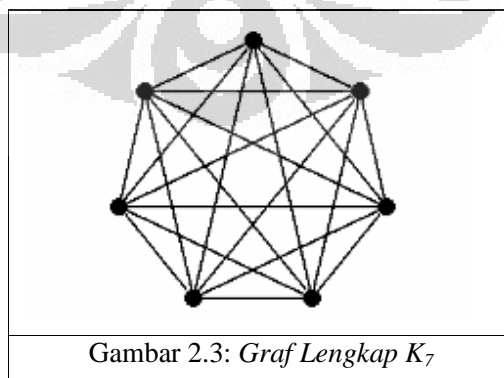
Gambar 2.2: Graf Lingkaran Bertali-busur C_9^4

MacDougall dan Wallis (2003) memperkenalkan notasi C_n^t untuk menyatakan graf lingkaran bertali-busur yang dihasilkan dari graf C_n dan sebuah busur yang menghubungkan dua simpul berjarak t , $t \neq 1$. Busur demikian dinamakan **tali busur**, dan dikatakan memiliki panjang t . Gambar 2.2 menunjukkan adalah representasi graf lingkaran bertali-busur C_9^4

Sebuah tali busur dengan panjang t adalah juga tali busur dengan panjang $n-t$. Hal ini berarti, panjang tali busur dapat dibatasi sampai $\frac{1}{2}n$ untuk n genap, dan $\frac{1}{2}(n-1)$ untuk n ganjil.

2.2.3 Kelas Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap dengan n simpul, dinyatakan sebagai K_n , adalah graf sederhana dengan setiap pasang simpul dihubungkan oleh tepat sebuah busur. Gambar 2.3 menunjukkan graf lengkap dengan $n = 7$



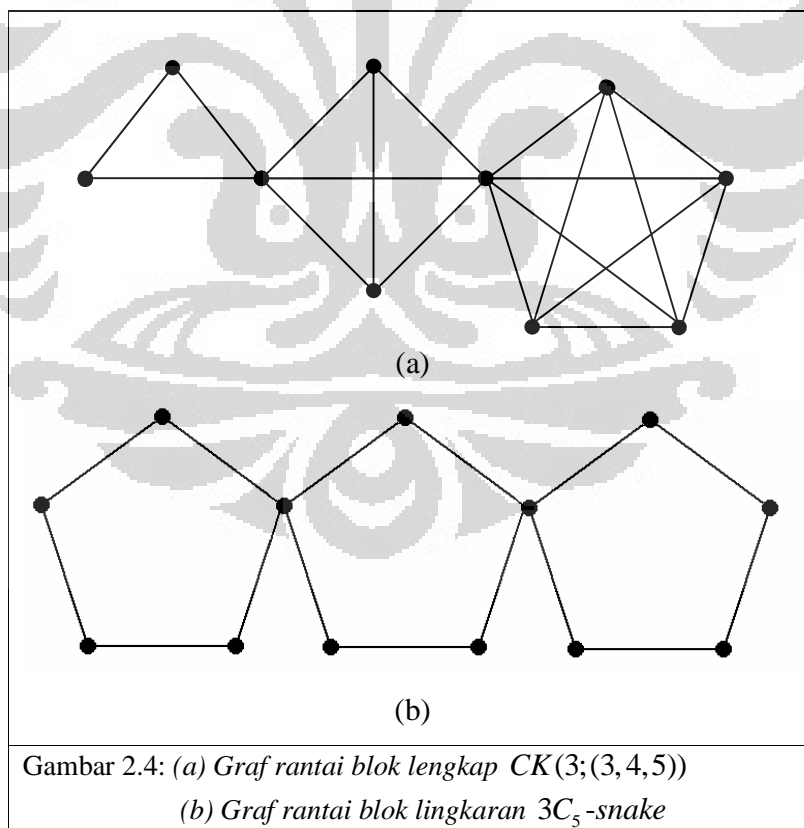
Gambar 2.3: Graf Lengkap K_7

2.3. Kelas Graf yang Dibentuk dari Beberapa Blok

2.3.1. Kelas Graf Rantai (*Chain Graph*)

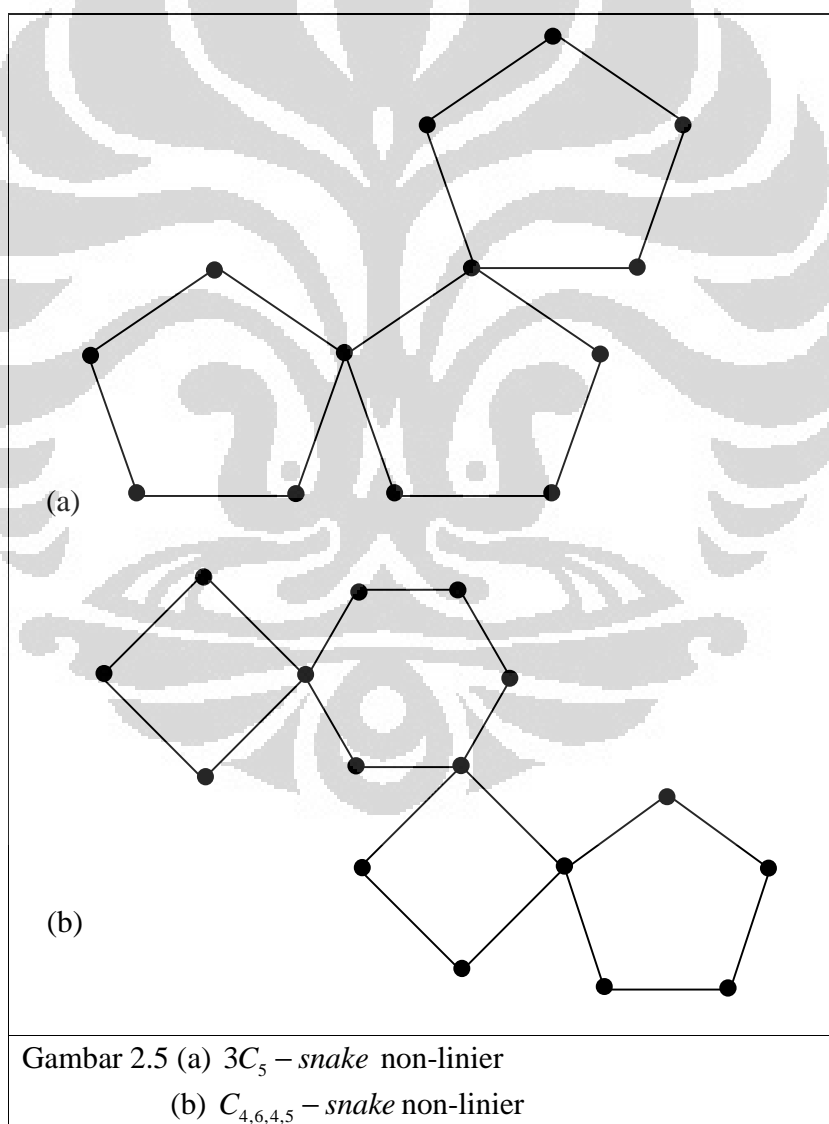
Graf rantai adalah graf dengan blok graf B_1, B_2, \dots, B_m sehingga untuk setiap i , B_i dan B_{i+1} memiliki sebuah simpul persekutuan sedemikian sehingga graf titik-potong blok (*block cut-point graph*)-nya adalah sebuah lintasan (Barrientos, 2002)

Barrientos (2002) mendefinisikan notasi mG -snake untuk menyatakan graf rantai dengan setiap bloknya isomorfik dengan G . Namun notasi ini tidak dapat merepresentasikan graf rantai dengan blok yang berbeda-beda. Lee dan Wang (pp) mendefinisikan notasi $CK(n; (a_1, \dots, a_n))$ untuk menyatakan graf rantai dengan n blok, dengan bloknya secara berurutan adalah graf lengkap $K_{a_1}, K_{a_2}, \dots, K_{a_n}$. Notasi Lee dan Wang ini dapat merepresentasikan graf rantai blok graf lengkap dengan order berbeda. Contoh berikut adalah graf rantai $CK(3; (3, 4, 5))$ dan graf rantai $3C_5$ -snake:



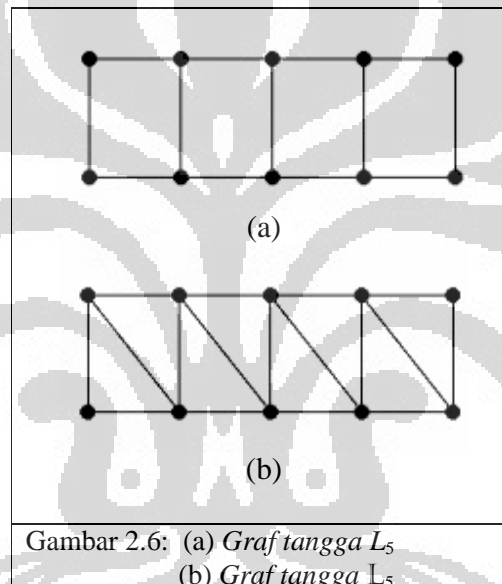
Graf kC_n -snake adalah salah satu bentuk dari kelas graf rantai. Barrientos pada tahun 2001 mendefinisikan konsep linieritas pada graf kC_n -snake. Untuk $k > 3$ dan $n > 3$, terdapat lebih dari satu variasi kC_n -snake. Graf kC_n -snake adalah linier jika jarak antara 2 simpul persekutuan dalam blok yang sama adalah $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ maka dikatakan graf tersebut adalah linier (Gallian, 2010).

Graf $3C_5$ -snake pada Gambar 2.4b adalah linier. Definisi tersebut dapat digeneralisasi untuk ukuran blok yang berbeda-beda. Contoh graf snake non-linier ditunjukkan pada Gambar 2.5



2.3.2. Kelas Graf Tangga (*Ladder Graph*)

Graf tangga $L_n = P_n \times P_2$ adalah graf dengan $V(G) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(G) = \{(u_i, u_{i+1}), (v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(u_i, v_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Selain itu terdapat variasi graf tangga lain dengan notasi L_n , $n \geq 2$, yaitu graf yang dibentuk dengan melengkapi L_n dengan busur-busur (u_i, v_{i+1}) , untuk $1 \leq i \leq n-1$ (Baca dan Miller, 2008). Perbedaannya dengan graf rantai adalah antar blok pada graf tangga dihubungkan oleh sebuah busur persekutuan. Gambar 2.6 menunjukkan representasi graf L_5 dan L_5



2.3.3. Kelas Graf Tangga Umum (*General Ladder Graph*)

Definisi 2.1: Graf Tangga Umum $GTU(n, m)$ adalah graf lingkaran C_n yang dipartisi menjadi m blok graf lingkaran dengan penambahan $(m-1)$ tali-busur, yang disebut busur partisi, dengan syarat tidak ada busur partisi yang memiliki simpul persekutuan, tidak ada busur partisi yang saling bersilangan di sisi dalam graf, dan setiap blok graf memiliki maksimal 2 busur partisi.

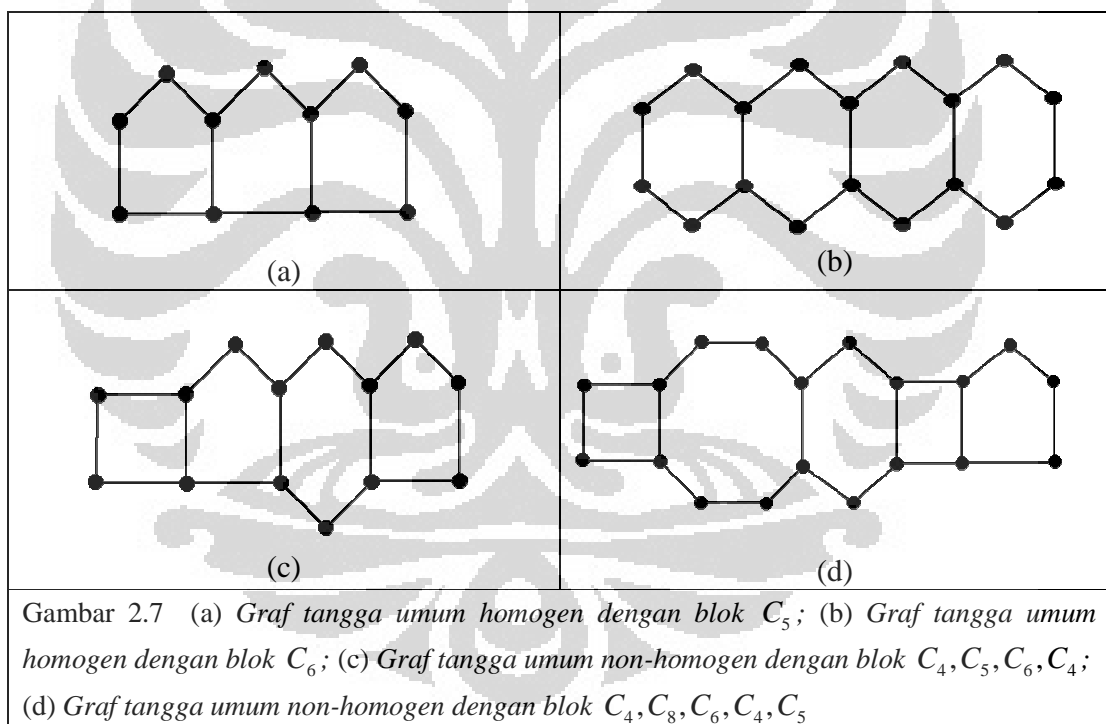
Parameter m menyatakan jumlah blok graf yang terbentuk dari penambahan $(m-1)$ busur partisi dengan mengikuti syarat yang disebutkan pada Definisi 2.1 di atas. Setiap blok graf pada $GTU(n,m)$ adalah graf lingkaran.

Berdasarkan order bloknnya, GTU dapat diklasifikasikan menjadi

1. GTU homogen, jika seluruh bloknnya berorder sama
2. GTU non homogen, jika terdapat minimal sebuah blok dengan order berbeda dengan blok lainnya

Kelas $GTU(n,m)$ beranggotakan semua graf tangga umum dengan n simpul dan m blok.

