UNIVERSITAS INDONESIA

PENAKSIRAN PARAMETER PADA MODEL REGRESI DATA PANEL SPASIAL ERROR DINAMIS

SKRIPSI

GAMAR ASEFFA
0706261676

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

UNIVERSITAS INDONESIA

PENAKSIRAN PARAMETER PADA MODEL REGRESI DATA PANEL SPASIAL ERROR DINAMIS

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains

GAMAR ASEFFA
0706261676

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPOK
JULI 2011

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk telah saya nyatakan dengan benar.

Nama	: Gamar Aseffa
NPM	: 0706261676
Tanda Tangan	:
Tanggal	: 6 Juli 2011

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh		
Nama	:	Gamar Aseffa
NPM	:	0706261676
Program Studi	:	Sarjana Matematika
Judul Skripsi	:	Penaksiran Parameter pada Model Regresi Data Panel Spasial Error Dinamis

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing	: Dra. Siti Nurrohmah, M.Si	( )
Pembimbing	: Dr. Dian Lestari DEA	( )
Penguji	: Dra. Rustina	( )
Penguji	: Dra. Saskya Mary Soemartojo, M.Si	( )
Penguji	: Mila Novita S.Si., M.Si	( )

Ditetapkan di : Depok
Tanggal : 6 Juni 2011

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah swt. atas semua rahmat dan karunia yang telah Dia berikan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis sadar bahwa penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah berjasa dalam penulisan tugas akhir ini maupun selama penulis kuliah. Ucapan terima kasih terhatur kepada:

(1) Dra. Siti Nurrohmah, M.Si dan Dr. Dian Lestari, DEA selaku pembimbing skripsi yang telah banyak meluangkan waktu, tenaga dan pikiran serta memberikan masukan-masukan dan motivasi untuk penulis selama penyusunan tugas akhir ini.

(2) Dr. Yudi Satria, MT. selaku ketua departemen, Rahmi Rusin, S.Si, M.Sc.Tech selaku sekretaris departemen yang telah banyak membantu proses penyelesaian tugas akhir ini.

(3) Dra. Yahma Wisnani, M.Kom selaku pembimbing akademik penulis selama menjalani masa studi yang telah memberikan banyak nasehat dan motivasi, dan terima kasih kepada seluruh dosen dan karyawan Departemen Matematika FMIPA UI atas segala ilmu pengetahuan yang diberikan.

(4) Kedua orang tua dan kakak yang telah memberikan segala dukungan dan doa setulus hati serta menjadi motivasi terbesar bagi penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

(5) Teman baik penulis, Tepi dan Wiwi sebagai sahabat yang selalu ada untuk berbagi ilmu, dukungan, semangat dan hiburan bagi penulis.

(6) Ami, Mina, alm. Amal sahabat baik sepanjang masa yang memberikan pelajaran hidup untuk tetap tegar di saat-saat sulit pengerjaaan tugas akhir ini.

(7) Bapet, Isna, Anjar, Shafa, Safir, Widya, Arif, Ferdi, Bowo, Toto, Winda, Farah, Lois, Adit, Anggun, serta teman-teman laskar skripsi lainnya yang selalu saling membantu dan menyemangati dalam perjuangan ini.

(8) Sica, Putri, Misda, Iki dan semua teman-teman Matematika 2007 yang telah mewarnai kehidupan perkuliahan penulis.

(9) Adek-adek angkatan 2008, 2009(terutama adek asuhku Revi), 2010 dan kakak-kakak 2006 yang tidak jenuh menyemangati penulis menyelesaikan segala proses tugas akhir ini.

(10) Teman-teman di twitter, Ka Anggi, Ka Farah, Cindy, Dita, Nora yang rela menampung keluh kesah penulis dalam timelinenya dan selalu menyemangati lewat mention-mentionnya.

(11) Bang Alitt Susanto, Poconggg, Bena, Raditya Dika yang selalu dapat membuat penulis tersenyum lewat blog dan akun twitternya.

(12) Murid-murid penulis, Karin, Saras, dan Azizah yang selalu pengertian dan mau mendengar cerita keluh kesah penulis mengenai kesibukannya.

Penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini. Akhir kata, penulis mohon maaf jika terdapat kesalahan atau kekurangan dalam skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

2011

HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI

TUGAS AKHIR UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Sebagai sivitas akademik Universitas Indonesia, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Gamar Aseffa
NPM	: 0706261676
Program Studi	: Sarjana
Departemen	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Jenis karya	: Skripsi

demi pengembangan ilmu pengetahuan, menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Indonesia Hak Bebas Royalti Noneksklusif (*Non-exclusive Royalty Free Right*) atas karya ilmiah saya yang berjudul :

Penaksiran Parameter Pada Model Regresi Data Panel Spasial Error Dinamis.

beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Noneksklusif ini Universitas Indonesia berhak menyimpan, mengalihmedia/format-kan, mengelola dalam bentuk pangkalan data (database), merawat, dan memublikasikan tugas akhir saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta dan sebagai pemilik Hak Cipta.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di : Depok
Pada tanggal : 6 Juli 2011
Yang menyatakan

(Gamar Aseffa)

ABSTRAK

Nama : Gamar Aseffa
Program Studi : Matematika
Judul : Penaksiran Parameter pada Model Regresi Data Panel Spasial Error Dinamis.

Model regresi data panel spasial error dinamis adalah model regresi data panel yang melibatkan lag dari variabel dependen dan komponen dependensi spasial error. Karena terdapat korelasi antara lag dari variabel dependen dan komponen error, estimasi dengan *Ordinary Least Squares* menjadi bias dan tidak konsisten. Oleh karena itu, dibutuhkan metode lain untuk menaksir parameter dalam model. Metode yang dapat digunakan adalah perluasan metode Arellano dan Bond yang mencakup metode instrumental variabel menggunakan variabel instrumen yang disarankan oleh Mutl (2006) dan prinsip *Generalized Method of Moments* (GMM). Kemudian ditambah dengan metode pendekatan Kapoor, Kelejian, dan Prucha (KKP) sehingga dihasilkan taksiran yang konsisten.

Kata Kunci : model regresi data panel dinamis, model regresi spasial error, Arellano dan Bond *estimator, Generalized Method of Moments* (GMM), Kapoor, Kelejian, dan Prucha (KKP) *estimator*.
xiii + 82 halaman ; 4 gambar; 1 tabel
Daftar Pustaka : 9 (2003-2010)

ABSTRACT

Name : Gamar Aseffa
Program Study : Mathematics
Title : Estimating the Parameter of Dynamic Spatial Error Panel Data Regression Model

The dynamic spatial error panel data regression model is panel data regression model which involves lag of the dependent variable and error spatial dependence. Because there is correlation between the lag of the dependent variable and error components, the ordinary least squares estimator becomes biased and inconsistent. Therefore, we need another method to estimate parameters in the model. The method which can be used is the extended method of Arellano and Bond covering instrumental variable method using instrument variables suggested by Mutl (2006) and the principle of the Generalized Method of Moments (GMM). Then the method is coupled with the method of Kapoor, Kelejian, and Prucha (KKP) approach so that it produces consistent estimators.

Key Words : dynamic panel data regression model, spatial error regression model, Arellano and Bond estimator, Generalized Method of Moments (GMM), Kapoor, Kelejian, and Prucha estimator.
xiii + 82 pages ; 4 pictures; 1 table
Bibliography : 9 (2003-2010)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Hill, Griffith dan Judge (2001), Ekonometrika adalah ilmu mengenai penggunaan data dan teori dari ilmu ekonomi, bisnis dan ilmu ilmu-ilmu sosial, bersama-sama dengan alat statistika, untuk menjawab tipe pertanyaan "seberapa besar" atau "*how much*". Artinya peneliti harus mampu menyatakan seberapa besar suatu perubahan pada satu variabel menyebabkan perubahan variabel lain. Dalam ekonometrika, terdapat 3 jenis data yaitu data runtun waktu (*time series*), data silang (*cross section*), dan data panel (*panel data*). Data-data tersebut tentunya sangat diperlukan dalam analisis perekonomian maupun pengambilan keputusan.

Data *time series* merupakan data yang terdiri atas satu objek tetapi meliputi beberapa periode waktu misalnya harian, bulanan, mingguan, tahunan, dan lain-lain. Data *cross section* terdiri dari beberapa objek data pada suatu waktu. Data panel atau *panel data* adalah gabungan dari data *time series* (antar waktu) dan data *cross section* (antar individu/ruang). Untuk menggambarkan data panel secara singkat, misalkan pada data *cross section*, nilai dari satu variabel atau lebih dikumpulkan untuk beberapa unit sampel pada suatu waktu. Dalam data panel, unit sampel pada data *cross section* (unit *cross section*) yang sama disurvei dalam beberapa waktu. Penggunaan data panel dapat meningkatkan kualitas dan kuantitas data dengan pendekatan yang tidak mungkin dilakukan dengan menggunakan hanya salah satu dari data *cross section* atau data *time series* (Gujarati, 2003).

Salah satu pemodelan data panel adalah model regresi data panel, yaitu model regresi linier yang melibatkan data panel. Data panel dapat dibedakan berdasarkan komponen errornya, yaitu komponen error satu arah dan komponen error dua arah. Komponen error satu arah terdiri dari pengaruh yang tidak terobservasi dari suatu individu tanpa dipengaruhi faktor waktu dan error yang benar-benar tidak diketahui dari tiap individu dan waktu. Sedangkan komponen error dua arah terdiri dari pengaruh yang tidak terobservasi dari suatu individu tanpa dipengaruhi faktor waktu, pengaruh yang tidak terobservasi dari suatu waktu tanpa dipengaruhi faktor individu dan error yang benar-benar tidak diketahui dari tiap individu dan waktu. Selanjutnya, berdasarkan asumsi yang digunakan pada komponen error data panel tersebut, terdapat dua jenis model regresi data panel, yakni model efek tetap dan model efek acak. Pada model efek tetap, diasumsikan bahwa komponen error dari model regresi tersebut merupakan parameter tetap yaitu pengaruh individu dan waktu ditentukan oleh peneliti. Sedangkan pada model efek acak disumsikan bahwa komponen error merupakan variabel acak yaitu pengaruh individu dan waktu ditentukan secara acak dari populasi yang ada.

Banyak perilaku ekonomi yang menggunakan data panel, memiliki hubungan dinamis. Misalnya, permintaan dinamis pada gas alam dan permintaan dinamis pada bensin dan listrik rumah tangga. Pada dasarnya hubungan variabel-variabel ekonomi merupakan suatu kedinamisan, dimana variabel ekonomi tidak hanya ditentukan oleh variabel-variabel pada waktu yang sama, melainkan juga ditentukan oleh variabel pada waktu sebelumnya. Sehingga dalam analisis ekonomi sering menggunakan model dinamis yang diharapkan lebih tepat menggambarkan keadaan sebenarnya perilaku ekonomi. Model dinamis merupakan model dengan kelambanan waktu (*lag*) dari variabel dependen.

Pada beberapa kasus kerap ditemui kasus variabel dependen dan atau error pada suatu wilayah bergantung pada variabel dependen dan atau error wilayah lain. Keadaan ini disebut dependensi spasial. Dependensi spasial terbagi menjadi dua, yaitu spasial *lag* dan spasial error. Spasial *lag* disebabkan nilai variabel dependen pada suatu lokasi berhubungan dengan nilai variabel dependen lokasi lain. Jika dimisalkan lokasi i berhubungan dengan lokasi j, maka nilai variabel dependen lokasi i merupakan fungsi dari nilai variabel dependen pada lokasi j dengan i $\neq$ j. Spasial error disebabkan oleh ketergantungan nilai error suatu lokasi dengan nilai error pada lokasi lain. Jika kondisi ini tidak diperhatikan, maka asumsi error antar observasi saling bebas tidak terpenuhi. Oleh karena itu, pada model regresi data panel dinamis diperlukan penambahan komponen yang memuat efek dependensi spasial.

Dalam mencari taksiran model regresi data panel dinamis, banyak literatur dalam dua dekade terakhir difokuskan pada prosedur *Generalized Methods of Moment* (GMM) dan metode estimasi berdasarkan variabel instrumental (IV). Salah satu metode yang menggunakan prosedur *Generalized Methods of Moment* (GMM) dan variabel instrumental diusulkan oleh Arellano dan Bond. Taksiran yang didapat dengan metode Arellano dan Bond merupakan taksiran yang *unbiased* , konsisten, serta efisien. Pada tugas akhir ini, akan dibahas mengenai metode perluasan Arellano dan Bond dalam menaksir parameter pada model regresi data panel dinamis dengan komponen dependensi spasial error.

1.2 Perumusan Masalah dan Ruang Lingkup

Permasalahan utama dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana cara mencari taksiran parameter pada model regresi data panel spasial error dinamis dengan metode Arellano dan Bond dan metode tambahan pendekatan Kapoor, Kelejian, dan Prucha (2007).

Ruang lingkup pembahasan masalah dalam skripsi ini dibatasi pada :

1. Model regresi data panel spasial error dinamis yang akan dibahas adalah model regresi data panel dengan *lag* 1.
2. Model regresi data panel spasial error dinamis yang akan dibahas adalah model regresi data panel dengan komponen error satu arah.
3. Model regresi data panel spasial error dinamis yang akan dibahas adalah model regresi data panel dengan efek acak.

4. Model regresi data panel spasial error dinamis yang akan dibahas adalah model regresi data panel tanpa adanya interaksi antar variabel eksplanatori eksogen

5. Bobot spasial yang akan digunakan berdasarkan bobot *contiguity*, khususnya *queen contiguity*.

1.3 Jenis Penelitian dan Metode yang Digunakan

Jenis penelitian yang dilakukan adalah studi literatur. Metode yang digunakan adalah metode Arellano dan Bond dan metode tambahan pendekatan Kapoor, Kelejian, dan Prucha (2007).

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah mencari taksiran parameter pada model regresi data panel dinamis yang memuat dependensi spasial error dengan metode Arellano dan Bond dan metode tambahan pendekatan Kapoor, Kelejian, dan Prucha (2007).

BAB 2
LANDASAN TEORI

Pada bab ini, akan dibahas mengenai teori-teori dasar yang mendukung dan digunakan untuk menaksir parameter pada model data panel spasial dinamis. Teori-teori tersebut antara lain mengenai bentuk dan sifat matriks, *kronecker product*, variabel acak, ekspektasi, variansi, kovariansi, korelasi, penaksir konsisten, model regresi linier, model regresi linier berganda, model regresi data panel, model dinamis, model spasial dependen, metode instrumental, dan matriks bobot spasial.

2.1 Bentuk dan Sifat Matriks

2.1.1 Notasi dan Terminologi Matriks

Matriks adalah susunan dari bilangan skalar berbentuk *rectangular* (segiempat panjang). Bilangan skalar pada matriks disebut entri dari matriks. Matriks terdiri dari baris dan kolom, yang akan menentukan ukuran matriks tersebut. Matriks yang terdiri dari m- baris dan n- kolom disebut matriks berukuran m x n. Matriks yang berukuran 1 x m disebut dengan vektor baris, sedangkan matriks yang berukuran m x 1 disebut dengan vektor kolom.

Pada tugas akhir ini, matriks akan dinotasikan dengan dengan huruf kapital tebal, dan vektor akan dinotasikan dengan huruf kecil tebal, sedangkan elemen dari matriks dan vektor dinotaskan dengan huruf kecil tipis. Berikut adalah beberapa definisi dari bentuk-bentuk matriks :

Definisi 2.1

Matriks **A** berukuran mxm dikatakan matriks simetris jika **A**=**A'**.

Definisi 2.2

Matriks A berukuran mxm dikatakan matriks orthogonal jika **AA'=I** dan dapat dinyatakan bahwa $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}'$.

Definisi 2.3

Vektor yang tiap elemennya hanya bernilai 1 disebut *summing vectors* dan dinotasikan dengan *e* .

Contoh *summing vectors* adalah $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definisi 2.4

Trace dari matriks bujur sangkar **A** = $[a_{ij}]$ adalah penjumlahan dari elemen-elemen diagonalnya atau Tr(**A**)=$\sum a_{ii}$.

Definisi 2.5

Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah vektor-vektor tak nol maka persamaan vektor

$c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_na_n = 0$

mempunyai paling tidak satu penyelesaian, yaitu

$c_1=0, c_2=0, \ldots, c_n=0$.

Jika ini adalah satu-satunya penyelesaian, maka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ disebut *linearly independent*. Jika ada penyelesaian lainnya, maka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ disebut *linearly dependent*.

Definisi 2.6

Rank dari suatu matriks **A** didefinisikan sebagai berikut

Rank (**A**) = banyaknya baris yang *linearly independent* pada **A** = banyaknya kolom yang *linearly independent* pada **A**

Definisi 2.7

Jika **A** matriks berukuran nxp dan memiliki rank yang merupakan nilai terkecil antara n dan p maka **A** memiliki *full rank*.

Definisi 2.8

Misalkan **A** berukuran mxm merupakan matriks simetris. Maka **A** adalah matriks definit positif jika dan hanya jika untuk sembarang vektor **x** yang bukan 0 berlaku

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$$

2.1.2 *Transpose* Matriks

Transpose dari suatu matriks **A** didapat dengan cara menukarkan baris dengan kolom dari matriks **A** tersebut ataupun sebaliknya. Notasi dari *transpose* matriks **A** adalah $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ atau **A'**. Sehingga, jika matriks **A** berukuran mxn, yang entri-entrinya dinotasikan dengan a_{ij}, maka **A'** adalah matriks yang berukuran nxm, dan entri ke (i,j) dari **A'** adalah a_{ji}.

Teorema 2.1

Misalkan p dan q adalah sembarang skalar, A dan B adalah matriks. Maka :

1. (p **A**)' = p **A'**
2. (**A**')' = **A**
3. (p **A** + q **B**)' = p **A' ** + q **B'**
4. **(AB)' ** = **B'A'**

2.1.3 *Invers* Matriks

Definisi 2.9

Suatu matriks **B** berukuran mxm dikatakan *invers* dari matriks **A** yang juga berkuran mxm jika **AB** = **BA** = **I** terpenuhi. Jika matriks **B** ada, maka matriks **B** dapat dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{-1}$ (invers dari **A**). Matriks $\mathbf{A}^{-1}$ ada jika dan hanya jika matriks **A** *nonsingular*. Jika matriks $\mathbf{A}^{-1}$ ada, maka berlaku $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Catatan : *invers* dari suatu matriks persegi adalah tunggal.

2.1.4 Turunan Matriks

Teorema 2.2

Jika $\mathbf{a}' = [\mathrm{a}_1 \quad \mathrm{a}_2 \quad \ldots \quad \mathrm{a}_n]$ adalah vektor baris dan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix}$$

maka

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_n \end{bmatrix}$$

Bukti :

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = [\mathrm{a}_1 \quad \mathrm{a}_2 \quad \ldots \quad \mathrm{a}_n] \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix} = [\mathrm{a}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_n\mathrm{x}_n]$$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\mathrm{a}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_n\mathrm{x}_n)}{\partial \mathrm{x}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(\mathrm{a}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_n\mathrm{x}_n)}{\partial \mathrm{x}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

Teorema 2.3

Jika **X** adalah matriks kolom berukuran nx1, dan **A** adalah matriks berukuran nxn. **X'AX** adalah

$$\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} = [\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2 \quad \ldots \quad \mathrm{x}_n] \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \ldots & \mathrm{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{a}_{n1} & \mathrm{a}_{n2} & \ldots & \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix}$$

dimana A adalah matriks simetris. Maka

$$\frac{\boldsymbol{\partial}(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{X}} = 2\mathbf{A}\mathbf{X}$$

Bukti :

$$\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} = [\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2 \quad \ldots \quad \mathrm{x}_n] \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \ldots & \mathrm{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{a}_{n1} & \mathrm{a}_{n2} & \ldots & \mathrm{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{AX} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{ii}x_i^2 + 2x_i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{h\neq i}\sum_{j\neq i} a_{hj}\,x_hx_j$$

turunkan terhadap x elemen ke-k, didapat:

$$\frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i$$

untuk k=1,…,n menghasilkan

$$\frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n})x_1 + (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n) \\ (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n})x_2 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n) \\ \vdots \\ (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn})x_n + (a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 \ldots + a_{nn}\,x_n \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{AX} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}})\mathbf{X}$$

Karena A matriks simetris, dimana A’=A

Maka didapat

$$\frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{AX})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{AX} = \mathbf{2AX}$$

(terbukti)

2.2 *Kronecker Product*

Definisi 2.10

Misalkan **A** adalah matriks berukuran p x q dan **B** adalah matriks berukuran mxn. Maka *kronecker product* dari matriks **A** dan **B,** adalah sebuah matriks berukuran pm x qn, yang dinotasikan sebagai **A**⊗**B**, didefinisikan sebagai :

$$\mathbf{A}_{pxq} \otimes \mathbf{B}_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1q}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2q}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}\mathbf{B} & a_{p2}\mathbf{B} & \dots & a_{pq}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Contoh :

Misalkan matriks **A** berukuran 2x3 dan matriks **B** berukuran 2x1, yaitu :

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$

Maka,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & a_{12}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & a_{13}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \\ a_{21}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & a_{22}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} & a_{23}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{13}b_{11} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{13}b_{21} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{23}b_{11} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{23}b_{21} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.4

Misalkan **A**, **B**, dan **C** adalah sembarang matriks. **a** dan **b** adalah sembarang vektor. α dan β adalah sebarang skalar. Maka :

1. $\alpha \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \alpha$
2. $(\alpha\mathbf{A}) \otimes (\beta\mathbf{B}) = \alpha\beta(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$
3. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$; jika **A** dan **B** memliki ukuran yang sama
5. $\boldsymbol{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})$**;** jika **B** dan **C** memliki ukuran yang sama
6. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$
7. $\mathbf{ab}^{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^{\mathbf{T}} = \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{a}$

2.3 Variabel Acak

Misalkan terdapat suatu percobaan acak pelemparan sebuah koin dengan kemungkinan hasil yaitu muka atau belakang. Ruang sampel dari percobaan ini adalah C = {c; c adalah muka atau c adalah belakang}.

