UNIVERSITAS INDONESIA

SOLUSI SCHWARZSCHILD UNTUK PERHITUNGAN PRESISI ORBIT PLANET-PLANET DI DALAM TATA SURYA DAN PERGESERAN MERAH GRAVITASI

SKRIPSI

SALMAN FARISHI
0304020655

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM FISIKA
DEPOK
APRIL 2010

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

UNIVERSITAS INDONESIA

SOLUSI SCHWARZSCHILD UNTUK PERHITUNGAN PRESISI ORBIT PLANET-PLANET DI DALAM TATA SURYA DAN PERGESERAN MERAH GRAVITASI

SKRIPSI

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana

SALMAN FARISHI
0304020655

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PROGRAM STUDI FISIKA
KEKHUSUSAN FISIKA NUKLIR PARTIKEL
DEPOK
APRIL 2010

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi ini diajukan oleh :
Nama : Salman Farishi
NPM : 0304020655
Program Studi : Fisika
Judul Skripsi :Solusi Schwarzschild untuk Perhitungan Presisi Orbit Planet-Planet di Dalam Tata Surya dan Pergeseran Merah Gravitasi

Telah berhasil dipertahankan di hadapan Dewan Penguji dan diterima sebagai bagian persyaratan yang diperlukan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia

DEWAN PENGUJI

Pembimbing : Dr. Muhammad Hikam ( )

Penguji : Dr. Anto Sulaksono ( )

Penguji : Dr. Agus Salam ( )

Ditetapkan di : Depok

Tanggal : 11 Mei 2010

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah, Pemilik ilmu yang tidak akan ada habisnya dituliskan, walaupun seluruh lautan menjadi tintanya. Atas izin-Nya, skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Salawat serta salam disampaikan kepada Nabi Muhammad, utusan Allah, melalui Beliau risalah ilmu pengetahuan sampai pada umat manusia.

Skripsi ini dapat selesai, atas bantuan, kerja sama, dan dukungan dari banyak pihak. Pertama, saya sampaikan terima kasih banyak kepada Bapak Dr. Muhammad Hikam, selaku pembimbing yang telah sabar membimbing skripsi ini. Saya belajar banyak hal dari bapak, terutama mengenai cara jitu mengatasi keletihan. Dan kepada kedua orang penguji saya yang saya hormati, Dr. Anto Sulaksono, dan Dr. Agus Salam, terima kasih saya sampaikan kepada bapak berdua atas banyaknya ilmu yang dengan tulus telah diberikan ke pada saya selama ini. Tak lupa terima kasih juga saya sampaikan untuk Ibu Prof. Dr. rer nat. Rosari Saleh, yang mengajarkan arti pentingnya pengorbanan atas suatu pilihan, mohon maaf atas banyaknya sikap saya yang tidak berkenan ya Bu. Dan juga terimakasih kepada seluruh Dosen dan staff di Departemen Fisika UI yang telah banyak membantu saya dalam menyelesaikan studi S1 di Fisika UI.

Terima kasih juga saya sampaikan untuk keluarga tercinta, mamah dan papah yang telah mendidik dan membesarkan. Ibu dan bapak yang banyak mendukung dan sabar menantikan menantunya untuk lulus. Istri tercinta, Iin, yang penuh kesabaran menemani. Ananda tercinta, Aliif, yang telah menjadi inspirasi dan penyemangat. Kakak-kakak serta adik-adik, Kak Umi, Kak Roby, Iqbal, Akbar ‘Cipinang’, Akbar ‘Depok’, Fakhri, Rani, Inad, Fadli, dan Dinda.

Tak lupa, saya sampaikan terima kasih untuk semangat dan doa dari teman-teman terdekat. Bang Handhika S. Ramadhan atas ilmu dan waktunya untuk diskusi-diskusi yang sangat berharga. Ustad Fahmi serta teman-teman sepengajian. Teman-teman seaktivitas Ivan Rus’uh’, Muhammad Ridwan, Adhi, Heggy Kearens, Indra ’tinggi’, Syifa, Edwin, serta teman-teman seaktivitas di dakwah kampus lainyya. Juga untuk ’Bude’ Lusi atas pinjaman laptopnya (sangat

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

membantu); teman satu kontrakan Rheo, Choirul ’Hoy’ Anwar, Aris, Marlin, Doya, Angga, Didik. Dan kepada teman-teman fisika 2004, Syamsul Ma’arif, Ahmad Novian RH, Ahmad Ilhami, Neni Wahyuni (terimakasih banyak atas dukungan Neni selama di Fisika) dan yang lainnya yang tidak dapat diucapkan satu persatu namanya.

Akhir kata, hanya Allah yang dapat membalas semua kebaikan itu, semoga Allah memberi keberkahan di setiap perbuatan baik kita. Saya pun berharap skripsi ini dapat bermanfaat untuk kemajuan ilmu pengetahuan. Walaupun saya menyadari masih terdapat kekurangan dalam penulisan ini, oleh karena itu masukan serta saran sangat berarti dalam perbaikan dan pengembangan penelitian ini.

Penulis

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

ABSTRACT

Gravitational field equations on general theory of relativity can be constructed with two different approaches. First, it uses classical method of tensor where the Christoffel symbol (affine connection) is derived to obtain the Ricci tensor. The second approach is by using variational principle. The gravitational field equation which has been obtained from using both of approach is called Einstein's field equation. This equation is in the form of non-liniear partial of differential equation (non-liniear PDE). The Schwarzschild solution method will be used to solve this field equation in the special case. The case is static and spherically symmetric on the vacuum field. The metric tensor of that solution describes the field outside a rotating star. That solution could be used to explain some physical phenomenon as the examples are precision of orbital planets and gravitational red shift.

Key words: General theory of relativity, Ricci tensor, Christoffel Symbol, variational principle, Einstein's field equation, Schwarzschild solution, metric tensor, orbital planets, gravitational red shift.

ABSTRAK

Persamaan-persamaan medan gravitasi dalam teori relativitas umum dapat dikonstruksi dengan dua pendekatan yang berbeda. Pendekatan pertama dengan metode tensor klasik di mana simbol Christoffel (koneksi affin) diturunkan untuk mendapatkan tensor Ricci. Pendekatan ke dua dengan menggunakan prinsip variasi. Dari kedua pendekatan tersebut didapatkan persamaan medan gravitasi yang dikenal dengan persamaan medan Einstein. Persamaan tersebut berupa persamaan diferensial parsial non-liniear. Dengan metode solusi Schwarzschild persamaan medan Einstein dapat dipecahkan untuk kasus ruang vakum yang statis dan simetri sferis. Metrik tensor yang dihasilkan berupa metrik (elemen jarak)

Solusi schwarzschild..., Salman Farishi, FMIPA UI, 2010

Created with nitro PDF professional

download the free trial online at nitropdf.com/professional

yang menggambarkan struktur ruang di sekitar bintang. Solusi ini dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena fisika berupa pergeseran (presisi) orbit planet-planet di dalam Tata Surya, dan pergeseran merah gravitasi.

Kata kunci: Teori Relativitas Umum, tensor Ricci, simbol Christoffel, Prinsip variasi, persamaan medan Einstein, solusi Schwarzschild, metrik tensor, Orbit planet-planet, pergeseran merah gravitasi

Solusi schwarzschild..., Salman Farishi, FMIPA UI, 2010

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

DAFTAR ISI

Halaman

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Solusi schwarzschild..., Salman Farishi, FMIPA UI, 2010

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

BAB I

Pendahuluan

1.1. Latar Belakang

Issac Newton adalah orang yang pertama kali mengemukakan tentang hukum gravitasi. Dalam teori mekanika klasiknya, Newton menyatakan bahwa gaya gravitasi yang dialami oleh benda yang saling berinteraksi adalah berbanding lurus dengan massa benda-benda tersebut dan berbanding terbalik dengan kwadrat jaraknya [1,2].

Di dalam mekanika Newtonian terdapat asumsi bahwa hukum-hukum gerak tidaklah bergantung terhadap pemilihan sistem koordinat. Lebih jauh lagi diasumsikan bahwa hukum-hukum gerak tersebut tidak berubah terhadap transformasi dari suatu sistem koordinat ke sistem koordinat lainnya. Atau dengan kata lain, hukum-hukum gerak bersifat invarian dalam transformasi galilean. Dan sistem koordinat yang memenuhi kondisi tersebut disebut dengan sistem koordinat inersial [2,3].

Hukum-hukum fisika yang dikemukakan Newton tersebut, pada kenyataannya tidak berlaku umum pada pemilihan sistem koordinat secara bebas. Hukum-hukum tersebut hanya valid dalam sistem koordinat inertial di dalam ruang Euclid [2,4].

Pada tahun 1905, Albert Einstein memperbaiki Hukum mekanika Newtonian dalam bentuk relativistik. Hukum relativitas yang pertama kali dikenalkannya adalah Relativitas Khusus, yang salah satu postulatnya menyatakan bahwa hukum-hukum fisika berlaku sama pada setiap sistem koordinat inersial. Dan pada tahun 1915 Einstein mengembangkan teori relativitas khususnya menjadi Teori Relativitas Umum (TRU) yang merupakan bentuk relativistik dari teori gravitasi. Postulat yang paling penting dari teori yang terakhir ini adalah bahwa perumusan gejala-gejala fisika mempunyai bentuk yang sama pada semua sistem koordinat.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Perubahan pada teori gravitasi dari teori klasik Newtonian kepada teori relativistik diperlukan agar teori gravitasi lebih bersifat umum dan mendasar [1].

Teori Relativitas Umum pada dasarnya merupakan kajian terhadap geometri *pseudo*-Riemann ruang-waktu empat dimensi dan konsekuensinya terhadap fenomena-fenomena fisis. Secara fisis teori ini menyatakan bahwa medan gravitasi sejatinya hanya merupakan koneskuensi dari kelengkungan ruang-waktu, dan sebaliknya bentuk geometri ruang waktu akan menentukan distribusi materi (gravitational field). Artinya, secara matematis tensor metric ruang waktu dan tensor penyebaran materi saling terkopel satu sama lain. Akibatnya, persamaan medannya yang dikenal dengan Persamaan medan Einstein berbentuk persamaan diferensial parsial non-linier (PDP non-linier),suatu bentuk persamaan diferensial yang sangat sulit dicari solusinya [5].

Cara yang paling mudah dan sederhana untuk mendeskripsikan teori gravitasi adalah dengan mendeskripsikan medan gravitasinya. Di dalam Teori Relativitas Umum, untuk mendapatkan persamaan medan Einstein dapat diperoleh dengan beberapa cara, di antaranya dengan metode tensor klasik, yaitu menurunkan tensor Ricci dari simbol Christoffel (*affine connection*) yang didapat dari turunan parsial tensor metrik terhadap variabel-variabelnya. Cara kedua adalah metode Lagrangian (*least action principle*), atau yang lebih umum dikenal sebagai prinsip variasi, dengan cara mengkonstruksi Lagrangian ruang-waktu dari tensor metrik dan menerapkan persamaan Euler-Lagrange untuk memperoleh persamaan medannya. Dan yang terakhir adalah dengan metode pendekatan Geometri differensial modern dengan memperkenalkan ruang-waktu sebagai manifold differensiabel [1,5].

1.2. Batasan Masalah

Penelitian ini akan menggunakan dan membandingkan dua cara yang pertama, yakni penurunan tensor Ricci dari simbol Christoffel dan prinsip variasi. Selanjutnya persamaan medan einstein ini akan dipecahkan dengan metode solusi Schwarzschild dengan cara menerapkan metrik Schwarzschild (yang memiliki

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

simetri bola dan statis) terhadap persamaan tersebut. Solusi Schwarzschild sendiri merupakan solusi paling awal untuk persamaan medan Einstein pada ruang vakum (ruang di sekitar bintang) [2,5].

Penelitian mengenai aplikasi dari solusi Schwarzschild ini hanya dibatasi pada presisi orbit planet dan pergeseran merah gravitasi. Sebelum membahas solusi Schwarzschild serta aplikasi-aplikasinya, akan dibahas terlebih dahulu mengenai pemahaman dan prinsip-prinsip dasar yang terdapat di dalam teori mekanika klasik Newton, teori relativitas khusus, dan juga teori relativitas umum. Namun, hal ini bukan berarti seluruh teori relativitas akan dibahas, hanya teori-teori yang berkaitan dengan tema penelitian ini saja.

Pembahasan mengenai solusi Schwarzschild sangatlah menarik. Bukan hanya karena ia merupakan solusi paling awal dari persamaan medan Einstein pada kondisi khusus, yakni bersimetri bola dan bersifat statis (tidak bergantung waktu) seperti kondisi yang dialami partikel yang bergerak di sekitar bintang, semata. Tetapi karena perhitungan teoretis dari metode ini telah dibuktikan dengan data pengamatan sebagaimana yang akan dijabarkan pada bab V yang merupakan inti dari tulisan ini.