Gambar 2.7 menunjukkan beberapa contoh graf tangga umum



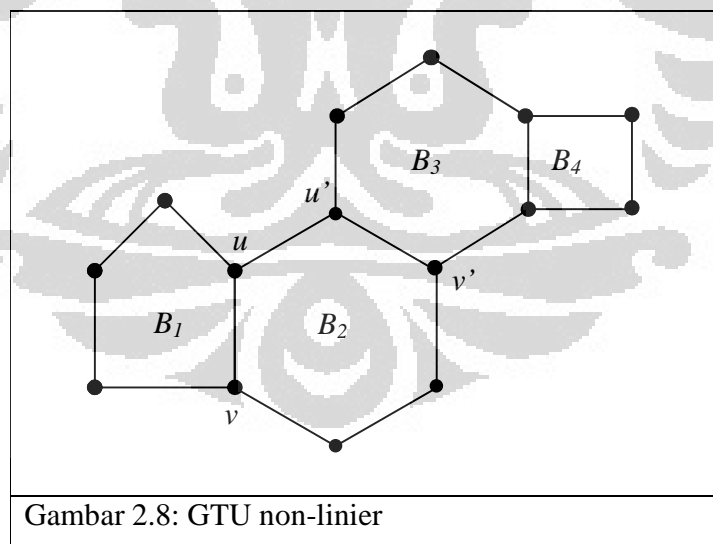
Seperti halnya pada graf rantai kC_n -snake, graf tangga umum dapat dikategorikan sebagai linier atau non-linier. Linieritas pada graf rantai kC_n -snake didasarkan pada jarak antara dua simpul persekutuan blok. Pada graf

tangga umum, linieritas didasarkan pada jarak minimal antara simpul pada kedua busur persekutuan pada blok yang bertetangga. Secara formal, konsep linieritas pada graf tangga umum didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Linieritas pada Graf Tangga Umum): Untuk $m \geq 3$, $2 \leq i \leq m-1$, dan B_i adalah blok ke- i , $(u, v) \in B_i$ dan $(u', v') \in B_i$ adalah busur-busur persekutuan yang terdapat pada blok ke- i . Sebuah $GTU(n, m)$ dikatakan linier jika

$$\min(\partial(u, u'), \partial(v, v'), \partial(u, v'), \partial(v, u')) = \left\lfloor \frac{|V(B_i)|}{2} - 1 \right\rfloor$$

Semua GTU pada Gambar 2.7 adalah linier karena memenuhi Definisi 2.2. Gambar 2.8 menunjukkan contoh GTU non-linier. Pada GTU ini, untuk busur persekutuan pada blok ke-2 diperoleh $\min(\partial(u, u'), \partial(v, v'), \partial(u, v'), \partial(v, u')) = \min(1, 3, 2, 4) = 1$, dan $\left\lfloor \frac{|V(B_2)|}{2} - 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{2} - 1 \right\rfloor = 2$, sehingga tidak memenuhi Definisi 2.2. Hal yang serupa juga terjadi untuk blok ke-3.



2.4. Pelabelan Graf

Pelabelan graf λ adalah sebuah pemetaan dari elemen-elemen graf $G = (V(G), E(G))$ ke himpunan suatu entitas (biasanya integer positif). Di dalam tesis ini, kodomain dibatasi hanya pada integer positif. Jika domain dari λ adalah $V(G)$, maka pelabelannya disebut pelabelan simpul. Jika domain dari λ adalah $E(G)$, maka pelabelannya disebut pelabelan busur. Dan jika domain dari λ adalah $V(G) \cup E(G)$, maka pelabelannya disebut pelabelan total.

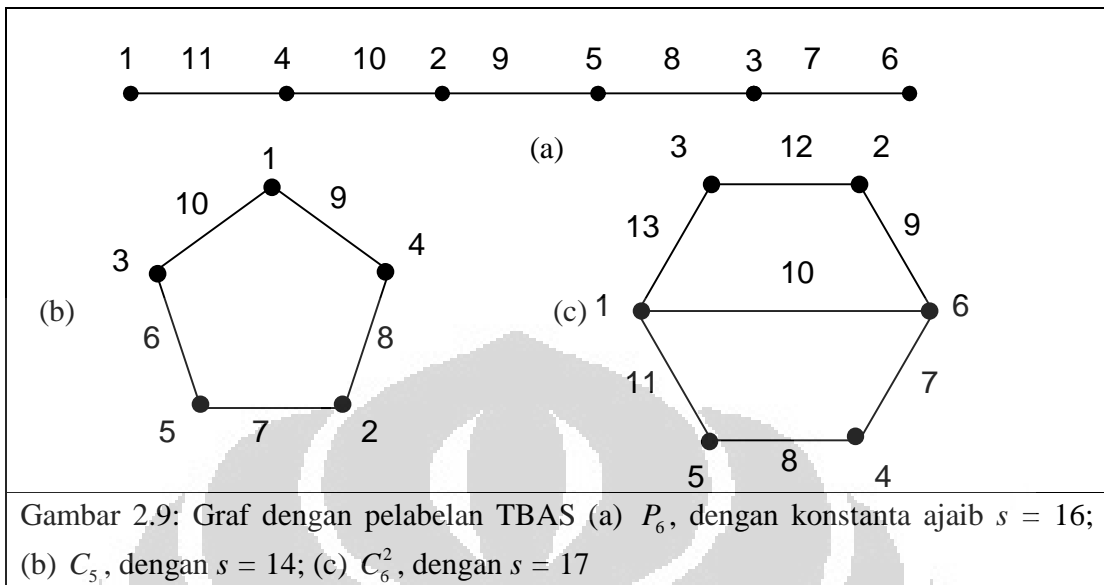
Dua jenis pelabelan yang digunakan di dalam tesis ini adalah yaitu pelabelan *Super Edge-Magic Total* (SEMT) atau Total Busur-Ajaib Super (TBAS), dan *Edge Antimagic Vertex* (EAV) atau Simpul Antiajaib Busur (SAB).

2.4.1. Pelabelan Total Busur-Ajaib Super (TBAS)

Pelabelan TBAS diperkenalkan pertama kali oleh Enomoto dkk pada tahun 1998. MacDougall dan Wallis (2003) menyebut pelabelan ini sebagai *strongly edge-magic*. Sejak pelabelan ini diperkenalkan, telah banyak peneliti yang meneliti keberadaan pelabelan ini pada berbagai kelas graf (Gallian, 2010)

Definisi 2.3 (Pelabelan Total Busur Ajaib Super): Diberikan graf $G = (V(G), E(G))$ dengan p simpul dan q busur. Sebuah fungsi bijektif $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$, di mana $\lambda : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$, disebut pelabelan Total Busur-Ajaib Super (TBAS) jika terdapat sebuah konstanta integer s sedemikian sehingga $\lambda(u) + \lambda(v) + \lambda((u, v)) = s$, untuk setiap $(u, v) \in E(G)$. Konstanta s disebut konstanta ajaib. (Enomoto dkk, 1998)

Gambar 2.9 menunjukkan contoh beberapa graf yang memiliki pelabelan TBAS



2.4.3. Pelabelan (a,d) -Simpul Antiajaib Busur (SAB)

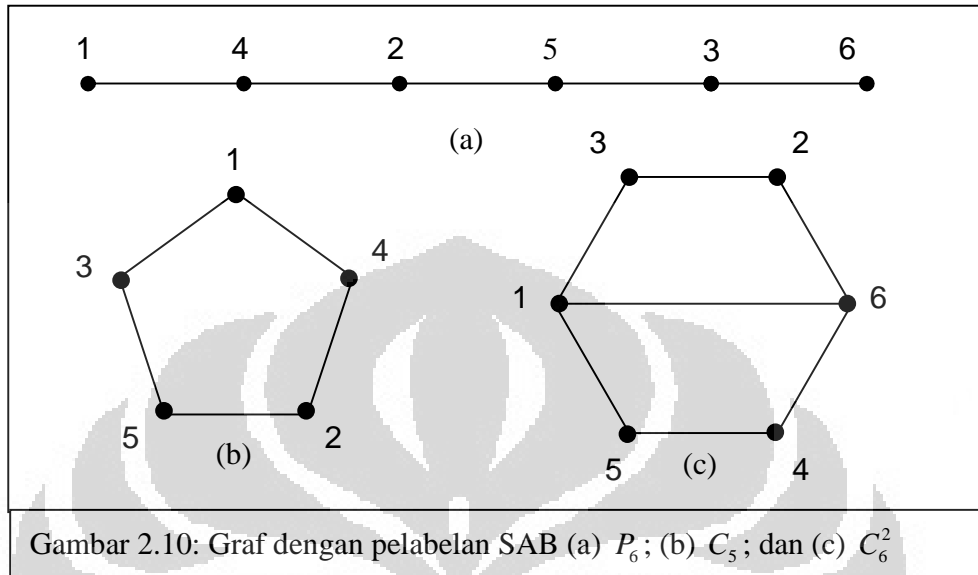
Pelabelan (a,d) -SAB diperkenalkan oleh Simanjuntak, Bertault, dan Miller, pada tahun 2000.

Definisi 2.4 (Pelabelan (a,d) -Simpul Antiajaib Busur) (Simanjuntak, Bertault, Miller, 2000): Pelabelan (a,d) -Simpul Antiajaib Busur dari sebuah $G = (V(G), E(G))$ dengan $p = |V(G)|$ dan $q = |E(G)|$ adalah pemetaan satu-satu $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ sedemikian sehingga himpunan bobot busur dari semua busur di G , yaitu $\{f(u) + f(v) : (u, v) \in E(G)\}$, adalah $W = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$, di mana $a > 0$ dan $d \geq 0$ adalah konstanta integer (Baca dan Miller, 2008).

Secara khusus, jika $d = 1$, maka $W = \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + (q - 1)\}$, yang berarti elemen-elemen W adalah berurutan. Pada tahun 2003, Baca dkk. membuktikan bahwa jika graf G memiliki pelabelan $(a, 1)$ -SAB, maka G adalah graf TBAS (Sugeng dan Xie, 2005). Untuk selanjutnya pelabelan $(a, 1)$ -SAB disebut pelabelan SAB

Jika pelabelan SAB diterapkan pada graf yang terdapat pada Gambar 2.9, maka diperoleh pelabelan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.10. Perhatikan

bahwa pola pelabelan simpul sama dengan pola pelabelan simpul pada pelabelan TBAS



Gambar 2.10: Graf dengan pelabelan SAB (a) P_6 ; (b) C_5 ; dan (c) C_6^2

2.5. Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)

Matriks ketetanggaan merupakan representasi graf secara aljabar. Matriks ini sangat penting peranannya di dalam mengkonstruksi $GTU(n,m)$.

Definisi 2.5 (Matriks Ketetanggaan): Diberikan sebuah graf $G=(V(G),E(G))$, dengan $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. Matriks ketetanggaan A dari graf G adalah matriks yang elemen-elemennya memenuhi syarat berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, & \text{jika tidak demikian} \end{cases}$$

dengan $i = 1, \dots, n$, dan $j = 1, \dots, n$

Matriks ketetanggaan bersifat simetrik, $a_{ij} = a_{ji}$, karena $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$. Definisi di atas adalah independen terhadap label dari simpul, $\lambda(V(G))$. Untuk

mengakomodasi sifat-sifat $\lambda(V(G))$ pada matriks ketetanggaan, definisi berikut akan memenuhi:

Definisi 2.6 (Matriks Ketetanggaan $(a,1)$ -SAB): Diberikan sebuah graf $G = (V(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, himpunan bobot busur $W = \{\lambda(v_i) + \lambda(v_j) \mid (v_i, v_j) \in E(G), i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, n\}$ dan G graf SAB. Matriks ketetanggaan SAB A dari G adalah matriks yang elemen-elemennya memenuhi syarat berikut:

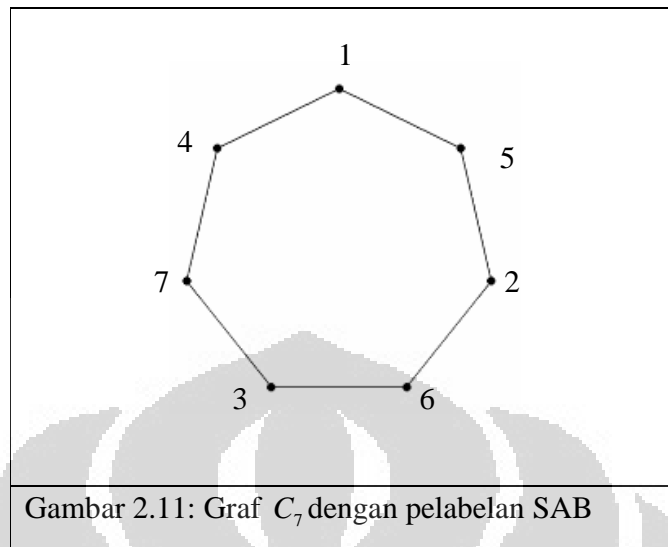
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i + j \in W \text{ dan } (\lambda^{-1}(i), \lambda^{-1}(j)) \in E(G) \\ 0, & \text{jika tidak demikian} \end{cases}$$

untuk $i = 1, \dots, n$, dan $j = 1, \dots, n$

Untuk selanjutnya, setiap penyebutan matriks ketetanggaan mengacu kepada matriks ketetanggaan $(a,1)$ -SAB.

Elemen-elemen pada sebuah *skew diagonal* dari matriks ketetanggaan A terdiri dari elemen 0 semua, atau terdapat tepat dua elemen 1 dalam posisi yang simetrik terhadap diagonal utama. Himpunan bobot busur W adalah integer yang berurutan $a, a+1, \dots, a+q-1$ untuk suatu integer positif a . Bobot busur $\lambda(v_i) + \lambda(v_j)$ sama dengan jumlah label simpul pada *skew diagonal* matriks ketetanggaan yang memiliki elemen 1 (Sugeng dan Xie, 2005).