Misalkan X adalah sebuah fungsi sedemikian sehingga X(c) = 0 jika c adalah muka dan X(c) = 1 jika c adalah belakang, maka X merupakan sebuah fungsi yang memetakan elemen-elemen himpunan ruang sampel C dengan himpunan bilangan real.

Definisi 2.11

Misalkan sebuah percobaan acak mempunyai ruang sampel C. sebuah fungsi X yang memetakan masing-masing elemen c∈C ke satu dan hanya satu bilangan *real* X(c) = x, disebut variabel acak. Ruang nilai X adalah himpunan bilangan *real* A = {x; x = X(c), c∈C}.

Misalkan X suatu variabel acak dengan pengamatan yang dilakukan sebanyak n kali maka pengamatan tersebut dinotasikan sebagai X_1, X_2, …, X_n . Jika nilai-nilai untuk $X_1=x_1$, $X_2=x_2$, …, $X_n=x_n$ maka X dapat dinotasikan dalam bentuk vektor sebagai berikut.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2.4 Ekspektasi, Variansi, Kovariansi, dan Korelasi

Misalkan X suatu variabel acak yang memiliki sifat :

- Untuk X diskret, $\sum_x |x| f(x)$ konvergen ke suatu limit berhingga
- Untuk X kontinu, $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ konvergen ke suatu limit berhingga

maka nilai ekspektasi dari variabel random X didefinisikan sebagai :

$$\mathrm{E(X)} = \sum_x x\, f(x)\,, \text{untuk X diskret}$$

$$\text{atau } \mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx \;\; \text{untuk X kontinu}$$

Definisi 2.12

Dengan definisi ekspektasi yang telah dijelaskan, momen ke-k dari distribusi X didefinisikan sebagai $E(X^k)$.

Misalkan X memiliki mean μ maka E(X)= μ

Sifat-sifat ekspektasi :

1. Sifat 1 :

Misalkan X dan Y merupakan variabel acak maka

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

2. Sifat 2 :

Misalkan X suatu variabel acak dan k suatu konstanta maka

$$E(kX) = kE(X)$$

3. Sifat 3 :

Misalkan X dan Y merupakan variabel acak yang independen maka

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Misalkan X suatu variabel acak dengan mean μ maka variansi dari X didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\text{var}(X) = \sigma_X^2 &= E([X-\mu]^2)\\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)\\ &= E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2)\\ &= E(X^2) - 2[E(X)][E(X)] + [E(X)]^2\\ &= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

Misalkan X adalah variabel acak dengan mean μ_x dan variansi σ_X^2 sedangkan Y adalah variabel acak dengan mean μ_y dan variansi σ_y^2 maka kovariansi X dan Y didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\text{cov}[X,Y] &= E\left([X-\mu_x]\left[Y-\mu_y\right]\right)\\ &= E(XY - X\mu_y - Y\mu_x + \mu_x\mu_y)\\ &= E(XY) - E\left(X\mu_y\right) - E(Y\mu_x) + \mu_x\mu_y\\ &= E(XY) - \mu_y E(X) - \mu_x E(Y) + \mu_x\mu_y\\ &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)\\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

Sifat-sifat variansi

1. Sifat 4

Misalkan X suatu variabel acak dan a suatu konstanta maka

$$\mathrm{var}(aX) = a^2 \mathrm{var}(X)$$

2. Sifat 5

Misalkan X dan Y suatu variabel acak maka

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y)$$

X dan Y merupakan variabel acak yang tidak berkorelasi jika dan hanya jika cov(X,Y)=0

Bukti :

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

dengan ρ merupakan koefisien korelasi

Jika cov(X,Y)=0 maka $\rho = 0$ yang mengartikan bahwa X dan Y tidak berkorelasi sedangkan $\rho = 0$ terjadi ketika cov(X,Y)=0

(terbukti)

2.5 Penaksir Konsisten

Definisi 2.13

Suatu statistik $\hat{\theta}$ disebut penaksir yang konsisten untuk parameter θ jika dan hanya jika $\hat{\theta}$ konvergen dalam probabilitas ke parameter θ atau $\mathrm{plim}\hat{\theta} = \theta$

Definisi 2.14

Variabel random X_n yang dilakukan sebanyak n pengamatan disebut konvergen dalam probabilitas ke c atau plim $X_n = c$ jika untuk sembarang bilangan positif $\varepsilon > 0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - c| < \varepsilon) = 1$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0$$

Teorema 2.5

Jika X_n merupakan variabel random yang memiliki mean μ dan variansinya σ_n^2 konvergen ke 0. Maka plim $X_n = \mu$.

Bukti :

Pembuktian ini menggunakan dalil pertidaksamaan Chebyshev. Dalil tersebut berisi sebagai berikut.

Misalkan X merupakan variabel random dengan mean μ dan variansi $\sigma^2 < \infty$ maka pertidaksamaan Chebyshev adalah sebagai berikut :

$$\Pr(|X_n - \mu| \geq k\sigma_n) \leq \frac{1}{k^2}$$

atau

$$\Pr(|X_n - \mu| < k\sigma_n) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

dengan k suatu konstanta.

Dari pertidaksamaan Chebyshev diperoleh

$$\Pr(|X_n - \mu| < k\sigma_n) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \qquad (2.1)$$

ambil $\varepsilon = k\sigma_n$ maka $k = \frac{\varepsilon}{\sigma_n}$

Sehingga persamaan (2.1) menjadi:

$$\Pr(|X_n - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}$$

Dengan mengambil limit untuk $n \to \infty$ pada kedua ruas persamaan di atas maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - \mu| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}$$

Karena σ_n^2 konvergen ke 0. Maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - \mu| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty} 1$$

Karena nilai probabilitas adalah dari 0 hingga 1 maka

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Berdasarkan definisi 2.14 maka plim $X_n = \mu$. (terbukti)

2.6 Model Regresi Linier

Model regresi merupakan persamaan yang menggambarkan hubungan antara variabel dependen dengan variabel independen. Jika parameter dalam model regresi berhubungan secara linier dengan variabel dependen maka disebut model regresi linier. Selanjutnya model ini dapat digunakan untuk memprediksi nilai variabel dependen apabila diberikan nilai dari variabel independen. Oleh karena itu taksiran model yang digunakan sebaiknya memenuhi kriteria model yang baik sehingga mampu digunakan sebagai prediksi dengan error yang terkecil.

Misal y_i adalah observasi dari variabel dependen Y untuk pengamatan ke-i, x_{ik} adalah nilai variabel independen ke-k untuk pengamatan ke-i dan ε_i adalah error pengamatan ke-i. Misalkan terdapat K variabel independan dan n pengamatan. Maka model regresi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{gathered} y_1 = x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \cdots + x_{1k}\beta_K + \varepsilon_1 \\ y_2 = x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \cdots + x_{2k}\beta_K + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ y_n = x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \cdots + x_{nk}\beta_K + \varepsilon_n \end{gathered}$$

atau dapat ditampilkan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \tag{2.2}$$

dimana

y : vektor observasi variabel dependen berukuran nx1

X : matriks K variabel independen berukuran nxK

β : vektor parameter berukuran Kx1

u : vektor error berukuran nx1

Untuk menaksir vektor parameter β, salah satu metode penaksiran yang dapat digunakan adalah *Ordinary Least Square* (OLS). Metode penaksiran ini menggunakan prinsip meminimumkan jumlah penyimpangan kuadrat antara nilai prediksi dengan nilai sebenarnya. Untuk mendapat taksiran yang baik dalam menggunakan metode penaksiran ini ada beberapa asumsi yang harus dipenuhi, yaitu:

1. **X** berukuran nxK mempunyai rank K

2. E(**u**|**X**)=0

3. E(**uu'**|X)=$\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{I}$

4.**u**~Normal

Dengan metode OLS diperoleh taksiran untuk β, yaitu :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{2.3}$$

yang merupakan taksiran yang konsisten untuk β.

Bukti :

Berdasarkan definisi tentang penaksir yang konsisten akan dibuktikan bahwa $\text{plim}\,\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$. Dengan mensubsitusikan persamaan (2.2) ke persamaan (2.3) didapatkan bentuk :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u})$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

$$= \mathbf{I}\boldsymbol{\beta} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

$$= \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

Dengan mengambil bentuk probabilitas limit pada kedua ruas tersebut maka diperoleh persamaan

$$\text{plim}\,\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \text{plim}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\text{plim}\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

Untuk mendapatkan hasil $\text{plim}\,\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$ dapat dilakukan dengan membuktikan bahwa $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = \mathbf{0}$. Untuk membuktikan hal ini dapat digunakan teorema 2.5 dengan mencari mean dari $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right)$dan limit dari variansi $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right)$.

Misalkan $\mathbf{x}_i$ adalah vektor baris yang berisi nilai dari variabel-variabel independen untuk pengamatan ke-i, maka

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = \mathbf{E}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{x_1}\\ \mathbf{x_2}\\ \vdots\\ \mathbf{x_n}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\mathbf{u_1}\\ \mathbf{u_2}\\ \vdots\\ \mathbf{u_n}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\frac{1}{\mathrm{n}}\begin{pmatrix}\mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \cdots & \mathbf{x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u_1}\\ \mathbf{u_2}\\ \vdots \\ \mathbf{u_n}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i u_i}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{E}(\mathbf{x_i u_i})$$

dimana

$$\mathbf{E}(\mathbf{x_i u_i}) = \mathbf{cov}(\mathbf{x_i}, \mathbf{u_i}) + \mathbf{E}(\mathbf{x_i})\mathbf{E}(\mathbf{u_i})$$

Jika diasumsikan **u** pada masing-masing observasi tidak berkorelasi dengan **X** maka $\mathbf{cov}(\mathbf{x_i}, \mathbf{u_i}) = \mathbf{0}$. Karena diasumsikan bahwa E(**u**|**X**)=**0** mengakibatkan $\mathbf{E}(\mathbf{x_i})\mathbf{E}(\mathbf{u_i}) = \mathbf{0}$ **.**

Maka $\mathbf{E}(\mathbf{x_i u_i}) = \mathbf{cov}(\mathbf{x_i}, \mathbf{u_i}) + \mathbf{E}(\mathbf{x_i})\mathbf{E}(\mathbf{u_i}) = \mathbf{0}$

Oleh karena itu didapatkan

$$\mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = \mathbf{0}$$

Selanjutnya akan dicari limit dari variansi $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right)$. Karena E(**uu'**|X)=$\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{I}$ maka

$$\mathrm{var}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = \mathbf{E}\left[\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right)\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right)'\right]$$

$$= \mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{u}'\mathbf{X}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{n}^2}\mathbf{E}(\mathbf{X}')\mathbf{E}(\mathbf{uu}')\mathbf{E}(\mathbf{X})$$

$$= \frac{\sigma^2}{\mathrm{n}^2}\mathbf{E}(\mathbf{X}')\mathbf{E}(\mathbf{X})$$

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathrm{var}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) = \mathbf{0}$$

Karena mean dari $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right)$ dan variansinya konvergen ke **0** berdasarkan teorema 2.5 didapatkan hasil bahwa

$$\mathrm{plim}\ \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$$

Berdasarkan definisi maka $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\beta}$.

(terbukti)

2.7 Model Regresi Data Panel

Data panel merupakan gabungan dari data *cross section* dan data runtun waktu, maka model regresi data panel dapat dituliskan sebagai berikut :

$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + u_{it}$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad t = 1, 2, \dots, T$$

dimana :

N : banyaknya observasi

T : banyaknya waktu

NxT : banyaknya data panel

Variabel y_{it} merupakan variabel respon untuk individu ke-i pada waktu ke-t, variabel x_{it} merupakan variabel prediktor individu ke-i pada waktu ke-t, α dan β masing-masing merupakan *intercept* dan parameter regresi data panel, dan u_{it} merupakan komponen error model.

Berdasarkan komponen error u_{it}, model regresi data panel terbagi atas :

1. Model regresi komponen error satu arah

$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + u_{it}$$

$$\text{dimana } u_{it} = \mu_i + v_{it}$$

2. Model regresi komponen error dua arah

$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + u_{it}$$

$$\text{dimana } u_{it} = \mu_i + \lambda_t + v_{it}$$

diketahui bahwa μ_i merupakan pengaruh yang tidak terobservasi dari individu ke-i tanpa dipengaruhi faktor waktu, misalkan kemampuan atau keunggulan khusus dari suatu individu yang tidak dimiliki oleh individu lainnya. λ_t merupakan pengaruh yang tidak terobservasi dari waktu ke-t tanpa dipengaruhi faktor individu, misalkan pada suatu waktu tertentu ada peristiwa yang tidak terobservasi yang mengakibatkan hasil observasi menjadi tidak lazim dari waktu sebelumnya. v_{it} merupakan error yang benar-benar tidak diketahui dari individu ke-i pada waktu ke-t.

Berdasarkan asumsi pengaruh atau *effects* yang digunakan pada model regresi data panel, model regresi data panel dibagi menjadi 2 :

1. *Fixed effects model*

Pada *fixed effects model* untuk data panel, pemilihan individu dan waktu ditentukan secara *fixed* oleh peneliti, sehingga *effects* hanya sebatas pada individu dan waktu yang ditentukan tersebut. Dengan demikian, *effects* dari individu dan waktu diasumsikan sebagai *fixed* parameter dan hasil taksirannya berupa suatu konstanta yang merupakan salah satu komponen pembentuk *intercept* pada model. Karena itu pada *fixed effects model* untuk data panel, perbedaan karakteristik individu dan waktu diakomodasikan pada *intercept* sehingga *intercept*nya berubah antar individu dan waktu. Maka *fixed effects model* untuk data panel dengan komponen error satu arah adalah sebagai berikut :

$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + u_{it}$$
$$\text{dimana } u_{it} = \mu_i + v_{it}$$
$$v_{it} \sim IID(0, \sigma_V^2)$$

2. *Random effects model*

Pada *random effects model* untuk data panel, pemilihan individu dan waktu diakukan secara acak, sehingga *effects* dari indvidu dan waktu diasumsikan merupakan variabel acak. Karena itu pada *random effects model* untuk data panel, perbedaan karakteristik individu dan waktu diakomodasikan pada error dari model. Maka *random effects model* untuk data panel dengan komponen error satu arah adalah sebagai berikut:

$$y_{it} = \alpha + \beta x_{it} + u_{it}$$
$$\text{dimana } u_{it} = \mu_i + v_{it}$$
$$\mu_i \sim IID\left(0, \sigma_\mu^2\right) ;\; v_{it} \sim IID(0, \sigma_V^2)$$

Berdasarkan kelengkapan data, data panel juga dapat dibedakan menjadi data panel lengkap dan data panel tidak lengkap. Pada data panel lengkap setiap individu terobservasi pada kurun waktu yang sama. Sedangkan pada data panel tidak lengkap, setiap individu terobservasi pada kurun waktu yang berbeda-beda.

2.8 Model Dinamis

Model dinamis merupakan salah satu alat analisis yang dapat digunakan untuk mengevaluasi dampak jangka pendek dan jangka panjang dari suatu kebijakan ekonomi atau aktivitas bisnis. Sebagai contoh : pemerintah menetapkan kebijakan menaikkan harga pupuk, akan dilihat apakah kebijakan tersebut memberi pengaruh terhadap penawaran beras. Dalam sektor pertanian dampak dari suatu kebijakan yang ditetapkan pemerintah saat ini sering baru terlihat beberapa bulan bahkan beberapa tahun kemudian (dampak jangka panjang). Hal ini dapat disebabkan karena aktivitas pertanian mempunyai tenggat waktu (*time lag*) dari mulai pengambilan keputusan produksi sampai realisasi produksi. Oleh sebab itu model dinamis sangat cocok diaplikasikan dalam menganalisis pengaruh dari kebijakan ini. Ciri dari model dinamis adalah adanya *lag* dari variabel dependen, hal ini disebabkan faktor *habits formation* (kebiasaan).

2.9 Model Spasial Dependen

Pada analisis regresi sering kali dijumpai adanya ketergantungan antar lokasi (dependensi spasial) pada nilai observasinya. Model regresi yang memperhatikan efek dependensi spasial ini disebut model spasial dependen.

Terdapat dua jenis dependensi spasial yaitu spasial *lag* dan spasial error. Ada kemungkinan suatu data memenuhi kedua karakteristik dependensi ini.

Spasial *lag* muncul akibat adanya ketergantungan nilai variabel dependen pada suatu lokasi dengan nilai dari variabel dependen lokasi lain yang berhubungan dengannya. Dengan kata lain misalkan lokasi i berhubungan dengan lokasi j maka nilai variabel dependen pada lokasi i merupakan fungsi dari nilai variabel dependen pada lokasi j dengan $i \neq j$. Model yang memperhatikan kondisi ini disebut model spasial *lag*.

Misalkan nilai y_i adalah nilai variabel dependen pada lokasi ke-i, x_{ik} adalah nilai variabel independen ke-k pada lokasi ke-i, w_{ij} adalah bobot yang menggambarkan hubungan antara lokasi ke-i dan lokasi ke-j dimana w_{ij} bernilai 0 jika i = j dan u_i merupakan error pada lokasi ke-i.

Misalkan terdapat k variabel independen dan n lokasi pengamatan, maka model spasial *lag* adalah sebagai berikut :

$$y_1 = x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \cdots + x_{1k}\beta_k + \lambda(w_{12}y_2 + w_{13}y_3 + \cdots + w_{1n}y_n) + u_1$$
$$y_2 = x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \cdots + x_{2k}\beta_k + \lambda(w_{21}y_1 + w_{23}y_3 + \cdots + w_{2n}y_n) + u_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \cdots + x_{nk}\beta_k + \lambda\left(w_{n1}y_1 + w_{n2}y_2 + \cdots + w_{n(n-1)}y_{n-1}\right) + u_n$$

Atau dalam bentuk matriks :

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \lambda\mathbf{Wy} + \mathbf{u}$$

y : vektor variabel dependen berukuran nx1

X : matriks k variabel independen berukuran nxk

W : matriks bobot spasial berukuran nxn

β : vektor parameter regresi berukuran kx1

λ : parameter berupa skalar dari spasial *lag*

u : vektor error berukuran nx1

Spasial error muncul akibat adanya ketergantungan nilai error suatu lokasi dengan nilai error pada lokasi lain yang berhubungan dengannya. Hal ini terjadi apabila terdapat variabel-variabel yang mempengaruhi nilai variabel dependen tapi tidak diikutsertakan pada model, berkorelasi antar lokasi. Model yang memperhatikan kondisi ini disebut model spasial error.

Misalkan y_i adalah nilai observasi variabel dependen pada lokasi ke-i, x_{ik} adalah nilai variabel independen ke-k lokasi ke-i, u_i adalah nilai error pada lokasi ke-i, m_{ij} adalah bobot yang menggambarkan hubungan antara lokasi ke-i dan lokasi ke-j dimana m_{ij} bernilai 0 saat i = j dan v_i merupakan inovasi pada lokasi ke-i. Inovasi ini merepresentasikan error untuk model spasial error. Misalkan terdapat n lokasi pengamatan dan k variabel independen, maka model spasial error dapat dituliskan sebagai berikut.

$$y_1 = x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \cdots + x_{1k}\beta_k + u_1$$
$$y_2 = x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \cdots + x_{2k}\beta_k + u_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \cdots + x_{nk}\beta_k + u_n$$

dengan

$$u_1 = \rho(m_{12}u_2 + m_{13}u_3 + \cdots + m_{1n}u_n) + v_i$$
$$u_2 = \rho(m_{21}u_1 + m_{23}u_3 + \cdots + m_{2n}u_n) + v_2$$
$$\vdots$$
$$u_n = \rho(m_{n1}u_1 + m_{n2}u_2 + \cdots + m_{n-1n}u_n) + v_n$$

atau dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$
$$\mathbf{u} = \rho\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

y = vektor observasi variabel dependen berukuran nx1

X = matriks K variabel independen berukuran nxK

u = vektor error berukuran nx1

M= matriks bobot spasial berukuran nxn

ρ = parameter berupa skalar dari spasial error

v = vektor inovasi berukuran nx1

2.10 Metode Instrumental Variabel

Perhatikan model linier sederhana :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

Dimana E(u)=0, cov(x_j,u)=0 , j=1,…k-1 dan x_k berkorelasi dengan u. Dengan kata lain $x_1,\ldots,x_{k-1}$ adalah variabel ekspalanatori eksogen dan x_k adalah variabel eksplanatori endogen.

Pada model ini variabel x_k akan berkorelasi dengan error sehingga cov(x_i, u_i)≠0. Jika hal ini terjadi, maka estimasi OLS untuk β akan menghasilkan taksiran yang bias dan juga tidak konsisten.

Bukti :

$$\hat{\beta}_{OLS} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \qquad \text{dimana } c_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i(\beta_0 + \beta x_i + u_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i\beta x_i + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

$$= \beta_0 \sum_{i=1}^{n} c_i + \beta \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

$$= \beta + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \quad \text{dimana} \sum_{i=1}^{n} c_i = 0, \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 1$$

Kemudian ekspektasikan kedua ruas : $E(\hat{\beta}_{OLS}) = \beta + E(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i)$

Karena x_i berkorelasi dengan u_i yang mengimplikasikan $E(x_i, u_i) \neq 0$. Sehingga $E(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i) \neq 0$, mengakibatkan $E(\hat{\beta}_{OLS}) \neq \beta$.

Selanjutnya akan diperiksa apakah $\hat{\beta}_{OLS}$ adalah taksiran yang konsisten untuk β atau tidak.

$\hat{\beta}_{OLS}$ adalah taksiran yang konsisten untuk β jika $\hat{\beta}_{OLS} - \beta \xrightarrow{p} 0$ atau $\text{plim}_{n\to\infty}(\hat{\beta}_{OLS} - \beta) = 0$ atau menurut definisi konvergen dalam probabilitas, $\lim_{n\to\infty} \Pr(|\hat{\beta}_{OLS} - \beta - 0| < \varepsilon) = 1$

Disini pilih $\varepsilon = k\sigma_{\hat{\beta}_{OLS}-\beta}$, dimana $\sigma_{\hat{\beta}_{OLS}-\beta} = \sqrt{\text{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})u_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)}$ dan

$k^2 \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2_{\hat{\beta}_{OLS}-\beta}}$

Menurut Pertidaksamaan Chebyshev :

$$\Pr(|\hat{\beta}_{OLS} - \beta - 0| < k\sigma_{\hat{\beta}_{OLS}-\beta}) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr(|\hat{\beta}_{OLS} - \beta - 0| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2_{\hat{\beta}_{OLS}-\beta}}{\varepsilon^2}$$

Dengan mengambil limit untuk n→∞ pada kedua ruas persamaan diatas maka diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|\hat{\beta}_{OLS} - \beta - 0| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2_{\hat{\beta}_{OLS}-\beta}}{\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2_{\hat{\beta}_{OLS}-\beta}}{\varepsilon^2} \neq 0$$

$\lim_{n\to\infty} \Pr(|\hat{\beta}_{OLS} - \beta - 0| < \varepsilon) \neq 0.$

Maka, $\hat{\beta}_{OLS}$ bukan taksiran yang konsisten untuk β.