1.3. Tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk mengenalkan Solusi Schwarzschild, sebagai solusi paling awal dari persamaan Medan Einstein untuk ruang vakum berupa simetri sferis, yang valid untuk menghitung presisi orbit planet dan pergeseran merah gravitasi. Selain itu, penelitian ini juga diharapkan dapat memperkaya khazanah penelitian di bidang teori relativitas umum, dan menjadi rangsangan untuk penelitian-penelitian selanjutnya di bidang yang sama.

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

BAB II

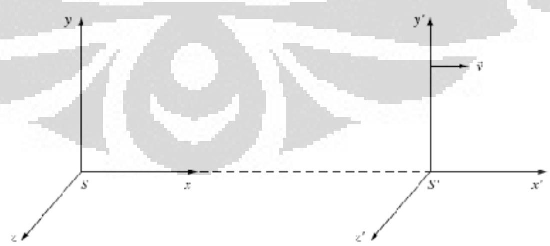
Prinsip Relativitas Khusus dan Transformasi Lorentz

2.1. Konsep Gravitasi Newtonian

Menurut konsep gravitasi Newtonian, gaya gravitasi muncul karena adanya interaksi dua buah benda atau partikel bermassa. Besarnya gaya gravitasi ini adalah berbanding lurus dengan massa benda-benda tersebut dan berbanding terbalik terhadap kwadrat jarak kedua benda [1,2].

2.1.1. Hukum Newton Invarian Terhadap Transformasi Galileo

Tinjau suatu kerangka koordinat inersial kartesian S dan S' yang memiliki parameter-parameter standar (x, y, z, dan t), di mana S' bergerak sepanjang sumbu axis-x dengan kecepatan konstan v terhadap kerangka S dan pada keadaan awal $t = t' = 0$ (lihat gambar 1). Dengan demikian dapat dipahami bahwa pada *event* P kerangka S' berhubungan secara liniear terhadap kerangka S dengan bentuk transformasi sebagai berikut



Gambar 1. Ilustrasi Transformasi Galilean dari suatu kerangka koordinat Euclidean [1].

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$t' = At + Bx$$

$$x' = Dt + Ex$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Selanjutnya, jika diberikan kondisi $x' = 0$ maka akan terpenuhi $x = vt$, dan jika $x = 0$ maka akan dipenuhi $x' = -vt$, sehingga didapatkan bahwa $D = -Ev$ dan $D = -Av$, dan hal tersebut menunjukkan bahwa $A = E$. Dengan demikian, maka persamaan-persamaan pada transformasi di atas dapat dituliskan menjadi

$$t' = At + Bx$$

$$x' = A(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z \tag{2.1}$$

Bentuk transformasi di atas disebut dengan transformasi Galileo [3].

Dalam mekanika klasik Newtonian keberadaan waktu diasumsikan sebagai besaran yang absolut, di mana waktu berlaku sama pada setiap *observer* terhadap suatu *event*, yakni $t' = t$. Jika suatu *event* P yang dipandang dengan dua kerangka inersia kartesian S dan S' diberlakukan asumsi demikian, maka koefisien-koefisien dalam transformasi Galilean pada (2.1) akan berada pada kondisi A =1 dan B=0. Sehingga bentuk transformasi pada kondisi tersebut menjadi

$$t' = t$$

$$x' = (x - vt)$$

$$y' = y$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$z' = z \tag{2.2}$$

Persamaan pertama dari transformasi (2.2) di atas berlaku (*valid*) pada kedua kerangka inersia kartesian S dan S', dan hal tersebut menunjukkan bahwa koordinat waktu berlaku sama untuk setiap kerangka koordinat. Sedangkan persamaan kedua yaitu $x' = x$ – vt, menunjukkan adanya tambahan faktor kecepatan. Jika dibayangkan sebuah partikel bergerak dengan kecepatan u pada kerangka S, maka kecepatannya pada kerangka S' adalah

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x-vt)}{dt} = u_x - v \tag{2.3}$$

Jika persamaan di atas diturunkan sekali lagi terhadap t , maka didapatkan

$$\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt} \tag{2.4}$$

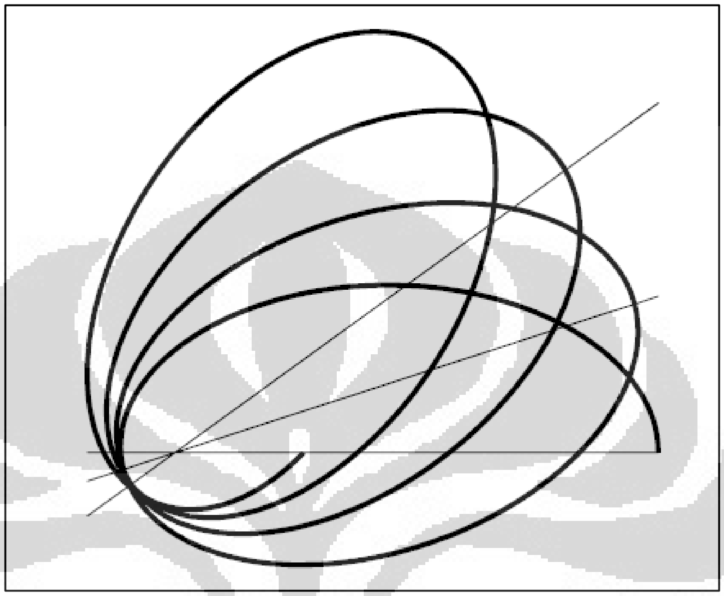
Tinjau dua buah *event* P, yang memiliki koordinat (t_p, x_p, y_p, z_p), dan Q yang memiliki koordinat (t_q, x_q, y_q, z_q). Maka, interval waktu antara P dan Q, yaitu $\Delta t = tq - tp$, dan interval jaraknya $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ dapat ditulis secara terpisah. Hal tersebut dapat dipahami bahwa koordinat waktu dan koordinat spasial sebagai entitas yang terpisah dan keduanya invarian terhadap transformasi Galileo [3].

2.1.2 Hukum Newton dan Orbit Planet

Salah satu fenomena fisika yang tidak mampu dijelaskan oleh hukum gravitasi Newton adalah pergeseran sudut titik ekstrimum (perihelium dan aphelium) pada lintasan orbit planet mengelilingi matahari sebagai pusat lintasan (revolusi). Menurut teori Newton, orbit gerakan planet mengelilingi matahari, sesuai dengan energinya, mempunyai bentuk lintasan berupa *ellips* dan akan selalu tetap kedudukan sudutnya terhadap garis acuan tertentu. Namun, hasil observasi yang dilakukan oleh Urbain J. LeVerrier tehadap orbit planet merkurius pada tahun 1859 menunjukkan hal yang berbeda. Hasil observasi itu menunjukkan

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

bahwa orbit planet mercury mengalami pergeseran (presisi) tiap tahunnya. Sehingga bentuk orbit planet tersebut tidak lagi eksak berupa ellips, tetapi berbentuk *rosettes-curved* (lihat gambar 2) [3,6].



Gambar 2. Orbit-orbit planet sebenarnya, akibat beragam peturbasi, tidak elips, tetapi berupa *non-closed curves* [6].

2.2. Teori Relativitas Khusus

Pada tahun 1905, Albert Einstein memperkenalkan teori Relativitas Khusus. Teori tersebut menengahi "kontradiksi" yang seolah-olah terjadi antara teori mekanika Newton dengan teori elektrodinamika Maxwell, yaitu mengenai keberadaan konstanta universal berupa kecepatan gelombang elektromagnetik yang eksis di dalam teori elektrodinamika Maxwell dan tidak di dalam teori mekanika Newtonian [7]. Dalam teorinya, Einstein memasukkan konstanta universal tersebut sebagai dimensi keempat dalam geometri ruang-waktu (*spacetime geometry*).

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

2.2.1. Postulat-postulat Teori Relativitas Khusus

Sistem koordinat inersial merupakan suatu sistem koordinat dimana jika terdapat partikel yang bergerak bebas tanpa adanya pengaruh dari gaya luar, maka partikel tersebut akan memiliki kecepatan yang konstan.

Di dalam teori relativitas khusus terdapat dua postulat umum yang dapat dikemukakan sebagai berikut:

1. Dua buah sistem koordinat inersial mempunyai kedudukan yang sama, yakni hukum-hukum fisika mempunyai persamaan matematik yang identik untuk semua sistem koordinat inersial.
2. Kecepatan interaksi partikel, yang dalam mekanika dideskripsikan menggunakan energi potensial sebagai fungsi koordinat, merupakan konstanta universal yang sama dalam sistem inersial.

Konstanta yang disebutkan pada postulat ke-2 tidak lain adalah kecepatan cahaya di ruang hampa, c yang besarnya 2,998 x 10^8 m/detik [1,2].

2.2.2. Interval Dalam Ruang Minkowski

Sebuah peristiwa (*event*) dapat dijelaskan oleh tempat dan waktu di mana peristiwa itu terjadi. Dengan demikian set-set variabel yang digunakan dalam sistem koordinatnya merupakan 3 set variabel ruang (x,y, dan z) serta satu variabel waktu (t).

Interval antara dua buah peristiwa berdekatan dan saling terkait dapat didefinisikan sebagai

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.5}$$

Karena invariansi kecepatan cahaya, maka jika $ds = 0$ dalam suatu sistem koordinat inersial, akan berlaku juga $ds' = 0$ pada sistem koordinat inersial yang lain.

Antara ds dan ds' mempunyai hubungan yang sederhana, yakni:

$$ds^2 = f\, ds'^2 \tag{2.6}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

dengan f merupakan suatu fungsi yang tidak bergantung pada koordinat, dan juga pada arah kecepatan S' terhadap S. Artinya, f hanya boleh bergantung pada harga mutlak kecepatan S' terhadap S.

$$ds^2 = f(|v|)ds'^2 \tag{2.7}$$

Dan sebaliknya berlaku juga:

$$ds'^2 = f(|v|)ds^2 \tag{2.8}$$

Dengan memilih harga $f(|v|) = 1$, maka transformasi dari sistem koordinat $S\ (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ke koordinat $S'\ (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ harus memenuhi hubungan

$$c^2dt^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2dt'^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2$$

Dapat ditulis:

$$\sum_{i=1}^{3} c^2t^2 - (x^i)^2 = \sum_{i=1}^{3} c^2t'^2 - (x'^i)^2 \tag{2.9}$$

Transformasi ini analog dengan transformasi ortogonal, di mana suku terakhir dari kedua ruas (c^2t^2) dan $(c^2t'^2)$ diubah menjadi $(x^0)^2$ dan $(x'^0)^2$.

Dengan $x^0 = ict$, dan $x'^0 = -ict$, maka:

$$\sum_{i=0}^{3} (x^i)^2 = \sum_{i=0}^{3} (x'^i)^2 \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) di atas sangat jelas menggambarkan keberadaan ruang abstrak dengan 4 koordinat yang dibentuk oleh $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, dan $x^0 = ict$ yang disebut dengan ruang Minkowski [1,8].

2.2.3. Waktu Wajar (*Proper Time*)

Bayangkan seorang pengamat yang sedang bergerak diukur dengan sistem koordinat tertentu. Pengamat tersebut memiliki jarak $(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$ dan waktu dt. Jika pengamat mengukur dirinya sendiri sehingga $dx' = dy' = dz' = 0$ dan waktu t' , maka;

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

sehingga; $$dt' = \frac{ds}{c}$$

$$= dt\sqrt{1-\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}\right)}$$

$$= dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{2.11}$$

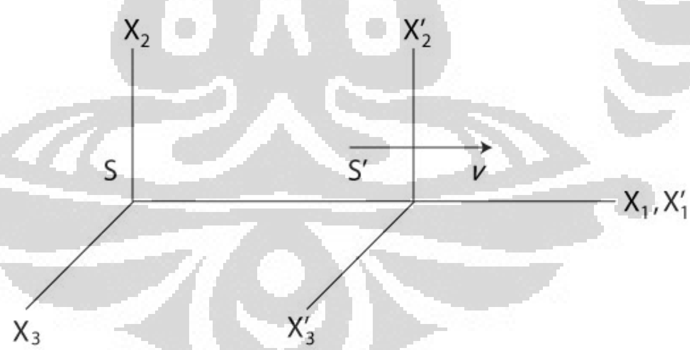
Dengan v = kecepatan pengamat relatif terhadap sistem koordinat,

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

disebut dengan waktu wajar [1].

2.3. Transformasi Lorentz

Transformasi Lorentz merupakan transformasi dua sistem koordinat yang bergerak satu sama lain dalam sistem inersial (sistem dengan kecepatan tetap). Bentuk transformasi ini:



Gambar 3. Transformasi Lorentz dari suatu Koordinat S kepada Koordinat S'[1].

$$x'^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x^1 - vt)$$

$$x'^2 = x^2$$

$$x'^3 = x^3$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}\, x^1\right) \qquad (2.13)$$

Penurunan transformasi lorentz ini dapat dilakukan dalam dua cara yang agak berbeda, yaitu :

1. Transformasi lorentz dianggap merupakan transformasi linier antara dua sisten koordinat
2. Transformasi lorentz dianggap merupakan "rotasi" dalam bidang yang dibentuk oleh ruang dan waktu (bidang xt) [1].