Sebagai ilustrasi, diberikan sebuah graf C_7 dengan pelabelan SAB seperti ditunjukkan pada Gambar 2.11 berikut



Himpunan bobot busurnya adalah $W = \{5, \dots, 11\}$, dengan matriks ketetangaan sebagai berikut:

Label simpul, $\lambda(v_i)$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0
3	0	0	0	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	1
5	1	1	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0

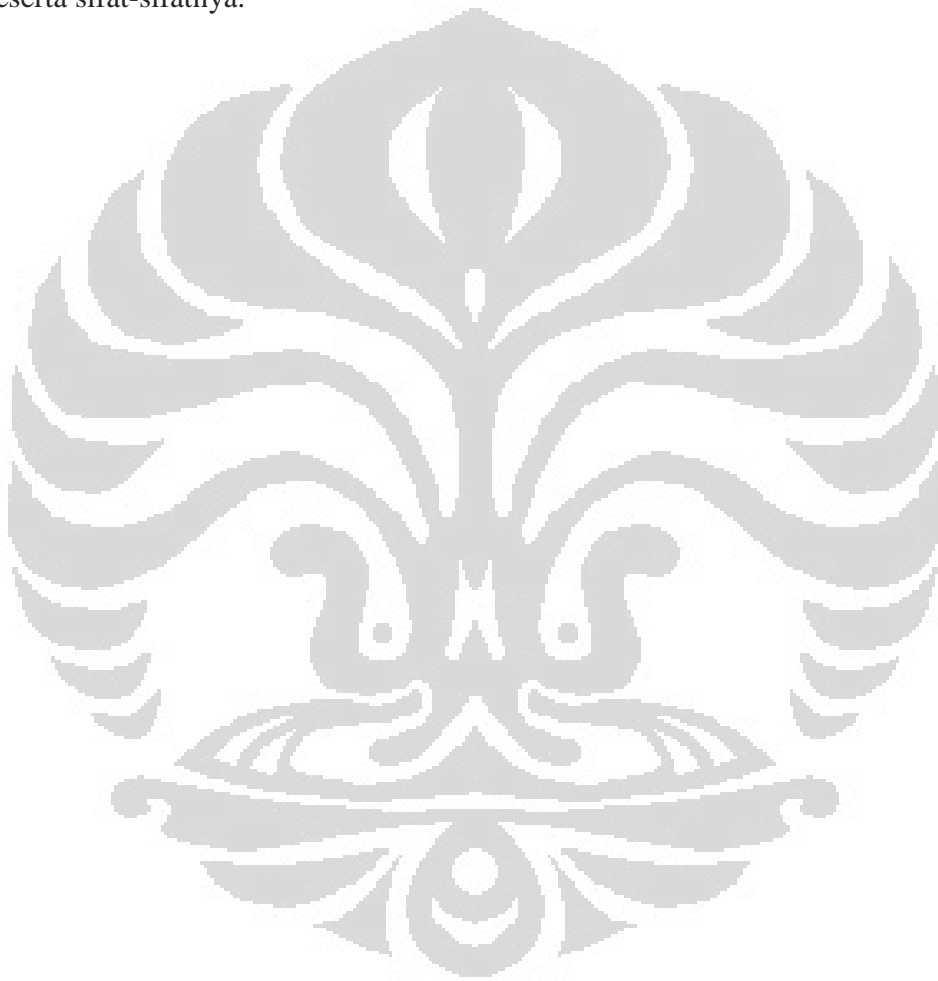
Skew diagonal

Angka-angka pada judul baris dan kolom adalah label dari simpul, dan bukan menjadi bagian dari matriks ketetangaan itu sendiri.

Terlihat bahwa setiap *skew-diagonal* matriks di atas hanya terdiri dari elemen 0 semua atau terdapat tepat satu pasang elemen 1 secara simetrik terhadap diagonal utama. Bobot sebuah busur adalah penjumlahan dari baris dan kolom, yaitu label dari simpul yang dihubungkan oleh busur tersebut.

Untuk selanjutnya, penyebutan busur didasarkan atas label dari simpul yang dihubungkan oleh busur tersebut. Busur (p, q) , yang direpresentasikan sebagai $a_{pq} = 1$ pada matriks ketetanggaan, adalah busur yang menghubungkan simpul u dengan simpul v , di mana $\lambda(u) = p$, dan $\lambda(v) = q$. Bobot dari busur ini adalah $p + q$.

Pada Bab 3 akan dibahas secara lebih mendalam tentang pelabelan TBAS beserta sifat-sifatnya.



BAB 3

PELABELAN TOTAL BUSUR AJAIB SUPER

Pada Bab ini, sifat-sifat dari pelabelan TBAS yang telah didefinisikan pada Bab 2, dibahas secara lebih terinci. Terdapat lebih dari satu kemungkinan fungsi pelabelan TBAS λ untuk sebuah graf TBAS (MacDougall dan Wallis, 2003). Di dalam tesis ini, λ yang digunakan adalah berdasarkan pola Enomoto dkk (1998) dan MacDougall dan Wallis (2003), yang diterapkan masing-masing untuk graf lingkaran dan graf lingkaran bertali busur.

3.1 Sifat-sifat Pelabelan Total Busur Ajaib Super

Pelabelan TBAS terinduksi dari pelabelan $(a,1)$ -SAB, selanjutnya disebut pelabelan SAB, karena setiap graf TBAS memiliki pelabelan simpul yang ekuivalen dengan pelabelan $(a,1)$ SAB. Teorema 3.1 menjelaskan hal tersebut.

Teorema 3.1 (Baca dkk, 2003): Jika graf $G = (V(G), E(G))$ memiliki pelabelan $(a,1)$ SAB, maka G adalah graf TBAS

Bukti:

Misalkan $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ adalah pelabelan SAB untuk graf G , dengan himpunan bobot busur $W = \{a, a+1, \dots, a+q-1\}$. Dengan menetapkan $\lambda(V(G)) = f(V(G))$ dan $\lambda((u,v)) = p+q - (f(u) + f(v) - a)$, $(u,v) \in E(G)$, maka f menginduksikan pelabelan TBAS $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, \dots, p\} \cup \{p+1, \dots, p+q-1\}$,

□

Untuk selanjutnya, pelabelan $(a,1)$ SAB disebut pelabelan SAB, dan graf yang memiliki pelabelan $(a,1)$ SAB disebut graf SAB.

Terdapat batas maksimal jumlah busur untuk membentuk sebuah graf TBAS, yang dijelaskan oleh Teorema 3.2 berikut.

Teorema 3.2: Jika sebuah graf nontrivial $G = (V(G), E(G))$ adalah TBAS, maka $q \leq 2p - 3$ (Enomoto dkk., 1998)

Bukti:

Dengan memperhatikan label terkecil dan terbesar dari semua simpul dan semua busur, maka konstanta ajaib s harus memenuhi:

$$(\lambda(u) + \lambda(v))_{\min} + \lambda(uv)_{\max} \leq s \leq (\lambda(u) + \lambda(v))_{\max} + \lambda(uv)_{\min}$$

sehingga diperoleh:

$$(1 + 2) + (p + q) \leq s \leq (p + (p - 1)) + (p + 1)$$

$$3 + p + q \leq 3p$$

$$q \leq 2p - 3$$

□

Keberadaan pelabelan TBAS pada graf lingkaran dan graf lingkaran bertali-busur telah dibuktikan oleh Enomoto dkk (1998) serta MacDougall dan Wallis (2003). Pembuktian ini diperlukan, karena kedua jenis graf ini digunakan dalam konstruksi graf tangga umum. Teorema 3.3 berikut adalah pembuktian yang dimaksud.

Teorema 3.3: Sebuah graf lingkaran C_n adalah TBAS jika dan hanya jika n ganjil. (Enomoto dkk., 1998)

Bukti:

Misalkan terdapat pelabelan TBAS λ untuk C_n dengan konstanta ajaib s . Maka:

$$\begin{aligned} sn &= \sum_{(u,v) \in E(C_n)} \{\lambda(u) + \lambda(v) + \lambda((u,v))\} \\ &= 2 \sum_{u \in V(C_n)} \lambda(v) + \sum_{(u,v) \in E(C_n)} \lambda((u,v)) \\ &= n(n+1) + \frac{(3n+1)n}{2} \end{aligned}$$

diperoleh: $s = n + 1 + \frac{3n+1}{2}$

Karena s integer, maka $\frac{3n+1}{2} = s - n - 1$ adalah integer. Hal ini dapat dipenuhi jika n ganjil.

Untuk pernyataan konvers, misalkan $n = 2r + 1$ adalah integer ganjil, $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(C_n) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$. Didefinisikan fungsi pelabelan berikut:

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil} \\ r + \frac{i+2}{2}, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\lambda((v_n, v_1)) = 2n$$

$$\lambda((v_i, v_{i+1})) = 2n - i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan terdapat sebuah konstanta $s = \lambda(u) + \lambda(v) + \lambda((u, v))$, untuk semua $(u, v) \in E(C_n)$:

Untuk i ganjil, $1 \leq i \leq n-2$:

$$\begin{aligned} \lambda(v_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda((v_i, v_{i+1})) &= \left(\frac{i+1}{2}\right) + \left(r + \frac{(i+1)+2}{2}\right) + (2n - i) \\ &= 2n + r + 2 \\ &= \frac{5n+3}{2} \quad (\text{karena } r = \frac{n-1}{2}) \end{aligned}$$

Untuk i genap, $2 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{aligned} \lambda(v_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda((v_i, v_{i+1})) &= \left(r + \frac{i+2}{2}\right) + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right) + 2n - i \\ &= 2n + r + 2 \\ &= \frac{5n+3}{2} \end{aligned}$$

Untuk $i = n$:

$$\begin{aligned} \lambda(v_n) + \lambda(v_1) + \lambda((v_n, v_1)) &= \left(\frac{n+1}{2}\right) + (1) + 2n \\ &= \frac{5n+3}{2} \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa λ adalah pelabelan TBAS untuk C_n , n ganjil, dengan konstanta $\frac{5n+3}{2}$ (Enomoto dkk., 1998) □

Pencarian secara komprehensif dengan bantuan komputer, menunjukkan terdapat banyak kemungkinan pelabelan TBAS untuk sebuah C_n , n ganjil, ataupun untuk C'_n , n genap (MacDougall & Wallis, 2003). Sebagian besar diantaranya memiliki pola tidak teratur, sehingga menyulitkan dalam membuat konstruksi yang berlaku umum untuk berbagai nilai n . Solusi yang diambil adalah dengan menggunakan pola pelabelan TBAS untuk C_n , n ganjil, yang diperkenalkan oleh Enomoto dkk.(1998), dan pola pelabelan TBAS untuk C'_n , n genap, yang diperkenalkan oleh MacDougall dan Wallis (2003) Teorema berikut mengungkap pola pelabelan yang dimaksud.

Teorema 3.4 (Pelabelan TBAS- C_n dan TBAS- C'_n): Untuk $r \in I$, pelabelan simpul λ berikut menginduksikan pelabelan TBAS pada graf yang disebutkan:

Jenis (1) Untuk $G = C_n$, $n = 2r + 1$, $r \geq 1$, $r \in I$, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

$E(G) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$:

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil} \\ r + \frac{i+2}{2}, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$

(Enomoto dkk, 1998)

Jenis (2) Untuk $G = C'_n$, $n = 4r$, $r \geq 1$, $r \in I$, $t \equiv 2 \pmod{4}$, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

$E(G) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\} \cup \{(v_s, v_{s+t})\}$

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} 2r + \frac{1}{2}i, & \text{jika } i \text{ genap}, 2 \leq i \leq 2r-2 \\ \frac{1}{2}i, & \text{jika } i \text{ genap}, 2r \leq i \leq 4r \\ \frac{1}{2}(i+1), & \text{jika } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 2r-1 \\ 2r + \frac{1}{2}(i+1), & \text{jika } i \text{ ganjil}, 2r+1 \leq i \leq 4r-1 \end{cases}$$

(MacDougall dan Wallis, 2003)

Jenis (3) Untuk $G = C_n^t$, $n = 4r + 2$, $r \geq 2$, $r \in I$, $t = 2, 6$ atau t ganjil selain 1 dan 5

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E(G) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\} \cup \{(v_s, v_{s+t})\}$$

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} 2r+4, & \text{jika } i = 2 \\ 4r+2, & \text{jika } i = 4 \\ r+2, & \text{jika } i = 2r \\ r+3, & \text{jika } i = 2r+2 \\ 2r + \frac{1}{2}i + 2, & \text{jika } 6 \leq i \leq 2r-2, i \text{ genap} \\ 2r + \frac{1}{2}i, & \text{jika } 2r+4 \leq i \leq 4r+2, i \text{ genap} \\ \frac{1}{2}(i+1), & \text{jika } 1 \leq i \leq 2r+1, i \text{ ganjil} \\ \frac{1}{2}(i+5), & \text{jika } 2r+3 \leq i \leq 4r+1, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

(MacDougall dan Wallis, 2003)

Bukti:

Untuk setiap pendefinisian λ di atas, akan dibuktikan bahwa anggota himpunan bobot busur W adalah berurutan, yang berarti λ pelabelan SAB, sehingga berdasarkan Teorema 3.1, λ menginduksikan pelabelan TBAS pada G .

Jenis (1)

Untuk λ berjenis (1), himpunan bobot busur yang didapat adalah:

Untuk i ganjil, $1 \leq i \leq n-1$, bobot busur (v_i, v_{i+1}) adalah:

$$v_i v_{i+1} = \lambda(v_i) + \lambda(v_{i+1}) = \left(\frac{i+1}{2}\right) + \left(r + \frac{i+3}{2}\right) = i + 2 + r,$$

Untuk i genap bobot busur (v_i, v_{i+1}) adalah $v_i v_{i+1} = \left(r + \frac{i+2}{2}\right) + \left(\frac{i+2}{2}\right) = i + 2 + r$

Untuk $i = n$, bobot busur (v_i, v_{i+1}) adalah:

$$v_n v_1 = \lambda(v_n) + \lambda(v_1) = \left(\frac{n+1}{2}\right) + 1 = \frac{n+3}{2} = \frac{(2r+1)+3}{2} = r+2$$

Diperoleh, himpunan bobot busur $W = \{r+2\} \cup \{r+2+i \mid i=1, \dots, n-1, r = \frac{n-1}{2}\}$

W berurutan dengan rentang nilai $r+2$ sampai $r+n+1$

Jenis (2):

Untuk λ berjenis (2), label simpul adalah bilangan 1 sampai $4r$, dan himpunan bobot busur W adalah $\{2r+1, \dots, 6r+1\} - \{4r+1\}$. Nilai $4m+1$ disebut *missing weight*, karena tidak diperoleh pada busur lingkaran.

Missing weight ini dipenuhi oleh tali busur dengan panjang $4m-2$, yaitu (v_i, v_{4m-i}) , untuk i ganjil dan $1 \leq i \leq 2m-1$. Tali busur ini memiliki bobot busur $4m+1$, sehingga anggota himpunan W berurutan (MacDougall dan Wallis, 2003).