Metode instrumental variabel merupakan metode yang bertujuan menghilangkan efek variabel ekspalanatori endogen dalam model sehingga taksiran parameter yang didapat bersifat *unbiased* dan konsisten.

Untuk menggunakan metode ini dibutuhkan suatu variabel yang disebut sebagai variabel instrumen. Variabel instrumen (misal z_1) harus memenuhi dua syarat berikut :

1. z_1 tidak berkorelasi dengan error

   $\mathrm{Cov}(z_1, u) = 0$

2. z_1 berkorelasi dengan x_k.

 Proyeksi linear x_k terhadap keseluruhan variabel :

$$x_k = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \cdots + \delta_{K-1} x_{K-1} + \theta_1 z_1 + r_k$$

Dimana $E(r_k)=0$ dan r_k tidak berkorelasi dengan $x_1,\ldots,x_{k-1}$, dan z_1.

Syarat yang harus dipenuhi agar z_1 berkorelasi dengan x_k adalah : $\theta_1 \neq 0$

Jika z_1 memenuhi kedua syarat tersebut maka z_1 merupakan variabel instrumental yang tepat untuk x_k. Karena $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ tidak berkorelasi dengan u maka $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ juga berperan sebagai variabel instrumen untuk masing-masing variabel itu sendiri. Dengan kata lain variabel instrumental terdiri atas seluruh variabel eksogen dan instumen untuk variabel endogen eksplanatori.

Variabel instrumental yang sesuai menjadi : $\boldsymbol{z} = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, z_1)$

2.10.1 *System Instrumental Variable* (SIV) *Estimator*

Asumsi –asumsi dalam SIV (*System Instrumental Variable*) yang dibutuhkan untuk mengestimasi $\boldsymbol{\beta}$:

Assumption SIV 1 : $\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Karena $\mathrm{cov}(x_j, u) = 0$ dan $\mathrm{Cov}(\mathbf{z}, u) = 0$ mengakibatkan,

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Kalikan model dengan $\mathbf{z}'$

$$\mathbf{z}'\mathbf{y} = \mathbf{z}'\mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}'\mathbf{u}$$

Model di atas dalam bentuk ekspektasinya adalah

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{y}) = \mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{u})$$

maka

$$\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{y}) = \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{x}) \qquad \text{(a)}$$

Dimana $\mathrm{E}(\mathbf{z}'\mathbf{x})$ berukuran KxK dan $\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{y})$ berukuran Kx1.

Assumption SIV 2 : rank ($\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{x})$=K)

Persamaan (a) akan memiliki solusi yang unik jika $\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{x})^{-1}$ ada. Suatu matriks persegi akan memiliki invers jika rank dari matriks tersebut sama dengan ordernya. Maka persamaan (a) akan memiliki solusi yang unik jika dan hanya jika rank ($\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{x})$=K).

Maka persamaan (a) akan memiliki solusi :

$$\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{E}(\mathbf{z}'\mathbf{y})$$

Untuk sampel acak $\{(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_i}, \mathrm{z_1}): \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{N}\}$ taksiran $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{z}_\mathbf{i}'\mathbf{x}_\mathbf{i}\right)^{-1} \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{z}_\mathbf{i}'\mathbf{y}_\mathbf{i}\right)$$

Persamaan di atas disebut sebagai *System Instrumental Variable* (SIV) *estimator.*

2.11 Generalized Method of Moments

Generalized Method of Moment (GMM) merupakan pendekatan general dan modern pada sistem estimasi dengan variabel instrumental. Metode ini dikembangkan oleh Hansen (1982) dan telah ditunjukkan bahwa metode momen dapat diaplikasikan pada berbagai bidang ekonometri.

GMM mensyaratkan sejumlah momen kondisi yang harus dipenuhi model. Momen kondisi merupakan fungsi dari parameter model dan ekspektasinya bernilai nol saat nilai parameternya benar. Metode GMM kemudian akan meminimumkan fungsi kuadratik atau fungsi objektif dari momen sampel.

Di bawah asumsi SIV 1 dan SIV 2, parameter model (β) yang merupakan vektor (Kx1) adalah solusi unik untuk momen kondisi dari populasi,

$$\mathbf{E}\big(\mathbf{g}_\mathbf{i}(\boldsymbol{\beta})\big) = \mathbf{E}(\mathbf{Z}_\mathbf{i}'\mathbf{u}_\mathbf{i}) = \mathbf{E}\big(\mathbf{Z}_\mathbf{i}'(\mathbf{y}_\mathbf{i} - \mathbf{X}_\mathbf{i}\boldsymbol{\beta})\big) = \mathbf{0}$$

yang berkorespondensi dengan momen kondisi dari sampel:

$\bar{\mathbf{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{'}(\mathbf{y}_{\mathbf{i}} - \mathbf{X}_{\mathbf{i}}\widehat{\boldsymbol{\beta}})$

Ide dasar dari GMM adalah memilih estimator untuk $\boldsymbol{\beta}$ sehingga $\bar{\mathbf{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}.$

- Jika L=K , dimana L adalah banyak kolom pada matriks variabel instrumen dan K adalah banyak banyak baris pada $\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}$ maka jumlah vektor instrumen pada $\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}$ adalah sama dengan jumlah parameter pada $\boldsymbol{\beta}$. Sehingga $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{\prime}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}$ merupakan matriks berukuran KxK, dan jika $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{\prime}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}$ matriks nonsingular maka :

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{\prime}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}\right)^{-1} \left(\mathbf{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{\prime}\mathbf{y}_{\mathbf{i}}\right)$$

- Jika L>K, kolom baris pada matriks instrumen lebih banyak dibandingkan dengan jumlah parameter yang akan ditaksir, sehingga memilih $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ menjadi lebih sulit. Pada kasus ini, definisikan matriks bobot $\widehat{\mathbf{W}}$, suatu matriks simetris berukuran LxL dan kemudian bangun suatu fungsi GMM yang merupakan fungsi kuadratik dari momen kondisi. Fungsi obyektif GMM ialah sebagai berikut :

$$\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \bar{\mathbf{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})^{'}\, \widehat{\mathbf{W}}\, \bar{\mathbf{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

Taksiran GMM untuk $\boldsymbol{\beta}$ merupakan suatu taksiran ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}$) yang meminimumkan $\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$.

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \widehat{\boldsymbol{\beta}}} = 0$$

Maka

$$\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \left[\mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathbf{Z}_{\mathrm{i}}^{'}(\mathbf{y}_{\mathrm{i}} - \mathbf{X}_{\mathrm{i}}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right]^{'} \widehat{\mathbf{W}} \left[\mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathbf{Z}_{\mathrm{i}}^{'}(\mathbf{y}_{\mathrm{i}} - \mathbf{X}_{\mathrm{i}}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right]$$

$$= \left[\mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathbf{Z}_{\mathrm{i}}^{'}\mathbf{y}_{\mathrm{i}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{i}}^{'}\mathbf{X}_{\mathrm{i}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]^{'} \widehat{\mathbf{W}} \left[\mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{'}(\mathbf{y}_{\mathbf{i}} - \mathbf{X}_{\mathbf{i}}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right]$$

$$= \left[\mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{y}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{'}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}\right] \widehat{\mathbf{W}} \left[\mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{y}_{\mathbf{i}} - \mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]$$

$= \mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{y}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}\, \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{y}_{\mathbf{i}} - \mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{y}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}\, \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{'}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}\widehat{\mathbf{W}}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{y}_{\mathbf{i}} +$
$\mathrm{N}^{-1} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{'}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}\, \widehat{\mathbf{W}}\mathbf{Z}_{\mathbf{i}}^{'}\mathbf{X}_{\mathbf{i}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

Karena $N^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{y_i'Z_i\widehat{W}Z_i'X_i\widehat{\beta}}$ berukuran (1x1) atau skalar dan transposnya $\left(N^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{y_i'Z_i\widehat{W}Z_i'X_i\widehat{\beta}}\right)' = N^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\widehat{\beta}'X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'y_i}$ juga skalar yang sama, maka

$$\mathbf{J(\widehat{\beta})} = N^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{y_i'Z_i\widehat{W}Z_i'y_i} - N^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{2\widehat{\beta}'X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'y_i} + N^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\widehat{\beta}'X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'X_i\widehat{\beta}}$$

$$\frac{\partial\mathbf{J(\widehat{\beta})}}{\partial\mathbf{\widehat{\beta}}} = -N^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{2X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'y_i} + N^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{2X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'X_i\widehat{\beta}} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'y_i} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'X_i\widehat{\beta}}$$

$$\mathbf{\widehat{\beta}} = \left[\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'X_i}\right]^{\mathbf{-1}}\left[\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{X_i'Z_i\widehat{W}Z_i'y_i}\right]$$

2.12 Teorema Limit Untuk Sampel Acak

Teorema *Weak Law of Large Number* (WLLN)

Jika $X_1, X_2,\ldots,X_n$ barisan variabel acak i.i.d memiliki mean yang sama μ dan variansi $\sigma^2 < \infty$. Misal $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{N}X_i$. Maka

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

Bukti:

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Menggunakan pertidaksamaan Chebyshev pada $\overline{X}_n$

$$\Pr(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1 - \Pr(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(n\varepsilon)^2}$$

untuk $n \to \infty$ maka $\Pr(|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1$

Berdasarkan definisi konvergen dalam probabilitas

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{plim}}\ \overline{X}_n = \mu \text{ atau } \overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

2.13 Matriks Bobot Spasial

Matriks bobot spasial (**W**) merupakan matriks berukuran nxn yang menggambarkan ketergantungan suatu lokasi dengan lokasi sekitarnya. Oleh karena itu diasumsikan bahwa elemen diagonal matriks bobot spasial **W** adalah sama dengan 0. Sedangkan, $\mathrm{w_{ij}}$ merupakan elemen dari matriks bobot spasial (**W**) yaitu elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j. $\mathrm{w_{ij}}$ ini menggambarkan hubungan lokasi ke-i dengan lokasi ke-j, dimana $\mathrm{w_{ij}} > 0$ bila lokasi ke-i berhubungan dengan lokasi ke-j.

Matriks bobot spasial dapat ditentukan berdasarkan dua kategori, yaitu berdasarkan jarak dan *contiguity* (hubungan). Berikut adalah penjelasan dari masing-masing kategori:

1. Bobot jarak

Dalam hal ini, penentuan entri-entri dari matrik bobot spasial dapat direpresentasikan dalam bentuk fungsi jarak. Pada prinsipnya, bobot jarak antara suatu lokasi dengan lokasi di sekitarnya ditentukan oleh jarak antara kedua daerah tersebut. Semakin pendek jarak antar lokasi, maka bobot yang diberikan akan semakin besar. Hal ini dikarenakan lokasi yang jaraknya berdekatan umumnya mempunyai karakteristik yang mirip, berbeda dengan lokasi yang yang jaraknya jauh, umumnya kerakteristik antar lokasi ini akan lebih bervariasi, sehingga bobot yang diberikan akan semakin kecil.

Selanjutnya, akan dijelaskan beberapa jenis penentuan matriks bobot berdasarkan jarak :

a) Fungsi jarak menurun

$$\mathrm{w_{ij}} = \begin{cases} \mathrm{d_{ij}^{z}} \text{ jika } \mathrm{d_{ij}} \leq \mathrm{D}, \text{dan } \mathrm{z} < 0 \\ \quad 0 \text{ jika } \mathrm{d_{ij}} > D \end{cases}$$

b) K-lokasi terdekat

Pada metode ini, peneliti dapat menentukan sendiri lokasi ke-j, sebanyak k-lokasi, yang merupakan lokasi terdekat di sekitar lokasi ke-i.

c) Invers dari jarak

$$w_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{d_{ij}} & \text{jika } d_{ij} \leq D, \text{dan } z < 0 \\ & 0 \text{ jika } d_{ij} > D \end{cases}$$

dimana :

D merupakan suatu limit dari jarak yang ditentukan

d_{ij} merupakan jarak antara lokasi ke-i dan lokasi ke-j

2. Bobot *contiguity*

Jenis-jenis penentuan matriks bobot berdasarkan bobot *contiguity* :

a) Rook contiguity

Didefinisikan sebagai :

$w_{ij} = 1$ jika lokasi-i dan lokasi-j memiliki *common edge*

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

b) Bishop contiguity

Didefinisikan sebagai :

$w_{ij} = 1$ jika lokasi-i dan lokasi-j memiliki *common verteks*

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

c) Queen contiguity

Didefinisikan sebagai :

$w_{ij} = 1$ jika lokasi-i dan lokasi-j memiliki *common edge* atau *common verteks*

$w_{ij} = 0$ jika lainnya

Dalam menentukan suatu matriks bobot, tidak ada ketentuan harus menggunakan metode tertentu untuk kasus tertentu.

BAB 3
PENAKSIRAN PARAMETER PADA MODEL DATA PANEL SPASIAL ERROR DINAMIS

Pada bab ini akan dibahas bagaimana mencari taksiran parameter pada model data panel spasial dinamis yang dikembangkan oleh Arellano dan Bond dan metode tambahan pendekatan Kapoor, Kelejian, dan Prucha. Penaksiran dilakukan pada model data panel spasial dinamis untuk komponen error satu arah dengan efek acak dan memuat komponen spasial error.

3.1 Model Regresi Data Panel Spasial Error Dinamis Untuk Komponen Error Satu Arah

Model regresi data panel spasial error dinamis merupakan suatu model regresi data panel dengan *lag* dari variabel dependen, spasial error dan variabel independen sebanyak K sebagai variabel eksplanatori dalam model.

Model regresi data panel spasial dinamis dengan efek tetap komponen error satu arah :

$$y_{i,t} = \lambda\, y_{i,t-1} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{i,t,k} + u_{i,t} \qquad (3.1)$$

$$u_{i,t} = \rho \mathbf{W}_N u_{i,t} + v_{i,t} \qquad (3.2)$$

dimana :

$y_{i,t}$: variabel dependen untuk individu ke-i pada waktu ke-t

$y_{i,t-1}$: variabel dependen dengan *lag* 1 yang berperan sebagai variabel eksplanatori endogen

$x_{i,t,k}$: variabel eksplanatori eksogen ke-k individu ke-i pada waktu ke-t

$u_{i,t}$: vektor error untuk individu ke-i pada waktu ke-t

λ : koefisien korelasi antara $y_{i,t}$ dengan $y_{i,t-1}$

ρ : koefisien *autoregressive* spasial error

$\mathbf{W}_N$: matriks bobot spasial error

β_k : parameter untuk x_k

i : 1,…,N

t : 2,…,T

k :1,…,K

dengan komponen error satu arah :

$$v_{i,t} = \eta_i + \varepsilon_{i,t} \tag{3.3}$$

dimana :

η_i : pengaruh yang tidak terobservasi dari individu ke-i tanpa dipengaruhi faktor waktu

$\varepsilon_{i,t}$: pengaruh yang benar-benar tidak dikeahui dari individu ke-i pada waktu ke-t

Asumsi-asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut :

Asumsi 3.1 Untuk komponen error :

a) $\varepsilon_{i,t}$ ~ IID $(0, \sigma_\varepsilon^2)$

b) η_i~ IID $(0, \sigma_\eta^2)$

c) η_i dan $\varepsilon_{i,t}$ saling bebas

Asumsi 3.2 Untuk koefisien *autoregressive* dan matriks bobot :

a) Semua elemen diagonal dari $\mathbf{W}_N$ adalah 0

b) $|\rho| < 1$ dan $(\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)$ merupakan matriks *nonsingular*

Asumsi 3.3 Untuk variabel eksplanatori eksogen

a) matriks **X** memiliki *full coloumn rank*

b) $x_{i,t,k}$ tidak berkorelasi dengan error.

Jika persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3) digabung, model menjadi :

$$y_{i,t} = \lambda\, y_{i,t-1} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k x_{i,t,k} + \rho W_N u_{i,t} + \eta_i + \varepsilon_{i,t} \tag{3.4}$$

Yang bila dijabarkan akan menjadi bentuk seperti di bawah ini :

$$y_{1,2} = \lambda y_{1,1} + \left(x_{1,2,1}\beta_1 + \cdots + x_{1,2,k}\beta_K\right) + \rho\left(w_{1,1}u_{1,2} + \cdots + w_{1,N}u_{N,2}\right) + \eta_1 + \varepsilon_{1,2}$$

$$y_{1,3} = \lambda y_{1,2} + \left(x_{1,3,1}\beta_1 + \cdots + x_{1,3,k}\beta_K\right) + \rho\left(w_{1,1}u_{1,3} + \cdots + wu_{N,3}\right) + \eta_1 + \varepsilon_{1,3}$$

$\vdots$

$$y_{1,T} = \lambda y_{1,T-1} + (x_{1,T,1}\beta_1 + \cdots + x_{1,T,k}\beta_K) + \rho(w_{1,1}u_{1,T} + \cdots + w_{1,N}u_{N,T}) + \eta_1 + \varepsilon_{1,T}$$

$$y_{2,2} = \lambda y_{2,1} + (x_{2,2,1}\beta_1 + \cdots + x_{2,2,k}\beta_K) + \rho(w_{2,1}u_{1,2} + \cdots + w_{2,N}u_{N,2}) + \eta_2 + \varepsilon_{2,2}$$

$$y_{3,2} = \lambda y_{3,1} + (x_{3,2,1}\beta_1 + \cdots + x_{3,2,k}\beta_K) + \rho(w_{3,1}u_{1,2} + \cdots + w_{3,N}u_{N,2}) + \eta_3 + \varepsilon_{3,2}$$

$$\vdots$$

$$y_{N,2} = \lambda y_{N,1} + (x_{N,2,1}\beta_1 + \cdots + x_{N,2,k}\beta_K) + \rho(w_{N,1}u_{1,2} + \cdots + w_{N,N}u_{N,2}) + \eta_N + \varepsilon_{N,2}$$

$$\vdots$$

$$y_{N,T} = \lambda y_{N,T-1} + (x_{N,T,1}\beta_1 + \cdots + x_{N,T,k}\beta_K) + \rho(w_{N,1}u_{1,T} + \cdots + w_{N,N}u_{N,T}) + \eta_N + \varepsilon_{N,T}$$

Atau bila dinyatakan dalam bentuk notasi matriks menjadi :

$$\mathbf{y_t} = \lambda\,\mathbf{y_{t-1}} + \mathbf{X_t}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u_t} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{u_t} = \rho\mathbf{W_N}\mathbf{u_t} + \mathbf{v_t} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{v_t} = \mathbf{I_N}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t} \tag{3.7}$$

dimana :

$\mathbf{y}_t$: vektor observasi variabel dependen berukuran Nx1

$\mathbf{y}_{t-1}$: *lag* dari variabel dependen berukuran Nx1

$\mathbf{X}_t$: matriks observasi variabel ekplanatori eksogen berukuran NxK

$\mathbf{v}_t$: vektor error berukuran Nx1 yang independen dan berdistribusi identik

$\mathbf{W}_N$: matriks bobot spasial error berukuran NxN

λ : koefisien korelasi antara $\mathbf{y}_t$ dengan $\mathbf{y}_{t-1}$

ρ : koefisien *autoregressive* spasial error.

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter berukuran Kx1

$\boldsymbol{\eta}$: vektor *individual effect* berukuran Nx1

$\mathbf{I}_N$: matriks identitas berukuran NxN

t : 2, …, T

Persamaan (3.6) dapat dibentuk menjadi persamaan tereduksi :

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)^{-1}\mathbf{v}_t$$

substitusi persamaan (3.7)

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)^{-1}[\mathbf{I}_N\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}_t]$$

Agar lebih sederhana, dapat pula ditulis menjadi :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t\theta + \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)^{-1}[\mathbf{I}_N\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}_t] \tag{3.8}$$

dimana $\mathbf{z}_t \equiv [\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{x}_t]$ menyatakan matriks regresor dan $\boldsymbol{\theta} \equiv [\lambda, \boldsymbol{\beta}']'$ merupakan vektor K+1 parameter.

3.2 Penaksiran Parameter dengan Perluasan Metode Arrelano dan Bond

Perluasan metode Arellano dan Bond (1991) pada model data panel dinamis dilakukan untuk mendapatkan taksiran parameter pada model data panel spasial dinamis yang memuat komponen spasial error. Terdapat 3 tahap kerja untuk mendapatkan taksiran Spasial Arellano dan Bond (SAB). Tahap pertama, dilakukan metode instrumental dan metode Arellano dan Bond dengan prinsip GMM untuk mendapatkan taksiran sederhana dengan mengabaikan efek korelasi spasial error. Pada tahap ini didapat taksiran yang konsisten. Kemudian pada tahap kedua, akan dilakukan perluasan taksiran *Generalized Method of Moments* (GMM) yang didapatkan oleh Kapoor, Kelejian, dan Prucha (2007) untuk menaksir parameter spasial *autoregressive*, sehingga didapat taksiran yang konsisten. Selanjutnya, tahap ketiga, akan diestimasi kembali parameter pada tahap pertama dengan model yang telah ditransformasi Cochrane- Orcutt dan menggunakan hasil yang didapat pada tahap kedua, sehingga didapat taksiran akhir yang konsisten.