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

BAB III

Dasar-dasar Teori Relativitas Umum

Teori relativitas umum pada dasarnya merupakan teori gravitasi yang bersifat relativistik. Teori ini dapat dikatakan sebagai perkembangan lebih lanjut dari teori relativitas khusus. Jika teori relativitas khusus mempunyai asal mengembangkan teori elektrodinamika Maxwell, maka teori relativitas umum dapat dianggap sebagai generalisasi dari teori gravitasi Newton [1].

Teori relativitas umum ini, sebagaimana juga teori relativitas khusus, memiliki postulat-postulat. Postulat yang paling penting dari teori relativitas umum adalah "perumusan hukum-hukum fisika mempunyai bentuk yang sama untuk semua sistem koordinat" [1].

Keberlakuan yang sama dari hukum-hukum fisika untuk semua koordinat memberikan pemahaman bahwa teori gravitasi tidak dapat hanya bergantung pada kerangka koordinat inersial, seperti yang terdapat dalam ruang Minkowksi (koordinat inersial ruang-waktu 4 dimensi), maupun ruang Euclid (koordinat inersial ruang 3 dimensi). Akan tetapi, teori ini harus berada pada suatu sistem yang lebih umum, yang dikenal dengan manifold. Baik ruang Euclid, maupun ruang Minkowski, keduanya merupakan contoh khusus dari manifold [3].

Pemahaman mengenai definisi manifold (khususnya manifold diferensiabel), transformasi koordinat, dan berbagai medan tensor di dalamnya diperlukan sebelum membahas mengenai persamaan-persamaan di dalam teori relativitas umum.

3.1. Manifold

Secara awam, manifold dapat dibayangkan sebagai generalisasi dari titik, garis, permukaan, dan ruang kontinu berdimensi lebih tinggi lainnya. Sedangkan secara umum, manifold dapat diartikan sebagai setiap himpunan yang dapat

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

diparameterisasikan secara kontinu. Jumlah dari parameter-parameter yang digunakan unntuk menyifati suatu titik dalam himpunan tersebut disebut dengan dimensi dari suatu manifold, dan parameter-parameter itu sendiri disebut dengan koordinat dalam manifold [3,5].

Suatu manifold disebut sebagai manifold diferensiabel apabila dimungkinkan untuk mendefinisikan suatu medan skalar di setiap titik dari manifold tersebut yang terdiferensiasi dimanapun [3].

3.2. Transformasi Koordinat

Di dalam suatu manifold $\mathcal{M}$ berdimensi N terdapat sejumlah N koordinat yang dinotasikan dengan x^a dimana a = 1, 2, ………, N. Koordinat-koordinat tersebut dapat diekspresikan sebagai suatu fungsi dari parameter-parameter tertentu. Ekspresi fungsi koordinat yang demikian disebut dengan kurva, sedangkan parameter-parameternya dinamakan submanifold atau *surface*.

Jika terdapat suatu kurva dengan satu derajat kebebasan, yaitu kurva yang hanya bergantung terhadap satu parameter saja, maka kita dapat mendefinisikannya dengan persamaan fungsi

$$x^a = x^a(u) \qquad (a = 1, 2, \dots\dots\dots, \mathrm{N}) \tag{3.1}$$

di mana u merupakan parameter dan $x^1(u), x^2(u), \dots\dots\dots, x^N(u)$ adalah sejumlah N fungsi dari u.

Untuk sejumlah M submanifold atau *surface* dari kurva di dalam suatu manifold, maka persamaan (3.1) dapat dituliskan dalam bentuk

$$x^a = x^a(u^1, u^2, u^3, \dots\dots\dots, u^M) \qquad (a = 1, 2, \dots\dots\dots, \mathrm{N}) \tag{3.2}$$

dan untuk M = N-1, maka submanifold tersebut disebut dengan *hypersurface*.

Sekarang tinjau suatu koordinat x'^a yang merupakan transformasi dari koordinat x^a, sehingga $x^a \rightarrow x'^a$ dapat diekspresikan sebagai

$$x'^a = x'^a(x^1, x^2, x^3, \dots\dots\dots, x^{\mathrm{N}}) \qquad (a = 1, 2, \dots\dots\dots, \mathrm{N}) \tag{3.3}$$

Parameter-parameter x^1 sampai dengan x^{N} merupakan koordinat yang lama, sehingga terlihat jelas bahwa koordinat yang baru merupakan fungsi dari koordinat yang lama. Dan turunan parsial dari koordinat yang baru (x'^a) terhadap

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

koordinat yang lama (x^b), $\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}$, dapat disusun kedalam suatu matriks transformasi NxN sebagai berikut

$$\left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^N} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x'^N}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^N}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x'^N}{\partial x^N} \end{pmatrix}$$

Determinan dari matriks transformasi tersebut disebut sebagai transformasi *Jacobian* dan dinotasikan sebagai

$$J = \det\left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right]$$

Dengan menggunakan aturan rantai, maka *invers* dari matriks transformasi di atas dapat diekspresikan sebagai

$$\sum_{b=1}^{N} \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\frac{\partial x^b}{\partial x'^c} = \frac{\partial x'^a}{\partial x'^c} = \delta^a_b$$

Di mana δ^a_b merupakan delta kronecker yang berharga 1 jika a=c dan berharga 0 jika a ≠ c, sehingga untuk a ≠ c

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x'^c} = \frac{\partial x^a}{\partial x^c} = 0$$

Selanjutnya tinjau dua titik P dan Q yang berdekatan di dalam manifold, dan keduanya memenuhi koordinat x^a dan $x^a + dx^a$, maka di dalam koordinat yang baru, pemisahan koordinat *infinitesimal* di antara P dan Q diekspresikan sebagai

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial x'^a}{\partial x^2} dx^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial x'a}{\partial x^N} dx^N \qquad (3.4)$$

Turunan parsial di sebelah kanan dari ekspresi di atas terevaluasi di titik P, dan ekspresi tersebut dapat dipersingkat penulisannya menjadi

$$dx'^a = \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\, dx^b$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

dan mengingat konvensi Einstein maka,

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b \tag{3.5}$$

Persamaan (3.4) inilah yang disebut persamaan transformasi koordinat di dalam manifold [3,7].

3.3. Prinsip Kovarian Umum

Teori relativitas umum yang dikemukakan Einstein sesungguhnya dibangun di atas dua prinsip penting. Yang pertama adalah prinsip ekivalen, yang tidak membedakan antara massa gravitasi dan massa inersia dari suatu benda, dan kedua adalah prinsip kovarian umum yang menyatakan bahwa hukum-hukum fisika berlaku sama pada semua kerangka acuan. Sejatinya, prinsip kovarian umum adalah konsekuensi dari prinsip ekivalen [1,2,5]. Namun, di dalam bab ini akan dibahas terlebih dahulu mengenai prinsip kovarian umum, sedangkan prinsip ekivalen akan dibahas pada akhir bab.

Prinsip kovarian umum menyatakan bahwa “semua hukum-hukum fisika berlaku sama pada semua kerangka acuan tanpa terkecuali” [5]. Atau dengan kata lain prinsip ini menyatakan bahwa hukum-hukum alam mempunyai bentuk yang tetap terhadap transformasi koordinat [1].

Konsekuensi dari prinsip ini ialah bahwa setiap besaran-besaran fisika harus dinyatakan dalam bentuk yang umum dan tidak tergantung terhadap koordinat dimana ia didefinisikan. Artinya, semua besaran fisika haruslah ternyatakan dalam bentuk tensor [5].

Tinjau kembali persamaan (2.13). Persamaan tersebut menyatakan bahwa menurut teori relativitas khusus, hukum-hukum fisika dinyatakan invarian terhadap transformasi Lorentz, hal ini merupakan konsekuensi dari keberadaan ruang-waktu 4 dimensi dengan metrik Minkowski. Sebagai generalisasi dari teori tersebut, maka di dalam teori relativitas umum dinyatakan bahwa hukum-hukum fisika bersifat invarian terhadap suatu transformasi yang lebih umum dalam konsep ruang waktu 4 dimensi yang diperumum. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa di dalam teori relativitas umum, ruang-waktu membentuk manifold diferensiabel, yaitu manifold pseudo-Riemann 4 dimensi $\mathscr{M}^4$dengan metrik Riemann yang bersifat lebih umum [2,5].

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Sebagai sebuah ilustrasi dari penjelasan di atas, dapat diperhatikan contoh berikut; tinjau suatu tensor dari besaran fisika T_{μ}^{ν} dalam sistem koordinat S , tensor ini akan mempunyai transformasi:

$$T_{\mu}^{\prime\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\prime\nu}}{\partial x^{\beta}}\, T_{\beta}^{\alpha} \tag{3.6}$$

terhadap sistem koordinat baru S'.

Dalam hal ini terdapat hubungan, jika komponen T_{μ}^{ν} nol semua di dalam koordinat S, maka akan nol semua pula di dalam koordinat lainnya (S'). Jika dalam sistem koordinat S terdapat persamaan tensor

$$A_{\mu}^{\nu} = B_{\mu}^{\nu} \tag{3.7}$$

yang menyatakan suatu hukum fisika. Dapat ditulis $G_{\mu}^{\nu} = A_{\mu}^{\nu} - B_{\mu}^{\nu}$, transformasinya ke dalam sistem koordinat S':

$$A_{\mu}^{\prime\nu} - B_{\mu}^{\prime\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\prime\mu}}\frac{\partial x^{\prime\nu}}{\partial x^{\beta}}\left(A_{\mu}^{\nu} - B_{\mu}^{\nu}\right)$$

Sehingga didapatkan persamaan dalam koordinat S':

$$A_{\mu}^{\prime\nu} = B_{\mu}^{\prime\nu} \tag{3.8}$$

Kesamaan yang lengkap antara persamaan (3.7) dan (3.8) menunjukkan bahwa dengan menggunakan besaran-besaran tensor untuk menyatakan hukum fisika, akan dipenuhi prinsip kovarian umum, yang sangat diperlukan dalam teori relativitas umum [1].

3.4. Interval Dalam Manifold Riemann

Sesuai dengan prinsip kovarian umum, maka geometri ruang minkowski yang terdapat di dalam teori relativitas khusus tidak berlaku lagi di dalam teori relativitas umum. Hal tersebut karena geometri ruang Minkowski merupakan ruang datar dan hanya berlaku untuk sistem inersial. Dengan demikian, interval yang didefinisikan di dalam geometri minkowski (persamaan (2.5)) haruslah diubah dengan definisi interval yang lebih umum yaitu (lihat Lampiran A):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{3.9}$$

karena ada invariansi ds^2 untuk sembarang koordinat.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Koefisien $g_{\mu\nu}$ disebut dengan metrik tensor, sedangkan ds^2 dinamakan jarak *infinitesimal* antara dua buah titik pada kurva s.

Definisi interval (elemen garis) yang demikian berlaku di dalam suatu ruang geometri yang lebih umum, yakni Manifold Riemann, suatu manifold diferensiabel $\mathcal{M}$ yang memiliki metrik tensor, dan ds sebagai metrik dari $\mathcal{M}$ [1,5].

Bila *eigenvalue* dari metrik tensor $g_{\mu\nu}$ tidak semuanya positif, maka manifold Riemann tersebut dinamakan Manifold Pseudo-Riemann. Bila manifold pseudo-Riemann tersebut berdimensi-n dan memiliki m *eigenvalue* yang negatif, maka manifold tersebut dilambangkan dengan simbol $\mathcal{M}^n{}_m$.

Dalam manifold pseudo-Riemann, jika s merupakan geodesiknya, maka ia berupa:

(I) *timelike* jika $ds^2 < 0$

(ii) *spacelike* jika $ds^2 > 0$

(iii) *null* (*light like*) jika $ds^2 = 0$

Metrik tensor kovarian $g_{\mu\nu}$ memiliki bentuk kontravariannya $g^{\mu\nu}$, di mana keduanya memiliki hubungan

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{3.10}$$

Kedua metrik tensor tersebut dapat digunakan untuk menaikkan dan menurunkan indeks suatu tensor [2,5,6]

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} T_{\rho}^{\nu} \tag{3.11}$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} T_{\nu}^{\rho} \tag{3.12}$$

3.5. Kesetaraan Sistem Koordinat

Dalam teori relativitas umum, perhitungan yang ada tidak boleh bergantung hanya pada sistem koordinat tertentu saja. Berbagai macam sistem koordinat yang pada umumnya memiliki set-set variabel penyusun yang tidak saling tegak lurus (*non-Euclidean*) haruslah dapat dipergunakan.