Jenis (3)

Untuk λ berjenis (3), label simpul adalah bilangan 1 sampai $4r+2$, dan terdapat *missing weight* $4r+3$ pada himpunan bobot busur. *Missing weight* ini dipenuhi oleh tali busur:

- $(v_{2j+1}, v_{4r+4-2j})$, untuk $j=1, \dots, r$, yaitu tali busur dengan panjang $\equiv 3 \pmod{4}$, atau
- $(v_{2r+2j+1}, v_{4r+2j})$, untuk $j=1, \dots, r-5$, yaitu tali busur dengan panjang $\equiv 1 \pmod{4}$, selain 5, atau
- (v_{2r-2}, v_{2r}) atau (v_{2r-4}, v_{2r+2}) , yaitu tali busur dengan panjang 2 atau 6 (MacDougall dan Wallis, 2003).

□

Dengan $r \geq 1$, matriks ketetanggaan dari graf C_n , $n=2r+1$, dengan λ berjenis (1), memiliki pola yang hampir serupa dengan matriks ketetanggaan dari graf C'_n , $n=4r$, dengan λ berjenis (2). Hal ini akan dibahas pada Bab 4. Untuk λ berjenis (3), matriks ketetanggaan dari C'_n , $n=4r+2$, memiliki pola yang sangat berbeda dengan matriks ketetanggaan dari kedua jenis graf yang telah disebut terdahulu. Atas dasar hal tersebut, konstruksi GTU(n, m) yang dibahas di dalam tesis ini dibatasi untuk $n=2r+1$ dan untuk $n=4r$.

Untuk $n = 2r + 1$, pelabelan TBAS pada $GTU(m, n)$ menggunakan λ jenis (1), dan disebut sebagai $GTU(n, m)$ berlabel TBAS- C_n . Untuk $n = 4r$, $r \geq 1$, pelabelan TBAS pada $GTU(n, m)$ menggunakan λ jenis (2), dan disebut $GTU(n, m)$ berlabel TBAS- C'_n .

3.2. Graf yang Ekuivalen-SAB

Misalkan A adalah matriks ketetanggaan $(a, 1)$ -SAB, selanjutnya disebut matriks ketetanggaan, dari sebuah graf SAB berorder n . Jika sepasang elemen 1 digeser sepanjang *skew-diagonal*nya secara simetrik terhadap diagonal utama, maka diperoleh matriks ketetanggaan dari graf yang non-isomorfik dengan graf semula, dengan himpunan bobot busur yang sama (Sugeng dan Xie, 2005).

Definisi dan sifat ini diformalkan pada Definisi 3.1 dan Teorema 3.5 berikut:

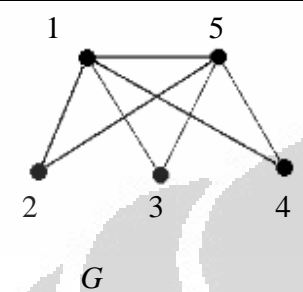
Definisi 3.1: Dua graf non-isomorfik, G dan G^* , adalah ekuivalen-SAB (EAV-*equivalent*) jika G dan G^* memiliki himpunan bobot busur yang sama (Sugeng dan Xie, 2005).

Teorema 3.5: Diberikan graf G yang SAB dengan matriks ketetanggaan A . Jika elemen 1 pada A diubah posisinya secara simetrik sepanjang skew diagonalnya, maka diperoleh matriks ketetanggaan A^* dari graf G^* yang SAB dan non isomorfik dengan G (Sugeng dan Xie, 2005).

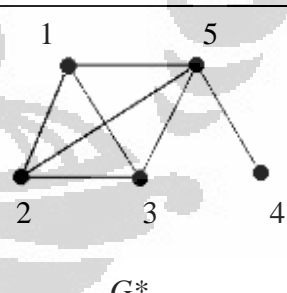
Bukti:

Jelas bahwa $A^* \neq A$, sehingga graf G^* non isomorfik dengan G . Semua elemen pada *skew-diagonal* memiliki jumlah indeks yang sama, sehingga penempatan elemen 1 pada posisi manapun secara simetrik pada *skew diagonal*, merepresentasikan busur dengan bobot yang sama. \square

Teorema 3.5 dijelaskan dalam ilustrasi berikut (Sugeng dan Xie, 2005). Gambar 3.1a adalah graf G dengan pelabelan SAB, dengan matriks ketetanggaan A pada Gambar 3.1b. Himpunan bobot busur dari G adalah $W = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

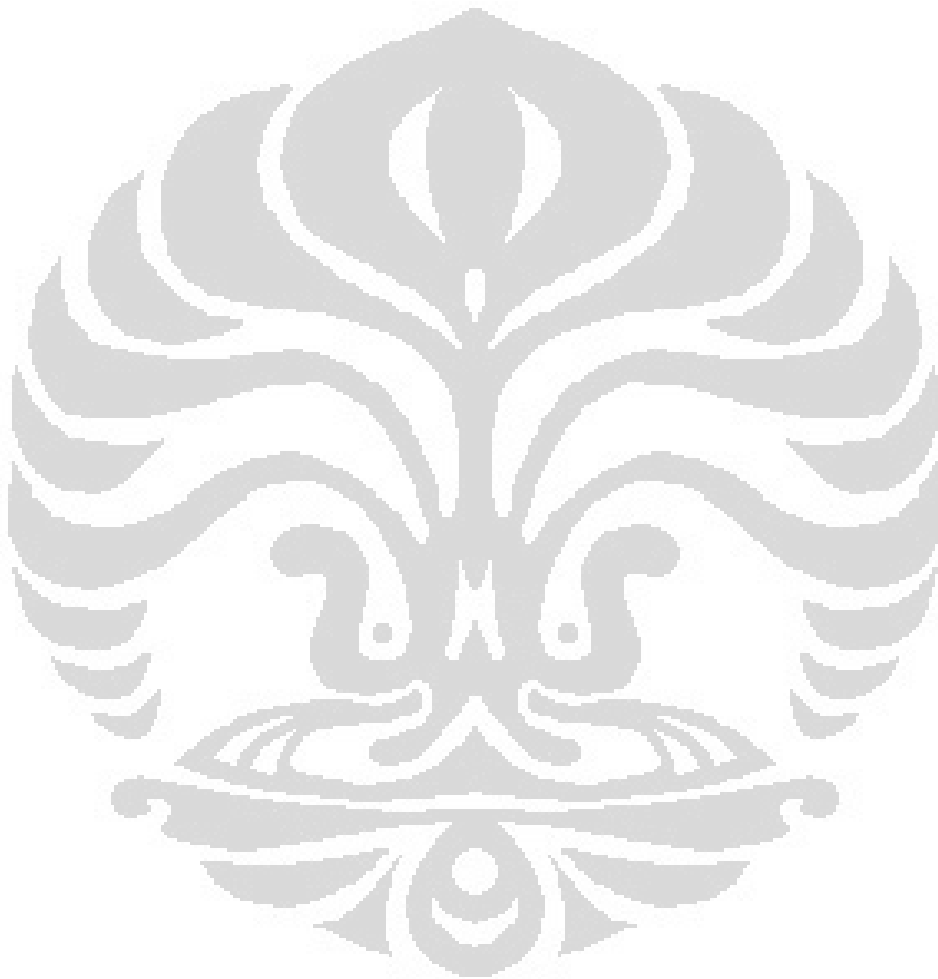
 <p style="text-align: center;">G</p>	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Gambar 3.1a: Graf G dengan pelabelan SAB	Gambar 3.1b: Matriks ketetanggaan A dari graf G

Perhatikan panah pada gambar 3.1b. Dengan memindahkan elemen 1 pada posisi (1,4) ke posisi (2,3) dari matriks A , maka diperoleh matriks ketetanggaan A^* , dengan graf G^* (Gambar 3.2a dan 3.2b).

$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	 <p style="text-align: center;">G^*</p>
Gambar 3.2a: Matriks ketetanggaan A^* yang dihasilkan dengan memindahkan elemen 1 dari matriks A secara simetrik sepanjang skew diagonal	Gambar 3.2b: Graf G^* , berdasarkan matriks ketetanggaan A^*

Himpunan bobot busur dari G^* adalah $W^* = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = W$. Graf G dan G^* adalah non isomorfik, dengan himpunan bobot busur W . Berdasarkan definisi, graf G dan G^* adalah ekivalen-SAB.

Graf yang ekivalen SAB dan matriks ketetanggaan SAB sangat penting peranannya dalam mengkonstruksi graf tangga umum, yang akan dijelaskan pada Bab selanjutnya.



BAB 4

KONSTRUKSI GRAF TANGGA UMUM

Secara umum, konstruksi graf tangga umum diawali dari sebuah graf lingkaran yang kemudian ditambahkan busur-busur partisi. Penambahan busur-busur ini mengikuti aturan yang disebut **aturan partisi**. Bab ini membahas bagaimana aturan partisi diterapkan untuk membentuk graf tangga umum, baik secara visual berbentuk simpul dan busur maupun dengan menggunakan matriks ketetanggaan. Dari penerapan ini, nantinya dapat diturunkan sifat-sifat matriks ketetanggaan untuk graf tangga umum.

4.1. Aturan Partisi $GTU(n,m)$ Tanpa Pelabelan

Konstruksi sebuah $GTU(n,m)$ tanpa pelabelan dengan pempartisian diawali dari sebuah graf C_n yang kemudian dipartisi menjadi m blok graf lingkaran dengan penambahan $(m-1)$ busur partisi dengan syarat:

1. Tidak ada busur partisi yang memiliki simpul persekutuan
2. Tidak ada busur partisi yang saling bersilangan
3. Setiap blok graf yang terbentuk memiliki maksimal 2 busur partisi

Ketiga syarat di atas mengakibatkan adanya nilai maksimum untuk m , yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 4.1

Jika m adalah banyaknya blok yang terdapat pada graf tangga umum $GTU(n,m)$ tanpa pelabelan, maka $m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Bukti:

Diberikan $G = GTU(n,m)$, dan $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, dan

$$E(G) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = 1, \dots, n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$$

Jika order setiap blok diperkecil, maka banyak blok yang terbentuk semakin banyak. Graf lingkaran terkecil terkecil untuk blok B_1 adalah C_3 . Misalkan B_l dibentuk dengan penambahan busur partisi v_2v_n , sehingga $V(B_1) = \{v_1, v_2, v_n\}$.. Berdasarkan aturan partisi (1), blok selanjutnya memiliki order terkecil 4. Langkah selanjutnya dibedakan untuk n ganjil dan n genap

(i) Untuk n genap

Blok selanjutnya dibentuk secara berturut-turut dengan penambahan busur partisi $v_3v_{n-1}, v_4v_{n-2}, \dots, v_{\frac{1}{2}n}v_{\frac{1}{2}n+2}$. Blok terakhir, B_m , dengan sendirinya memiliki order 3, dengan $V(B_m) = \{v_{\frac{1}{2}n}, v_{\frac{1}{2}n+1}, v_{\frac{1}{2}n+2}\}$.

Diperoleh banyak busur partisi = $\frac{1}{2}n - 1$,

sehingga banyak blok = $m = (\frac{1}{2}n - 1) + 1 = \frac{1}{2}n = \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$

(ii) Untuk n ganjil

Blok selanjutnya dibentuk secara berturut-turut dengan penambahan busur partisi $v_3v_{n-1}, v_4v_{n-2}, \dots, v_{\frac{n-1}{2}}v_{\frac{n-1}{2}+3}$.

Diperoleh banyak busur partisi = $\frac{n-1}{2} - 1$,

sehingga banyak blok = $m = (\frac{n-1}{2} - 1) + 1 = \frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$

□

4.2. Aturan Partisi GTU(n, m) Berlabel TBAS

Enomoto dkk. (1998) telah membuktikan graf C_n adalah TBAS jika dan hanya jika n ganjil. MacDougall dan Wallis (2003) menyatakan bahwa semua graf lingkaran bertali-busur C_n' adalah TBAS kecuali C_6^2 . Implikasinya adalah terdapat perbedaan dalam inisiasi konstruksi kelas GTU(n, m) berlabel TBAS untuk n ganjil dan n genap dengan cara pempartisian, yaitu:

- (i) Untuk n ganjil, konstruksi $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n diawali dari graf C_n berlabel TBAS- C_n .
- (ii) Untuk n genap, konstruksi $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n^t diawali dari graf C_n^t berlabel TBAS- C_n^t .

Langkah selanjutnya adalah menambahkan busur partisi satu per satu sebanyak $(m-1)$ berdasarkan aturan partisi, dengan penambahan aturan keempat untuk mempertahankan sifat TBAS, sehingga diperoleh **aturan partisi $GTU(n,m)$ berlabel TBAS** berikut:

1. Tidak ada busur partisi yang memiliki simpul persekutuan
2. Tidak ada busur partisi yang saling bersilangan
3. Setiap blok graf yang terbentuk memiliki maksimal 2 busur partisi
4. Bobot busur partisi berikutnya adalah $\min(W)-1$ atau $\max(W)+1$, dengan W adalah himpunan bobot busur sebelum penambahan busur partisi berikutnya.

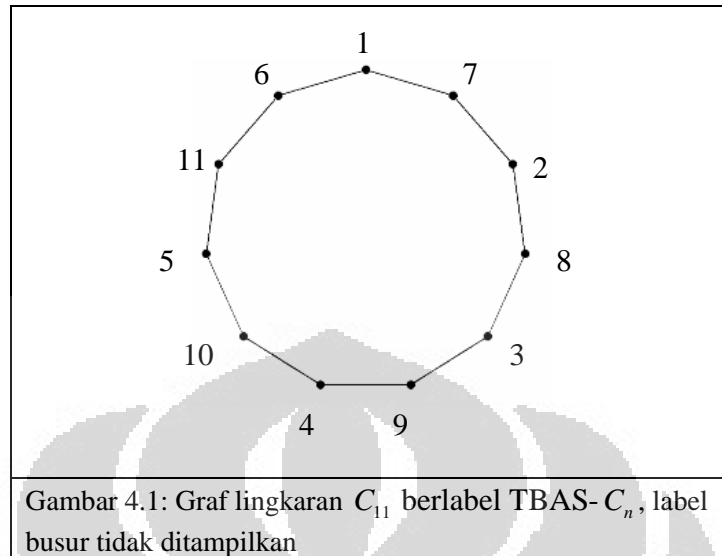
Sifat busur yang tidak berarah menyebabkan notasi busur dapat dituliskan secara komutatif, $(p,q) = (q,p)$ untuk $p,q \in E(G)$. Agar sebuah busur dapat dibandingkan dengan busur lainnya secara konsisten, maka dalam tesis ini ditetapkan penulisan notasi busur secara leksikografis sesuai label, dengan $p < q$ untuk busur $(p,q) \in E(G)$.