3.2.1 Tahap Pertama

Pada tahap pertama, akan dicari taksiran konsisten dari $\boldsymbol{\theta}$ dengan mengabaikan efek korelasi spasial error dengan metode *instrumental variabel* (IV) dan Arellano dan Bond. Untuk menghilangkan efek dari individu $(\boldsymbol{\eta})$ pada persamaan (3.8) dapat dilakukan *first-difference* pada persamaan (3.8) sehingga didapat persamaan baru:

$$\Delta\mathbf{y_t} = \Delta\mathbf{z_t}\theta + \Delta\mathbf{u_t} \tag{3.9}$$

atau

$$\Delta\mathbf{y_t} = \lambda\,\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \Delta\mathbf{x_t}\boldsymbol{\beta} + \Delta\mathbf{u_t} \tag{3.10}$$

dengan $\Delta\mathbf{y_t} \equiv \mathbf{y_t} - \mathbf{y_{t-1}}$, $\Delta\mathbf{z_t} \equiv \mathbf{z_t} - \mathbf{z_{t-1}}$, dan $\Delta\mathbf{u_t} \equiv \mathbf{u_t} - \mathbf{u_{t-1}}$ untuk $\Delta\mathbf{z_t} = [\Delta\mathbf{y_{t-1}}, \Delta\mathbf{x_t}]$ dan t=3,…,T.

Namun masih terdapat permasalahan yakni komponen error $\Delta\mathbf{u_t}$ berkorelasi dengan variabel prediktor $\Delta\mathbf{y_{t-1}}$ sehingga penaksir OLS akan menghasilkan taksiran yang bias dan tidak konsisten (Nismawati, 2010). Oleh karena itu perlu dicari matriks variabel instrumen yang akan berkorelasi dengan variabel dependen pada *first difference* $\Delta\mathbf{y_{t-1}}$, tapi tidak berkorelasi dengan komponen error pada *first difference* (yakni $\Delta\mathbf{u_t}$).

Mutl (2006) menyarankan menggunakan variabel instrumen

$$\mathbf{H}_t = (\mathbf{y_{t-2}}, \Delta\mathbf{x_t})$$

Untuk membuktikan $\mathbf{H}_t$ variabel instrumen yang valid, akan dibuktikan bahwa variabel-variabel tersebut

- Tidak berkorelasi dengan error $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u_t}$
- Berkorelasi dengan regresor $\Delta\mathbf{y_{t-1}}$

Bukti :

- **variabel $\mathbf{y_{t-2}}$**

Lihat persamaan (3.10)

$$\Delta\mathbf{y_t} = \lambda\,\Delta\mathbf{y_{t-1}} + \Delta\mathbf{x_t}\beta + \Delta\boldsymbol{u_t} \;\; ; \;\; t = 3,4,\ldots T$$

$$\mathbf{y_t} - \mathbf{y_{t-1}} = \lambda(\mathbf{y_{t-1}} - \mathbf{y_{t-2}}) + (\mathbf{x_t} - \mathbf{x_{t-1}})\boldsymbol{\beta} \quad + (\mathbf{u_t} - \mathbf{u_{t-1}})$$

untuk t=3

$$\mathbf{y_3} - \mathbf{y_2} = \lambda(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}) + (\mathbf{x_3} - \mathbf{x_2})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{u_3} - \mathbf{u_2})$$

Pada kasus ini, $\mathbf{y_1}$ variabel instrumen yang tepat, karena $\mathbf{y_1}$ berkorelasi dengan $(\mathbf{y_2}-\mathbf{y_1})$, namun tidak berkorelasi dengan komponen error $(\mathbf{u_3}-\mathbf{u_2})$.

untuk t =4

$$\mathbf{y_4}-\mathbf{y_3}=\lambda(\mathbf{y_3}-\mathbf{y_2})+(\mathbf{x_4}-\mathbf{x_3})\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{u_4}-\mathbf{u_3})$$

Pada kasus ini, $\mathbf{y_1}$sama halnya seperti $\mathbf{y_2}$ merupakan variabel instrumen yang tepat, karena berkorelasi dengan variabel $(\mathbf{y_3}-\mathbf{y_2})$, namun tidak berkorelasi dengan komponen error $(\mathbf{u_4}-\mathbf{u_3})$. Sehingga untuk t=4 terdapat penambahan suatu variabel instrumen yang tepat. Lanjutkan penambahan variabel instrumen untuk masing-masing periode, sedemikian sehingga untuk periode T terdapat $(\mathbf{y_1},\mathbf{y_2},\dots,\mathbf{y_{T-2}})$ himpunan variabel instrumen yang tepat.

- **variabel** $\Delta \mathrm{x_t}$

Pada model diasumsikan bahwa untuk setiap t, dimana t= 2, …, T, $\mathbf{x_t}$ tidak berkorelasi dengan $\mathbf{u_t}$. Maka berlaku $\mathrm{cov}(\mathbf{x_t},\mathbf{u_t})=0$; $\mathrm{t}=2,\dots,\mathrm{T}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\Delta\mathrm{x_t},\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}) &= \mathrm{cov}[(\mathbf{x_t}-\mathbf{x_{t-1}}),(\mathbf{u_t}-\mathbf{u_{t-1}})]\\
&= \mathbf{E}[(\mathbf{x_t}-\mathbf{x_{t-1}})'(\mathbf{u_t}-\mathbf{u_{t-1}})]-\mathbf{E}[\mathbf{x_t}-\mathbf{x_{t-1}}]'\mathbf{E}[\mathbf{u_t}-\mathbf{u_{t-1}}]\\
&= \mathbf{E}[(\mathbf{x_t}'\mathbf{u_t})-(\mathbf{x_t}'\mathbf{u_{t-1}})-(\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{u_t})+(\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{u_{t-1}})]\\
&\quad -(\mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'])(\mathbf{E}[\mathbf{u_t}]-\mathbf{E}[\mathbf{u_{t-1}}])\\
&= \mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{u_t}]-\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{u_{t-1}}]-\mathrm{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{u_t}]+\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{u_{t-1}}]-\mathbf{E}[\mathrm{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{u_t}]+\\
&\quad \mathrm{E}[\mathrm{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{u_{t-1}}]+\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{u_t}]-\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{u_{t-1}}]\\
&= (\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{u_t}]-\mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{u_t}])-(\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{u_{t-1}}]-\mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{u_{t-1}}])-\\
&\quad (\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{u_t}]-\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{u_t}])\ +(\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{u_{t-1}}]-\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{u_{t-1}}])\\
&= \mathrm{cov}(\mathbf{x_t},\mathbf{u_t})-\mathrm{cov}(\mathbf{x_t},\mathbf{u_{t-1}})-\mathrm{cov}(\mathbf{x_{t-1}},\mathbf{u_t})+\mathrm{cov}(\mathbf{x_{t-1}},\mathbf{u_{t-1}})=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\Delta\mathbf{x_t}$ tidak berkorelasi dengan $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u_t}$ atau $\mathrm{cov}(\Delta\mathbf{x_t},\Delta\mathbf{u_t})=\mathbf{0}$

Selanjutnya akan dibuktikan $\Delta\mathbf{x_t}$ berkorelasi dengan $\Delta\mathbf{y_{t-1}}$. Diasumsikan bahwa $\mathrm{cov}(\mathbf{x_t},\mathbf{y_t})\neq 0$; $\mathrm{t}=2,3,\dots,\mathrm{T}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\Delta\mathbf{x_t},\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y_{t-1}}) &= \mathrm{cov}[(\mathbf{x_t}-\mathbf{x_{t-1}}),(\mathbf{y_{t-1}}-\mathbf{y_{t-2}})]\\
&= \mathbf{E}[(\mathbf{x_t}-\mathbf{x_{t-1}})'(\mathbf{y_{t-1}}-\mathbf{y_{t-2}})]-\mathbf{E}[\mathbf{x_t}-\mathbf{x_{t-1}}]'\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-1}}-\mathbf{y_{t-2}}]
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{E}[(\mathbf{x_t}'\mathbf{y_{t-1}}) - (\mathbf{x_t}'\mathbf{y_{t-2}}) - (\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{y_{t-1}}) + (\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{y_{t-2}})] -$$
$$(\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'] - \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'])(\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[\mathbf{y_{t-2}}])$$
$$= \mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{y_{t-2}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{y_{t-1}}] + \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{y_{t-2}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-1}}] +$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-2}}] + \quad \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-2}}]$$
$$= (\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-1}}]) - (\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{y_{t-2}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-2}}]) -$$
$$(\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-1}}]) + (\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{y_{t-2}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-2}}])$$
$$= \mathrm{cov}(\mathbf{x_t}, \mathbf{y_{t-1}}) - \mathrm{cov}(\mathbf{x_t}, \mathbf{y_{t-2}}) - \mathrm{cov}(\mathbf{x_{t-1}}, \mathbf{y_{t-1}}) + \mathrm{cov}(\mathbf{x_{t-1}}, \mathbf{y_{t-2}})$$
$$\neq \mathbf{0}.$$

Terbukti bahwa $\Delta\mathbf{x_t}$ berkorelasi dengan $\mathbf{\Delta y_{t-1}}$ atau $\mathrm{cov}(\Delta\mathbf{x_t}, \mathbf{\Delta y_{t-1}}) \neq \mathbf{0}$ Karena variabel- variabel yaitu $\mathbf{y_{t-2}}$ dan $\Delta\mathbf{x_t}$ terbukti tidak berkorelasi dengan error $\mathbf{\Delta u_t}$ dan berkorelasi dengan regresor $\Delta\mathbf{y_{t-1}}$. Maka terbukti bahwa $\mathbf{H_t}$variabel instrumen yang valid

Jadi variabel instrumen $\mathbf{H_t} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_{t-2}}, \Delta\mathbf{x_t})$

Maka, $\mathbf{H_T} = [\mathbf{H_3}, \ldots, \mathbf{H_t}]'$

Contoh untuk T=5

$$\mathbf{H_T} = \begin{bmatrix} \mathbf{y_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta\mathbf{x_3} \\ 0 & \mathbf{y_1} & \mathbf{y_2} & 0 & 0 & 0 & \Delta\mathbf{x_4} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{y_1} & \mathbf{y_2} & \mathbf{y_3} & \Delta\mathbf{x_5} \end{bmatrix}$$

sehingga $\mathbf{H_{Ti}} = [\mathbf{H_{i,3}}, \ldots, \mathbf{H_{i,t}}]'$

Setelah didapat matriks variabel instrumen, digunakan metode penaksiran Arellano dan Bond menggunakan prinsip GMM untuk mendapatkan taksiran yang konsisten. Di bawah asumsi *System Instrumental Variable* (SIV) 1 dan SIV 2, vektor $\boldsymbol{\theta}$ merupakan solusi unik untuk momen kondisi dari populasi,

$$\mathbf{E}(\mathbf{g_i}(\boldsymbol{\theta})) = \mathbf{E}(\mathbf{H_{T_i}}'\Delta\mathbf{u_i}) = \mathbf{E}\left(\mathbf{H_{T_i}}'(\Delta\mathbf{y_i} - \Delta\mathbf{z_i}\boldsymbol{\theta})\right) = \mathbf{0}$$

Momen kondisi sampel :

$$\bar{\mathbf{g}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{N^{-1}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{H_{T_i}}'(\Delta\mathbf{y_i} - \Delta\mathbf{z_i}\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Karena banyak kolom dari matriks variabel instrumen lebih banyak dibandingkan dengan banyak baris pada Δz_i (L>K). Maka fungsi obyektif GMM ialah sebagai berikut:

$$\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \bar{\mathbf{g}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})' \,\widehat{\mathbf{B}}\, \bar{\mathbf{g}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$$

Dimana diasumsikan $\widehat{\mathbf{B}}$ adalah taksiran yang *unbiased* dan konsisten dari matriks bobot B (LxL)

$\mathbf{plim}_{N\to\infty}\, \widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ (asumsi 3.4)

Taksiran GMM untuk $\boldsymbol{\theta}$ merupakan suatu taksiran ($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$) yang meminimumkan $\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$.

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \widehat{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0}$$

Maka

$$\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'(\Delta\mathbf{y_i} - \Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right]' \widehat{\mathbf{B}} \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'(\Delta\mathbf{y_i} - \Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}})\right]$$

$$= \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{y_i} - \mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right]^{-1} \widehat{\mathbf{B}} \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{y_i} - \mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$

$$= \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{y_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}} - \mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\mathbf{z_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right] \widehat{\mathbf{B}} \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{y_i} - \mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right]$$

$$= \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{y_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{y_i}\right) - \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{y_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$
$$- \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\mathbf{z_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{y_i}\right) + \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\mathbf{z_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Karena $\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{y_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ berukuran (1x1) atau skalar dan transposnya

$\left(\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{y_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{z_i}\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)' = \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\mathbf{z_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{y_i}\right)$

juga skalar yang sama, maka fungsi obyektif GMM menjadi

$$\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{y}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{y}_i\right) - 2\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{y}_i\right)$$
$$+\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{z}_i\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Minimumkan $\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$,

$$\frac{\partial\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\widehat{\boldsymbol{\theta}}} =$$
$$-2\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{y}_i\right) + 2\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{z}_i\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0}$$
$$\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{y}_i\right) = \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{z}_i\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Maka didapat *one step consistent estimator*

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{z}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{y}_i\right)\right]$$

Estimator ini merupakan estimator yang konsisten tidak bergantung bagaimana pemilihan matriks bobot $\widehat{\mathbf{B}}$ (LxL).

Akan ditunjukkan $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\theta}$ pada sembarang $\widehat{\mathbf{B}}$.

$$\operatorname*{\mathbf{plim}}_{N\to\infty}\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$$

Bukti :

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{z}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{y}_i\right)\right]$$

Karena $\Delta\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\theta}\Delta\mathbf{z}_i + \Delta\mathbf{u}_i$ maka persamaan di atas menjadi

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta\mathbf{z}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{z}_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\widehat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'(\boldsymbol{\theta}\Delta\mathbf{z}_i + \Delta\mathbf{u}_i)\right)\right]$$

$$= \left[\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}\right)\mathbf{\widehat{B}}\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta z_i}\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}\right)\mathbf{\widehat{B}}\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\boldsymbol{\theta}\mathbf{\Delta z_i}\right)\right]$$

$$+\left[\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}\right)\mathbf{\widehat{B}}\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta z_i}\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}\right)\mathbf{\widehat{B}}\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta u_i}\right)\right]$$

$$= \boldsymbol{\theta}$$

$$+\left[\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}\right)\mathbf{\widehat{B}}\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta z_i}\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}\right)\mathbf{\widehat{B}}\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta u_i}\right)\right]$$

$$\mathbf{plim}\widehat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \boldsymbol{\theta}$$

$$+\left\{\mathbf{plim}\left[\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}\right)\mathbf{\widehat{B}}\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta z_i}\right)\right]^{-1}\mathbf{plim}\left[\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}\right)\mathbf{\widehat{B}}\left(\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta u_i}\right)\right]\right\}$$

Berdasarkan *Weak Law of Large Number* (WLLN)

$$\mathbf{N^{-1}}\textstyle\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}} \rightarrow \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{\Delta z_i' H_T}} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{\Delta z_i' H_{T_i}}) = \mathbf{C}'$$

dan

$$\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta u_i} \rightarrow \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{H_T}'\mathbf{\Delta u}} \equiv \mathbf{E}\left(\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta u_i}\right) = \mathbf{0}$$

Berdasarkan asumsi $\mathbf{\widehat{B}} \overset{p}{\rightarrow} \mathbf{B}$ didapatkan :

$$\begin{aligned}\mathbf{plim}\widehat{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\theta} + (\mathbf{C}'\mathbf{BC})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{B}\left(\mathbf{plim}\,\mathbf{N^{-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{\Delta u_i}\right)\\ &= \boldsymbol{\theta} + (\mathbf{C}'\mathbf{BC})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{B}.\mathbf{0}\\ &= \boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\theta}$ pada sembarang $\mathbf{\widehat{B}}$. Pada tahap ini, sebagai taksiran awal dipilih

$$\mathbf{\widehat{B}} = \mathbf{A_T} = \left(\sum_{\mathbf{i=i}}^{\mathbf{N}}\mathbf{H_{T_i}}'\mathbf{H_{T_i}}\right)^{-1} = (\mathbf{H_T}'\mathbf{H_T})^{-1}$$

Sehingga diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\left(\sum_{i=i}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)^{-1}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta z_i\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\left(\sum_{i=i}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)^{-1}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta y_i\right)\right]$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\left(\sum_{i=i}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta z_i\right)\right]^{-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\Delta z_i'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)\left(\sum_{i=i}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{H}_{\mathbf{T}_i}'\Delta y_i\right)\right]$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\Delta \mathbf{z}'\,\mathbf{H}_\mathbf{T}\,\mathbf{A}_\mathbf{T}\,\mathbf{H}_\mathbf{T}'\Delta\mathbf{z}\right]^{-1}\left[\Delta \mathbf{z}'\,\mathbf{H}_\mathbf{T}\mathbf{A}_\mathbf{T}\mathbf{H}_\mathbf{T}'\Delta\mathbf{y}\right]$$

3.2.2 Tahap Kedua

Pada tahap kedua, akan dilakukan estimasi parameter spasial error ρ pada (3.6) juga σ_ε^2 dan σ_η^2 . Akan digunakan $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{t}$ yang didapat pada tahap pertama dan enam momen kondisi dari Kapoor, Kelejian, dan Prucha (2007) dengan dimodifikasi untuk model dinamis. Metode yang digunakan adalah *Generalized Method of Moments* . Dengan metode penaksiran *Generalized Method of Moments* akan diminimumkan residual dari taksiran momen kondisi.

Misal $\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{t}$ adalah taksiran untuk u_t . Maka berdasarkan persamaan (3.8)

$$\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{t} = \mathbf{y}_\mathbf{t} - \mathbf{z}_t\hat{\boldsymbol{\theta}} \qquad (3.11)$$

dengan

$$\mathbf{u}_\mathbf{t} = \rho\mathbf{W}_\mathbf{N}\mathbf{u}_\mathbf{t} + \mathbf{v}_\mathbf{t}$$

$$\mathbf{v}_\mathbf{t} = \mathbf{I}_\mathbf{N}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{t}$$

dapat juga dinyatakan dengan

$$\mathbf{u} = \rho(\mathbf{I}_\mathbf{T}\otimes\mathbf{W}_\mathbf{N})\,\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

dimana :

$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_\mathbf{1}', \dots, \mathbf{u}_\mathbf{T}']'$ berukuran NTx1

$(\mathbf{I}_\mathbf{T}\otimes\mathbf{W}_\mathbf{N})$ = matriks berukuran NTxNT

$\mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{e}_\mathbf{T}\otimes\boldsymbol{\eta}_\mathbf{N})$ berukuran NTx1

$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_\mathbf{1}', \dots, \mathbf{v}_\mathbf{T}']'$ berukuran NTx1

$\mathbf{e}_\mathbf{T}$ = vektor Tx1 dengan elemen satuan

$\boldsymbol{\eta}_\mathbf{N}$ = vektor Nx1 *individual effects*

Diperkenalkan notasi baru,

$$\bar{\mathbf{u}} = (\mathbf{I_T} \otimes \mathbf{W_N})\mathbf{u}$$
$$\bar{\bar{\mathbf{u}}} = (\mathbf{I_T} \otimes \mathbf{W_N})\bar{\mathbf{u}}$$
$$\bar{\mathbf{v}} = (\mathbf{I_T} \otimes \mathbf{W_N})\mathbf{v}$$

(3.12)

dan matriks transformasi yang digunakan pada komponen error

$$\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}} \equiv \left(\mathbf{I}_{\mathrm{T}} - \frac{\mathbf{J}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{T}}\right) \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}$$
$$\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}} = \frac{\mathbf{J_T}}{\mathbf{T}} \otimes \mathbf{I_N}$$

dimana :

$\mathbf{I_T}$ adalah matriks identitas berukuran TxT.