Pemilihan sistem koordinat yang akan digunakan disesuaikan dengan informasi fisika dan tujuan pembentukan sistem itu, maka dari itu, di dalam teori relativitas umum pemilihan sistem koordinat ditentukan oleh bentuk ruang.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Dapat diambil sebagai contoh adalah lintasan dari suatu cahaya yang dipengaruhi oleh medan gravitasi. cahaya tersebut akan dibelokkan sehingga lintasannya berbentuk lengkung. Karena sifat invariansi kecepatan cahaya, maka fenomena melengkungnya lintasan cahaya di dalam medan gravitasi menjadi dasar dari suatu pemahaman bahwa sifat ruang itu melengkung.

Melengkungnya lintasan cahaya karena medan gravitasi juga dapat diartikan bahwa sifat ruang ditentukan oleh distribusi materi dan berlaku sebaliknya. Dengan demikian untuk memilih sistem koordinat yang akan digunakan dipandang terlebih dahulu bentuk medan gravitasi (materi penghasil medan), dapat berbentuk sistem koordinat bola, silinder, dsb [1].

3.6. Tensor Yang Mengkarakterkan Ruang

Secara geometri murni pengertian interval di dalam manifold berdimensi N ditentukan oleh metrik tensor $g_{\mu\nu}$, sedangkan ukuran kelengkungan suatu ruang ditentukan oleh tensor $R^{\nu}_{\mu\rho\tau}$ yang disebut dengan tensor kelengkungan Riemann (*Riemann Curvature Tensor*).

Untuk menjabarkan tensor Riemann, dimulai dengan masalah pergeseran sejajar (*parallel transport*) sebuah vektor dalam ruang lengkung. Pergeseran sejajar *infinintesimal* ini didefinisikan sebagai pergeseran yang komponen-komponennya tidak berubah terhadap sistem koordinat datar (Galilean) dalam elemen volume *infinitesimal* yang diberikan [1,6].

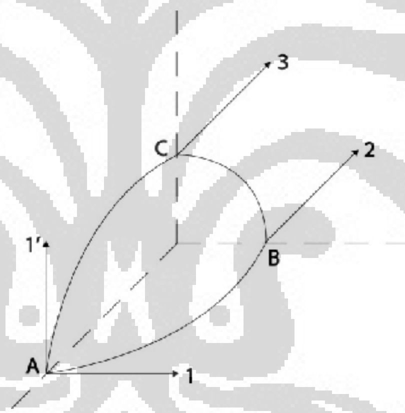
Jika $x^i = x^i(s)$ merupakan persamaan parameter dari kurva tertentu, dengan s merupakan “panjang busur”, maka $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ akan menjadi unit vektor arah kurva.

Jika kurva tersebut merupakan garis geodesik (lintasan tersingkat), di mana diferensiasi kovarian $Du^i = 0$ sepanjang kurva, maka jika vektor u^i digeser sejajar dari titik x^i ke titik $x^i + dx^i$, akan sama arahnya dengan vektor $u^i + du^i$ pada titik $x^i + dx^i$. Jadi, jika vektor arah beregeser sepanjang garis geodesik, vektor tersebut bergeser sejajar dengan dirinya sendiri, artinya selama pergeseran sejajar, sudut antara perubahan arah vektor dan perubahan arah kurva geodesik selalu tetap.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Dalam ruang lengkung ada hal yang penting dalam pergeseran sejajar ini, yaitu jika sebuah vektor pada suatu titik digeser dan kemudian dikembalikan lagi ke titik asalnya akan menghasilkan vektor yang berbeda (khususnya sepanjang jejak yang berbeda) [1].

Hal ini dapat digambarkan sebagai sebuah kurva dua dimensi (lihat gambar 4) sebagai berikut: Vektor 1 digeser sepanjang daerah batas 3 kurva yang geodesik. Dalam pergerakan sepanjang garis AB, vektor 1 selalu mempunyai (mempertahankan) sudut terhadap kurva tidak berubah, menuju vektor 2. Dengan cara yang sama, vektor bergerak sepanjang BC ke vektor 3. Dan akhirnya pergeseran dari C ke A, sepanjang kurva CA selamanya dengan sudut yang tetap terhadap kurva, dan menghasilkan vektor $1'$ yang berbeda dengan vektor 1.



(Gambar 4. Pergeseran Sejajar suatu vektor sepanjang kurva dari titik A hingga kembali ke A. Terlihat bahwa vektor hasil pergeseran merupakan vektor yang sama sekali berbeda dengan vektor semula [1].

Perubahan vektor setelah pergeseran sejajar dalam kurva tertutup infinitesimal ditulis sebagai ΔV_μ , dan dapat dinyatakan sebagai

$$\Delta V_\mu = \oint \delta V_\mu \tag{3.13}$$

Dan $\oint \delta V_\mu$ disebut dengan integral sepanjang jejak. Berdasarkan Appendiks, $\delta V_\mu = \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} V_\nu \, dx^\rho$, sehingga persamaan (3.13) menjadi:

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\Delta V_\mu = \oint \Gamma^\nu_{\mu\rho} V_\nu \, dx^\rho \tag{3.14}$$

formula $\delta V_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\rho} V_\nu \, dx^\rho$ dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\rho} = \Gamma^\nu_{\mu\rho} V_\nu \tag{3.15}$$

(persamaan (3.15) tersebut khusus untuk titik dalam kurva tertutup).

Dengan teorema Stokes, persamaan (3.14) dapat diubah menjadi

$$\Delta V_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Gamma^\nu_{\mu\tau} V_\nu)}{\partial x^\rho} - \frac{\partial(\Gamma^\nu_{\mu\rho} V_\nu)}{\partial x^\tau} \right) \Delta A^{\rho\tau} \tag{3.16}$$

Dimana $\Delta A^{\rho\tau}$ menyatakan luas *infinitesimal* yang dibatasi kurva, selanjutnya

$$\Lambda V_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Gamma^\nu_{\mu\tau})}{\partial x^\rho} V_\nu - \frac{\partial(\Gamma^\nu_{\mu\rho})}{\partial x^\iota} V_\nu + \Gamma^\nu_{\mu\iota} \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\rho} - \Gamma^\nu_{\mu\rho} \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\iota} \right) \Lambda A^{\rho\tau} \tag{3.17}$$

Dengan substitusi harga pada persamaan (3.15) ke dalam persamaan (3.17), maka diperoleh:

$$\Delta V_\mu = \frac{1}{2} R^\nu_{\mu\rho\tau} V_\nu \Delta A^{\rho\tau} \tag{3.18}$$

dengan $R^\nu_{\mu\rho\tau}$ merupakan tensor rank empat:

$$R^\nu_{\mu\rho\tau} = \frac{\partial(\Gamma^\nu_{\mu\tau})}{\partial x^\rho} - \frac{\partial(\Gamma^\nu_{\mu\rho})}{\partial x^\tau} + \Gamma^\nu_{\alpha\tau}\Gamma^\alpha_{\mu\tau} - \Gamma^\nu_{\alpha\tau}\Gamma^\alpha_{\mu\rho} \tag{3.19}$$

Bahwa $R^\nu_{\mu\rho\tau}$ adalah tensor jelas terlihat di dalam persamaan (3.19). Tensor $R^\nu_{\mu\rho\tau}$ disebut dengan tensor kelengkungan Riemann (Riemann curvature tensor). Tensor inilah yang mengkarakterkan kodisi ruang. Untuk ruang datar, harga $R^\nu_{\mu\rho\tau} = 0$ (mengingat $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0$ untuk ruang datar).

Tensor Riemann di atas berupa temsor campuran. Dengan menggunakan prinsip dari persamaan (3.12), maka tensor tersebut dapat diubah menjadi tensor kovarian saja:

$$R_{\mu\nu\rho\tau} = g_{\mu\alpha} R^\alpha_{\nu\rho\tau} \,,$$

yang mempunyai sifat-sifat simetri sebagai berikut :

$R_{\mu\nu\rho\tau} = R_{\rho\tau\mu\nu}$ (simetri)

$R_{\mu\nu\rho\tau} = -R_{\nu\mu\rho\tau} = -R_{\mu\nu\tau\rho}$ (antisimetri atau *skew-symetri*)

dan dapat dikontrtaksi menjadi tensor rank 2, yang disebut dengan tensor Ricci :

$$R_{\mu\rho} = g^{\nu\tau} R_{\nu\mu\tau\rho}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Sesuai dengan persamaan (3.19), diperoleh:

$$R_{\mu\rho} = \frac{\partial(\Gamma^{\nu}_{\mu\rho})}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial(\Gamma^{\nu}_{\mu\nu})}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu\tau} - \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\rho\tau} \tag{3.20}$$

Terlihat tensor Ricci ini mempunyai simetri:

$$R_{\mu\rho} = R_{\rho\mu}$$

Akhirnya, kontraksi dari $R_{\mu\rho}$ diperoleh suatu skalar (*invarian*):

$$R = g^{\mu\rho} R_{\mu\rho}$$

Yang disebut Ricci skalar atau kelengkungan skalar (*scalar curvature*) dari ruang [1].

$$R - g^{\mu\rho} g^{\nu\tau} R_{\nu\mu\tau\rho}$$

3.7. Prinsip Ekivalen

Ketika mendefinisikan Hukum gerak dan Hukum gravitasinya, Issac Newton mendefinisikan keberadaan dua jenis massa, massa inertial dan massa gravitasi. Massa inersial dari suatu benda diukur berdasarkan besarnya kelembaman suatu benda terhadap gaya dorong atau gaya tarik yang bekerja terhadap benda. Sedangkan massa gravitasi diukur berdasarkan besarnya pengaruh gaya gravitasi terhadap benda tersebut [1,9].

Sejak zaman Newton hingga pertengahan abad ke-20 sudah banyak Eksperimentalis yang berusaha membuktikan kesetaraan antara kedua jenis massa tersebut (eksperimennya disebut dengan *null experiment)*. Diantaranya dan yang paling terkenal adalah eksperimen yang dilakukan Eötövös pada tahun 1890 dengan menggunakan timbangan torsi (*torsion balance*). Eötövös membuktikan bahwa kedua massa tersebut setara dengan tingkat akurasi hingga orde 10^{-8}. Beberapa tahun setelah Eotovos, Pekar dan Fekete melakukan percobaan yang sama dengan tingkat akurasi hingga 10^{-9}, dan tahun 1935 Renner juga melakukan percobaan yang sama dengan tingkat akurasi hingga 10^{-10} [2,5,9].

Secara umum ada empat *statement* penting yang merupakan bukti dari null eksperimen yaitu:

1. Gerak dari suatu "Partikel Tes Gravitasi" di dalam medan gravitasi tidak bergantung terhadap massa dan komposisi partikel tersebut.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

2. Medan gravitasi terkopel di manapun.
3. Tidak ada percobaan lokal yang dapat membedakan gerak jatuh bebas non-rotasi dari suatu partikel dalam medan gravitasi terhadap gerak *uniform* dalam ruang di mana medan gravitasi tidak ada.
4. Suatu kerangka (*frame*) yang bergerak dipercepat secara linear relatif terhadap kerangka inersial dalam relativitas khusus, secara lokal identik dengan kerangka yang diam di dalam medan gravitasi [9].

Berdasarkan bukti-bukti eksperimen tersebut, maka Einstein akhirnya menyimpulkan dalam postulatnya yang terkenal dengan nama Prinsip Ekivalensi Massa bahwa "Gaya gravitasi dan gaya inersial yang bekerja terhadap suatu benda adalah sama (*equivalence*) dan tak terbedakan (*indistinguishable*) satu sama lain". Konsekuensi dari prinsip ini ialah tidak ada lagi kerangka acuan inersial. Dengan demikian, maka konsep percepatan yang diperkenalkan dalam mekanika Newtonian tidak lagi absolut [2,5].

Seperti Einstein, LD Landau mengemukakan hal yang serupa yaitu "Gerak dalam sistem non-inersial adalah sama seperti dalam sistem inersial dalam (dengan adanya) medan gravitasi".

Pada sistem non-inersial, interval didefinisikan sebagai persamaan (3.9), $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu}$, dan sifat gerak ditentukan oleh medan gaya tertentu. Medan gaya inilah yang menentukan harga $g_{\mu\nu}$ (harga transformasi dari sistem koordinat galilean ke koordinat yang dipilih).

Pada mekanika relativistik hal serupa juga berlaku, di mana medan-medan ditentukan $g_{\mu\nu}$ (dan sebaliknya), sehingga medan gravitasi dapat mengubah ukuran ruang-waktu , seperti yang ditentukan oleh $g_{\mu\nu}$.

Selain analogi di atas, ada juga perbedaan antara sistem non-inersial dan medan gravitasi dalam beberapa hal (lihat tabel 1) [1].

Sistem non-inersial	Medan gravitasi
1. Medan tidak berlimit pada jarak tak berhingga. Contoh: gaya sentrifugal	Medan gravitasi yang ditimbulkan pada jarak jauh akan mendekati nol

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

2. Medan menjadi hilang jika ditransformasikan ke koordinat inersial.	Medan tidak dapat dieliminasikan oleh pemiliihan sistem koordinat.
3. Harga $g_{\mu\nu}$ yang di dapat dari transformasi Galileo (koordinat datar) dapat diturunkan ke seluruh ruang dengan inversi transformasi koordinat.	Keadaan ruang-waktu atau medan disifati oleh $g_{\mu\nu}$ sehingga dengan sembarang transformasi tidak dapat dijadikan ke harga Galileo di seluruh ruang. Karena ruang menjadi melengkung.