4.3. Konstruksi Kelas $GTU(n,m)$ berlabel TBAS dengan Matriks Ketetanggaan

(a,1)-Simpul Antiajaib Busur

4.3.1. Ilustrasi untuk n ganjil

Sebagai ilustrasi, akan dilakukan konstruksi kelas $GTU(11,2)$ berlabel TBAS- C_n dan $GTU(11,3)$ berlabel TBAS- C_n . Konstruksi dilakukan dengan dua pendekatan yaitu secara diagram graf dan secara matriks ketetanggaan. Berdasarkan aturan partisi, konstruksi diawali dari graf lingkaran C_{11} berlabel TBAS- C_n , yang ditunjukkan pada Gambar 4.1



Matriks ketetanggaan dari graf tersebut adalah:

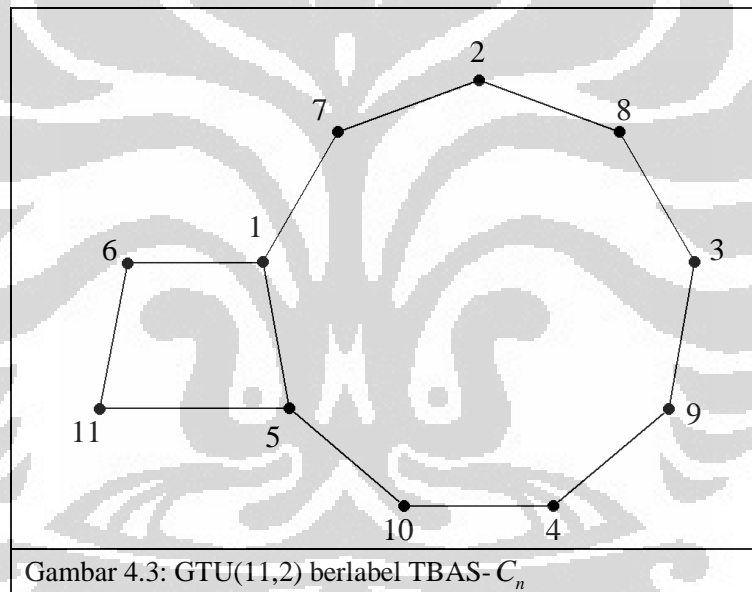
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.2: Matriks ketetanggaan dari Graf lingkaran C_{11} berlabel TBAS- C_n ,

Pelabelan tersebut memiliki himpunan bobot busur $W = \{7, \dots, 17\}$. Berdasarkan aturan partisi keempat, penambahan sebuah busur partisi harus memberikan bobot busur 6 atau 18. Misalkan ditambahkan busur partisi (1,5), dengan bobot 6, sehingga dihasilkan graf GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n dengan matriks ketetanggaan seperti ditunjukkan pada Gambar 4.3 dan 4.4.

Berdasarkan matriks ketetangaan tersebut, dapat dibentuk $GTU(11,2)$ berlabel $TBAS-C_n$ lainnya yang ekuivalen-SAB, dengan cara menggeser elemen 1 yang merepresentasikan busur partisi sepanjang *skew-diagonalnya* (Sugeng dan Xie, 2005).

Pergeseran elemen 1 tersebut ekuivalen dengan menggeser busur partisi pada graf. Karena graf hanya memiliki satu busur partisi maka tidak akan terjadi persilangan, sehingga pergeseran itu dapat dilakukan ke posisi manapun sepanjang *skew diagonalnya*. Sebagai contoh, jika elemen 1 pada a_{15} digeser ke posisi a_{24} , maka matriks ketetangaannya menjadi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.5, dengan graf ditunjukkan pada Gambar 4.6



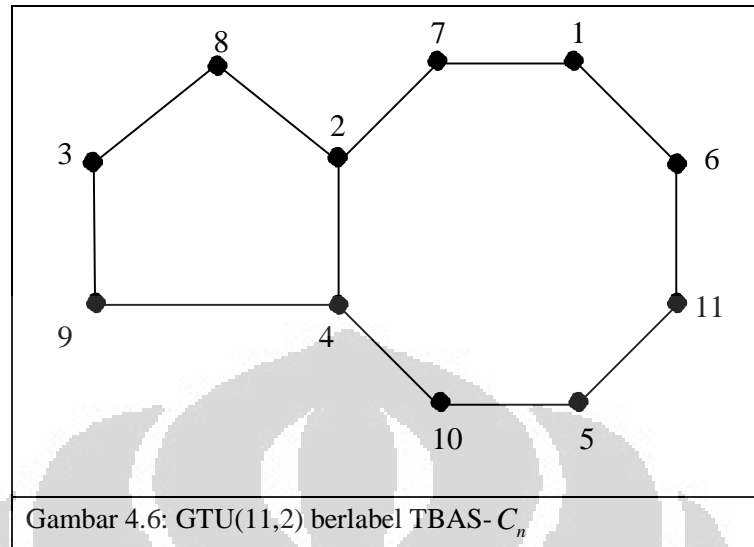
Gambar 4.3: $GTU(11,2)$ berlabel $TBAS-C_n$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

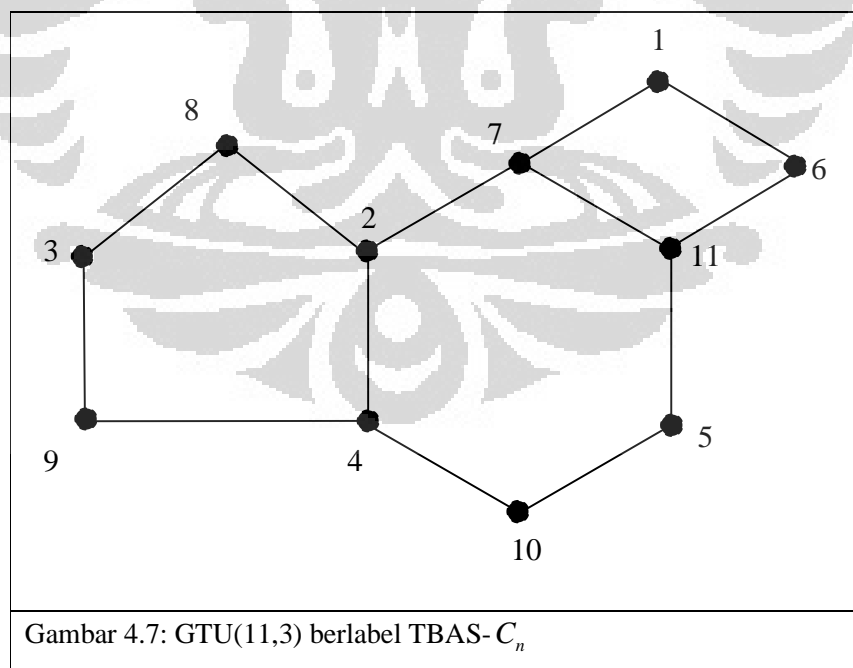
Gambar 4.4: Matriks ketetangaan dari GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.5: Matriks ketetangaan dari GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n



Selanjutnya, akan dilakukan penambahan busur partisi yang memberikan bobot busur 18. Penambahan busur (8,10) akan melanggar aturan partisi kedua, sehingga kemungkinan penambahan busur partisi hanya busur (7,11). Diperoleh graf GTU(11,3) berlabel TBAS- C_n (Gambar 4.7), beserta matriks ketetanggaannya (Gambar 4.8):



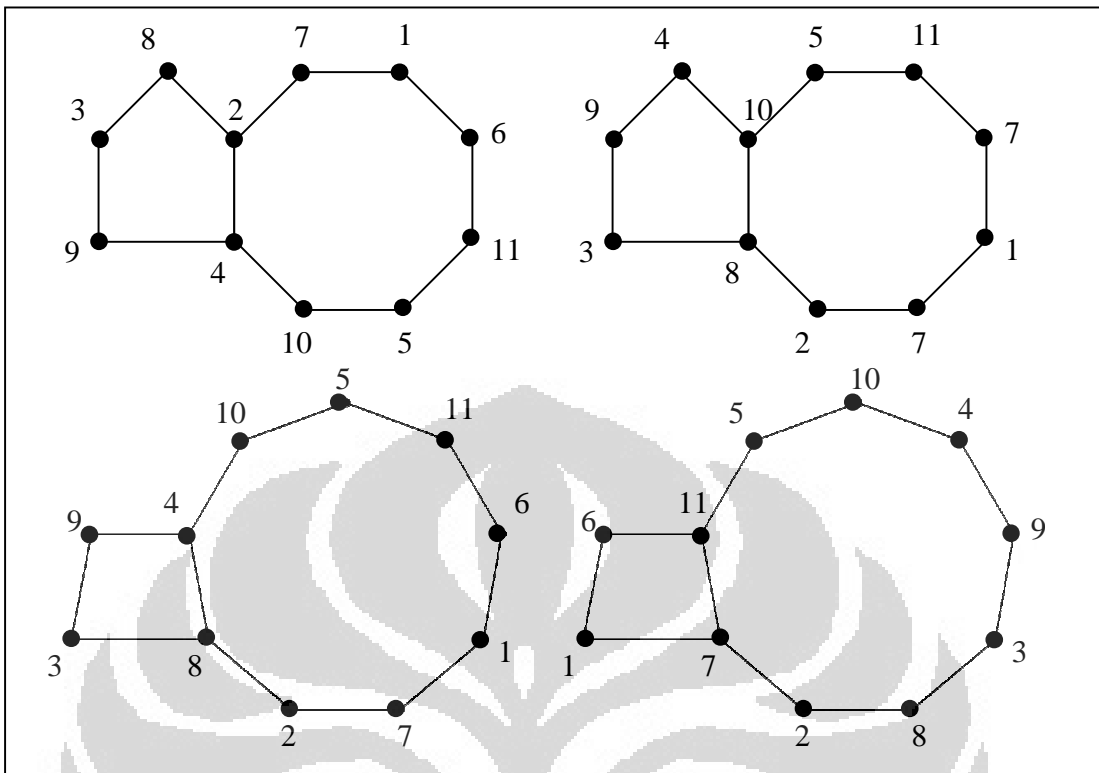
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.8: Matriks ketetanggaan GTU(11,3) berlabel TBAS- C_n

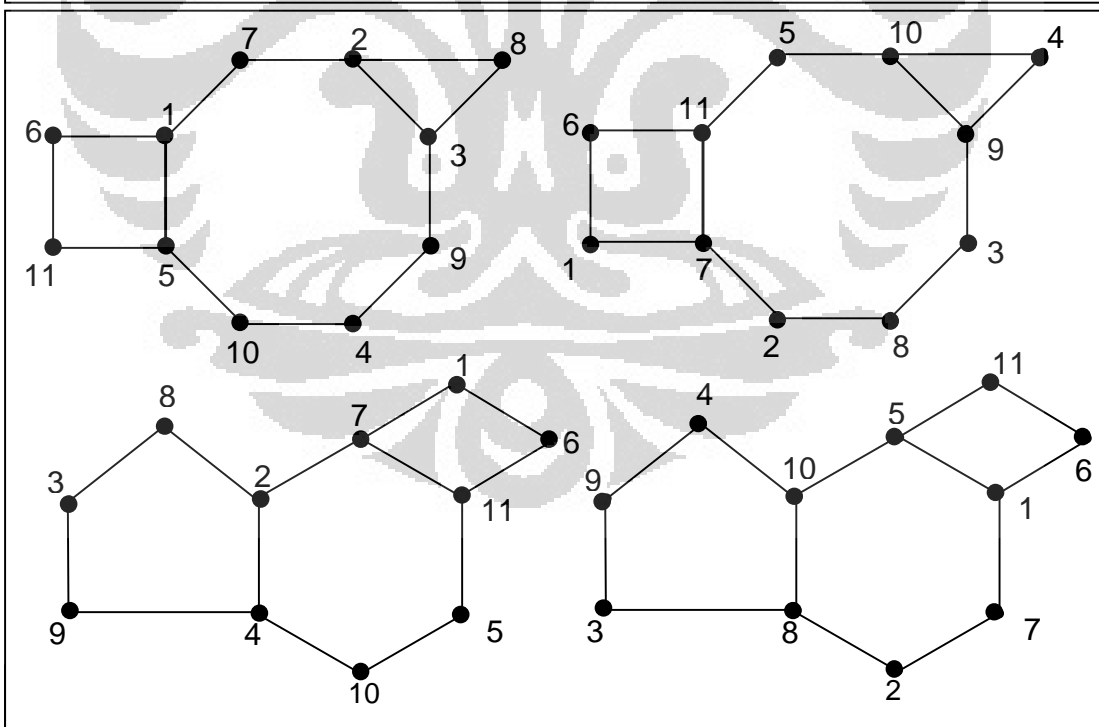
Selanjutnya dengan cara serupa, diperoleh seluruh kemungkinan graf untuk GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n dan GTU(11,3) berlabel TBAS- C_n , yaitu:

- GTU(11,2) berlabel TBAS- C_n :
 - Untuk bobot busur partisi minimal memiliki 2 bentuk non-isomorfik
 - Untuk bobot busur partisi maksimal memiliki 2 bentuk non-isomorfik
- GTU(11,3) berlabel TBAS- C_n
 - Untuk bobot busur partisi minimal memiliki 1 bentuk non-isomorfik
 - Untuk bobot busur partisi maksimal memiliki 1 bentuk non-isomorfik
 - Untuk bobot busur partisi kombinasi dari minimal dan maksimal: memiliki 1 bentuk non-isomorfik

Seluruh graf yang disebutkan di atas ditunjukkan pada Gambar 4.9 dan 4.10 berikut:



Gambar 4.9: Graf dari kelas GTU (11,2) berlabel TBAS- C_n



Gambar 4.10: Graf dari kelas GTU (11,3) berlabel TBAS- C_n

4.3.2. Konstruksi $GTU(n,m)$ berlabel $TBAS-C_n$ dengan n ganjil

Konstruksi $GTU(n,m)$ berlabel $TBAS-C_n$ dengan n ganjil diawali dengan sebuah graf lingkaran C_n $TBAS-C_n$ yang kemudian dipartisi dengan penambahan busur-busur partisi. Elemen-elemen matriks ketetanggaan A dari C_n untuk n ganjil adalah:

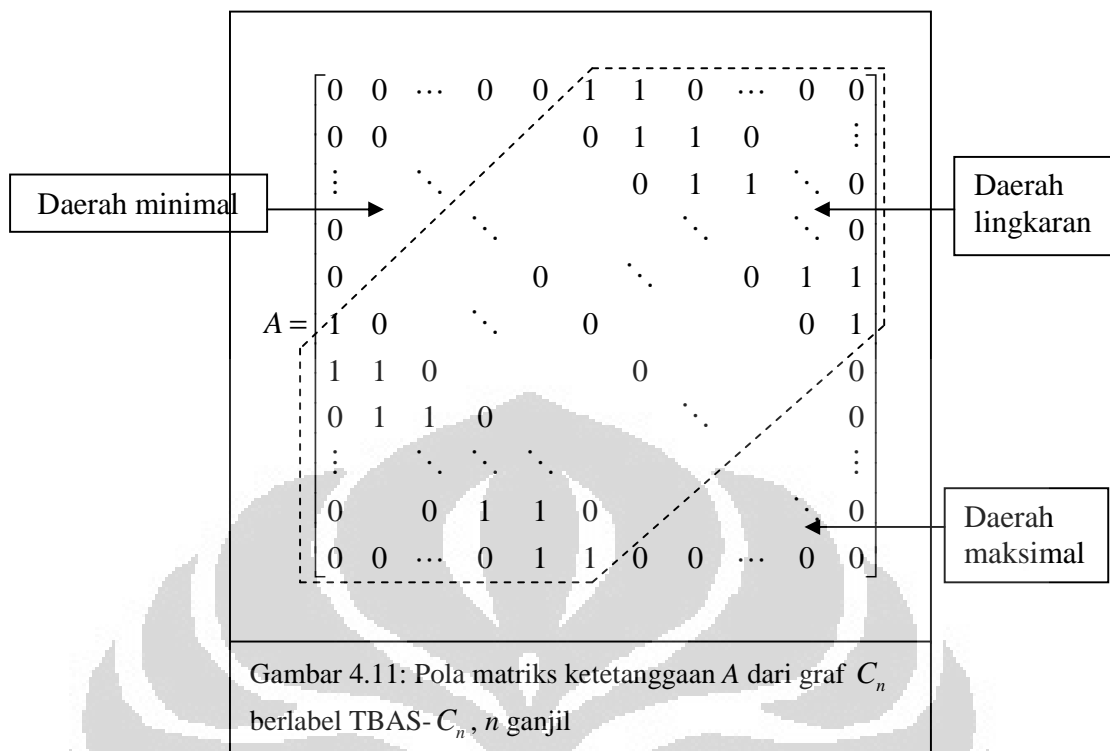
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = 1 + \left(\frac{n+2i-3}{2}\right) \bmod n \text{ atau } j = 1 + \left(\frac{n+2i-1}{2}\right) \bmod n \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan $i = 1, \dots, n$ dan $j = 1, \dots, n$

Untuk n ganjil, matriks ketetanggaan A dari graf $GTU(n,m)$ berlabel $TBAS-C_n$ dapat digolongkan menjadi 3 bagian yaitu:

1. Daerah lingkaran, yang memuat elemen-elemen yang membangun busur graf lingkaran
2. Daerah minimal, yang memuat elemen-elemen yang membangun busur partisi berbobot minimal
3. Daerah maksimal, yang memuat elemen-elemen yang membangun busur partisi berbobot maksimal

Berikut adalah matriks ketetanggaan A dari graf C_n berlabel $TBAS-C_n$, n ganjil, beserta pembagian daerahnya:



Pada matriks ketetanggaan di atas, daerah busur partisi terdiri dari elemen 0 semua. Penambahan busur partisi pertama (p,q) menyebabkan masuknya sepasang elemen 1 secara simetrik, yaitu pada posisi a_{pq} dan a_{qp} pada *skew diagonal* pada daerah busur partisi.

Berdasarkan aturan partisi keempat, graf yang diperoleh adalah salah satu dari dua kemungkinan berikut:

- (i) Graf tangga umum dengan bobot busur partisi berurutan, jika penambahan elemen 1 seluruhnya berada pada daerah minimal saja atau maksimal saja
- (ii) Graf tangga umum dengan bobot busur partisi kombinasi dari bobot minimal dan maksimal, jika penambahan elemen 1 seluruhnya berada pada daerah minimal dan maksimal

Sifat 4.1 berikut terinduksi dari penambahan busur partisi berbobot minimal (p,q) , di mana $p+q \leq \frac{n+1}{2}$. Matriks ketetanggaan A memiliki pola seperti pada gambar 4.11. Karena matriks A simetrik dan $p+q \leq \frac{n+1}{2}$, maka pembuktian cukup diterapkan untuk daerah segitiga atas dari daerah minimal.

Sifat 4.1: Diberikan A matriks ketetanggaan graf $G = GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n , n ganjil, dengan bobot busur partisi berurutan. Jika $a_{pq} = 1$ dan $p + q \leq \frac{n+1}{2}$, maka:

- (i) $a_{ij} = 0$, untuk $i + j = p + q$, $i \neq p$, $j \neq q$
- (ii) $a_{ij} = 0$, untuk $p \leq j \leq q$, $1 \leq i \leq p$, dan $i + j \neq p + q$

Bukti:

- (i) Ini adalah sifat dari matriks ketetanggaan SAB, yaitu pada suatu *skew diagonal*-nya terdapat tepat satu pasang elemen 1 dalam posisi simetrik terhadap diagonal utama, atau semua elemennya 0.
- (ii) Berdasarkan aturan partisi (1), tidak ada busur partisi lainnya yang memiliki simpul p atau q . Hal ini berakibat $a_{pj} = 0$ untuk $p \leq j < q$, $a_{ip} = 0$ dan $a_{iq} = 0$ untuk $1 \leq i < p$. Semua busur (i, j) , untuk $1 \leq i < p$ dan $p < j < q$, akan bersilangan dengan busur (p, q) , sehingga melanggar aturan partisi (2). Dapat disimpulkan $a_{ij} = 0$, untuk $p \leq j \leq q$, $1 \leq i \leq p$, dan $i + j \neq p + q$

□

Sifat 4.2 berikut terinduksi dari penambahan busur partisi berbobot maksimal (p, q) , di mana $p + q \geq \frac{3n+3}{2}$.

Sifat 4.2: Diberikan A matriks ketetanggaan graf $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n , n ganjil, dengan bobot busur partisi berurutan. Jika $a_{pq} = 1$ dan $p + q \geq \frac{3n+3}{2}$, maka:

- (i) $a_{ij} = 0$, untuk $i + j = p + q$, $i \neq p$, $j \neq q$
- (ii) $a_{ij} = 0$, untuk $p \leq i \leq q$, $q \leq j \leq n$, dan $i + j \neq p + q$

Bukti:

- (i) Pembuktian serupa dengan pembuktian sifat 4.1 (i)

- (ii) Berdasarkan aturan partisi (1), $a_{pj} = 0$ dan $a_{qj} = 0$ untuk $q < j \leq n$, dan $a_{iq} = 0$ untuk $p < i \leq q$. Semua busur (i, j) , untuk $p < i < q$ dan $q < j \leq n$, akan bersilangan dengan busur (p, q) , sehingga melanggar aturan partisi (2). Akibatnya $a_{ij} = 0$, untuk $p \leq i \leq q$, $q \leq j \leq n$, dan $i + j \neq p + q$

□

Berdasarkan sifat-sifat tersebut, jumlah kemungkinan bentuk non-isomorfik $GTU(n, m)$ berlabel TBAS- C_n , n ganjil, bobot busur partisi berurutan, dapat diketahui. Teorema 4.2 berikut menjelaskan banyak kemungkinan bentuk non isomorfik dari $GTU(n, 2)$ berlabel TBAS- C_n dengan bobot busur partisi berurutan.

Teorema 4.2: Untuk $n \geq 5$ dan ganjil, $GTU(n, 2)$ berlabel TBAS- C_n dengan bobot busur partisi berurutan, memiliki $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ kemungkinan bentuk yang non-isomorfik

Bukti:

Untuk $m = 2$, maka *skew diagonal* dengan indeks $(i, \frac{n-2i+1}{2})$, $i = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$, memiliki sepasang elemen 1 secara simetrik. Secara leksikografis berdasarkan label $i < \frac{n-2i+1}{2}$, sehingga diperoleh $i < \frac{n+1}{4}$. Karena i integer, maka $i \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.

□

Jumlah blok maksimum yang dapat dibentuk dari sebuah C_n berlabel TBAS- C_n , n ganjil, bergantung kepada order n , yang dijelaskan dalam Teorema 4.3 berikut:

Teorema 4.3: Untuk $n \geq 3$ dan ganjil, graf C_n berlabel TBAS- C_n dapat dipartisi menjadi maksimal $\lfloor \frac{n+8}{6} \rfloor$ blok, dengan bobot busur partisi berurutan.

Bukti:

Pada matriks ketetanggaan, maksimal jumlah elemen 1 pada daerah minimal dapat diperoleh jika $a_{1, \frac{n-1}{2}} = 1$. Secara leksikografis, berturut-turut elemen 1 berikutnya yang terdekat adalah pada posisi $a_{2, \frac{n-1}{2}-2}, a_{3, \frac{n-1}{2}-4}, \dots, a_{i, \frac{n-4i+3}{2}}$, dengan $i < \frac{n-4i+3}{2}$. Diperoleh $i+1 < \frac{n+9}{6}$, dan karena $m = i+1$, maka $m < \frac{n+9}{6}$. Selanjutnya, karena m adalah integer terbesar yang memenuhi, maka $m \leq \left\lfloor \frac{n+8}{6} \right\rfloor$.

□

Sebaliknya, untuk membentuk suatu $GTU(n, m)$ berlabel $TBAS-C_n$ dengan jumlah blok tertentu, maka terdapat batas bawah untuk n . Akibat 4.3.1 berikut menjelaskan hubungan yang dimaksud, untuk n ganjil.

Akibat 4.3.1: Untuk suatu $m \geq 2$ dan n ganjil, order terkecil dari sebuah $GTU(n, m)$ berlabel $TBAS-C_n$ dan bobot busur partisi berurutan, adalah $6m - 7$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 4.3,

$$m \leq \left\lfloor \frac{n+8}{6} \right\rfloor$$

karena n ganjil, maka:

$$m < \frac{n+8}{6}$$

$$n > 6m - 8, \text{ sehingga } n \geq 6m - 7$$

□

Ditinjau dari penempatan elemen 1 pada daerah minimal, konstruksi matriks ketetanggaan dari $GTU(n, m)$ berlabel $TBAS-C_n$ untuk n ganjil dikategorikan menjadi 3 jenis, yaitu:

1. Pada baris pertama daerah minimal, $a_{1, \frac{n+1}{2}} = 1$, selain itu adalah 0. Kondisi ini menyebabkan $m - 2$ elemen 1 lainnya berada pada subdaerah minimal yang

diperoleh tanpa mengikutsertakan baris pertama dan *skew diagonal* yang memuat $a_{1, \frac{n+1}{2}}$, dari daerah minimal semula

2. Pada baris pertama daerah minimal, $a_{1,j} = 1$, untuk sebuah j , $2 \leq j < \frac{n+1}{2}$, selain itu adalah 0. Kondisi ini menyebabkan $m-2$ elemen 1 lainnya berada pada subdaerah minimal yang diperoleh tanpa mengikutsertakan baris pertama dan *skew diagonal* yang memuat $a_{1,j} = 1$, untuk sebuah j , $2 \leq j < \frac{n+1}{2}$.
3. Pada baris pertama daerah minimal tidak terdapat elemen 1, sehingga semua $m-1$ elemen 1 terdapat pada subdaerah minimal yang diperoleh tanpa mengikutsertakan baris pertama dari daerah minimal semula.

Ketiga kategori di atas tetap mengacu kepada sifat 4.1 dan 4.2. Semua bentuk non-isomorfik dari $GTU(n,m)$ TBAS- C_n dapat dicari dengan menjumlahkan semua kemungkinan yang dapat dibentuk dari setiap kategori konstruksi di atas. Untuk menghitung jumlah kemungkinan pada jenis (2) cukup kompleks. Dengan menjumlahkan kemungkinan pada kategori (1) dan (3), diperoleh jumlah minimal dari semua kemungkinan bentuk non-isomorfik dari $GTU(n,m)$ TBAS- C_n , yang dinyatakan dalam Teorema 4.4 berikut:

Teorema 4.4

Jika $|(n,m)|$ menyatakan minimal banyak bentuk non-isomorfik dari $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n , n ganjil, $n \geq 11$, $m \geq 3$, maka $|(n,m)| = |(n-4,m)| + |(n-6,m-1)|$

Bukti:

Jika tidak ada elemen 1 pada baris pertama dari matriks ketetanggaan $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n , maka ke- $(m-1)$ elemen 1 terletak pada subdaerah minimal yang diperoleh tanpa mengikutsertakan baris pertama. Subdaerah minimal ini adalah daerah minimal untuk $GTU(n-4,m)$ dengan minimum banyak bentuk non-isomorfik $|(n-4,m)|$.

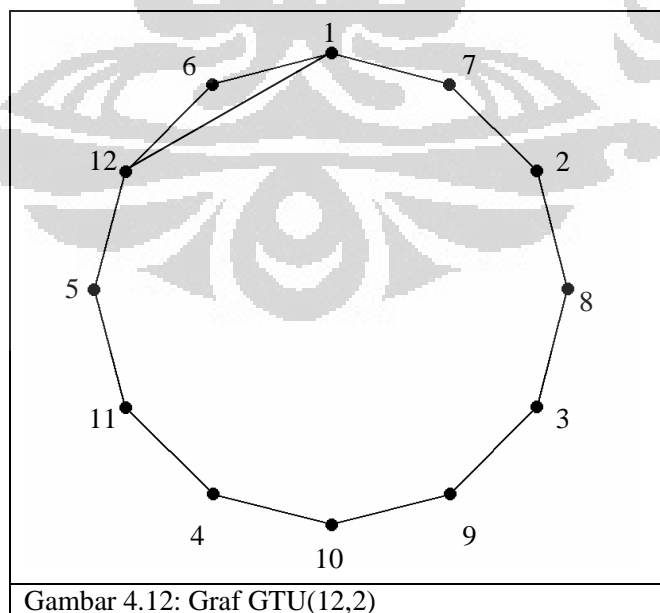
Jika busur partisi pertama dari $GTU(n,m)$ adalah $(1, \frac{n+1}{2})$, yang berarti $a_{1, \frac{n+1}{2}} = 1$, maka $(m-2)$ busur partisi lainnya direpresentasikan oleh $(m-2)$ elemen 1 yang berada pada subdaerah minimal tanpa mengikutsertakan baris pertama dan *skew diagonal* yang memuat elemen $a_{1, \frac{n+1}{2}}$. Subdaerah minimal ini adalah daerah minimal untuk $GTU(n-6, m-1)$, dengan minimum banyak bentuk non-isomorfik $|(n-6, m-2)|$.