$\mathbf{J_T} \equiv \mathbf{e_T}.\mathbf{e_T}'$ adalah matriks TxT

Matriks variansi kovariansi dari **v** dapat dinyatakan dalam bentuk matriks transformasi,yaitu:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathbf{v}\mathbf{v}') &= \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_{\mathrm{NT}} + \sigma_\eta^2(\mathbf{J}_{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{N}}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2\, \mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}} + \sigma_1^2\, \mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}} \end{aligned}$$

dimana $\sigma_1^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \mathrm{T}\sigma_\eta^2$

Taksiran GMM spasial didasarkan pada enam momen kondisi dari Kapoor, Kelejian, dan Prucha (2007), yaitu :

$\mathrm{E}(\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{v}) = \mathrm{N}(\mathrm{T}-1)\sigma_\varepsilon^2$

$\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{v}}) = (\mathrm{T}-1)\sigma_\varepsilon^2 \mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_{\mathrm{N}}'\mathbf{W}_{\mathrm{N}})$

$\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{v}) = 0$

$\mathrm{E}(\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{v}) = \mathrm{N}\sigma_{1,\mathrm{N}}^2$

$\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{v}}) = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2.\,\mathrm{tr}(\mathbf{W}_{\mathrm{N}}'\mathbf{W}_{\mathrm{N}})$

$\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{v}) = 0$ (3.13)

(bukti pada lampiran)

jika dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$E\begin{bmatrix} \frac{1}{N(T-1)}\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v} \\ \frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{v}} \\ \frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v} \\ \frac{1}{N}\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v} \\ \frac{1}{N}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\bar{\mathbf{v}} \\ \frac{1}{N}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) \\ 0 \\ \sigma_{1,N}^2 \\ \sigma_{1,N}^2 \cdot \frac{1}{N}\mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa

$$\mathbf{u} = \rho(\mathbf{I_T} \otimes \mathbf{W_N})\,\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

sehingga

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho(\mathbf{I_T} \otimes \mathbf{W_N})\,\mathbf{u}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \boldsymbol{\rho}\bar{\mathbf{u}} \tag{3.14}$$

Substitusi (3.14) ke dalam (3.13)

Sehingga momen kondisi dapat direpresentasikan ke dalam persamaan momen:

$$\gamma_N = \boldsymbol{\Gamma_N}.\boldsymbol{\alpha} \tag{3.15}$$

dimana $\alpha = (\rho, \rho^2, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_1^2)'$ dan

$$\Gamma_N = E\begin{pmatrix} \gamma_{11}^0 & \gamma_{12}^0 & \gamma_{13}^0 & 0 \\ \gamma_{21}^0 & \gamma_{22}^0 & \gamma_{23}^0 & 0 \\ \gamma_{31}^0 & \gamma_{32}^0 & \gamma_{33}^0 & 0 \\ \gamma_{11}^1 & \gamma_{12}^1 & 0 & \gamma_{13}^1 \\ \gamma_{21}^1 & \gamma_{22}^1 & 0 & \gamma_{23}^1 \\ \gamma_{31}^1 & \gamma_{32}^1 & 0 & \gamma_{33}^1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_N = E\begin{pmatrix} \gamma_1^0 \\ \gamma_2^0 \\ \gamma_3^0 \\ \gamma_1^1 \\ \gamma_2^1 \\ \gamma_3^1 \end{pmatrix}$$

dengan (j=0,1):

$$\gamma_{11}^j = \frac{2}{N(T-1)^{1-j}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}} \qquad \gamma_{13}^j = 1$$

$$\gamma_{12}^j = -\frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}} \qquad \gamma_{21}^j = \frac{2}{N(T-1)^{1-j}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\gamma_{22}^{j} = -\frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$\gamma_{23}^{j} = \frac{1}{N}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

$$\gamma_{1}^{j} = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{j,N}\mathbf{u}$$

$$\gamma_{2}^{j} = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\gamma_{3}^{j} = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\gamma_{31}^{j} = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}}[\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}}]$$

$$\gamma_{32}^{j} = -\frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$\gamma_{33}^{j} = 0$$

(bukti pada lampiran)

dengan mengganti $\mathbf{u}$ dengan $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}', \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}', \dots, \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}')$ pada persamaan (3.9), mengakibatkan perubahan pada notasi, yakni

$$\widehat{\bar{\mathbf{u}}} = (\mathbf{I}_{\mathbf{T-1}} \otimes \mathbf{W}_{\mathbf{N}})\hat{\mathbf{u}}$$

$$\widehat{\bar{\bar{\mathbf{u}}}} = (\mathbf{I}_{\mathbf{T-1}} \otimes \mathbf{W}_{\mathbf{N}})\widehat{\bar{\mathbf{u}}}$$

menghasilkan persamaan

$$\mathbf{g}_N = \mathbf{G}_N\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\vartheta} \tag{3.16}$$

dimana $\mathbf{g}$ dan $\mathbf{G}$ merupakan penaksir untuk $\boldsymbol{\gamma}$ dan $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{\vartheta}$ dapat disebut sebagai residual regresi vektor, dengan :

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 & g_{13}^0 & 0 \\ g_{21}^0 & g_{22}^0 & g_{23}^0 & 0 \\ g_{31}^0 & g_{32}^0 & g_{33}^0 & 0 \\ g_{11}^1 & g_{12}^1 & 0 & g_{13}^1 \\ g_{21}^1 & g_{22}^1 & 0 & g_{23}^1 \\ g_{31}^1 & g_{32}^1 & 0 & g_{33}^1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{g}_N = \mathrm{E}\begin{pmatrix} g_1^0 \\ g_2^0 \\ g_3^0 \\ g_1^1 \\ g_2^1 \\ g_3^1 \end{pmatrix}$$

dimana (j = 0,1) :

$$g_{11}^{j} = \frac{2}{N(T-1)^{1-j}}\hat{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\widehat{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$g_{12}^{j} = -\frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\widehat{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\widehat{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$g_{13}^{j} = 1$$

$$g_{21}^{j} = \frac{2}{N(T-1)^{1-j}}\widehat{\bar{\bar{\mathbf{u}}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\widehat{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$g_{22}^{j} = -\frac{1}{N(T-1)^{1-j}} \hat{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\hat{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$g_{23}^{j} = \frac{1}{N}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

$$g_{31}^{j} = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}} [\hat{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\hat{\bar{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\hat{\mathbf{u}}]$$

$$g_{32}^{j} = -\frac{1}{N(T-1)^{1-j}} \hat{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\hat{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$g_{33} = 0$$

dan

$$g_{1}^{j} = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}} \hat{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\hat{\mathbf{u}}$$

$$g_{2}^{j} = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}} \hat{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\hat{\bar{\mathbf{u}}}$$

$$g_{3}^{j} = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}} \hat{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\hat{\bar{\mathbf{u}}}$$

Taksiran *Generalized Methods of Moments* dari $\boldsymbol{\alpha} = (\rho, \rho^2, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_1^2)$ disebut $\hat{\alpha}$ suatu nilai yang meminimumkan jumlah kuadrat residual ($\boldsymbol{\vartheta}'\ \boldsymbol{\vartheta}$) pada (3.15), dapat juga disebut sebagai fungsi objektif GMM yang dapat ditulis sebagai :

$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \{(\mathbf{g}_N - \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}})'\mathbf{A}_N(\mathbf{g}_N - \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}})\}.$$

Berdasarkan Kapoor, Kelejian, dan Prucha (2007), terdapat dua pilihan dalam memilih bobot $\mathbf{A}_N$, yaitu :

1. Taksiran GMM tak terboboti, yaitu dengan memilih $\mathbf{A}_N = \mathbf{I}_6$
2. Menggunakan pendekatan matriks variansi kovariansi.

Taksiran GMM untuk $\boldsymbol{\alpha}$ merupakan suatu taksiran $(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ yang meminimumkan $\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\alpha}}} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ dapat diuraikan menjadi bentuk sebagai berikut :

$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = (\mathbf{g}_N - \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}})'\mathbf{A}_N(\mathbf{g}_N - \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}})$$

$$= [\mathbf{g}_N' - \hat{\boldsymbol{\alpha}}'\mathbf{G}_N'] \mathbf{A}_N [\mathbf{g}_N - \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}}]$$

$$= [\mathbf{g}_N'\ \mathbf{A}_N\ \mathbf{g}_N] - [\mathbf{g}_N'\ \mathbf{A}_N\ \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}}] - [\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\mathbf{G}_N'\ \mathbf{A}_N\ \mathbf{g}_N] + [\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\mathbf{G}_N'\ \mathbf{A}_N\ \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}}]$$

Karena $[\mathbf{g}_N'\ \mathbf{A}_N\ \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}}]$ berukuran (1x1) atau skalar dan transposnya

$[\mathbf{g}_N'\ \mathbf{A}_N\ \mathbf{G}_N\hat{\boldsymbol{\alpha}}]' = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\mathbf{G}_N'\ \mathbf{A}_N\ \mathbf{g}_N]$

juga skalar yang sama, maka $\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ menjadi

$$\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}) = [\mathbf{g}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{g}_{\mathrm{N}}] - 2[\mathbf{g}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \widehat{\boldsymbol{\alpha}}] + [\widehat{\boldsymbol{\alpha}}' \mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \widehat{\boldsymbol{\alpha}}]$$

Meminimumkan $\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}})$,

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial \widehat{\boldsymbol{\alpha}}} = 2[\mathbf{g}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}] + 2[\widehat{\boldsymbol{\alpha}}' \, \mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}] = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{g}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}] = [\widehat{\boldsymbol{\alpha}}' \, \mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}]$$

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}}' = [\mathbf{g}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}][\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}]^{-\mathbf{1}}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\alpha}} &= \{[\mathbf{g}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}][\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}]^{-\mathbf{1}}\}' \\
&= \{[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}]^{-\mathbf{1}}\}'[\mathbf{g}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}]' \\
&= \{[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}]'\}^{-\mathbf{1}}[\mathbf{G}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{g}_{\mathbf{N}}] \\
&= [\mathbf{G}_{\mathrm{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}}]^{-\mathbf{1}}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathrm{N}} \, \mathbf{g}_{\mathbf{N}}]
\end{aligned}$$

Maka didapat *one step consistent estimator*

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \,]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{g}_{\mathbf{N}}]$$

Taksiran ini merupakan taksiran yang konsisten tidak bergantung bagaimana pemilihan matriks bobot $\mathbf{A}_{\mathrm{N}}$

Akan dibuktikan bahwa $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\alpha}$, dengan

$$\underset{\mathbf{N}\to\infty}{\mathbf{plim}}\, \widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}$$

Bukti :

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \,]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{g}_{\mathbf{N}}]$$

karena $\mathbf{g}_{\mathrm{N}} = \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\vartheta}$ maka persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\alpha}} &= [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \,]^{-1} \, [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}}(\mathbf{G}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\vartheta} \,)] \\
&= [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \,]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \boldsymbol{\vartheta} \,] \\
&= [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \,]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \boldsymbol{\alpha}] + [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \,]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \boldsymbol{\vartheta}] \\
&= \boldsymbol{\alpha} + [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \,]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \boldsymbol{\vartheta}]
\end{aligned}$$

$$\mathbf{plim}\, \widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} + \{\mathbf{plim}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \, \mathbf{G}_{\mathrm{N}} \,]^{-1} \, \mathbf{plim}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}' \, \mathbf{A}_{\mathbf{N}} \boldsymbol{\vartheta}]\}$$

berdasarkan *Weak Law of Large Number* (WLLN)

$$\mathrm{N}^{-1}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\mathbf{G}_{\mathrm{Ni}} \rightarrow \mu_{\mathbf{G}_{\mathrm{Ni}}} \equiv \mathrm{E}(\mathbf{G}_{\mathrm{Ni}}) = \mathbf{G}$$

$$\mathrm{N}^{-1}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{i}} \rightarrow \mu_{\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{i}}} \equiv \mathrm{E}(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathrm{i}}) = 0$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\mathbf{plim}\,\widehat{\alpha} &= \boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{G}'\mathbf{A_N}\,\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{A_N}\left(\mathbf{plim}N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\vartheta}_i\right)\\ &= \boldsymbol{\alpha} + (\mathbf{G}'\mathbf{A_N}\,\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{A_N}\mathbf{0}\\ &= \boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk $\boldsymbol{\alpha}$**.**

Dengan memilih $\mathbf{A_N} = \mathbf{I_6}$ akan didapat taksiran GMM sebagai berikut :

$$\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = [\mathbf{G}_{\mathbf{N}}'\,\mathbf{I_6}\,\mathbf{G}_{\mathrm{N}}\,]^{-1}[\mathbf{G}_{\mathbf{N}}'\,\mathbf{I_6}\,\mathbf{g}_{\mathrm{N}}\,]$$

3.2.3 Tahap Ketiga

Pada tahap ini, akan diestimasi kembali vektor $\boldsymbol{\theta} \equiv [\lambda, \boldsymbol{\beta}']'$. Hal ini karena taksiran yang dihasilkan pada tahap pertama belum memperhatikan adanya efek korelasi error antar unit lokasi. Taksiran yang dihasilkan pada tahap kedua yaitu $\hat{\rho}$ akan disubstitusikan kedalam model yang telah ditransformasi Cochrane-Orcutt. Transformasi Cochrane- Orcutt sebagai berikut :

Perhatikan model (3.9)

$$\Delta\mathbf{y_t} = \Delta\mathbf{z_t}\theta + \Delta\mathbf{u_t}$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan $\rho\mathbf{W}_{\mathrm{N}}$ maka didapatkan bentuk

$$\rho\mathbf{W}_{\mathrm{N}}\Delta\mathbf{y_t} = \rho\mathbf{W}_{\mathrm{N}}\Delta\mathbf{z_t}\theta + \rho\mathbf{W}_{\mathrm{N}}\Delta\mathbf{u_t} \tag{3.17}$$

Jika persamaan (3.9) dikurangkan dengan persamaan (3.17) maka didapat bentuk

$$\Delta\mathbf{y_t} - \rho\mathbf{W}_N\Delta\mathbf{y_t} = \Delta\mathbf{z_t}\theta + \Delta\mathbf{u_t} - \rho\mathbf{W}_N\Delta\mathbf{z_t}\theta - \rho\mathbf{W}_N\Delta\mathbf{u_t}$$

$$(\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{y_t} = (\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{z_t}\theta + (\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{u_t}$$

$$(\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{y_t} = (\mathbf{I}_N - \rho\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{z_t}\theta + \Delta\mathbf{v_t} \qquad (3.18)$$

Dari tahap kedua telah dihasilkan taksiran untuk koefisien *autoregressive* spasial error ρ yaitu $\hat{\rho}$. Kemudian gunakan $\hat{\rho}$ untuk disubsititusi menggantikan ρ pada persamaan (3.18), sehingga model menjadi :

$$(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{y_t} = (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{z_t}\theta + \Delta\mathbf{v_t}$$

dengan pemisalan $\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{p}$ untuk $\mathbf{p} = \{\Delta\mathbf{y_t}, \Delta\mathbf{z_t}\}$, $\Delta\mathbf{z_t} = [\Delta\mathbf{y_{t-1}}, \Delta\mathbf{x_t}]$ maka persamaan (3.18) menjadi :

$$\Delta\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{t} = \Delta\tilde{\mathbf{z}}_\mathbf{t}\theta + \Delta\mathbf{v_t} \qquad (3.19)$$

Namun masih terdapat permasalahan yakni komponen error $\Delta\mathbf{v_t}$ berkorelasi dengan variabel eksplanatori endogen $\Delta\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{t-1}$ sehingga perlu dicari variabel instrumen yang berkorelasi kuat dengan variabel eksplanatori endogen $\Delta\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{t-1}$ namun tidak berkorelasi dengan komponen error $\Delta\mathbf{v_t}$.

Dipilih matriks instrumen $\tilde{\mathbf{H}}_T = (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{H}_T$ dengan menggunakan $\mathbf{H}_T$ pada tahap pertama, sehingga dapat ditulis $\tilde{\mathbf{H}}_\mathbf{T} = [\tilde{\mathbf{H}}_\mathbf{3}, \dots, \tilde{\mathbf{H}}_\mathbf{t}]'$ dengan variabel instrumen $\tilde{\mathbf{H}}_t = (\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{t-2}, \Delta\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{t})$ merupakan variabel instrumen yang tepat.

Jika dijabarkan maka bentuk matriks instrumen akan menjadi sebagai berikut :

$$\tilde{\mathbf{H}}_T = (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{H}_T = (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\begin{pmatrix}\mathbf{H_3}\\ \mathbf{H_4}\\ \vdots \\ \mathbf{H_t}\end{pmatrix}$$

Untuk itu membuktikan $\tilde{\mathbf{H}}_t$ variabel instrumen yang valid, akan dibuktikan bahwa variabel-variabel dalam $\tilde{\mathbf{H}}_t$ yaitu $[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}, (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{x_t}]$ tersebut

- Tidak berkorelasi dengan error $\mathbf{\Delta v_t}$
- Berkorelasi dengan regresor $\Delta\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{t-1}$

Bukti :

- **variabel** $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}$ **atau** $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-2}}$

$$(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{y_t} = (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{z_t}\theta + \Delta\mathbf{v_t}$$

atau

$$(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{y_t} = \lambda(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{y_{t-1}} + (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{\Delta x_t \beta} + \Delta\mathbf{v_t}\ ; \mathrm{t} = 3,4, \ldots \mathrm{T}$$

$$(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_t} - \mathbf{y_{t-1}} = \lambda(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{y_{t-1}} - \mathbf{y_{t-2}}) + (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{x_t} - \mathbf{x_{t-1}})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{v_t} - \mathbf{v_{t-1}})$$

untuk t=3

$$(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_3} - \mathbf{y_2} = \lambda(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}) + (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{x_3} - \mathbf{x_2})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{v_3} - \mathbf{v_2})$$

Pada kasus ini, $(\mathbf{I_N} - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_1}$ variabel instrumen yang tepat, karena $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_1}$ berkorelasi dengan $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1})$, namun tidak berkorelasi dengan komponen error $(\mathbf{v_3} - \mathbf{v_2})$.

untuk t =4

$$(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_4} - \mathbf{y_3} = \lambda(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{y_3} - \mathbf{y_2}) + (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{x_4} - \mathbf{x_3})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{v_4} - \mathbf{v_3})$$

Pada kasus ini, $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_1}$ sama halnya seperti $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_2}$ merupakan variabel instrumen yang tepat, karena berkorelasi dengan variabel $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{y_3} - \mathbf{y_2})$, namun tidak berkorelasi dengan komponen error $(\mathbf{v_4} - \mathbf{v_3})$. Sehingga untuk t=4 terdapat penambahan suatu variabel instrumen yang tepat. Lanjutkan penambahan variabel instrumen untuk masing-masing periode, sedemikian sehingga untuk periode T terdapat $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_{T-2}})$ himpunan variabel instrumen yang tepat.

- **variabel** $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{x_t}$ **atau** $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}}$

Pada model diasumsikan bahwa untuk setiap t, dimana t=1, 2, …, T, $\mathbf{x_t}$ tidak berkorelasi dengan $\mathbf{v_t}$. Maka berlaku $\mathrm{cov}(\mathbf{x_t}, \mathbf{v_t}) = 0\ ; \mathrm{t} = 1, 2, \ldots, \mathrm{T}$.

$$\mathrm{cov}((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{x_t}, \mathbf{\Delta v}) = \mathrm{cov}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{x_t} - \mathbf{x_{t-1}}), (\mathbf{v_t} - \mathbf{v_{t-1}})]$$

$$= \mathbf{E}[((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{x_t} - \mathbf{x_{t-1}}))'(\mathbf{v_t} - \mathbf{v_{t-1}})] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{x_t} - \mathbf{x_{t-1}})]'\mathbf{E}[\mathbf{v_t} - \mathbf{v_{t-1}}]$$

$= \mathbf{E}[\big((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'\mathbf{v_t}\big) - ((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'\mathbf{v_{t-1}}) - ((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{v_t}) +$

$((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{v_{t-1}}) - (\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x}_{\mathbf{t-1}}''])$

$(\mathbf{E}[\mathbf{v_t}] - \mathbf{E}[\mathbf{v_{t-1}}])$

$= \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'\mathbf{v_t}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'\mathbf{v_{t-1}}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{v_t}] +$

$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{v_{t-1}}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{v_t}] +$

$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{v_{t-1}}] + \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{v_t}] -$

$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{v_{t-1}}]$

$= (\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'\mathbf{v_t}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{v_t}]) - (\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'\mathbf{v_{t-1}}] -$

$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{v_{t-1}}]) -$

$(\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{v_t}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{v_t}]) +$

$(\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{v_{t-1}}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{v_{t-1}}])$

$= (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{v_t}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{v_t}]) - (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{v_{t-1}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{v_{t-1}}])$

$-(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{v_t}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{v_t}]) + (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{v_{t-1}}] -$

$\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{v_{t-1}}])$

$= (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)[\mathrm{cov}(\mathbf{x_t}, \mathbf{v_t}) - \mathrm{cov}(\mathbf{x_t}, \mathbf{v_{t-1}}) - \mathrm{cov}(\mathbf{x_{t-1}}, \mathbf{v_t}) + \mathrm{cov}(\mathbf{x_{t-1}}, \mathbf{v_{t-1}})] = \mathbf{0}$

Terbukti bahwa $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{x_t}$ tidak berkorelasi dengan $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v_t}$ atau

$\mathrm{cov}((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{z_t}) = \mathbf{0}$

Selanjutnya akan dibuktikan $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{x_t}$ berkorelasi dengan $\Delta\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-1}}$.

Diasumsikan bahwa $\mathrm{cov}(\mathbf{x_t}, \mathbf{y_t}) \neq 0\ ; \mathrm{t} = 1, 2, \dots, \mathrm{T}$

$\mathrm{cov}(\Delta\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\Delta}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-1}}) = \mathrm{cov}\big((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{x_t}, (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y_{t-1}}\big)$

$= \mathrm{cov}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{x_t} - \mathbf{x_{t-1}}), (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{y_{t-1}} - \mathbf{y_{t-2}})]$

$= \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{x_t} - \mathbf{x_{t-1}})'(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)(\mathbf{y_{t-1}} - \mathbf{y_{t-2}})] -$

$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t} - \mathbf{x_{t-1}}]' \, \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-1}} - \mathbf{y_{t-2}}]$

$= \mathbf{E}[\big((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-1}}\big) - \big((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}\big) -$

$\big((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}' \, (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-1}}\big) + \big((\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}\big)] -$

$(\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'])$

$(\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}])$

$= \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}'(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}] -$

$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-1}}] + \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}'(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}] -$

$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}']$

$$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-1}}] + \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}] +$$
$$\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\mathbf{y_{t-2}}]$$
$$= (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)^2(\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-1}}]) - (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)^2$$
$$(\mathbf{E}[\mathbf{x_t}'\mathbf{y_{t-2}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_t}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-2}}]) - (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)^2$$
$$(\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{y_{t-1}}] - \mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-1}}]) + (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)^2(\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}'\mathbf{y_{t-2}}] -$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{x_{t-1}}']\mathbf{E}[\mathbf{y_{t-2}}])$$
$$= (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)^2\mathrm{cov}(\mathbf{x_t}, \mathbf{y_{t-1}}) - (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)^2\mathrm{cov}(\mathbf{x_t}, \mathbf{y_{t-2}}) - (\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)^2\mathrm{cov}(\mathbf{x_{t-1}}, \mathbf{y_{t-1}})$$
$$+(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)^2\mathrm{cov}(\mathbf{x_{t-1}}, \mathbf{y_{t-2}})$$
$$\neq \mathbf{0}$$

Terbukti bahwa $(\mathbf{I}_N - \hat{\rho}\mathbf{W}_N)\Delta\mathbf{x_t}$ berkorelasi dengan $\boldsymbol{\Delta}\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-1}}$ atau $\mathrm{cov}(\Delta\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{t}, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y_{t-1}}) \neq \mathbf{0}$

Karena variabel- variabel yaitu $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-2}}$ dan $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{t}$ terbukti tidak berkorelasi dengan error $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v_t}$ dan berkorelasi dengan regresor $\Delta\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-1}}$**.** Maka terbukti bahwa $\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{t}$variabel instrumen yang valid

Jadi variabel instrumen $\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{t} = (\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{2}, \ \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-2}}, \Delta\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{t})$

Maka, $\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{T} = [\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{3}, \dots, \widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{t}]'$

Contoh untuk T=5

$$\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{3} \\ 0 & \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{1} & \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \Delta\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{1} & \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{2} & \tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{3} & \Delta\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{5} \end{bmatrix}$$

sehingga $\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{Ti} = [\widetilde{\mathbf{H}}_\mathbf{i,3}, \dots, \widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{i},t}]'$

Langkah selanjutnya, sama seperti tahap pertama, digunakan metode penaksiran Arellano dan Bond menggunakan prinsip GMM untuk mendapatkan taksiran yang konsisten. Di bawah asumsi *System Instrumental Variable* (SIV) 1 dan SIV 2, vektor $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ merupakan solusi unik untuk momen kondisi dari populasi,

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{g_i}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\right) = \mathrm{E}(\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\mathbf{v_i}) = \mathrm{E}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'(\Delta\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{i} - \Delta\tilde{\mathbf{z}}_\mathbf{i}\boldsymbol{\theta})\right) = 0$$

Momen kondisi sampel :

$$\bar{\mathbf{g}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{N}^{-1}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'(\Delta\tilde{\mathbf{y}}_\mathbf{i} - \Delta\tilde{\mathbf{z}}_\mathbf{i}\tilde{\boldsymbol{\theta}})$$

Karena banyak kolom dari matriks variabel instrumen lebih banyak dibandingkan dengan banyak baris pada $\Delta\tilde{z}_i$ (L>K). Maka fungsi obyektif GMM ialah sebagai berikut:

$$\mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \bar{\mathbf{g}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})' \,\hat{\mathbf{A}}\, \bar{\mathbf{g}}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$$

Dimana diasumsikan $\hat{\mathbf{A}}$ adalah taksiran yang *unbiased* dan konsisten dari matriks bobot A (LxL)

$$\mathbf{plim}_{N\to\infty}\, \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$$

Taksiran GMM untuk $\boldsymbol{\theta}$ merupakan suatu taksiran ($\tilde{\boldsymbol{\theta}}$) yang meminimumkan $\mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$.