Tabel 1. Perbedaan antara sistem koordinat non- inersial dengan medan gravitasi [1].

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

BAB IV

Persamaan Gerak Di Dalam Medan Gravitasi

4.1. Persamaan Gerak menurut Garis Geodesik

Lintasan terpendek yang dapat ditempuh antara dua buah titik dalam kurva pada suatu manifold disebut dengan geodesik. Pengertian yang demikian merupakan pengertian garis geodesik secara intuitif [5]. Sedangkan definisi secara matematis dari suatu geodesik dapat dilakukan dalam beberapa metode,misalnya dengan transpor paralel (pergeseran sejajar) ataupun dengan prinsip aksi minimum (*least action principle*) yang dikenal juga sebagai prinsip variasi.

4.1.1. Persamaan Geodesik Menurut Transpor Parallel (Parallel Transport)

Secara kalkulus, suatu kurva dikatakan sebagai kurva geodesik apabila memiliki gradien atau tangen vektor yang sejajar terhadap kurva itu sendiri.

Jika terdapat suatu kurva C(t) pada manifold $\mathcal{M}$, maka C(t) dikatakan geodesik jika vektor tangensialnya $C'(t) = \frac{dC}{dt}$ paralel, atau

$$\frac{dC'}{dt} = 0 \tag{4.1}$$

Bila C'(t) ditulis dalam bentuk $V = v^i e_i$ dengan $v^i = \frac{dx^i}{dt}$, maka dengan menggunakan konsep turunan kovarian (lihat Lampiran A) persamaan di atas dapat dituliskan dalam sebagai:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{4.2}$$

Dan jika disubstitusi harga $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ (dengan pengertian indeks secara umum juga berarti $v^j = \frac{dx^j}{dt}$), maka persamaan (4.2) menjadi:

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \qquad (4.3)$$

Persamaan (4.3) inilah yang dinamakan persamaan Geodesik. Secara geometris, persamaan ini menggambarkan persamaan garis terpendek antara dua buah titik yang berbeda di dalam manifold Riemann [5,9,10].

4.1.2. Persamaan Geodesik Menurut Prinsip Variasi

Di dalam teori relativitas khusus gerak sebuah partikel bebas dapat ditentukan berdasarkan aksi terpendeknya. Prinsip ini dikenal sebagai prinsip aksi minimum atau dikenal juga sebagai prinsip variasi (Dapat dilihat dalam Lampiran B) sebagai:

$$\delta Y = -m_o c\, \delta \int ds = 0 \qquad (4.4)$$

Sesuai dengan gerakan partikel bebas, garis semesta yang dilaluinya ekstrimum diantara garis semesta yang ada, yaitu berbentuk garis lurus untuk ruang Euclid.

Berdasarkan prinsip ekivalen yang telah dijelaskan di dalam bab tiga, maka gerak partikel dalam medan graviatasi juga dapat ditentukan oleh persamaan (4.4), yaitu kita memandang seolah-olah partikel bergerak "bebas" dalam medan gravitasi yang mengubah ukuran ruang-waktu dan dimanifestasikan dalam perubahan ds pada bentuk dx^μ. Sehingga setiap titik yang dilalui oleh partikel tersebut ada sepanjang garis yang ekstrimum. Garis yang demikianlah yang kita definisikan sebagai garis geodesik.

Untuk mendapatkan persamaan gerak, harga ds divariasikan. Harga ds kita variasikan dengan memvariasikan harga ds^2 dari persamaan interval yang ada pada persamaan (3.9)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\delta ds^2 = \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$2\,ds\delta(ds) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} dx^{\mu} dx^{\nu} \delta x^{\rho} + 2 g_{\mu\nu} dx^{\mu} d\delta x^{\nu} \tag{4.5}$$

Dengan melakukan substitusi persamaan (4.5) ke dalam persamaan (4.4), maka akan didapatkan:

$$\delta Y = -m_o c \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) \delta x^{\rho} + g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{d\delta x^{\nu}}{ds}\right) \right) ds$$

$$= -m_o c \left\{ \int \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) \delta x^{\rho} ds + g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right) \delta x^{\nu} \Big|_1^2 - \int \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \right) \delta x^{\nu} ds \right\}$$

$$= -m_o c \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) \delta x^{\rho} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \right) \delta x^{\nu} \right\} ds \tag{4.6}$$

Jika indeks ν pada suku ke dua dari persamaan (4.6) kita tukar dengan indeks ρ, dan karena harga δx sembarang, maka:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) - \left(g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} \right) - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right) = 0 \tag{4.7}$$

Suku ke tiga dari persamaan (4.7) di atas dapat ditulis sebagai:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} \right) \left(\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{ds}\right)$$

Sehingga, sesuai dengan simbol Christoffel (lihat Lampiran A):

$$\Gamma_{\rho;\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

maka persamaan (4.7) dapat kita tuliskan menjadi:

$$g_{\mu\rho} \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\rho;\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \tag{4.8}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Selanjutnya kalikan persamaan (4.8) dengan $g^{\mu\rho}$ sehingga kita dapatkan:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{4.9}$$

Persamaan (4.9) adalah geodesik yang merupakan persamaan gerak partikel dalam suatu medan gravitasi. Persamaan (4.9) persis sama dengan persamaan (4.3).

Beberapa analogi yang dapat dilihat dari persamaan tersebut ialah $\frac{dx^\mu}{ds}$ dapat dipandang sebagai "kecepatan", sehingga $\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ merupakan "percepatan". Bentuk $-m_o\Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$ merupakan "gaya", di mana tensor $g_{\mu\nu}$ merupakan "potensial" medan gravitasi yang diturunkan dari "intensitas" $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ [1].

4.2. Persamaan Hamilton-Yacobi dalam Medan Gravitasi

Persamaan gerak partikel dalam medan gravitasi dapat juga dinyatakan lain, yakni dengan persamaan Hamilton-Yacobi, yang diturunkan dari momentum partikel kovarian dan kontravariannya (lihat Lampiran A).

Sesuai dengan prinsip variasi (yang dijelaskan secara lengkap dalam Lampiran B) dan juga prinsip kovarian, maka momentum suatu partikel yang bergerak dalam medan gravitasi dapat dideskripsikan dalam bentuk kontravarian

$$p^\mu - m_o c\,\frac{dx^\mu}{ds}$$

dan juga bentuk kovariannya

$$p_\mu = m_o c\,\frac{dx_\mu}{ds}$$

Sehingga

$$p^\mu p_\mu = m_o^2 c^2$$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Dan karena $p^{\mu} = \frac{\partial Y}{\partial x_{\mu}}$, maka didapatkan persamaan Hamilton-Yacobi:

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial Y}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial Y}{\partial x^{\nu}} - m_o^2 c^2 = 0 \tag{4.10}$$

Persamaan ini merupakan salah satu alternatif lain dalam membicarakan gerak partikel dalam medan gravitasi secara relativistik, selain persamaan geodesik (persamaan (4.3) ataupun persamaan (4.9)).

Persamaan Hamilton-Yacobi tersebut memberikan informasi mengenai gerakan cahaya dalam medan gravitasi, yaitu dengan menyamakan massa diam cahaya, m_o, dengan nol, sehingga diperoleh persamaan:

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial Y}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial Y}{\partial x^{\nu}} = 0$$

Salah satu solusi yang cukup menarik dari persamaan ini ialah pembelokan cahaya dari suatu bintang bila melintas dekat bintang lain [1].

4.3. Persamaan Medan Einstein

Untuk mendapatkan persamaan yang menggambarkan suatu medan gravitasi juga dapat dilakukan dengan beberapa cara. Diantara beberapa cara tersebut yang pertama dapat diperoleh dengan mengkontraksikan indeks-indeks pada tensor Riemann yang terdapat di dalam Identitas Bianchi hingga mendapatkan tensor Einstein, dan yang kedua dengan prinsip variasi [5].

4.3.1. Persamaan Medan Einstein Menurut Teori Tensor Klasik

Di dalam teori tensor klasik, suatu tensor kelengkungan Riemann $R^{\nu}_{\mu\rho\tau}$ memiliki suatu identitas yang diturunkan dengan menggunakan operator turunan kovariannya, identitas ini dinamakan identitas Bianchi [2]. Identitas ini dituliskan dalam bentuk eksplisit operator turunan kovariannya sebagai

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\nabla_\alpha R^{\nu}_{\mu\rho\tau} + \nabla_\tau R^{\nu}_{\mu\alpha\rho} + \nabla_\rho R^{\nu}_{\mu\tau\alpha} = 0 \tag{4.11}$$

Dengan mengkontraksikan indeks ν dan ρ, maka persamaan (4.11) di atas dapat dituliskan

$$\nabla_\alpha R_{\mu\tau} + \nabla_\tau R_{\mu\alpha} + \nabla_\nu R^{\nu}_{\mu\tau\alpha} = 0 \tag{4.12}$$

dimana $R_{\mu\nu}$ merupakan tensor Ricci dalam bentuk kovariannya. Dan selanjutnya, jika persamaan (4.12) di atas dikontraksikan sekali lagi antara indeks μ dan indeks τ, maka akan kita dapatkan

$$-\nabla_\alpha R + \nabla_\tau R^{\tau}_{\alpha} + \nabla_\nu R^{\nu}_{\alpha} = 0 \tag{4.13}$$

dimana R merupakan besaran skalar kelengkungan yang disebut sebagai Ricci skalar atau kelengkungan Gauss. Persamaan (4.13) juga dapat dituliskan sebagai

$$\nabla_\mu \left(R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\nu} R \right) = 0 \tag{4.14}$$

dengan $R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\nu} R = G^{\mu}_{\nu}$,adalah tensor Einstein. Tensor Einstein ini apabila dituliskan dalam bentuk kovariannya adalah sebagai beriikut:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{4.15}$$

Di dalam postulatnya yang kedua, mengenai prinsip kovarian umum, Einstein menyatakan bahwa “Semua hukum fisika haruslah sama dalam semua kerangka acuan”. Artinya, hukum-hukum fisika harus bersifat invarian terhadap transformasi koordinat, atau dalam bahasa geometri diferensial : invarian terhadap transpor paralel. Akibatnya, energi dan momentum sistem harus kekal (hukum konservasi energi dan momentum) dan dapat diutliskan sebagai

$$\nabla_\mu T^{\mu}_{\nu} - 0 \tag{4.16}$$

dimana T^{μ}_{ν} merupakan tensor energi-momentum (dapat dilihat di dalam lampiran B mengenai prinsip variasi). Dengan membandingkan antara persamaan (4.16) dan (4.15), maka akan diperoleh

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\nu} R = \lambda T^{\mu}_{\nu} \tag{4.17}$$

dimana λ merupakan suatu konstanta kopling yang nilainya dapat ditentukan dari syarat batas, yaitu sebesar

$$\lambda = \frac{8\pi K}{c^4} \tag{4.18}$$

atau dapat ditulis λ=8π jika digunakan satuan alami (natural unit) K=c=1.

Persamaan (4.17) jika dituliskan dalam bentuk kovariannya menjadi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \lambda T_{\mu\nu} \tag{4.19}$$

Persamaan (4.17) dan (4.19) inilah yang dinamakan persamaan medan Einstein. Ruas kiri merepresentasikan geometri ruang-waktu sistem, sedangkan ruas kanan menggambarkan distribusi materi pada sistem [2,5].

4.3.2. Persamaan Medan Einstein Menurut Prinsip Variasi

Pada bagian kali ini persamaan medan gravitasi akan coba diturunkan dengan menggunakan prinsip variasi, yakni dengan membentuk aksi medan Y_g dan aksi partikel Y_m termasuk aksi interaksi keduanya.

Aksi Y_g harus menyatakan bentuk integral skalar $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ di dalam ruang-waktu. Untuk menyatakan skalar ini, seperti pada medan elektomagnetik, persamaan medan gravitasi harus berisi turunan "potensial" tidak lebih dari turunan kedua. Sehingga, kita memerlukan integran G yang hanya berisi turunan $g_{\mu\nu}$ tidak lebih dari orde pertama, sehingga G hanya mengandung harga tensor $g_{\mu\nu}$ dan besaran-besaran $\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}$.