Berdasarkan hal tersebut, maka $|(n, m)| = |(n-4, m)| + |(n-6, m-1)|$

□

4.3.3. Ilustrasi untuk $n = 4r$

Sebelum membahas untuk $n = 4r$ secara umum, berikut akan diilustrasikan konstruksi $GTU(12,2)$ berlabel TBAS- C'_n dan $GTU(12,3)$ berlabel TBAS- C'_n , dengan bobot busur partisi minimal., atau $\leq \frac{n}{2}$. Berdasarkan Teorema 3.4, λ yang digunakan adalah berjenis (2), dengan $t \equiv 2 \pmod{4}$. Misalkan t yang dikehendaki adalah 2, sehingga konstruksi diawali dengan graf lingkaran bertali-busur C_{12}^2 (Gambar 4.12). Dalam hal ini, dengan sendirinya sudah terbentuk $GTU(12,2)$



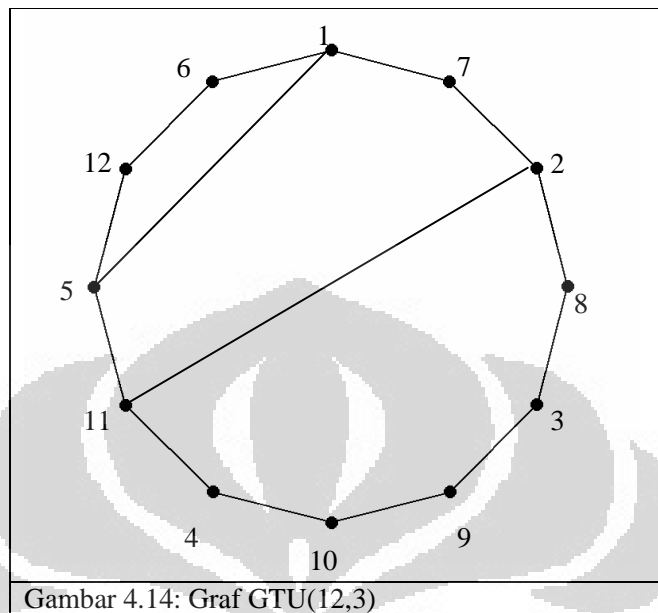
Matriks ketetanggaannya adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.13: Matriks ketetanggaan GTU(12,2)

Pada daerah *missing weight* (ditandai garis putus-putus), secara keseluruhan terdapat 6 posisi simetrik untuk menempatkan elemen 1, yaitu di (1,12), (2,11), (3,10), (4,9), (5,8), dan (6,7)., sehingga GTU(12,2) memiliki 6 bentuk non-isomorfik.

Untuk mengkonstruksi GTU(12,3), maka dilakukan penambahan sebuah busur partisi untuk setiap kemungkinan yang didapat pada GTU(12,2). Secara matriks ketetanggaan, hal ini berarti mengisi daerah minimal dengan elemen 1, dengan tetap mematuhi aturan partisi GTU(n,m) berlabel TBAS, yang telah dijelaskan pada bagian 4.2. Gambar 4.14 menunjukkan contoh GTU(12,3) dengan tali busur (2,11) dan busur partisi (1,5), beserta matriks ketetanggaannya pada Gambar 4.15.



0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Gambar 4.15: Matriks ketetanggaan GTU(12,3) dengan bentuk pada Gambar 4.14. Elemen yang dilingkari adalah tali-busur, dan elemen yang di dalam kotak adalah busur partisi

Selanjutnya dengan cara serupa, diperoleh seluruh kemungkinan graf untuk $GTU(12,3)$ berlabel $TBAS-C'_n$, dengan jumlah keseluruhan 6 bentuk non-isomorfik.

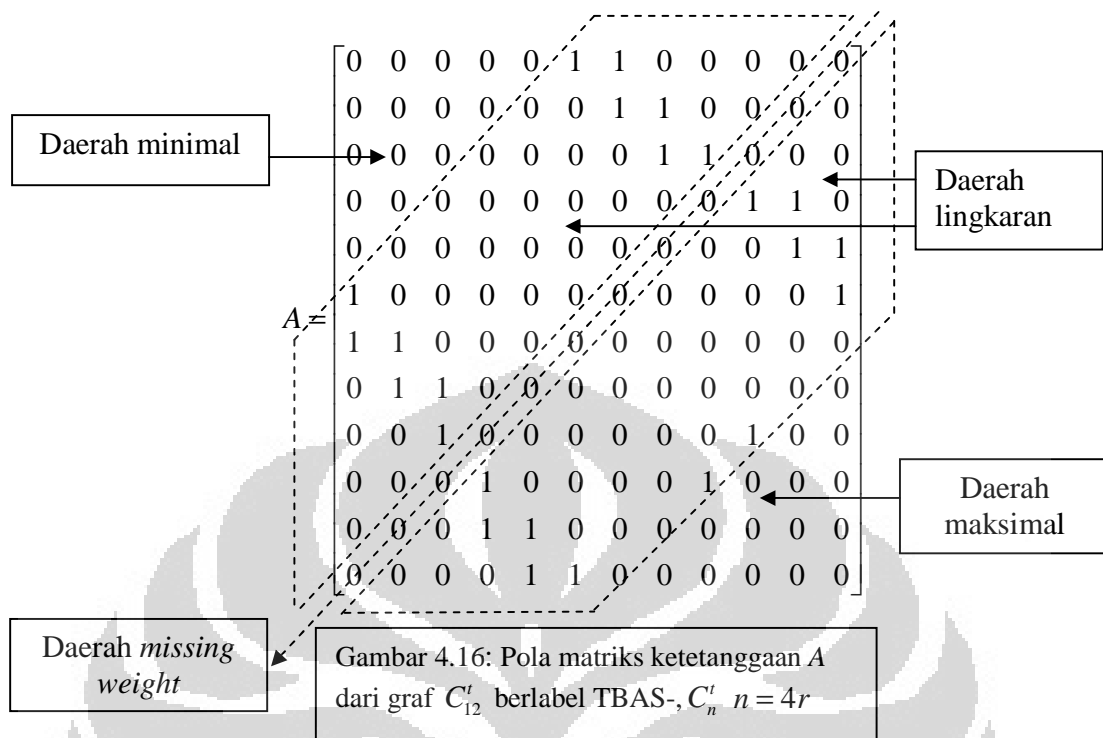
4.3.4. Konstruksi $GTU(n,m)$ Berlabel $TBAS-C'_n$ dengan $n = 4r$

Untuk $n = 4r$, matriks ketetanggaan C'_n berlabel $TBAS-C'_n$ memiliki pola yang sedikit berbeda dengan matriks ketetanggaan C_n berlabel $TBAS-C_n$ untuk n ganjil.

Konstruksi $GTU(n,m)$ berlabel $TBAS-C'_n$ dengan $n = 4r$ diawali dengan sebuah graf lingkaran bertali-busur C'_n berlabel $TBAS-C'_n$ yang kemudian dipartisi dengan penambahan busur-busur partisi. Elemen-elemen matriks ketetanggaan A dari C'_n berlabel $TBAS-C'_n$ untuk $n = 4r$ adalah:

$$a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j = \left(\frac{n+2i-2}{2}\right) \bmod n \text{ atau } j = \left(\frac{n+2i}{2}\right) \bmod n, i = 1, \dots, \frac{1}{4}n \\ 1, & \text{untuk } j = 1 + \left(\frac{n+2i-2}{2}\right) \bmod n \text{ atau } j = 1 + \left(\frac{n+2i}{2}\right) \bmod n, i = \frac{1}{4}n + 1, \dots, \frac{1}{2}n \\ 1, & \text{untuk tepat satu pasang } i, j, \text{ dengan } i + j = n + 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Tali busur pada graf C'_n menjadi busur partisi yang pertama, dengan bobot busur $n+1$ (MacDougal dan Wallis, 2003). Gambar 4.16 menunjukkan pola matriks ketetanggaan dari graf C'_{12} , tanpa mengikutsertakan tali busurnya, yang ditunjukkan oleh *skew diagonal* utama yang seluruh elemennya 0. Pembentukan tali busur mengakibatkan masuknya sepasang elemen 1 secara simetrik pada *skew diagonal* utama. Bobot dari tali busur ini adalah $n+1$.



Terdapat 3 daerah tempat menambahkan busur partisi. Busur partisi pertama yang harus ditambahkan adalah tali busur dari graf C'_n . Penambahan selanjutnya adalah pada daerah minimal atau daerah maksimal. Berdasarkan hal tersebut, sifat-sifat matriks ketetanggaan dari $GTU(m,n)$ berlabel TBAS- C'_n , $n = 4r$, dengan bobot busur partisi berurutan, terbagi menjadi 3 kategori, yang diuraikan pada Sifat 4.3, Sifat 4.4, dan Sifat 4.5 berikut:

Lema 4.1: Diberikan graf $G = GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C'_n , $n = 4r$. Jika (p,q) adalah tali busur pada G , maka $p+q = n+1$

Bukti:

MacDougall dan Wallis (2003) membuktikan bobot dari busur lingkaran C'_n berlabel TBAS- C'_n , $n = 4r$ adalah berurutan dari $2r+1$ sampai $6r+1$, tidak termasuk *missing weights* $4r+1$. *Missing weights* ini dipenuhi dengan tali busur (p,q) , dengan $p+q = n+1$ \square

Sifat 4.3 berikut menjelaskan hubungan antara posisi elemen 1 pada daerah *missing weight* terhadap pengaturan elemen pada daerah minimal dan daerah maksimal dari matriks ketetangaan dari graf $GTU(n,m)$ berlabel $TBAS-C'_n$, $n = 4r$, $r \geq 2$

Sifat 4.3: Diberikan A matriks ketetangaan graf $GTU(n,m)$ berlabel $TBAS-C'_n$, $n = 4r$, $r \geq 2$. Jika $a_{pq} = 1$, dan $p + q = n + 1$, maka:

- (i) $a_{ij} = 0$, untuk $i + j = p + q$, $i \neq p$, $j \neq q$
- (ii) Jika $p \leq \frac{1}{4}n$, $a_{ij} = 0$, untuk $1 \leq i \leq p$, $p \leq j \leq q - \frac{1}{2}n - 1$
- (iii) Jika $p \leq \frac{1}{4}n$, $a_{ij} = 0$, untuk $p + \frac{n}{2} \leq i \leq q$, dan $q \leq j \leq n$
- (iv) Jika $p \geq \frac{1}{4}n + 1$. $a_{ij} = 0$ untuk $1 \leq i \leq q - \frac{1}{2}n$ dan $q - \frac{1}{2}n + 1 \leq j \leq p$
- (v) Jika $p \geq \frac{1}{4}n + 1$. $a_{ij} = 0$ untuk $q \leq i \leq p + \frac{1}{2}n$ dan $p + \frac{1}{2}n + 1 \leq j \leq n$

Bukti:

- (i) Berlaku sebagai sifat matriks ketetangaan SAB
- (ii) Untuk $p \leq \frac{1}{4}n$, Jika $s < t$ maka $p = \lambda(v_s) < \lambda(v_t) = q$, sehingga $p < q$. Berdasarkan aturan partisi (1), tidak ada busur partisi lainnya yang memiliki simpul p atau simpul q sehingga $a_{pj} = 0$, untuk $p \leq j \leq q - \frac{1}{2}n - 1$, $a_{ip} = 0$ dan $a_{iq^*} = 0$ untuk $1 \leq i \leq p$ dengan $q^* = q - \frac{1}{2}n - 1$. Selain itu, busur (i, j) , dengan $1 \leq i < p$ dan $p < j < q - \frac{1}{2}n - 1$ bersilangan dengan busur (p, q) , sehingga $a_{ij} = 0$, untuk $1 \leq i \leq p$, $p \leq j \leq q - \frac{1}{2}n - 1$
- (iii) Untuk $p \leq \frac{1}{4}n$, Jika $s < t$ maka $p = \lambda(v_s) < \lambda(v_t) = q$, sehingga $p < q$. Berdasarkan aturan partisi (1), tidak ada busur partisi lainnya yang memiliki simpul p atau simpul q sehingga $a_{iq} = 0$ untuk $p + \frac{n}{2} \leq i \leq q$, kemudian $a_{p^*j} = 0$ dan $a_{qj} = 0$, untuk $q \leq j \leq n$ dan $p^* = p + \frac{n}{2}$. Selain

itu, busur (i, j) , dengan $q < j \leq n$ dan $p + \frac{n}{2} < i < q$ bersilangan dengan busur (p, q) , sehingga $a_{ij} = 0$, untuk $p + \frac{n}{2} \leq i \leq q$, dan $q \leq j \leq n$.

(iv) Untuk $p \geq \frac{1}{4}n + 1$, jika $s < t$ maka $\lambda(v_s) > \lambda(v_t)$. Berdasarkan kaidah leksikografis, $p = \lambda(v_t)$ dan $v = \lambda(v_s)$. Berdasarkan aturan partisi (1) tidak ada busur partisi lainnya yang memiliki simpul p atau simpul q , sehingga a_{iq^*} dan $a_{ip} = 0$ untuk $1 \leq i \leq q - \frac{1}{2}n$ dan $q^* = q - \frac{1}{2}n + 1$, serta $a_{p^*j} = 0$ untuk $q - \frac{1}{2}n + 1 \leq j \leq p$ dan $p^* = q - \frac{1}{2}n$. Selain itu, busur (i, j) , dengan $1 \leq i < q - \frac{1}{2}n$ dan $q - \frac{1}{2}n + 1 \leq j \leq p$ bersilangan dengan busur (p, q) , sehingga $a_{ij} = 0$ untuk $1 \leq i \leq q - \frac{1}{2}n$ dan $q - \frac{1}{2}n + 1 \leq j \leq p$.

(v) Untuk $p \geq \frac{1}{4}n + 1$, jika $s < t$ maka $\lambda(v_s) > \lambda(v_t)$. Berdasarkan kaidah leksikografis, $p = \lambda(v_t)$ dan $v = \lambda(v_s)$. Berdasarkan aturan partisi (1) tidak ada busur partisi lainnya yang memiliki simpul q , sehingga $a_{qj} = 0$ dan $a_{q^*j} = 0$ untuk $p + \frac{1}{2}n + 1 \leq j \leq n$ dan $q^* = p + \frac{1}{2}n$, $a_{ip^*} = 0$ untuk $q \leq i \leq p + \frac{1}{2}n$ dan $p^* = p + \frac{1}{2}n + 1$. Selain itu, busur (i, j) , dengan $q < i < p + \frac{1}{2}n$ dan $p + \frac{1}{2}n + 1 < j \leq n$ bersilangan dengan busur (p, q) , sehingga $a_{ij} = 0$ untuk $q \leq i \leq p + \frac{1}{2}n$ dan $p + \frac{1}{2}n + 1 \leq j \leq n$.