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0}$$

Maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'(\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i - \Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}})\right]' \hat{\mathbf{A}} \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'(\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i - \Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}})\right] \\
&= \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i - \mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right]^{-1} \hat{\mathbf{A}} \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i - \mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right] \\
&= \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\, \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}} - \mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right] \hat{\mathbf{A}} \left[\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i - \mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right] \\
&= \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\, \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right) - \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\, \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right) \\
&\quad - \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right) + \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)
\end{aligned}$$

Karena $\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\, \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)$ berukuran (1x1) atau skalar dan transposnya

$$\left(\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\, \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)\right)' = \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right)$$

juga skalar yang sama, maka fungsi obyektif GMM menjadi

$$\mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) =$$

$$\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\,\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right) - 2\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right) + \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\boldsymbol{\theta}}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Minimumkan $\mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$,

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\theta}}} =$$

$$-2\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right) + 2\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right) = \left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Maka didapat *one step consistent estimator*

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right)\right]$$

Estimator ini merupakan estimator yang konsisten tidak bergantung bagaimana pemilihan matriks bobot $\hat{\mathbf{A}}$ (LxL).

Akan ditunjukkan $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk sembarang $\hat{\mathbf{A}}$.

$$\operatorname*{\mathbf{plim}}_{N\to\infty}\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$$

Bukti :

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i\right)\right]$$

Karena $\Delta\tilde{\mathbf{y}}_i = \boldsymbol{\theta}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i + \Delta\mathbf{v}_i$ maka persamaan di atas menjadi

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i{}'\tilde{\mathbf{H}}_{Ti}\right)\hat{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{H}}_{T_i}{}'(\boldsymbol{\theta}\Delta\tilde{\mathbf{z}}_i + \Delta\mathbf{v}_i)\right)\right]$$

$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\hat{A}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta\tilde{z}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\hat{A}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\theta\Delta\tilde{z}_i\right)\right]$$
$$+ \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\hat{A}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta\tilde{z}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\hat{A}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta v_i\right)\right]$$
$$= \theta + \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\hat{A}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta\tilde{z}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\hat{A}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta v_i\right)\right]$$

$$\text{plim}\,\tilde{\theta}$$
$$= \theta$$
$$+ \left\{\text{plim}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\hat{A}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta\tilde{z}_i\right)\right]^{-1}\text{plim}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\hat{A}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta v_i\right)\right]\right\}$$

Berdasarkan *Weak Law of Large Number* (WLLN)

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti} \to \mu_{\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_T} \equiv E(\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}) = D'$$

dan

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta v_i \to \mu_{\tilde{H}_T'\Delta v} \equiv E\left(\tilde{H}_{T_i}'\Delta v_i\right) = 0$$

Berdasarkan asumsi $\hat{A} \xrightarrow{p} A$ didapatkan :

$$\begin{aligned}\text{plim}\,\tilde{\theta} &= \theta + (D'AD)^{-1}D'A\left(\text{plim}\,N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta v_i\right)\\ &= \theta + (D'AD)^{-1}D'A.0\\ &= \theta\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\tilde{\theta}$ merupakan taksiran yang konsisten untuk θ pada sembarang $\hat{A}$.

Matrik bobot $\hat{A}$ yang dipilih, yaitu :

$$\hat{A} = B_T = \left(\sum_{i=i}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\tilde{H}_{T_i}\right)^{-1} = \left(\tilde{H}_T'\tilde{H}_T\right)^{-1}$$

Sehingga diperoleh

$$\tilde{\theta}$$
$$= \left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\left(\sum_{i=i}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\tilde{H}_{T_i}\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta\tilde{z}_i\right)\right]^{-1}\left[\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\Delta\tilde{z}_i'\tilde{H}_{Ti}\right)\left(\sum_{i=i}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\tilde{H}_{T_i}\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\tilde{H}_{T_i}'\Delta\tilde{y}_i\right)\right]$$

$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{i}}{}'\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}} \left(\sum_{i=i}^{N} \mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}{}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}{}'\Delta\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{i}}\right)\right]^{-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} \Delta\tilde{\mathbf{z}}_{\mathbf{i}}{}'\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{Ti}}\right)\left(\sum_{i=i}^{N} \mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}{}'\mathbf{H}_{\mathbf{T_i}}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T_i}}{}'\Delta\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}}\right)\right]$$

Sehingga didapat taksiran akhir yang konsisten untuk parameter $\boldsymbol{\theta}$ adalah:

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \left[\Delta\tilde{\mathbf{z}}'\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}\,\mathbf{B}_{\mathbf{T}}\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}{}'\,\Delta\tilde{\mathbf{z}}\right]^{-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{z}}'\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}\mathbf{B}_{\mathbf{T}}\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}{}'\,\Delta\tilde{\mathbf{y}}\right]$$

Jika diuraikan untuk tiap parameter, didapat taksiran sebagai berikut :

$$\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} = \left[\Delta\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-1}}{}'\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}\,\mathbf{B}_{\mathbf{T}}\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}{}'\,\Delta\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-1}}\right]^{-1}\left[\Delta\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{t-1}}{}'\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}\,\mathbf{B}_{\mathbf{T}}\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}{}'\,\Delta\tilde{\mathbf{y}}\right]$$

dan

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \left[\Delta\widetilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{t}}{}'\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}\,\mathbf{B}_{\mathbf{T}}\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}{}'\,\Delta\widetilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{t}}\right]^{-1}\left[\Delta\widetilde{\mathbf{X}}_{\mathbf{t}}{}'\,\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}\mathbf{B}_{\mathbf{T}}\widetilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{T}}{}'\,\Delta\tilde{\mathbf{y}}\right]$$

dengan pemisalan $\widetilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{I}_{\mathrm{N}} - \hat{\rho}\mathbf{W}_{\mathrm{N}})\mathbf{p}$ untuk $\mathbf{p} = \{\Delta\mathbf{y}_{\mathbf{t-1}}, \mathbf{H}_{\mathbf{T}}, \Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{X}_{\mathbf{t}}\}$

BAB 4
APLIKASI MODEL REGRESI DATA PANEL SPASIAL ERROR DINAMIS

Pada bab ini akan dibahas mengenai aplikasi model regresi data panel spasial error dinamis dengan komponen error satu arah.

4.1 Latar Belakang Aplikasi

Penurunan produktifitas Amerika Serikat telah banyak diidentifikasi sebagai salah satu masalah ekonomi utama yang dihadapi bangsa tersebut. Kekhawatiran ini dapat dimengerti, karena pertumbuhan produktifitas adalah faktor utama penentu standar kehidupan masa depan. Para peneliti telah mempelajari secara ekstensif atas penurunan produktifitas dan telah berusaha keras untuk mencoba mengidentifikasi alasannya . Alasannya biasanya mencakup dampak dari perubahan komposisi angkatan kerja karena masuknya remaja dan lainnya yang kurang berpengalaman pekerja.

Dalam sebuah artikel yang menarik, David Aschauer (1989) mengidentifikasi penyebab baru yang berpotensi dalam penurunan pertumbuhan produktifitas. Aschauer menyatakan bahwa stok infrastruktur publik, stok modal swasta dan penurunan tenaga kerja dapat menjadi kunci untuk menjelaskan perubahan produktifitas multifaktor pada tahun 1970-an.

Sehubungan dengan penelitian penurunan produktifitas, pada aplikasi ini akan dilakukan analisis ekonomi untuk menaksir jumlah produksi per tahun pada Negara Amerika Serikat yang dianalogikan dengan *Gross State Product* yakni jumlah produk berupa barang dan jasa yang dihasilkan oleh unit-unit produksi di dalam batas wilayah suatu negara selama satu tahun yang dipengaruhi oleh jumlah bruto produk (*Gross State Product)* pada satu tahun sebelumnya.

4.2 Data dan Variabel

Berkaitan dengan konsep dalam model dinamis dimana suatu variabel ekonomi tidak hanya ditentukan oleh variabel pada waktu yang sama, maka dalam aplikasi ini digunakan juga data dari tahun sebelumnya.

Data yang digunakan adalah data *Productivity* U.S yakni data jumlah bruto produk di 48 negara bagian di Amerika Serikat selama kurun waktu 5 tahun yakni tahun 1970-1974. Data ini diambil dari Badi H. Baltagi (2005) dengan total observasi sebanyak 240. Variabel yang digunakan adalah sebagai berikut :

Variabel Dependen :

$LogGSP_{it}$ = jumlah bruto produk *(Gross State Product)* di negara bagian ke-i pada waktu ke-t. (dalam skala logaritma)

Variabel Independen:

$LogGSP_{i,t-1}$ = jumlah bruto produk *(Gross State Product)* di negara bagian ke-i pada waktu ke-t-1. (dalam skala logaritma)

$LogPCAP_{it}$ = jumlah modal publik (*public capital)* di negara bagian ke-i pada waktu ke-t. (dalam skala logaritma)

$LogPC_{it}$ = jumlah modal swasta *(private capital)* di negara bagian ke-i pada waktu ke-t. (dalam skala logaritma)

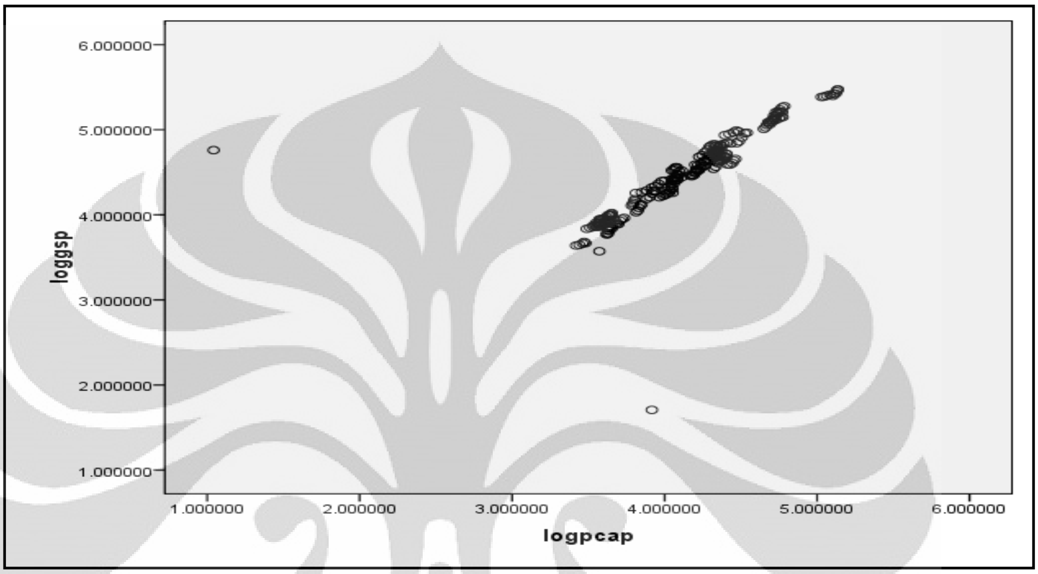
$LogEMP_{it}$ = jumlah tenaga kerja *(employment)* di negara bagian ke-i pada waktu ke-t. (dalam skala logaritma)

4.3 Tujuan Aplikasi

Pada aplikasi ini akan dibentuk model yang dapat menaksir produktifitas pada suatu negara bagian di Amerika Serikat dilihat dari jumlah bruto produk (GSP) dengan informasi jumlah modal publik, jumlah modal swasta, dan jumlah tenaga kerja

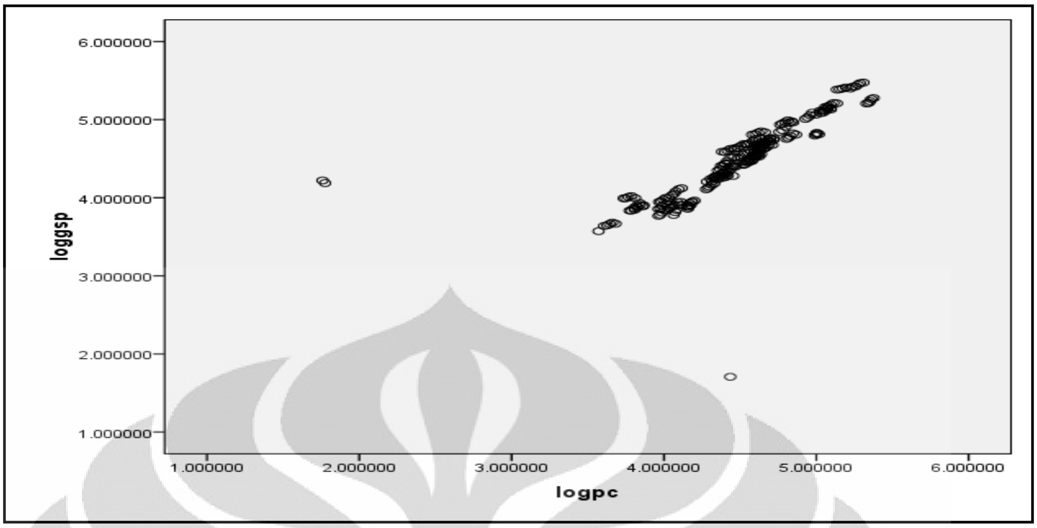
4.4 *Scatter Plot* Data

Scatter plot antara dua variabel digunakan untuk melihat hubungan antar kedua variabel tersebut secara visual. *Scatter plot* data tersebut adalah sebagai berikut :



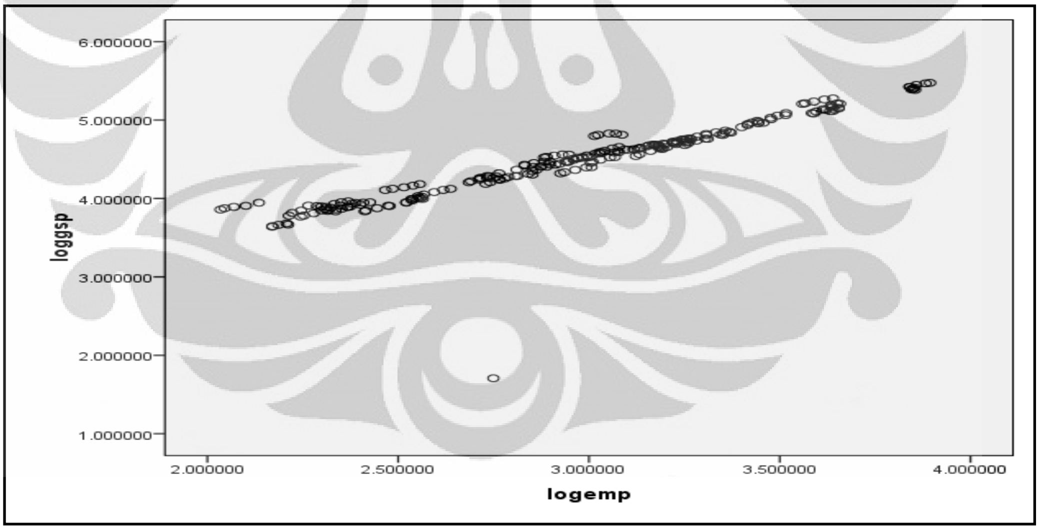
Gambar 4.1. *Scatter plot* antara log jumlah bruto produk dan log jumlah modal publik

Dari gambar 4.1 terlihat bahwa ada hubungan linier antara log jumlah bruto produk dan log jumlah modal publik.



Gambar 4.2. *Scatter plot* antara log jumlah bruto produk dan log modal swasta

Dari gambar 4.2 terlihat bahwa ada hubungan linier antara log jumlah bruto produk dan log modal swasta.



Gambar 4.3. *Scatter plot* antara log jumlah bruto produk dan log jumlah tenaga kerja

Dari gambar 4.3 terlihat bahwa ada hubungan linier antara log jumlah bruto produk dan log jumlah tenaga kerja

4.5 Penaksiran Parameter Model Regresi Data Panel Dinamis Satu Arah

Model yang diajukan dalam aplikasi ini :

$\text{LogGSP}_{it} = \lambda\ \text{LogGSP}_{i,t-1} + \beta_1\ \text{LogPCAP}_{it} + \beta_2\ \text{LogPC}_{it} + \beta_3\text{LogEMP}_{it} + v_{it}$ (4.1)

i=1,…48 ; t=1,…,5

dengan error satu arah

$$v_{i,t} = \eta_i + \varepsilon_{i,t} \qquad (4.2)$$

dimana η_i adalah pengaruh yang tidak terobservasi dari individu (negara bagian) ke-i.

Apabila persamaan (4.1) dan (4.2) digabung akan menghasilkan model :

$\text{LogGSP}_{it} = \eta_i + \lambda\ \text{LogGSP}_{i,t-1} + \beta_1\ \text{LogPCAP}_{it} + \beta_2\ \text{LogPC}_{it} + \beta_3\text{LogEMP}_{it} + \varepsilon_{i,t}$

Berdasarkan software R 2.13.0 diperoleh hasil penaksiran sebagai berikut :

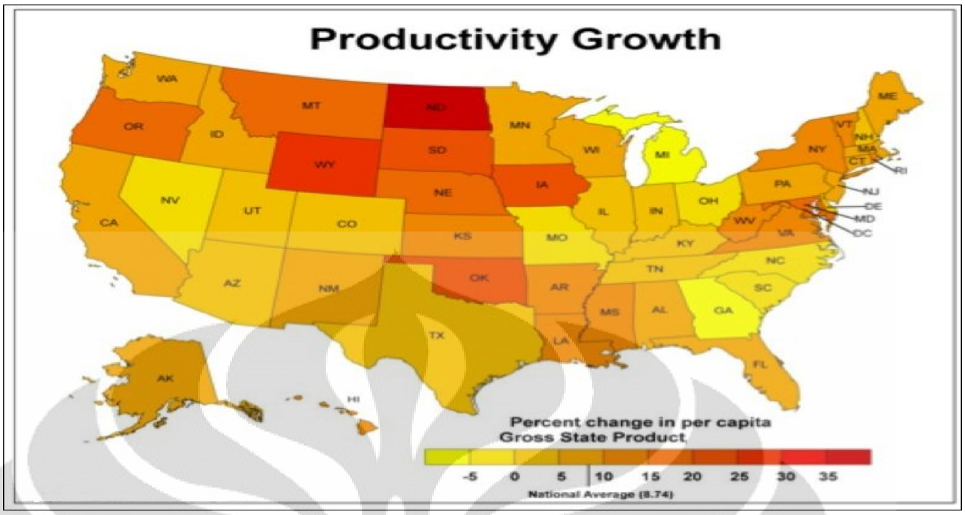
$$\text{Log}\widehat{\text{GSP}_{\text{it}}} = -0.0087364 - 0.1854495\text{LogGSP}_{1,t-1} + 0.2723359\text{LogPCAP}_{\text{it}} - 0.0254639\text{LogPC}_{\text{it}} + 1.1791999\text{LogEMP}_{\text{it}}\ .$$

Dengan nilai *R-squared* yaitu 0.68951 dan *R-squared adjusted* yaitu 0.67156.

Terlihat bahwa nilai *R-squared* dan *R-squared adjusted* yang didapat belum cukup besar. Selanjutnya, karena melakukan pengambilan observasi di lokasi-lokasi yang berdekatan, maka muncul dugaan bahwa nilai observasi bergantung pada nilai observasi lokasi sekitarnya atau dengan kata lain terdapat dependensi spasial antar observasi. Oleh karena itu akan dibuat *gray-scale map* dari variabel bruto produk (GSP).

4.6 *Quantile Map* dari Variabel Jumlah Bruto Produk (GSP)

Quantile digunakan untuk melihat distribusi *spatial* dari suatu variabel.



Gambar 4.4 *Quantile Map* produktivitas negara bagian di Amerika Serikat

Dari gambar 4.4 terlihat bahwa terdapat pola spasial pada produktivitas Amerika Serikat. Negara bagian yang berdekatan cenderung memiliki jumlah bruto produk (*Gross State Product*) yang serupa yang digambarkan dengan pola warna yang sama.

Selanjutnya akan dibuat model regresi data panel satu arah yang melibatkan pengaruh spasial error.