Pemilihan harga $g_{\mu\nu}$ dan $\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}$ tidak dapat diambil secara acak begitu saja, harus diturunkan dari skalar kelengkungan ruang semesta, R (Ricci curvature scalar). Meskipun R mengandung penjumlahan $g_{\mu\nu}$ turunan pertama dan kedua,

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

tetapi ia bersifat linier dalam turunan kedua. Oleh sebab itu, invarian integral $\int R\sqrt{-g}\, d\Omega$ dapat ditransformasikan dengan teorema Gauss ke integral yang tidak mengandung turunan suku kedua:

$$\int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \int G\sqrt{-g}\, d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}\, w^{\nu}}{\partial x^{\nu}} d\Omega \tag{4.20}$$

Jika persamaan (4.20) divariasikan, maka, sesuai dengan teorema Gauss (lihat Lampiran A), integral suku kedua ruas kanan hilang karena dapat ditransformasi menjadi integral seluruh hipersurface sekeliling volume empat dimensi. Sehingga

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega - \delta \int G\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{4.21}$$

Dengan demikian, maka variasi aksi medan dapat dituliskan

$$\delta Y_g = b\, \delta \int G\sqrt{-g}\, d\Omega = b\, \delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{4.22}$$

Dengan b merupakan konstanta, harga b menurut syarat batas dapat dipilih $b = \left(\frac{c^3}{16\pi K}\right)$, dengan K merupakan konstanta gravitasi universal.

Sehingga persamaan (4.22) menjadi

$$\delta Y_g = -\left(\frac{c^3}{16\pi K}\right) \delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{4.23}$$

Sekarang, mari kita perhatikan ruas kanan saja

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d\Omega$$

$$= \int (R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu})\, d\Omega \tag{4.24}$$

dan karena $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, maka persamaan (4.24) menjadi

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d\Omega + \int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{4.25}$$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Perhatikan integral suku kedua (ruas kanan), untuk sistem koordinat geodesik lokal, yakni untuk semua titik $\Gamma^{\mu}_{\gamma\rho} = 0$, maka ruas dapat ditulis dalam persamaan

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}\right)$$

$$= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial w^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \qquad (4.26)$$

persamaan (4.26) ini hanya berlaku untuk sistem koordinat geodesik lokal

Untuk sembarang koordinat $\frac{\partial w^{\nu}}{\partial x^{\nu}}$ haruslah diganti dengan $w^{\nu}_{;\nu}$ dengan

$$w^{\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}\, w^{\nu}\right) \qquad (4.27)$$

(Penjelasan mengenai persamaan (4.27) dapat dilihat dalam Lampiran B).

Dengan memasukkan persamaan (4.27) ke dalam integral suku kedua ruas kanan dari persamaan (4.25), maka:

$$\int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \frac{\partial(\sqrt{-g}\, w^{\nu}}{\partial x^{\nu}}\, d\Omega \qquad (4.28)$$

Persamaan (4.28) ini berdasarkan teorema Gauss dapat ditransformasikan pada sekeliling hipersurface bervolume-empat, akibatnya variasi medan pada batas-batas integras itu sama dengan nol. Sehingga persamaan (4.25) menjadi:

$$\delta\int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d\Omega \qquad (4.29)$$

Dengan memasukkan persamaan (4.29) di atas ke dalam persamaan (4.23), maka kita dapatkan:

$$\delta Y_g = -\left(\frac{c^3}{16\pi K}\right)\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d\Omega \qquad (4.30)$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Aksi partikel Y_m yang diartikan sebagai aksi karena pengaruh medan luar ditulis dengan persamaan (lihat Lampiran B):

$$\delta Y_m = \frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ d\Omega \qquad (4.31)$$

Perhatikan aksi medan yang dideskripsikan dalam persamaan (4.30) dan aksi partikel yang dideskripsikan dalam persamaan (4.31). Menurut prinsip relativitas umum, antara aksi medan dan aksi partikel saling terkopel. Dan variasi dari keduanya dapat digabungkan dengan aksi yang ekstrimum sebagai:

$$\delta Y_g + \delta Y_m = 0$$

Sehingga:

$$-\left(\frac{c^3}{16\pi K}\right)\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \left(\frac{8\pi K}{c^4}\right)T_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0 \qquad (4.32)$$

Karena harga $\delta g^{\mu\nu}$ pada persamaan (4.32) di atas dapat dipilih sembarang, maka:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \left(\frac{8\pi K}{c^4}\right)T_{\mu\nu} = 0$$

Atau

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \left(\frac{8\pi K}{c^4}\right)T_{\mu\nu} \qquad (4.33)$$

Jika persamaan (4.33) dituliskan dalam indeks campuran

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R = \left(\frac{8\pi K}{c^4}\right)T_{\mu}^{\nu} \qquad (4.34)$$

Persamaan (4.33) dan (4.34) inilah yang merupakan persamaan medan gravitasi relativistik yang dikenal dengan persamaan medan Einstein, dan terlihat jelas bahwa dengan menggunakan prinsip variasi dapat diturunkan persamaan medan Einstein yang sama persis dengan persamaan (4.17) dan (4.19).

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Sekarang, jika persamaan (4.34) dikontraksikan dalam indeks μ dan ν, didapat

$$R = -\frac{8\pi K}{c^4}T \tag{4.35}$$

Bila dimasukkan persamaan (4.35) ke dalam persaman (4.33), maka persamaan medan Einstein dapat dituliskan dalam bentuk:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi K}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{4.36}$$

Bentuk-bentuk persamaan medan Einstein yang ada pada (4.33), (4.34), maupun (4.36) terlihat dengan jelas sebagai persamaan diferensial parsial non-linier (PDP non-Linier). Dengan demikian kaidah yang berlaku pada medan gravitasi dalam pendekatan Newton (klasik) yang bersifat liniear, yakni kaidah superposisi, tidak lagi berlaku di dalam persamaan medan gravitasi yang relativistik ini [1].

Terdapat beberapa solusi menarik yang disesuaikan pada kasus dan kondisi tertentu untuk memecahkan persamaan medan Einstein tersebut. Diantaranya adalah solusi untuk kasus ruang hampa di sekitar bintang dengan koordinat sferis (koordinat bola) dan bersifat statis. Dimana pada ruang hampa harga $T_{\mu\nu} = 0$, artinya partikel tidak mendapat pengaruh medan luar selain medan gravitasi, sehingga persamaan medan gravitasi menjadi:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4.37}$$

Namun, harga $R_{\mu\nu} = 0$, tidak serta-merta menggambarkan bahwa ruang hampa mempunyai bentuk ruang yang datar. Karena, untuk menggambarkan kondisi suatu ruang merupakan ruang datar dibutuhkan argumen yang lebih kuat yaitu tensor Riemann-nya berharga nol, $R^{\mu}_{\nu\rho\tau} = 0$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

BAB V

Solusi Schwarzschild dan Aplikasinya Pada Beberapa Fenomena Fisika

Persamaan medan Einstein memang merupakan persamaan diferensial parsial yang sangat tidak linear (*highly non-liniear* PDE), namun untuk kasus khusus tertentu terdapat sejumlah solusi eksak untuk memecahkannya [5].

Salah satu dari solusi tersebut adalah solusi pada ruang vakum (ruang di sekitar bintang) dengan distribusi materi berupa simetri sferis dan statis. Artinya, medan statis ini mempunyai pusat simetri yang dihasilkan oleh sembarang distribusi materi yang tersentralkan. Dengan demikian, bukan hanya distribusinya saja yang terspusat, tetapi gerakan materinya juga harus simetri terpusat, kecepatan suatu titik harus diarahkan sepanjang radius tertentu [2,9].

Solusi ini pertama kali dikemukakan oleh K.Schwarzschild pada tahun 1916, sehingga disebut dengan Solusi Schwarzschild. Sedangkan metrik yang digunakan di dalam solusi tersebut dinamakan metrik Schwarzschild [1].

5.1. Solusi Persamaan Medan Gravitasi yang Disederhanakan

Bentuk yang simetri dari suatu sistem ditunjukkan dari ukuran ruang semesta berupa interval antara dua titik yang berdekatan, $ds = \left(g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}\right)^{1/2}$, memiliki besar yang sama jika ditempatkan pada radius yang sama dari pusat sistem[7].

Dalam geometri ruang-waktu datar (contohnya; ruang Minkowski) yang memiliki sistem koordinat sferis (berupa bola), interval antara dua titik tersebut dapat diekspresikan dalam bentuk:

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

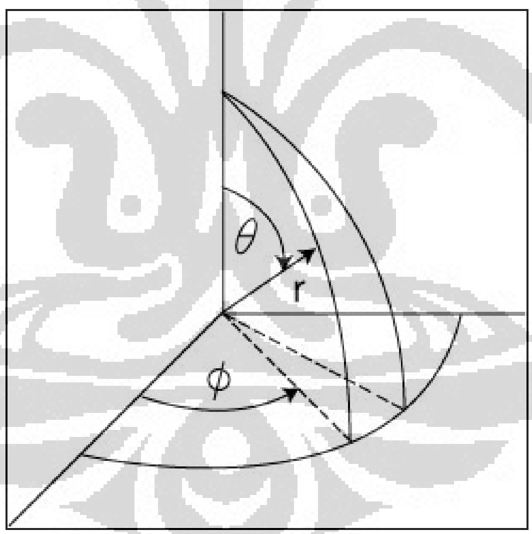
$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad (5.1)$$

dengan r merupakan vektor radius dari pusat sistem ke suatu titik pada sistem [2].

Di dalam geometri ruang yang lebih umum (manifold), seperti yang berlaku pada medan gravitasi, tidak ada besaran yang mempunyai vektor radius yang sama antara jarak ke pusat dan panjang keliling per 2π. Dengan demikian, interval yang diekspresikan dalam persamaan (5.1) harus dimodifikasi ke dalam bentuk yang lebih umum berupa:

$$ds^2 = a(r,t)dt^2 + b(r,t)dr^2 + c(r,t)dtdr + d(r,t)(d\theta^2 + \sin^2 d\theta\, d\phi^2 \qquad (5.2)$$

dengan a, b,c, dan, d merupakan fungsi sembarang yang memiliki parameter r dan t, dan berlaku di dalam ruang koordinat sferis r, θ, dan ϕ [1,2].



Gambar.5. interval dari dua titik pada radius yang sama dari pusat koordinat berupa sferis adalah sama [1].

Pemilihan kerangka referensi di dalam teori relativitas umum dapat dilakukan secara sembarang. Dengan demikian, kita dapat menyederhanakan persamaan (5.2) dengan suatu transformasi yang tetap mempertahankan sifat

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

simetri terpusat dari ds^2. Transformasi tersebut berupa transformasi dalam koordinat r dan t.

$$r' = f_1(r,t), \qquad t' = f_2(r,t)$$

dimana f_1 dan f_2 merupakan sembarang fungsi dari koordinat yang baru [1].

Fungsi-fungsi sembarang yang terdapat di dalam persamaan (5.2) dapat disederhanakan terhadap transformasi koordinat yang ada. Pertama, koefisien drdt, yaitu c(r,t), dapat dihilangkan. Selanjutnya, b(r,t) dan a(r,t) dapat dituliskan dalam bentuk eksponensial berupa $-e^{\beta}$ dan c^2e^{α} , dengan α dan β merupakan fungsi dari koordinat yang baru (r',t'). Dan terakhir, koefisien d(r,t) dapat disamakan dengan $-r^2$. Kondisi terakhir ini dapat berarti bahwa vektor radius r sesuai dengan panjang keliling dibagi 2π , mengingat bahwa elemen busur sebuah lingkaran dalam bidang $\theta = \frac{\pi}{2}$ adalah $dl = r\, d\phi$.