□

Sifat 4.4 dan 4.5 berikut menjelaskan pengaturan elemen 1 pada daerah minimal dan daerah maksimal dari matriks ketetanggaan dari graf $GTU(n, m)$ berlabel $TBAS-C'_n$, $n = 4r$, $r \geq 2$. Kedua sifat ini serupa dengan Sifat 4.1 dan Sifat 4.2, yang diterapkan untuk n ganjil.

Sifat 4.4: Diberikan A matriks ketetanggaan graf $GTU(n, m)$ berlabel $TBAS-C'_n$, $n = 4r$, $r \geq 2$, dan bobot busur partisi berurutan. Jika $a_{pq} = 1$ dan $p + q \leq \frac{n}{2}$, maka:

- (i) $a_{ij} = 0$, untuk $i + j = p + q$, $i \neq p$, $j \neq q$
- (ii) $a_{ij} = 0$, untuk $p \leq j \leq q$, $1 \leq i \leq p$, dan $i + j \neq p + q$

Bukti:

Sifat ini terinduksi dari penambahan busur partisi berbobot minimal (p, q) , di mana $p + q \leq \frac{n}{2}$. Matriks ketetanggaan A memiliki pola seperti pada gambar 4.12. Sama halnya dengan pembuktian sifat 4.1 dan 4.2, maka pembuktian hanya diterapkan untuk daerah segitiga atas dari daerah minimal

- (i) Berlaku sebagai sifat matriks ketetanggaan SAB
- (ii) Pembuktian serupa dengan pembuktian sifat 4.1 (ii)

□

Sifat 4.5: Diberikan A matriks ketetanggaan graf $GTU(n, m)$ berlabel $TBAS-C'_n$, $n = 4r$, $r \geq 2$, dan bobot busur partisi berurutan. Jika $a_{pq} = 1$ dan $p + q \geq \frac{3n+4}{2}$, maka:

- (i) $a_{ij} = 0$, untuk $i + j = p + q$, $i \neq p$, $j \neq q$
- (ii) $a_{ij} = 0$, untuk $p \leq i \leq q$, $q \leq j \leq n$, dan $i + j \neq p + q$

Bukti:

Sifat ini terinduksi dari penambahan busur partisi berbobot maksimal (p, q) , di mana $p + q \geq \frac{3n+4}{2}$. Pembuktian hanya diterapkan untuk daerah segitiga atas dari daerah maksimal

- (i) Berlaku sebagai sifat matriks ketetanggaan SAB
- (ii) Pembuktian serupa dengan pembuktian sifat 4.2 (ii)

□

Berdasarkan sifat-sifat matriks ketetanggaannya, dapat diturunkan beberapa sifat $GTU(n, m)$ untuk $n = 4r$, $r \geq 2$, yang dijelaskan dalam Teorema 4.5, Teorema 4.6, dan Teorema 4.7 berikut.

Teorema 4.5: Untuk $n = 4r$, $GTU(n,2)$ berlabel $TBAS-C'_n$ memiliki $\frac{1}{2}n$ kemungkinan bentuk yang non-isomorfik

Bukti:

Ditinjau dari matriks ketetanggaanya, untuk $n = 4r$ dan $m = 2$, terdapat n elemen pada *skew diagonal* utama atau daerah *missing weight*, sehingga terdapat $\frac{1}{2}n$ cara untuk menempatkan elemen “1” secara simetrik.

□

Teorema 4.6: Untuk $n = 4r$, $r \geq 2$, graf C'_n berlabel $TBAS-C'_n$ dapat dipartisi menjadi maksimal $\lfloor \frac{n+3}{6} \rfloor + 1$ blok dengan bobot busur partisi minimal.

Bukti:

Blok dengan jumlah terbanyak dapat dibentuk jika $B_1 = C_3$, yang diperoleh dengan membentuk busur partisi $(1,n)$, sehingga $a_{1n} = 1$. Berdasarkan sifat 4.3 (ii), maka $a_{ij} = 0$, untuk $1 \leq i \leq 1$, $1 \leq j \leq \frac{1}{2}n - 1$, yang berarti seluruh elemen pada baris pertama pada daerah minimal adalah 0. Tanpa mengikutsertakan baris pertama, daerah minimal yang tersisa adalah untuk order $n - 5$, dengan maksimal blok $\lfloor \frac{(n-5)+8}{6} \rfloor$ (berdasarkan Teorema 4.3). Diperoleh maksimal blok secara keseluruhan adalah $\lfloor \frac{(n-5)+8}{6} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{(n+3)}{6} \rfloor + 1$

Ditinjau dari penempatan elemen 1, matriks ketetangaan $GTU(n,m)$ untuk $n = 4r$ dapat dikategorikan menjadi 3 jenis, yaitu:

1. $a_{1,n} = 1$, hal ini berimplikasi $(m-2)$ elemen 1 lainnya berada pada subdaerah minimal yang diperoleh tanpa mengikutsertakan baris pertama.

2. $a_{pq} = 1$, $p + q = n + 1$, untuk tepat sebuah p , $2 \leq p \leq \frac{1}{2}n - 1$. Implikasinya adalah, $(m - 2)$ elemen 1 lainnya berada pada subdaerah minimal, dengan $a_{ij} = 0$ untuk $1 \leq i \leq p$, $p \leq j \leq q - \frac{1}{2}n - 1$
3. $a_{\frac{1}{2}n, (\frac{1}{2}n+1)} = 1$, yang berimplikasi sama dengan kategori (1)

Serupa dengan ketiga kategori untuk n ganjil, ketiga kategori di atas mengacu kepada sifat 4.3, 4.4, dan 4.5. Semua bentuk non-isomorfik dari $GTU(n, m)$, $n = 4r$, dapat dicari dengan menjumlahkan semua kemungkinan yang dapat dibentuk dari setiap kategori konstruksi di atas. Jumlah eksak kemungkinan pada jenis (2) dapat didekati dengan mengasumsikan semua elemen pada baris pertama adalah 0. Dengan menjumlahkan kemungkinan pada kategori (1), (2), dan (3), diperoleh jumlah minimal dari semua kemungkinan bentuk non-isomorfik dari $GTU(n, m)$, yang dinyatakan dalam teorema 4.7 berikut

Teorema 4.7: Jika $|(n, m)|$ menyatakan minimal jumlah bentuk non-isomorfik dari $GTU(n, m)$ berlabel $TBAS-C'_n$, $n \geq 12$, $m \geq 3$, maka

$$|(n, m)| = |(n - 4, m)| + 2|(n - 5, m - 1)|$$

Bukti:

Matriks ketetanggaan dari $GTU(n, m)$ yang dimaksud dikategorikan menjadi 3 kemungkinan:

1. Jika matriks ketetanggaan berkategori (1), maka subdaerah di mana $(m - 2)$ elemen 1 lainnya terletak, adalah daerah minimal untuk $GTU(n - 5, m - 1)$, dengan minimal banyak bentuk non-isomorfik $|(n - 5, m - 1)|$
2. Untuk menghitung banyak kemungkinan pada matriks ketetanggaan berkategori (2), diasumsikan tidak ada busur partisi $(1, i)$, sehingga baris pertama dapat dieliminasi. Daerah minimal yang tersisa adalah untuk $GTU(n - 4, m)$, dengan minimal banyak bentuk non-isomorfik $|(n - 4, m)|$

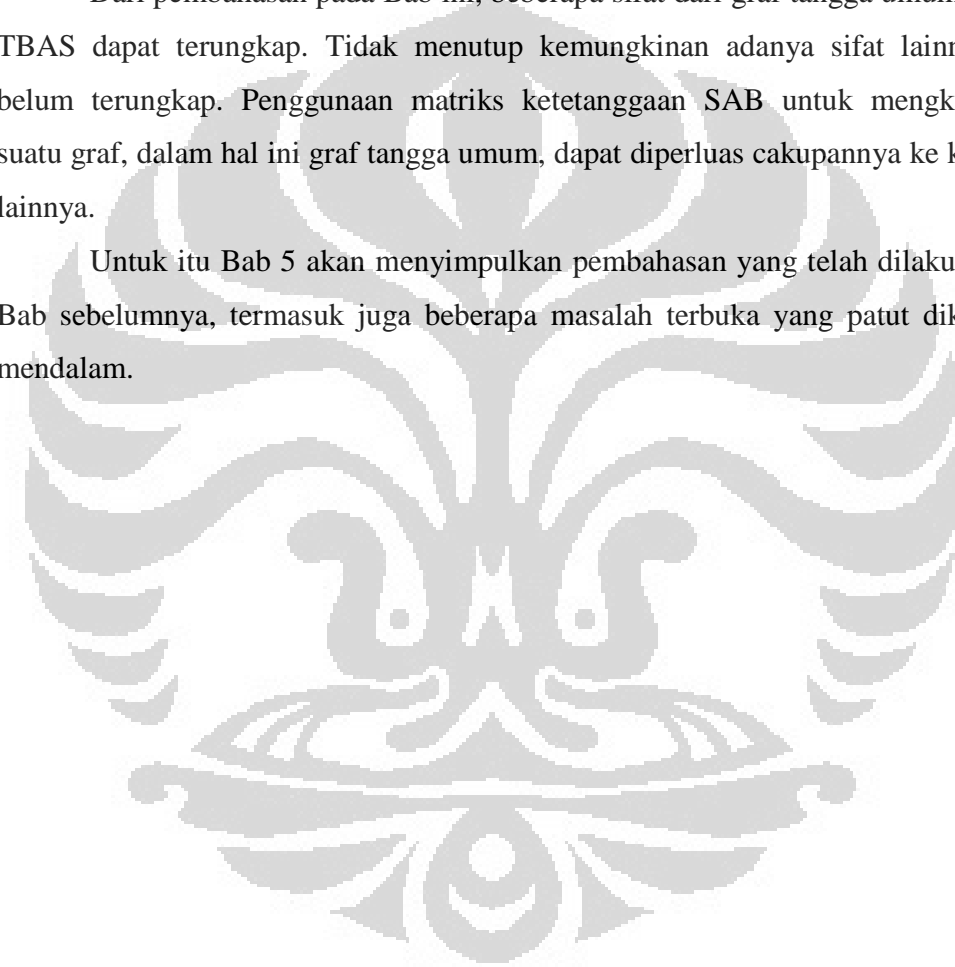
3. Jika matriks ketetangaan berkategori (3), maka subdaerah di mana $(m-2)$ elemen 1 lainnya terletak, adalah daerah minimal untuk $GTU(n-5, m-1)$, dengan minimal banyak bentuk non-isomorfik $|(n-5, m-1)|$

Total dari ketiga kemungkinan di atas adalah $|(n-4, m)| + 2|(n-5, m-1)|$

□

Dari pembahasan pada Bab ini, beberapa sifat dari graf tangga umum berlabel TBAS dapat terungkap. Tidak menutup kemungkinan adanya sifat lainnya yang belum terungkap. Penggunaan matriks ketetangaan SAB untuk mengkonstruksi suatu graf, dalam hal ini graf tangga umum, dapat diperluas cakupannya ke kelas graf lainnya.

Untuk itu Bab 5 akan menyimpulkan pembahasan yang telah dilakukan pada Bab sebelumnya, termasuk juga beberapa masalah terbuka yang patut dikaji lebih mendalam.



BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n maupun $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C'_n dapat direpresentasikan di dalam matriks ketetanggaan $(a,1)$ -SAB. Konstruksi suatu $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C_n maupun $GTU(n,m)$ berlabel TBAS- C'_n secara matriks ketetanggaan adalah dengan mengatur penempatan elemen 1 dan 0 berdasarkan sifat-sifat 4.1 sampai 4.5, yang telah dijelaskan di dalam Bab 4

Pelabelan TBAS- C_n maupun pelabelan TBAS- C'_n pada $GTU(n,m)$ tidak dapat menghasilkan GTU yang homogen ataupun linier

Konstruksi suatu graf TBAS dengan matriks ketetanggaan SAB adalah suatu gagasan yang perlu dikembangkan lebih lanjut. Berikut adalah masalah yang masih terbuka yang dapat dikaji lebih lanjut:

1. Bagaimanakah penerapan metode ini untuk $GTU(n,m)$ dengan $n = 4r + 2$, $r \geq 1$ dan integer?
2. Bagaimanakah sifat-sifat $GTU(n,m)$ jika bobot busur partisinya adalah kombinasi antara bobot minimal dengan bobot maksimal?
3. Bagaimanakah pendefinisian fungsi pelabelan TBAS λ sehingga dapat mengkonstruksi GTU yang homogen atau linier?
4. Bagaimanakah penggunaan matriks ketetanggaan SAB untuk mengkonstruksi graf dari berbagai kelas lainnya dengan berbagai jenis pelabelan?

DAFTAR PUSTAKA

- Baca, M., Miller, M. (2008). *Super Edge-Antimagic Graphs*, Boca Raton, FL: BrownWalker Press
- Barrientos, C. (2002). Graceful labeling of chain and corona graphs. *Bulletin of the ICA*, 34, 17-26
- Deo, Narsingh (1974). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Jersey: Prentice Hall
- Diestel, R. (2006) *Graph Theory*. Berlin: Springer-Verlag
- Enomoto, H., A.S. Llado, T. Nakamigawa, T., & G. Ringel. (1998). Super edge magic graphs, *SUT Journal of Mathematics*, Vol 34 No. 2, 105-109
- Gallian, J.A. (2010). A Dynamic survey of graph labeling. *Electronic J. Combinatorics*, 17, #DS6
- MacDougall, J.A., & W.D. Wallis. (2003). Strong-edge magic labeling of a cycle with chord. *Australasian Journal of Combinatorics*, 28, 245-255
- Sin Min Lee, & Yun-Chin Wang, Jack, On super edge magicness of chain graphs whose blocks are complete, preprint, 28 Nov 2010,
<<http://www.cs.sjsu.edu/~lee/23SpSuMagChainGph.pdf>>
- Sugeng, K.A., & W. Xie. (2005). Construction of super edge magic total graphs. *Proceedings of the 16th Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms*, 303-310