4.7 Penaksiran Parameter Model Regresi Data Panel Spasial Error Dinamis

Model regresi data panel spasial error dinamis yang diajukan dalam aplikasi ini sebagai berikut :

$$\mathrm{LogGSP}_{it} = \mathrm{LogGSP}_{i,t-1} + \beta_1 \mathrm{LogPCAP}_{it} + \beta_2 \mathrm{LogPC}_{it} + \beta_3 \mathrm{LogEMP}_{it} + u_{it}$$

$$u_{it} = \rho W_N u_{it} + v_{it} \qquad (4.1)$$

dengan komponen error satu arah :

$$v_{it} = \eta_i + \varepsilon_{it} \qquad (4.2)$$

Apabila persamaan (4.1) dan (4.2) digabung, akan menghasilkan model :

$$\mathrm{Log}\widehat{\mathrm{GSP}_{it}} = \eta_i + \lambda\, \mathrm{LogGSP}_{i,t-1} + \beta_1 \mathrm{LogPCAP}_{it} + \beta_2 \mathrm{LogPC}_{it} + \beta_3 \mathrm{LogEMP}_{it}$$
$$+ \rho W_N u_{it} + \varepsilon_{it}$$

Hasil penaksiran dengan menggunakan *software* R 2.13.0 adalah sebagai berikut :

$$\mathrm{Log}\widehat{\mathrm{GSP}_{\mathrm{it}}} = 1.440487 + 0.004576\ \mathrm{LogGSP}_{\mathrm{i,t-1}} + 0.017632\ \mathrm{LogPCAP}_{\mathrm{it}} + 0.439599\ \mathrm{LogPC}_{\mathrm{it}} + 0.612691\ \mathrm{LogEMP}_{\mathrm{it}} + 0.54895785 \mathrm{W}_{\mathrm{N}}\mathrm{u}_{\mathrm{it}}$$

dengan taksiran untuk variansi $\varepsilon_{\mathrm{it}}$ yakni $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = 0.00048153$ dan $\hat{\sigma}_{1}^{2} = 0.03489186$. Taksiran model yang didapat terlihat sudah cukup baik dengan nilai R^2 yaitu 0.9917 dan nilai R^2 adjusted yaitu 0.9911.

Jadi, model yang tepat untuk menaksir produktifitas pada suatu negara bagian di Amerika Serikat dilihat dari jumlah bruto produk dengan informasi jumlah modal publik, jumlah modal swasta,dan jumlah tenaga kerja adalah model regresi data panel spasial error dinamis karena terdapat unsur dependensi spasial.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Banyak perilaku ekonomi yang menggunakan data panel, memiliki hubungan dinamis. Pada dasarnya hubungan variabel-variabel ekonomi merupakan suatu kedinamisan, dimana variabel ekonomi tidak hanya ditentukan oleh variabel-variabel pada waktu yang sama, melainkan juga ditentukan oleh variabel pada waktu sebelumnya. Sehingga dalam analisis ekonomi sering menggunakan model dinamis yang diharapkan lebih tepat menggambarkan keadaan sebenarnya dari perilaku ekonomi. Model dinamis merupakan model dengan kelambanan waktu (*lag*) dari variabel dependen.

Pada beberapa kasus kerap ditemui kasus variabel dependen dan atau error pada suatu wilayah bergantung variabel dependen dan atau error pada wilayah lain. Keadaan ini disebut dependensi spasial. Dependensi spasial terbagi menjadi dua, yaitu spasial *lag* dan spasial error. Spasial *lag* disebabkan nilai variabel dependen pada suatu lokasi berhubungan dengan nilai variabel dependen pada lokasi lain. Spasial error disebabkan oleh ketergantungan nilai error suatu lokasi dengan nilai error pada lokasi lain. Jika kondisi ini tidak diperhatikan, maka asumsi error antar observasi saling bebas tidak terpenuhi. Oleh karena itu, pada model regresi data panel dinamis diperlukan penambahan komponen yang memuat efek dependensi spasial.

Salah satu permasalahan dalam model ini adalah adanya korelasi antara variabel endogen eksplanatori dengan komponen error. Hal ini menyebabkan tidak dapat dilakukan estimasi langsung dengan metode OLS. Sehingga sebelum mengestimasi parameter diperlukan metode Instrumental Variabel. Setelah itu barulah dapat dilakukan estimasi parameter dengan menggunakan metode Arellano dan Bond dan perluasan Kapoor, Kelejian dan Prucha sehingga didapatkan taksiran yang konsisten dari model data panel dinamis dengan komponen dependensi spasial error.

Terdapat 3 tahap kerja untuk mendapatkan taksiran Spasial Arellano dan Bond (SAB). Tahap pertama, dilakukan metode instrumental dan metode Arellano dan Bond untuk mendapatkan taksiran sederhana yang konsisten dengan mengabaikan efek korelasi spasial error. Kemudian pada tahap kedua, akan dilakukan perluasan taksiran *Generalized Method of Moments* (GMM) yang didapatkan oleh Kelejian dan Prucha (2007) untuk menaksir parameter spasial *autoregressive*, sehingga didapat taksiran yang konsisten. Selanjutnya, tahap ketiga, akan diestimasi kembali parameter pada tahap pertama dengan model yang telah ditransformasi Cochrane- Orcutt dan menggunakan hasil yang didapat pada tahap kedua, sehingga didapat taksiran akhir yang konsisten.

5.2 Saran

Saran yang perlu diperhatikan adalah :

1. Model yang dibahas hanyalah model regresi data panel spasial error dinamis yang terbatas pada 1 *lag*. Untuk pembahasan lebih lanjut perlu juga diperhatikan model regresi data panel spasial error dinamis dengan lebih banyak *lag*.
2. Model yang dibahas hanyalah model regresi data panel spasial error dinamis dengan efek acak (*random effect*). Untuk pembahasan lebih lanjut perlu juga diperhatikan model dengan efek tetap (*fixed effect*) .
3. Perlu dipelajari metode lain selain Arellano dan Bond dalam menaksir parameter pada model regresi data panel spasial error dinamis, seperti Metode *Maximum Likelihood Estimator*, metode perluasan Arellano dan Bover, dan metode perluasan Blundell and Bond.
4. Tugas akhir ini bertujuan untuk mengestimasi parameter dari model regresi data panel spasial error dinamis. Untuk selanjutnya dapat dilakukan pengujian hipotesis untuk mengetahui signifikansi hubungan variabel dependen dengan variabel eksplanatorinya.

DAFTAR PUSTAKA

Arellano, Manuel. 2003. *Panel Data Econometrics-Advanced Texts in Econometrics.* Oxford University Press Inc, New York

Artha, Dwi Rani Puspa. 2010. *Penaksiran Parameter pada Model Regresi Data Panel Spasial Dinamis*. Universitas Indonesia, Depok.

Baltagi, Badi H. 2005. *Econometric Analysis of Panel Data.* John Wiley&Sons Ltd, Chichester.

Harviani. Erma. 2008. *Estimasi Model Spasial Dependen dengan Metode Generelized Spasial Two Stage Least Squares.* Universitas Indonesia, Depok.

Hogg, R.V, McKean, J.W, and Craig, A.T. 2005. *Introduction tp Mathematical Statistics.* Sixth Edition : Prentice Hall.

Jacobs, Jan P.A.M, Jenny E. Ligthart, and Hendrik Vrijburg. 2009. *Dynamic Panel Data Models Featuring Endogeneous Interaction and Spatially Correlated Errors*. Tilburg University, LE Tilburg The Netherlands

Kapoor, M, Kelejian, H, Prucha, I. 2007. *Panel Data Models With Spatially Correlated Error Components*.University of Maryland, USA.

Mutl, Jan. 2006. *Dynamic Panel Data Model With Spatially Correlated Disturbances*. University of Maryland, USA.

Nachrowi, D.N. & H. Usman. 2006. *Pedoman Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan*. Lembaga Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.

Nismawati, Bernadeta. 2010. *Penaksiran Parameter pada Model Data Dinamis Menggunakan Metode Arrelano dan Bond*. Universitas Indonesia, Depok.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Tabel 1. Data *Productivity U.S*

STATE	YR	logpcap	logpc	loggsp	logemp
1	1	4.177036124	4.553808	4.453594	3.004536
1	2	4.190386052	4.571708	4.467978	3.009408
1	3	4.20337045	4.587378	4.495586	3.030316
1	4	4.21500959	4.602971	4.524136	3.055187
1	5	4.224343195	4.623841	4.528261	3.068112
2	1	4.006398433	4.372654	4.285287	2.738305
2	2	4.023686126	4.396632	4.323046	2.764475
2	3	4.040504633	4.415952	4.367151	2.810434
2	4	4.06439284	4.436236	4.402158	2.854002
2	5	4.083827144	4.459836	4.409899	2.872739
3	1	3.881570662	1.775465	4.187295	2.729327
3	2	3.902113356	4.314635	4.208898	2.741152
3	3	3.919549282	4.327267	4.248022	2.76455
3	4	3.924258088	4.335539	4.274735	2.788522
3	5	3.930034166	4.354797	4.285265	2.806655
4	1	5.109056405	5.237523	5.421494	3.841747
4	2	5.121439453	5.257353	5.424228	3.839918
4	3	5.128565716	5.273205	5.448952	3.857929
4	4	5.133501864	5.286761	5.467956	3.882063
4	5	5.136172725	5.309835	5.47481	3.894
5	1	4.057000843	4.374927	4.409747	2.875177
5	2	4.067519432	4.401173	4.436814	2.895975
5	3	4.079575913	4.415143	4.471644	2.93922
5	4	4.095980671	4.437551	4.510773	2.971276

5	5	4.112743712	4.458839	4.519027	2.982135
6	1	4.200458143	4.381699	4.589726	3.078276
6	2	4.21906007	4.400494	4.58563	3.066065
6	3	4.239219121	4.418162	4.602462	3.075693
6	4	4.250496119	4.436194	4.62487	3.092966
6	5	4.260672303	4.459888	4.621457	3.101747
7	1	3.628485997	3.785909	3.836514	2.336059
7	2	3.644035622	3.80354	3.869173	2.351989
7	3	3.659032458	3.819718	3.893706	2.366236
7	4	3.674412842	3.838351	3.9347	2.379124
7	5	3.692628396	3.861166	3.890812	2.367542
8	1	4.472710532	4.757229	4.842865	3.332862
8	2	4.486899094	4.779871	4.864333	3.357249
8	3	4.506357807	4.798471	4.91016	3.40021
8	4	4.524798291	4.822379	4.95855	3.443826
8	5	4.539706874	4.847898	4.964557	3.456943
9	1	4.261749006	4.61907	4.634528	3.192428
9	2	4.285008356	4.640809	4.657419	3.204906
9	3	4.304650989	4.657083	4.693745	3.229221
9	4	4.322530428	4.67598	4.722831	3.255875
9	5	4.340092372	4.698708	4.719248	3.261857
10	1	3.532782397	3.963886	3.855822	2.317646
10	2	3.553842992	3.977196	3.860637	2.33666
10	3	3.565401493	3.98929	3.897517	2.373831
10	4	3.572599793	4.010806	3.92179	2.400883
10	5	3.581373857	4.030424	3.952792	2.426186
11	1	4.71764962	5.060172	5.163734	3.63805
11	2	4.73082764	5.078396	5.171735	3.633105
11	3	4.74460869	5.09426	5.188684	3.634961
11	4	4.758065935	5.112317	5.212521	3.650006

11	5	4.770735546	5.134471	5.208777	3.657601
12	1	4.318348247	4.803777	4.754111	3.266937
12	2	4.335770721	4.816431	4.767453	3.265077
12	3	4.349627931	4.830736	4.789672	3.283731
12	4	4.366066783	4.846274	4.823044	3.307089
12	5	4.373873379	4.865985	4.808299	3.307795
13	1	4.168158814	4.523752	4.464981	2.94295
13	2	4.185004407	4.541822	4.467045	2.945813
13	3	4.194721866	4.554452	4.493584	2.960138
13	4	4.204295565	4.576271	4.528891	2.982859
13	5	4.208419856	4.596163	4.526223	2.999565
14	1	4.045931738	4.521239	4.420137	2.831742
14	2	4.064271877	4.532972	4.430559	2.831102
14	3	4.073867121	4.542361	4.452247	2.855822
14	4	4.084125665	4.558458	4.469616	2.882695
14	5	4.093857862	4.575057	4.46991	2.897627
15	1	4.205071402	4.484665	4.507613	2.959089
15	2	4.222896393	4.502737	4.522131	2.969183
15	3	4.234750819	4.518442	4.548402	2.994889
15	4	4.247902841	4.531984	4.571767	3.016448
15	5	4.261589954	4.553178	4.573545	3.027716
16	1	4.293104111	4.990349	4.797032	3.014353
16	2	4.302474659	4.997753	4.811917	3.023623
16	3	4.319890205	5.001299	4.828911	3.05254
16	4	4.330580153	5.005766	4.826723	3.070444
16	5	4.338200423	5.016038	4.812372	3.086645
17	1	3.587584137	3.968722	3.946649	2.5214
17	2	3.602044791	3.981483	3.952211	2.52153
17	3	3.619887071	3.995908	3.975386	2.53618
17	4	3.630657675	4.010955	3.997779	2.549984

17	5	3.642892668	4.031326	3.998956	2.558108
18	1	4.282055598	4.464126	4.633175	3.130076
18	2	4.301542378	4.486164	4.644547	3.137196
18	3	4.32483146	4.504664	4.663899	3.150756
18	4	4.343621061	4.523922	4.687779	3.16776
18	5	4.362064567	4.548569	4.685867	3.174234
19	1	4.340905531	4.57884	4.809081	3.350926
19	2	4.365072773	4.599086	4.814754	3.344667
19	3	4.387124363	4.617644	4.833122	3.352511
19	4	4.411033687	4.637377	4.850499	3.368008
19	5	4.432974579	4.66222	4.838566	3.371751
20	1	4.650160013	4.92817	5.009332	3.476976
20	2	4.662699009	4.943628	5.029854	3.476397
20	3	4.669994391	4.959229	5.056283	3.494001
20	4	4.680548982	4.974523	5.089873	3.516443
20	5	4.688361349	4.995953	5.063694	3.515556
21	1	4.34140346	4.636363	4.62049	3.119025
21	2	4.362790745	4.654493	4.628052	3.117338
21	3	4.380636823	4.671015	4.644665	3.132612
21	4	4.393244838	4.688793	4.679473	3.157185
21	5	4.403702566	4.711183	4.676529	3.170555
22	1	4.000697351	4.353515	4.238197	2.766338
22	2	4.021099122	4.372138	4.255923	2.779741
22	3	4.035195116	4.383052	4.286456	2.812445
22	4	4.044391965	4.388688	4.313973	2.840859
22	5	4.05074506	4.406294	4.305523	2.851747
23	1	4.289253962	4.642517	4.700669	3.222196
23	2	4.30948474	4.663176	4.715544	3.220317
23	3	4.328138738	4.679293	4.733983	3.230474
23	4	4.343981366	4.695356	4.754264	3.24812

23	5	4.351706464	4.71826	4.740805	3.252732
24	1	3.679667692	4.155955	3.897407	2.299071
24	2	3.695215414	4.16021	3.893706	2.31133
24	3	3.707203852	4.168205	3.930643	2.333044
24	4	3.71944979	4.186037	3.951726	2.350636
24	5	3.734029734	4.200606	3.962653	2.369216
25	1	3.965438311	4.282407	4.205935	2.685114
25	2	3.989424453	1.758458	4.221362	2.690905
25	3	4.012471504	4.306828	4.241272	2.713491
25	4	4.032834646	4.32888	4.262071	2.733438
25	5	4.052827787	4.348047	4.258901	2.749814
26	1	3.576180044	4.033654	3.866524	2.308137
26	2	3.588535006	4.05123	3.880756	2.323252
26	3	3.605643298	4.06842	3.907196	2.349083
26	4	3.619175797	4.088528	3.943198	2.388456
26	5	3.633162322	4.110655	3.947483	2.40841
27	1	3.489324143	3.775068	3.835817	2.412461
27	2	3.511553172	3.808652	3.847696	2.414806
27	3	3.533929585	3.824834	3.875987	2.444825
27	4	3.551382897	3.842952	3.908378	2.473925
27	5	3.566836836	3.865241	3.903958	2.477555
28	1	4.395461641	4.763401	4.936343	3.416008
28	2	4.425333329	4.77763	4.949746	3.416241
28	3	4.451123439	4.795445	4.970272	3.426918
28	4	4.470483847	4.814387	4.990548	3.440862
28	5	4.486142601	4.838295	4.977101	3.444513
29	1	3.784060697	4.276675	4.108464	2.466274
29	2	3.792076361	4.289314	4.123329	2.485295
29	3	3.795079483	4.298087	4.142202	2.515211
29	4	3.801131247	4.313715	4.163996	2.539076

29	5	3.803953266	4.328668	4.183184	2.556544
30	1	5.028951257	5.135653	5.385233	3.854695
30	2	5.045056686	5.154716	5.389198	3.845805
30	3	5.064299443	5.174396	5.400104	3.84748
30	4	5.084397698	5.195948	5.412457	3.853224
30	5	5.102084208	5.22251	5.398301	3.849855
31	1	4.226342087	4.638463	4.681666	3.251078
31	2	4.247690269	4.666315	4.700072	3.258589
31	3	4.265266519	4.682415	4.737383	3.281465
31	4	4.280617519	4.697739	4.763241	3.304943
31	5	1.042181595	4.719831	4.760015	3.311372
32	1	3.62045567	4.063401	3.779885	2.213783
32	2	3.625961349	4.073462	3.816308	2.222716
32	3	3.633727945	4.080494	3.846028	2.245759
32	4	3.636540049	4.10296	3.909556	2.264582
32	5	3.643886754	4.117693	3.90309	2.287354
33	1	4.684106073	5.026926	5.083836	3.58891
33	2	4.701058707	5.042477	5.089449	3.584286
33	3	4.710927208	5.05774	5.109406	3.59532
33	4	4.718969694	5.073672	5.138732	3.614148
33	5	4.722919657	5.094631	5.130086	3.620074
34	1	4.047982794	4.590963	4.521948	2.882297
34	2	4.059871896	4.604126	4.529931	2.888965
34	3	4.067464408	4.612067	4.546419	2.909503
34	4	4.073091194	4.621342	4.560301	2.930389
34	5	4.080143228	4.636377	4.557627	2.947875
35	1	4.047027074	4.35307	4.349278	2.851564
35	2	4.060001656	4.369684	4.366983	2.862787
35	3	4.073012277	4.38536	4.404081	2.889134
35	4	4.084594507	4.403197	4.430978	2.911797

35	5	4.111021433	4.425557	4.443169	2.923348
36	1	4.702674758	5.024235	5.113833	3.638649
36	2	4.727337156	5.041256	5.114344	3.632589
36	3	4.75012685	5.057025	5.133628	3.643453
36	4	4.764101825	5.074418	5.155245	3.653839
36	5	4.774009457	5.095825	5.148035	3.654619
37	1	3.634499438	3.735382	3.992288	2.536685
37	2	3.648481011	3.748971	3.993392	2.535041
37	3	3.652589578	3.766843	4.010597	2.554004
37	4	3.653031037	3.785983	4.021024	2.563362
37	5	3.652296635	3.810906	3.995108	2.564666
38	1	3.916476584	4.386012	4.320645	2.925312
38	2	3.939240116	4.4214	4.334976	2.935809
38	3	3.959767155	4.436142	4.364664	2.963929
38	4	3.980187964	4.45063	4.396531	2.992995
38	5	4.000613659	4.470551	4.40059	3.006808
39	1	3.620466077	3.963904	3.768194	2.24403
39	2	3.629611407	3.974792	3.782831	2.252853
39	3	3.636834792	3.986261	3.811642	2.278525
39	4	3.644195277	4.000766	3.848066	2.299071
39	5	3.653389091	4.01945	3.841109	2.31513
40	1	4.321173869	4.584534	4.541192	3.123067
40	2	4.33620769	4.606106	4.565505	3.132516
40	3	4.35118249	4.623074	4.606414	3.161398
40	4	4.359584126	4.638404	4.63773	3.185004
40	5	4.365196985	4.661215	4.633993	3.192623
41	1	4.729487798	5.329757	5.206615	3.559296
41	2	4.745858704	5.343834	5.215077	3.566261
41	3	4.75749677	5.352055	5.236436	3.589324
41	4	4.77183733	5.361171	5.263558	3.617179

41	5	4.785145541	5.376176	5.276643	3.639506
42	1	3.812522984	4.051254	4.031408	2.552668
42	2	3.823867264	4.065248	4.050844	2.567379
42	3	3.830801594	4.078516	4.082175	2.594393
42	4	3.840654265	4.096684	4.108903	2.617839
42	5	3.849574798	4.116584	4.122773	2.63759
43	1	3.419479911	3.607746	3.638888	2.169968
43	2	3.440309153	3.62842	3.647187	2.170555
43	3	3.461585557	3.643735	3.663795	2.186391
43	4	3.472354139	3.660638	3.681332	2.207634
43	5	3.480746914	3.681827	3.66764	2.211654
44	1	4.316652931	4.540415	4.683668	3.181529
44	2	4.334097323	4.565796	4.699395	3.195124
44	3	4.349244104	4.582556	4.723677	3.21885
44	4	4.360347231	4.601974	4.754058	3.243881
44	5	4.372372849	4.624854	4.759222	3.256309
45	1	4.410802363	4.572946	4.593552	3.033182
45	2	4.427736941	4.593936	4.590686	3.027146
45	3	4.444886168	4.610281	4.60783	3.041432
45	4	4.453205164	4.625592	4.63819	3.061566
45	5	4.464453777	4.648001	4.656912	3.078855
46	1	3.811767313	4.38579	4.25679	2.71307
46	2	3.848261185	4.40334	4.265714	2.716003
46	3	3.883805608	4.41834	4.285872	2.732796
46	4	3.916201721	4.435005	1.70757	2.749427
46	5	3.94131014	4.454213	4.27969	2.7577
47	1	4.372268918	4.594514	4.656108	3.184805
47	2	4.385099659	4.611516	4.6675	3.183384
47	3	4.393523611	4.625939	4.689122	3.198877
47	4	4.401864058	4.641261	4.716521	3.220239

47	5	4.4072095	4.662138	4.714581	3.231317
48	1	3.565140334	4.155632	3.858778	2.034628
48	2	3.568425856	4.160142	3.875293	2.045323
48	3	3.568425856	4.16387	3.892484	2.069298
48	4	3.570884871	4.174244	3.906712	2.100715
48	5	3.571952108	4.184263	3.94601	2.135133

Lampiran 2

Pembuktian persamaan (3.13) :

$\mathrm{E}\left(\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v}\right) = N(T-1)\sigma_\varepsilon^2$

$\mathrm{E}\left(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{v}}\right) = (T-1)\sigma_\varepsilon^2 \mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$

$\mathrm{E}\left(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v}\right) = 0$

$\mathrm{E}\left(\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v}\right) = N\sigma_{1,N}^2$

$\mathrm{E}\left(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\bar{\mathbf{v}}\right) = \sigma_{1,N}^2.\mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$