Medan yang digunakan di dalam solusi Schwarzschild ini merupakan medan statis, sehingga harga-harga α dan β dapat dituliskan hanya berupa fungsi r saja. Dengan begitu, harga interval ds^2 pada persamaan (5.2) dapat dituliskan menjadi:

$$ds^2 = e^{\alpha}c^2dt^2 - e^{\beta}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\theta\, d\phi^2) \tag{5.3}$$

Jika parameter-parameter koordinat ct, r, θ, dan ϕ, disamakan dengan $x^0, x^1, x^2, \text{dan } x^3$, maka komponen-komponen dalam metrik tensor kovariannya, yaitu $g_{\mu\nu}$, dapat dituliskan berupa:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

dan komponen-komponen dalam metrik tensor kontravariannya, $g^{\mu\nu}$:

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

Kedua metrik kovarian dan kontravarian di atas dapat kita tuliskan komponen-komponen diagonalnya sebagai berikut:

$$g_{00} = e^{\alpha}$$

$$g_{11} = -e^{\beta}$$

$$g_{22} = -r^2$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 d\theta \tag{5.4}$$

dan

$$g^{00} = e^{-\alpha}$$

$$g^{11} = -e^{-\beta}$$

$$g^{22} = -r^{-2}$$

$$g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} d\theta \tag{5.5}$$

Dari harga-harga pada komponen diagonal yang terdapat pada metrik tensor kovarian dan kontravarian dalam persamaan (5.4) dan (5.5), maka dapat disusun komponen-komponen dari simbol Christoffel bentuk kedua yang dihitung menggunakan persamaan (lihat lampiran A):

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\tau}\left(\frac{\partial g_{\tau\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\tau}}\right) \tag{5.6}$$

Komponen-komponen simbol Christoffel yang tidak hilang (berharga nol) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\alpha'}{2}\ ; \qquad \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\alpha'\ ; \qquad \Gamma^0_{11} = \frac{\beta'}{2} e^{\beta-\alpha}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\Gamma^1_{00} = \frac{\alpha'}{2} e^{\alpha-\beta} \; ; \qquad \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{\beta'}{2} \; ; \qquad \Gamma^1_{22} = -re^{-\beta} \; ; \; \Gamma^1_{33} = -r \sin^2\theta \, e^{-\beta}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \; ; \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \; ; \qquad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta \tag{5.7}$$

Dengan memasukkan komponen-komponen pada persamaan (5.7) di atas ke dalam tensor Ricci pada persamaan (3.20), maka dapat disusun tensor Einstein yang tidak hilang (nonvanishing Einstein tensor) dengan menggunakan persamaan (4.15) sebagai berikut:

$$G_{00} = -e^{-\beta}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\beta'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = \lambda\, T_{00} \tag{5.8.a}$$

$$G_{01} = -\frac{1}{2} e^{-\beta} \frac{\beta'}{r} = \lambda\, T_{01} \tag{5.8.b}$$

$$G_{11} = -e^{-\beta}\left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \lambda\, T_{11} \tag{5.8.c}$$

$$G_{22} = -\frac{1}{2} e^{-\beta}\left(\alpha'' + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha' - \beta'}{r} - \frac{\alpha'\beta'}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} e^{-\alpha}\left(\beta'' + \frac{\beta'^2}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{2}\right) = \lambda\, T_{22} \tag{5.8.d}$$

$$G_{33} = -\frac{1}{2} e^{-\beta}\left(\alpha'' + \frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha' - \beta'}{r} - \frac{\alpha'\beta'}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2} e^{-\alpha}\left(\beta'' + \frac{\beta'^2}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{2}\right) = \lambda\, T_{33} \tag{5.8.e}$$

Persamaan-persamaan medan gravitasi selanjutnya dapat diintegrasikan secara eksak untuk medan simetri sferis dalam ruang vakum (ruang di sekitar materi penghasil medan gravitasi). Dalam hal ini tensor energi-momentumnya berharga nol, sehingga persamaan-persamaan (5.8.a)-(5.8.e) dapat disederhanakan menjadi (perhatikan bahwa persamaan (5.8.d) dan (5.8.e) memberikan persamaan yang serupa):

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$e^{-\beta}\left(\frac{\alpha'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0 \qquad (5.9.a)$$

$$e^{-\beta}\left(\frac{\beta'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0 \qquad (5.9.b)$$

Persamaan (5.9.a) dan (5.9.b) bila diperbandingkan (disamakan), maka akan didapatkan bahwa:

$$\alpha' + \beta' = 0$$

$$\alpha' = -\beta'$$

sehingga;

$$\alpha = \beta + \text{Konstanta} \qquad (5.10)$$

Tinjau kembali persamaan (5.3), untuk suatu keadaan yang sangat jauh dari pusat medan ruang akan menjadi seolah-olah datar, sehingga persamaan (5.3) dapat ditulis ulang menjadi

$$ds^2 = c^2t^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\Phi^2) \qquad (5.11)$$

sehingga dari persamaan tersebut terlihat bahwa

$$\alpha = \beta = 0$$

Dan jika dimasukkan ke persamaan (5.10), maka akan didapatkan:

$$\alpha = -\beta \qquad (5.12)$$

Dengan memasukkan persamaan (5.12) ke dalam persamaan (5.8.d), sehingga:

$$e^{\alpha}(1 + r\alpha') = 1 \qquad (5.13)$$

Jika dimisalkan $e^{\alpha} = \lambda$, maka persamaan(5.13) di atas menjadi:

$$\lambda + r\lambda' = 1 \qquad (5.14)$$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Solusi dari persamaan diferensial orde pertama di atas adalah:

$$\lambda = 1 - \frac{r_s}{r} \tag{5.15}$$

dengan r_s merupakan konstanta integrasi yang disebut “radius gravitasi”.

Dengan demikian;

$$e^{\alpha} = e^{-\beta} = \lambda = 1 - \frac{r_s}{r} \tag{5.16}$$

Sehingga nilai g_{00} yang terdapat pada persamaan (5.4) menjadi:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_s}{r} \tag{5.17}$$

Persamaan (5.12) hingga (5.17) dapat digunakan untuk menyusun persamaan interval yang baru yang lebih umum, yaitu:

$$ds^2 = \lambda c^2 dt^2 \quad \lambda^{-1} dr^2 \quad r^2 (d\theta^2 + \sin^2 d\theta \, d\phi^2) \tag{5.18}$$

Persamaan (5.18) inilah yang merupakan solusi Schwarzschild untuk persamaan medan Einstein di ruang vakum. Persamaan (5.18) ini menggambarkan secara lengkap medan gravitasi dalam ruang hampa yang dihasilkan oleh distribusi mmassa yang terpusat [1].

Harga r_s pada persamaan (5.15) dapat dicari dengan menggunakan syarat batas klasik. Untuk medan gravitasi lemah, memiliki fungsi potensial $V = m_0 \varphi$, dengan φ adalah fungsi potensial, $\varphi = -\frac{Gm}{r}$ (sesuai formula Newton), m_0 menyatakan massa partikel uji dalam medan gravitasi, m menyatakan massa materi penghasil medan, r merupakan jarak dari pusat massa m ke massa m_0, dan G menyatakan konstanta gravitasi universal [1,2].

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Lagrangian dari sistem tersebut, apabila sedikit dikoreksi secara relativistik, dapat dituliskan menjadi:

$$L = -m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 - m_0\varphi \tag{5.19}$$

Sehingga, fungsi aksi dari Lagrangian tersebut dapat ditulisakn:

$$Y = \int\left(-m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 - m_0\varphi\right)dt \tag{5.20}$$

Bandingkan dengan aksi menurut teori relativitas khusus:

$$Y = -m_0c\int ds$$

maka didapatkan hubungan:

$$ds = \left(c - \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c}\right) - \frac{\varphi}{c}\right)dt \tag{5.21}$$

Jika persamaan (5.21) dikuadratkan dan dimasukkan pendekatan klasik yaitu c mendekati tak berhingga, maka akan didapatkan persamaan interval:

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - dr^2 \tag{5.22}$$

dengan $dr = v\ dt$ (secara klasik).

Dari persamaan (5.22) diperoleh harga dari g_{00} yaitu:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

$$= 1 - \frac{2Gm}{rc^2} \tag{5.23}$$

Jika dibandingkan persamaan (5.23) ini dengan harga g_{00} pada persamaan (5.17), maka akan didapatkan:

$$r_s - \frac{2Gm}{c^2} \tag{5.24}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

5.2. Solusi Schwarzschild untuk Perhitungan Presisi Orbit Planet

Salah satu fenomena fisika yang tidak mampu dijelaskan dengan baik oleh hukum gravitasi Newtonian adalah peristiwa bergesernya orbit planet pada lintasan "*ellips*"nya, sehingga lintasan yang terbentuk tidak benar-benar *ellips* melainkan agak berbentuk *Rossetes-curved* (Gambar 2) [4].

Solusi Schwarzschild terhadap persamaan medan Einstein untuk kondisi vakum dan statis, ternyata mampu menerangkan peristiwa pergeseran orbit planet. Hasil perhitungan yang dilakukan sesuai dengan data-data pengamatan yang ada. Objek yang dihitung dalam penelitian ini hanya difokuskan pada pergeseran orbit planet-planet di dalam tata surya.

5.2.1. Orbit Planet Menurut Teori Klasik

Menurut teori gravitasi Newton, gerakan planet mengelilingi matahari ada dalam pengaruh medan gaya sentral, yang menyebabkan gerakan ini tetap dalam satu bidang. Bentuk fungsi potensial dari gerakan ini adalah:

$$V = -\frac{GMm}{r} \tag{5.25}$$

dengan ; M = massa matahari

m = massa planet

G = konstanta gravitasi

r = radius antara matahari dan planet

Energi kinetik (T) dan Lagrangian (L) dari sistem ini dapat dituliskan dalam bentuk:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \tag{5.26}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

dan,

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r} \qquad (5.27)$$

Jika digunakan persamaan Lagrang yang ada pada Lampiran B untuk persamaan (5.27) tersebut, maka akan diperoleh dua persamaan berikut:

$$m\ddot{r} - mr\varphi = -\frac{GMm}{r} \qquad (5.28)$$

dan,

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}^2) = 0 \qquad (5.29)$$

Persamaan (5.28) dan (5.29) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{r^2} = 0 \qquad (5.30)$$

Dan

$$r^2\dot{\phi}^2 = \text{konstanta} = h \qquad (5.31)$$

Jika persamaan (5.30) dan (5.31) digabungkan, akan didapatkan persamaan

$$h\frac{u}{d\varphi}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) - \frac{h^2}{r} + Gm = 0 \qquad (5.31)$$

permisalkan $u = \frac{1}{r}$, pada persamaan (5.31) maka akan didapatkan:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{Gm}{h^2} \qquad (5.32)$$

Solusi dari persamaan di atas, adalah:

$$u = \frac{GM}{h^2}(1 + e\cos(\varphi - \alpha)) \qquad (5.33)$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Dengan e dan α adalah konstanta integrasi [3]. Jika dimasukkan kembali harga $u = \frac{1}{r}$ ke dalam persamaan (5.33), maka akan didapatkan harga r:

$$r = \frac{h^2}{km(1+e\cos(\varphi-\alpha))} \quad (5.34)$$

Sederhanakan persamaan (5.34) dengan mengubah $\frac{h^2}{Gm} = q$, sehingga:

$$r = \frac{q}{1+e\cos(\varphi-\alpha)} \quad (5.35)$$

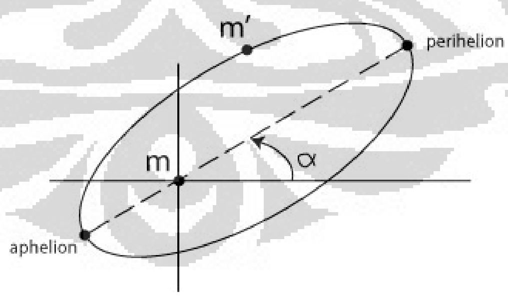
Persamaan (5.35) ini memperlihatkan secara jelas bahwa lintasan tersebut berupa irisan kerucut. Artinya, lintasan dapat berupa lingkaran, *ellips*, parabola, ataupun hiperbola, tergantung pada energinya yang direperesentasikan dalam harga e.

Orbit gerakan planet yang mengelilingi matahari memenuhi persamaan (5.35) dengan bentuk lintasan berupa elips. Dengan:

a; merupakan sumbu terpanjang *ellips*

e; merupakan eksentrisitas elips, dan

α; menunjukkan posisi garis sumbu panjang



Gambar.6. Lintasan Planet mengelilingi matahari menurut teori klasik adalah absolut elips.

Karena harga α selalu kontan, maka kedudukan perihelion selalu tetap.

5.2.2. Orbit Planet Secara Relativistik

Tinjau kembali persamaan Geodesik yang ada pada persamaan (4.9) ataupun (4.3), yaitu:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} = 0$$

Sesuai dengan teori relativitas umum, dimana planet dapat diperlakukan sebagai partikel di dalam medan gravitasi yang ditimbulkan oleh matahari (dengan asumsi pengaruh dari planet-planet lain sangat kecil). Maka persamaan geodesik di atas dapat dipenuhi sebagai persamaan gerak planet mengelilingi matahari.

Persamaan geodesik tersebut dapat diselesaikan dengan cara memasukkan harga-harga dari simbol Christoffel yang telah dihitung sebelumnya di dalam persamaan (5.7). Namun, agar perhitungan lebih sederhana, persamaan (5.7) tersebut perlu dimodifikasi terlebih dahulu, yakni dengan mengganti α, β, dan turunan keduanya dalam bentuk λ yang terdapat pada persamaan (5.16), menjadi:

$$e^\alpha = e^{-\beta} = \lambda$$

$$\alpha' = \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dr}$$

$$\beta' = -\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dr}$$

Sehingga komponen-komponen simbol Christooffel menjadi:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d\lambda}{dr}\ ; \qquad \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d\lambda}{dr}\ ; \qquad \Gamma^0_{11} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{d\lambda}{dr}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{\lambda}{2}\frac{d\lambda}{dr}\ ; \qquad \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{d\lambda}{dr}\ ; \qquad \Gamma^1_{22} = -r\lambda\ ; \quad \Gamma^1_{33} = -r\lambda\, sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}\ ; \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}\ ; \qquad \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot\theta \tag{5.36}$$

Dengan memasukkan harga komponen-komponen simbol Christoffel yang telah dimodifikasi pada persamaan (5.36) ke dalam persamaan geodesik, maka akan didapatkan persamaan-persamaan gerak sebagai berikut:

μ =0

$$\frac{d^2(ct)}{ds^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d(ct)}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 \tag{5.37.a}$$

μ =1

$$\frac{d^2r}{ds^2} - \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\lambda\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\lambda\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\frac{d\lambda}{dr}\left(\frac{d(ct)}{ds}\right)^2 = 0 \tag{5.37.b}$$

μ =2

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \cos\theta\sin\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \tag{5.37.c}$$

μ =3

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0 \tag{5.37.d}$$

Tinjau persamaan (5.37.d) persamaan tersebut dapat diubah menjadi:

$$\frac{d^2\iota}{ds^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\iota}{ds} = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dt}{ds}\right) = 0$$

$$\lambda\frac{dt}{ds} = \text{konstan} = n \tag{5.38}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Asumsikan kondisi awal $\frac{d\theta}{ds} = 0$, ketika $\theta = \frac{\pi}{2}$, hal ini berarti jejak awal partikel dalam bidang $\theta = \frac{\pi}{2}$. θ dapat diekspansikan menurut s, di sekitar kondisi awal :

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{d\theta}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2!} - \ldots..,$$

Jika dimasukkan kondisi awal $\frac{d\theta}{ds} = 0$, untuk $\theta = \frac{\pi}{2}$, ke dalam persamaan (5.37.c), akan menghasilkan $\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$, dan selanjutnya akan berlaku hal yang sama untuk orde-orde yang lebih tinggi dengan mendiferensiasikan persamaan (5.37.c) dan memasukkan $O = \frac{\pi}{2}$. Hal ini berarti $O_{(s)} = O_0 = \frac{\pi}{2}$.