$\mathrm{E}\left(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v}\right) = 0$

Diketahui :

$\mathbf{Q}_{0,N} + \mathbf{Q}_{1,N} = \mathbf{I}_{NT}$

$tr\left(\mathbf{Q}_{0,N}\right) = N(T-1)$

$tr\left(\mathbf{Q}_{1,N}\right) = N$

$\mathbf{Q}_{0,N}(e_T \otimes I_N) = 0$

$\mathbf{Q}_{1,N}(e_T \otimes I_N) = (e_T \otimes I_N)$

$\mathbf{Q}_{0,N} v_N = \mathbf{Q}_{0,N}\varepsilon_N$

$\mathbf{Q}_{0,N}\bar{v} = (I_T \otimes W_N)\mathbf{Q}_{0,N}\varepsilon$

$\mathbf{Q}_{1,N} v = (e_T \otimes I_N)\eta_N + \mathbf{Q}_{1,N}\varepsilon$

$\mathbf{Q}_{1,N}\bar{v} = (e_T \otimes I_N)\eta_N + (e_T \otimes I_N)\mathbf{Q}_{1,N}\varepsilon$

Misal, terdapat matriks R_N berukuran NxN

$$(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_N)\mathbf{Q}_{0,N} = \mathbf{Q}_{0,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_N)$$

$$(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_N)\mathbf{Q}_{1,N} = \mathbf{Q}_{1,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_N)$$

$$tr\left(\mathbf{Q}_{0,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_N)\right) = (\mathrm{T}-1)\mathrm{tr}(\mathbf{R}_N)$$

$$tr\left(\mathbf{Q}_{1,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{R}_N)\right) = \mathrm{tr}(\mathbf{R}_N)$$

- Adib : $\mathrm{E}(\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v}) = \mathrm{N}(\mathrm{T}-1)\sigma_\varepsilon^2$

$$\mathrm{E}(\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{Q}_{0,N}\boldsymbol{\varepsilon}) = tr(\mathbf{Q}_{0,N})\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{N}(\mathrm{T}-1)\sigma_\varepsilon^2$$

- Adib : $\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{v}}) = (\mathrm{T}-1)\sigma_\varepsilon^2\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$

$$\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{v}}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{Q}_{0,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)\mathbf{Q}_{0,N}\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{0,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N))$$
$$= \sigma_\varepsilon^2(\mathrm{T}-1)\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

- Adib : $\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v}) = 0$

$$\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{Q}_{0,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N')\mathbf{Q}_{0,N}\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{tr}\left(\mathbf{Q}_{0,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N')\right)$$
$$= \sigma_\varepsilon^2(\mathrm{T}-1)\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N') = 0$$

- Adib : $\mathrm{E}(\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v}) = \mathrm{N}\sigma_{1,N}^2$

$$\mathrm{E}(\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\eta}_N'(\mathbf{e}_T'\mathbf{e}_T \otimes \mathbf{I}_N)\boldsymbol{\eta}_N) + \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{Q}_{1,N}\boldsymbol{\varepsilon})$$
$$= \mathrm{E}(\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{tr}(\mathbf{e}_T'\mathbf{e}_T \otimes \mathbf{I}_N) + \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{1,N})$$
$$= \mathrm{NT}\sigma_\eta^2 + \mathrm{N}\sigma_\varepsilon^2 = \mathrm{N}(T\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2) = \mathrm{N}\sigma_{1,N}^2$$

- Adib : $\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\bar{\mathbf{v}}) = \sigma_{1,N}^2.\mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$

$$\mathrm{E}(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\bar{\mathbf{v}}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{e}_T'\mathbf{e}_T \otimes \mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)\boldsymbol{\eta}) + \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{Q}_{1,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)\mathbf{Q}_{1,N}\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$= \mathrm{E}(\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{tr}(\mathbf{e}_T'\mathbf{e}_T \otimes \mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) + \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{1,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N))$$
$$= \mathrm{T}\sigma_\eta^2\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) + \sigma_\varepsilon^2\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) = (T\sigma_\eta^2 + \sigma_\varepsilon^2)\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$
$$= \sigma_{1,N}^2.\mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

- Adib : $E\left(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v}\right) = 0$

$$E\left(\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v}\right) = E(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{e}_T'\mathbf{e}_T \otimes \mathbf{W}_N')\boldsymbol{\eta}) + E(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{Q}_{1,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N')\mathbf{Q}_{1,N}\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$= E(\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{tr}(\mathbf{e}_T'\mathbf{e}_T \otimes \mathbf{W}_N') + E(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})\mathrm{tr}\left(\mathbf{Q}_{1,N}(\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W}_N')\right)$$
$$= T\sigma_\eta^2 \mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N') + \sigma_\varepsilon^2 \mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N') = 0$$

Lampiran 3

Akan dibuktikan bahwa enam momen kondisi dibawah ini :

$$E\begin{bmatrix} \frac{1}{N(T-1)}\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v} \\ \frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{v}} \\ \frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{v} \\ \frac{1}{N}\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v} \\ \frac{1}{N}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\bar{\mathbf{v}} \\ \frac{1}{N}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,N}\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 \\ \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{N}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) \\ 0 \\ \sigma_{1,N}^2 \\ \sigma_{1,N}^2 \cdot \frac{1}{N}\mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\gamma_N = \boldsymbol{\Gamma}_\mathbf{N}.\boldsymbol{\alpha}$$

dimana $\alpha = (\rho, \rho^2, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_1^2)'$ dan

$$\Gamma_N = E\begin{pmatrix} \gamma_{11}^0 & \gamma_{12}^0 & \gamma_{13}^0 & 0 \\ \gamma_{21}^0 & \gamma_{22}^0 & \gamma_{23}^0 & 0 \\ \gamma_{31}^0 & \gamma_{32}^0 & \gamma_{33}^0 & 0 \\ \gamma_{11}^1 & \gamma_{12}^1 & 0 & \gamma_{13}^1 \\ \gamma_{21}^1 & \gamma_{22}^1 & 0 & \gamma_{23}^1 \\ \gamma_{31}^1 & \gamma_{32}^1 & 0 & \gamma_{33}^1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_N = E\begin{pmatrix} \gamma_1^0 \\ \gamma_2^0 \\ \gamma_3^0 \\ \gamma_1^1 \\ \gamma_2^1 \\ \gamma_3^1 \end{pmatrix}$$

dengan (j=0,1):

$$\gamma_{11}^j = \frac{2}{N(T-1)^{1-j}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}}$$
$$\gamma_{12}^j = -\frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}}$$
$$\gamma_{13}^j = 1$$

$$\gamma_{21}^j = \frac{2}{N(T-1)^{1-j}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\mathbf{u}}$$
$$\gamma_{22}^j = -\frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{j,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}$$
$$\gamma_{23}^j = \frac{1}{N}\,\mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

$$\gamma_1^j = \frac{1}{\mathrm{N(T-1)^{1-j}}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{\mathrm{j,N}}\mathbf{u}$$
$$\gamma_2^j = \frac{1}{\mathrm{N(T-1)^{1-j}}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{\mathrm{j,N}}\bar{\mathbf{u}}$$
$$\gamma_3^j = \frac{1}{N(T-1)^{1-j}}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Q}_{j,N}\bar{\boldsymbol{u}}$$

$$\gamma_{31}^j = \frac{1}{\mathrm{N(T-1)^{1-j}}}[\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{\mathrm{j,N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{\mathrm{j,N}}\mathbf{u}]$$
$$\gamma_{32}^j = -\frac{1}{\mathrm{N(T-1)^{1-j}}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{\mathrm{j,N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}$$
$$\gamma_{33}^j = 0$$

sehingga untuk bentuk $\gamma_N = \mathbf{\Gamma_N}.\boldsymbol{\alpha}$ akan menghasilkan persamaan

$$\mathrm{E}(\gamma_{11}^0\rho + \gamma_{12}^0\rho^2 + \gamma_{13}^0\sigma_\varepsilon^2) = \mathrm{E}(\gamma_1^0)$$
$$\mathrm{E}(\gamma_{21}^0\rho + \gamma_{22}^0\rho^2 + \gamma_{23}^0\sigma_\varepsilon^2) = \mathrm{E}(\gamma_2^0)$$
$$\mathrm{E}(\gamma_{31}^0\rho + \gamma_{32}^0\rho^2 + \gamma_{33}^0\sigma_\varepsilon^2) = \mathrm{E}(\gamma_3^0)$$
$$\mathrm{E}(\gamma_{11}^1\rho + \gamma_{12}^1\rho^2 + \gamma_{13}^1\sigma_{1,N}^2) = \mathrm{E}(\gamma_1^1)$$
$$\mathrm{E}(\gamma_{21}^1\rho + \gamma_{22}^1\rho^2 + \gamma_{23}^1\sigma_{1,N}^2) = \mathrm{E}(\gamma_2^1)$$
$$\mathrm{E}(\gamma_{31}^1\rho + \gamma_{32}^1\rho^2 + \gamma_{33}^1\sigma_{1,N}^2) = \mathrm{E}(\gamma_3^1) \qquad \text{(a*)}$$

sebelumnya diketahui bahwa

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho(\mathbf{I_T}\otimes\mathbf{W_N})\,\mathbf{u}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \rho\bar{\mathbf{u}}$$
$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} - \rho\bar{\bar{\mathbf{u}}}$$

Akan dibuktikan bahwa bentuk (a) sama dengan bentuk (a*)

- $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{v}\right) = \sigma_\varepsilon^2$ sama dengan $\mathrm{E}(\gamma_{11}^0\rho + \gamma_{12}^0\rho^2 + \gamma_{13}^0\sigma_\varepsilon^2) = \mathrm{E}(\gamma_1^0)$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{v}\right) = \sigma_\varepsilon^2$$
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}(\mathbf{u} - \rho\bar{\mathbf{u}})'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}(\mathbf{u} - \rho\bar{\mathbf{u}})\right) = \sigma_\varepsilon^2$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2)\right] = \sigma_\varepsilon^2$$

karena $\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho$ merupakan konstanta, maka $(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho)' = (\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho) = \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho$

sehingga $-\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho = -2\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u} - 2\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2)\right] = \sigma_\varepsilon^2 \qquad (1)$$

$$\mathrm{E}(\gamma_{11}^0\rho + \gamma_{12}^0\rho^2 + \gamma_{13}^0\sigma_\varepsilon^2) = \mathrm{E}(\gamma_1^0)$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{2}{\mathrm{N(T-1)}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2 + \sigma_\varepsilon^2\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\right]$$

$$E\left[\frac{2}{N(T-1)}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho-\frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right]+\sigma_\varepsilon^2=E\left[\frac{1}{N(T-1)}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{u}\right]$$

$$E\left[\frac{1}{N(T-1)}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{u}-\frac{2}{N(T-1)}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho-\frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right]=\sigma_\varepsilon^2$$

$$E\left[\frac{1}{N(T-1)}(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,N}\mathbf{u}\ -\ \mathbf{2u}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho+\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho^2)\right]=\sigma_\varepsilon^2 \qquad (1^*)$$

Terbukti bahwa bentuk (1) sama dengan bentuk (1*)

- $E\left(\frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{v}}\right)=\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$ sama dengan $E(\gamma_{21}^0\rho+\gamma_{22}^0\rho^2+\ \gamma_{23}^0\sigma_\varepsilon^2)=E(\gamma_2^0)$

$$E\left(\frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{v}}\right)=\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

$$E\left(\frac{1}{N(T-1)}(\bar{\mathbf{u}}-\rho\bar{\bar{\mathbf{u}}})'\mathbf{Q}_{0,N}(\bar{\mathbf{u}}-\rho\bar{\bar{\mathbf{u}}})\right)=\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

$$E\left[\frac{1}{N(T-1)}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}-\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho-\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho+\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right)\right]=\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

karena $\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho$ merupakan konstanta, maka $\left(\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho\right)'=\left(\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho\ \right)=\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho$

sehingga $-\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho-\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho=-\mathbf{2}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho$

$$E\left[\frac{1}{N(T-1)}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{2}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho+\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right)\right]=\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) \qquad (2)$$

$$E(\gamma_{21}^0\rho+\gamma_{22}^0\rho^2+\ \gamma_{23}^0\sigma_\varepsilon^2)=E(\gamma_2^0)$$

$$E\left[\frac{2}{N(T-1)}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho-\frac{1}{N(T-1)}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2+\frac{1}{N}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)\sigma_\varepsilon^2\right]$$
$$=E\left[\frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\right]$$

$$E\left[\frac{2}{N(T-1)}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho-\frac{1}{N(T-1)}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right]+\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$
$$=E\left[\frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\right]$$

$$E\left[\frac{1}{N(T-1)}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}-\frac{2}{N(T-1)}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho+\frac{1}{N(T-1)}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\gamma_{23}^{j}\rho^2\right]$$
$$=\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N)$$

$$E\left[\frac{1}{N(T-1)}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{2}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\mathbf{u}}\rho+\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,N}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right)\right]=\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}_N'\mathbf{W}_N) \qquad (2^*)$$

Terbukti bahwa bentuk (2) sama dengan bentuk (2*)

- $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{v}\right) = 0$ sama dengan $\mathrm{E}(\gamma_{31}^0\rho + \gamma_{32}^0\rho^2 + \gamma_{33}^0\sigma_\varepsilon^2) = \mathrm{E}(\gamma_3^0)$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{v}\right) = 0$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}(\bar{\mathbf{u}} - \rho\bar{\bar{\mathbf{u}}})'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}(\mathbf{u} - \rho\bar{\mathbf{u}})\right) = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right)\right] = 0 \qquad (3)$$

$$\mathrm{E}(\gamma_{31}^0\rho + \gamma_{32}^0\rho^2 + \gamma_{33}^0\sigma_\varepsilon^2) = \mathrm{E}(\gamma_3^0)$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}[\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}]\rho - \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho + \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{u}}'\mathrm{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right]$$

karena $\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}$ merupakan konstanta, maka $\left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right)' = \left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right) = \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}$
karena $\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho$ merupakan konstanta, maka $\left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho\right)' = \left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho\right) =$
$\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho$
karena $\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2$ merupakan konstanta, maka $\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right)' = \left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right) =$
$\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2$
Hasil transpose disubstitusikan ke persamaan menghasilkan

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\mathbf{u}}'\mathrm{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N(T-1)}}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right)\right] = 0 \qquad (3^*)$$

Terbukti bahwa bentuk (3) sama dengan bentuk (3*)

- $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{v}\right) = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2$ sama dengan $\mathrm{E}\left(\gamma_{11}^1\rho + \gamma_{12}^1\rho^2 + \gamma_{13}^1\sigma_{1,N}^2\right) = \mathrm{E}(\gamma_1^1)$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\mathbf{v}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{v}\right) = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}(\mathbf{u} - \rho\bar{\mathbf{u}})'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}(\mathbf{u} - \rho\bar{\mathbf{u}})\right) = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2)\right] = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2$$

karena $\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho$ merupakan konstanta, maka $\left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho\right)' = \left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho\right) = \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho$

sehingga $-\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho = -\mathbf{2u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \mathbf{2u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2)\right] = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2 \qquad (4)$$

$$\mathrm{E}\left(\gamma_{11}^1\rho + \gamma_{12}^1\rho^2 + \gamma_{13}^1\sigma_{1,N}^2\right) = \mathrm{E}(\gamma_1^1)$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{2}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2 + \sigma_{1,\mathrm{N}}^2\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{2}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right] + \sigma_{1,\mathrm{N}}^2 = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \frac{2}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right] = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \mathbf{2u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2)\right] = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2 \qquad (4^*)$$

Terbukti bahwa bentuk (4) sama dengan bentuk (4*)

- $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{v}}\right) = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2.\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{tr}(\mathbf{W}_\mathrm{N}'\mathbf{W}_\mathrm{N})$ sama dengan $\mathrm{E}\left(\gamma_{21}^1\rho + \gamma_{22}^1\rho^2 + \gamma_{23}^1\sigma_{1,N}^2\right) = \mathrm{E}(\gamma_2^1)$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{v}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{v}}\right) = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2.\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{tr}(\mathbf{W}_\mathrm{N}'\mathbf{W}_\mathrm{N})$$
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}(\bar{\mathbf{u}} - \rho\bar{\bar{\mathbf{u}}})'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}(\bar{\mathbf{u}} - \rho\bar{\bar{\mathbf{u}}})\right) = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{tr}\ (\mathbf{W}_\mathrm{N}'\mathbf{W}_\mathrm{N})$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho - \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho + \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right)\right] = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{tr}\ (\mathbf{W}_\mathrm{N}'\mathbf{W}_\mathrm{N})$$

karena $\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho$ merupakan konstanta, maka $\left(\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho\right)' = \left(\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho\right) = \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho$

sehingga $-\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho - \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho = -\mathbf{2}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho$

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{2}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho + \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right)\right] = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{tr}\ (\mathbf{W}_\mathrm{N}'\mathbf{W}_\mathrm{N}) \qquad (5)$$

$$\mathrm{E}\left(\gamma_{21}^1\rho + \gamma_{22}^1\rho^2 + \gamma_{23}^1\sigma_{1,N}^2\right) = \mathrm{E}(\gamma_2^1)$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{2}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2 + \frac{1}{\mathrm{N}}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W}_\mathrm{N}'\mathbf{W}_\mathrm{N})\sigma_{1,\mathrm{N}}^2\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right]$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{2}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right] + \sigma_{1,\mathrm{N}}^2\frac{1}{\mathrm{N}}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W}_\mathrm{N}'\mathbf{W}_\mathrm{N}) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right]$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}} - \frac{2}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho + \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right] = \sigma_{1,\mathrm{N}}^2\frac{1}{\mathrm{N}}\ \mathrm{tr}(\mathbf{W}_\mathrm{N}'\mathbf{W}_\mathrm{N})$$

$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{2}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho + \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right)\right] =$
$\sigma^2_{1,\mathrm{N}}\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{tr}\,(\mathbf{W}'_{\mathrm{N}}\mathbf{W}_{\mathrm{N}})$ (5*)

Terbukti bahwa bentuk (5) sama dengan bentuk (5*)

- $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{v}}'\,\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{v}\right) = 0$ sama dengan $\mathrm{E}\left(\gamma^1_{31}\rho + \gamma^1_{32}\rho^2 + \gamma^1_{33}\sigma^2_{1,N}\right) = \mathrm{E}(\gamma^1_3)$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{v}}'\,\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{v}\right) = 0$$
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}(\bar{\mathbf{u}} - \rho\bar{\bar{\mathbf{u}}})'\,\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}(\mathbf{u} - \rho\bar{\mathbf{u}})\right) = 0$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right)\right] = 0 \qquad (6)$$

$$\mathrm{E}\left(\gamma^1_{31}\rho + \gamma^1_{32}\rho^2 + \gamma^1_{33}\sigma^2_{1,\mathrm{N}}\right) = \mathrm{E}(\gamma^1_3)$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}[\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}]\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right]$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho + \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right]$$

karena $\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}$ merupakan konstanta, maka $\left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right)' = \left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\right) = \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}$
karena $\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho$ merupakan konstanta, maka $\left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho\right)' = \left(\mathbf{u}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho\right) =$ $\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho$
karena $\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2$ merupakan konstanta, maka $\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right)' = \left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}\rho^2\right) =$ $\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2$
Hasil transpose disubstitusikan ke persamaan menghasilkan

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\right]$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \frac{1}{\mathrm{N}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{0,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right] = 0$$
$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\mathrm{N}}\left(\bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho - \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\mathbf{u}\rho + \bar{\bar{\mathbf{u}}}'\mathbf{Q}_{1,\mathrm{N}}\bar{\mathbf{u}}\rho^2\right)\right] = 0 \qquad (6^*)$$

Terbukti bahwa bentuk (6) sama dengan bentuk (6*)

(terbukti)

Lampiran 4

Output Model Data Panel Dinamis *Productivity* yang dihasilkan Software R 2.13.0

```
Call:
plm(formula = model, data = Produc, model = "fd", effects = "individual")

Balanced Panel: n=48, T=5, N=240

Residuals :
    Min.      1st Qu.     Median     3rd Qu.     Max.
-7.34e-02   -1.40e-02   6.25e-06   1.53e-02   1.16e-01

Coefficients :
                  Estimate     Std. Error    t-value    Pr(>|t|)
(intercept)       -0.0087364   0.0094536    -0.9241    0.356608
lag(log(gsp), 1)  -0.1854495   0.0653219    -2.8390    0.005026 **
log(pcap)          0.2723359   0.1203598     2.2627    0.024805 *
log(pc)           -0.0254639   0.2225808    -0.1144    0.909041
log(emp)           1.1791999   0.0814205    14.4828    < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Total Sum of Squares      :  0.34289
Residual Sum of Squares   :  0.10646
R-Squared                 : 0.68951
Adj. R-Squared            :  0.67156
F-statistic: 103.82 on 4 and 187 DF, p-value: < 2.22e-16
```

Lampiran 5

Output Model Data Panel Spasial Error Dinamis yang dihasilkan R 2.13.0

```
Call:
spgm(formula = fm, data = Produc, listw = mat2listw(usaww), method = "fulweigh",
   spatial.error = TRUE, effects = c("random"))

Residuals:
   Min.       1st Qu.     Median    Mean      3rd Qu.   Max.
-0.23700    -0.07050    0.00188   0.00228   0.07590   0.31600

Estimated spatial coefficient, variance components and theta:
         Estimate
rho            0.54895785
sigma^2_v      0.00048153
sigma^2_1      0.03489186
theta          0.88252418

Coefficients:
              Estimate    Std. Error   t-value    Pr(>|t|)
(Intercept)   1.440487    0.206131     6.9882     2.784e-12 ***
log(gsp(-1))  0.004576    0.005409     0.8456     0.39842
log(pcap)     0.017632    0.049123     0.3589     0.7197
log(pc)       0.439599    0.043646     10.0720    < 2.2e-16 ***
log(emp)      0.612691    0.040641     15.0757    < 2.2e-16 ***
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.09511 on 235 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9917,    Adjusted R-squared: 0.9911
F-statistic:  7050 on 4 and 235 DF,  p-value: < 2.2e-16
```