Penjelasan di atas dapat dipahami bahwa jika gerakan partikel dimulai pada kondisi $\theta = \frac{\pi}{2}$, akan terus ada dalam bidang itu, dengan kata lain, variabel θ merupakan suatu konstanta.

Persamaan (5.37.d) dapat diselesaikan dengan memahami bahwa θ adalah konstanta, sehingga:

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\phi}{ds}\right) = 0$$

$$r^2\frac{d\phi}{ds} = \text{konstan} = h' \tag{5.39}$$

Persamaan (5.18) dapat ditinjau kembali, dengan memasukkan persamaan (5.38) dan (5.39), menjadi:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - n^2c^2 - \frac{h'^2\lambda}{r^2} - \lambda \tag{5.40}$$

Persamaan (5.37.b), (5.38), (5.39), dan (5.40) digabungkan sehingga menghasilkan:

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}\left(\frac{h'^2}{r^2} + 1\right) - \lambda \frac{h'^2}{r^3} = 0 \tag{5.41}$$

masukkan harga $\lambda = 1 - \frac{r_s}{r}$, persamaan (5.39), dan misalkan $u = \frac{1}{r}$. Maka persamaan (5.41) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{r_s}{2h'^2} + \frac{3}{2} r_s u^2 \tag{5.42}$$

Bandingkan persamaan (5.41) tersebut dengan persamaan orbit menurut teori klasik (5.32). Terdapat koreksi relativistik di dalam persamaan (5.42) yaitu $\frac{3}{2} r_s u^2$ yang dapat dianggap sebagai "peturbasi" orbit elliptik. Meskipun harga koreksi ini sangat kecil, namun berdasarkan skala astronomi koreksi ini sangat signifikan [1,2,9].

Persamaan (5.42) untuk solusi pendekatan pertamanya dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{r_s}{2h'^2} \tag{5.43}$$

Penyelesaian persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$u_1 = \frac{r_s}{2h'^2}\left(1 + \varepsilon \cos(\phi - \alpha)\right) \tag{5.44}$$

Solusi pada persamaan (5.44) ini dimasukkan ke dalam persamaan (5.42), lalu samakan $\frac{3}{2} r_s u^2 = \frac{3}{2} r_s u_1^2$, sehingga:

$$\frac{3}{2} r_s u_1^2 = \frac{3}{2} r_s \frac{r_s^2}{4h'^2}\left(1 + 2\,\varepsilon \cos(\phi - \alpha) + \varepsilon^2 \cos(\phi - \alpha)\right)$$

Dalam hal ini harga ε^2 sangat kecil dan suku konstanta $\frac{3}{2}\frac{r_s^3}{4h'^2}$ tidak mengubah bentuk elips, maka persamaan (5.42) menjadi:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{r_s}{2h'^2} + \frac{3}{2}\frac{r_s^3}{4h'^2}\ \varepsilon \cos(\phi - \alpha) \tag{5.45}$$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Persamaan (5.45) di atas mempunyai solusi:

$$u = \frac{r_s}{2h'^2}\ (1 + \varepsilon\cos(\phi - \alpha) + \sin(\phi - \alpha) \qquad (5.46)$$

Agar solusi di atas dapat terlihat dengan jelas menjelaskan pergeseran perihelium orbit elliptik, dapat diperjelas dengan cara sebagai berikut (dengan asumsi $\Delta\alpha$ sangat kecil):

$$\cos(\phi - \alpha - \Delta\alpha) = \cos(\phi - \alpha)\cos(\Delta\alpha) + \sin(\phi - \alpha)\sin(\Delta\alpha)$$

$$\approx \cos(\phi - \alpha) + \sin(\phi - \alpha)\,\Delta\alpha$$

Dengan memasukkan analogi di atas ke dalam persamaan (5.46), maka jelas akan didapatkan suatu persamaan (secara analog) yaitu:

$$\Delta\alpha = \frac{3}{2}\frac{r_s^2}{h'^2}\phi \qquad (5.47)$$

Dengan mengubah harga $\phi = 2\pi$, dan memasukkan harga-harga:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$h'^2 = \frac{h^2}{c^2} = GMa$$

Didapatkan:

$$\Delta\alpha = \frac{6\pi CM}{c^2 a}\frac{\text{rad}}{\text{revolusi}} \qquad (5.48)$$

dengan:

G = konstanta gravitasi universal

= $6{,}67 \times 10^{-11}$ (SI)

M = massa matahari

= $1{,}98 \times 10^{30}$ Kg

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

c = kecepatan cahaya di ruang vakum

= $2{,}998 \times 10^8$ m/s

a = sumbu panjang (semimajor) orbit planet

Persamaan (5.48) secara jelas menunjukkan bahwa pergeseran posisi sudut, $\Delta\alpha$, dari orbit planet yang mengelilingi berbanding terbalik terhadap jarak planet tersebut dari matahari (sebagai pusat edarnya). Hal tersebut berarti semakin jauh jarak suatu planet dari matahari akan semakin kecil pula pergeseran sudut yang teramati. Oleh karena kecilnya nilai pergeseran sudut tersebut untuk satu kali revolusi, maka pada penelitian ini dihitung pergeseran orbit yang tejadi untuk 100 tahun hitungan bumi. Hasil perhitungan yang dilakukan terhadap 8 planet di dalam Tata Surya, mulai dari Merkurius hingga Neptunus, dapat dilihat pada tabel 2.

No	Nama Planet	Sumbu Major a (10^{10}m)	Jumlah Rotasi/100th Bumi	Δα (°/100th Bumi)	
				Hasil Perhitungan	Data Hasil Observasi
1	Merkurius	5,54	415	42,86	43,11±0,45
2	Venus	10,8	162,5	8,59	8,40±4,80
3	Bumi	15	100	3,83	5,00±1,20
4	Mars	22,7	53	1,36	-
5	Jupiter	77,8	8,4	0,062	-
6	Saturnus	142	3,4	0,015	-
7	Uranus	287	1,2	0,002	-
8	Neptunus	449	0,6	0,0008	-

Tabel 2. Hasil perhitungan presisi orbit 8 planet di dalam Tata Surya dan perbandingannya dengan data hasil observasi yang dilakukan Urbain J.Le Verrier [12].

Hasil yang didapatkan di atas sesuai dengan data observasi yang dilakukan oleh Urbain J.LeVerrier, yaitu sekitar $(43{,}11 \pm 0{,}45)^{\circ}$ tiap seratus tahunnya untuk planet merkurius dan sekitar 8,40±4,80 untuk merkurius [1,2,4]. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa solusi Schwarzschild ini valid untuk pergeseran perihelium orbit planet-planet.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Planet-planet yang memiliki kedudukan lebih jauh dari matahari memiliki presisi perihelium yang jauh lebih kecil, dengan demikian hanya planet merkurius saja yang dapat diamati secara pasti (dengan observasi langsung) dengan ketelitian yang cukup tinggi [1].

5.3. Solusi Schwarzschild untuk Perhitungan Pergeseran Merah Gravitasi

Fenomena lain yang dapat dijelaskan oleh teori relativitas umum adalah peristiwa pergeseran merah gravitasi (*gravitational red shift*).

Tinjau dua buah jam (*clock*) yang diletakkan di dua titik yang berbeda dalam suatu koordinat ruang-waktu dengan notasi 1 dan 2. Interval dari kedua jam diekspresikan oleh $ds^2_{(1)}$ dan $ds^2_{(2)}$. Dimana

$$ds^2_{(1)} = g_{00}c^2dt^2 - g_{11}(dr_1)^2 - g_{22}(d\theta_1)^2 - g_{33}(d\phi_1)^2 \tag{5.49}$$

dan,

$$ds^2_{(2)} = g_{00}c^2dt^2 - g_{11}(dr_2)^2 - g_{22}(d\theta_2)^2 - g_{33}(d\phi_2)^2 \tag{5.50}$$

Jika kedua jam diasumsikan pada kondisi awal yang sama dan pada waktu t awal adalah nol. Maka, sesuai dengan transformasi koordinat seluruh komponen ruang dari interval (jarak *infinitesimal*) kedua sistem menjadi hilang, dan yang bersisa hanya komponen waktu saja. Dengan demikian, persamaan (5.49) dan (5.50) menjadi:

$$ds^2_{(1)} = g_{00}(1)c^2dt^2$$

$$ds_{(1)} = [g_{00}(1)]^{\frac{1}{2}}c\,dt \tag{5.51}$$

dan,

$$ds^2_{(2)} = g_{00}(2)c^2dt^2$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$ds_{(2)} = [g_{00}(2)]^{\frac{1}{2}} c\, dt \tag{5.52}$$

Selanjutnya dengan membandingkan persamaan (5.51) dan (5.52), akan didapatkan

$$\frac{ds_{(2)}}{ds_{(1)}} = \left[\frac{g_{00}(2)}{g_{00}(1)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.53}$$

Sebuah atom yang mempunyai frekuensi f_0, jika diletakkan pada titik 1, dan pengamat di titik 2, maka frekuensi f yang terukur oleh pengamat di titik 2 adalah

$$f = f_0 \left[\frac{g_{00}(2)}{g_{00}(1)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.52}$$

Persamaan di atas sesuai dengan kaidah efek Doppler [2,7,11].

Medan gravitasi yang berlaku diasumsikan berasal dari distribusi massa yang simetri sferis, sehingga solusi Schwarzschild berlaku untuk fenomena ini. Dengan demikian harga g_{00} dapat diambil dari metrik tensor kovariannya (persamaan (5.22)) yaitu:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \tag{5.53}$$

Sehingga:

$$\left[\frac{g_{00}(1)}{g_{00}(2)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cong 1 + \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{5.54}$$

Selanjutnya persamaan (5.54) di atas dimasukkan ke persamaan (5.52), sehingga memenuhi ekspresi berikut:

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0} \cong -\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (5.55)$$

Persamaan yang terakhir inilah yang dimaksud dengan pergeseran merah gravitasi (gravitational red shift atau gravitational time dilation). Nama *red shift* sendiri mengacu pada pergeseran spektrum gelombang elektromagnetik dari frekuensi besar ke frekuensi yang lebih kecil (frekuensi terkecil adalah infra merah (*infra red*)) [2,9,12].

Persamaan (5.55) di atas dapat dipakai untuk menghitung *redshift* pada Matahari dengan

G = konstanta gravitasi universal

= $6{,}67 \times 10^{-11}$ (SI)

M = massa matahari

= $1{,}98 \times 10^{30}$ Kg

r_1 = radius matahari

= $6{,}96 \times 10^{8}$ (meter)

r_2 = Jarak Bumi-Matahari

= $1{,}496 \times 10^{11}$ (meter)

Jika besaran-besaran di atas dimasukkan ke dalam persamaan (5.55), maka *redshift* untuk Matahari adalah:

$$\frac{\Delta f}{f_o} = \frac{f-f_o}{f_o} \cong -\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{\Delta f}{f_o} \approx -2{,}13 \times 10^{-6}\ frequency\ shift\ per\ unit\ frequency$$

Perhitungan pergeseran merah ini telah diuji dengan observasi untuk matahari (dan juga untuk *white dwarf*), dengan menggunakan jam atomic. Dan

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

untuk percobaan di Bumi dengan objek atom ^{57}Fe telah dilakukan oleh Pound dan Rebka, dan Cranshaw, Schiffer, dan Whitehed, dengan menggunakan effek Mössbauer pada tahun 1960 [2]. Dan data pengamatan menunjukkan kecocokan dengan perhitungan secara teoretik dengan persamaan (5.55)

BAB VI

Kesimpulan

1. Persamaan medan gravitasi klasik Newtonian tidak dapat berlaku umum pada pemilihan sistem koordinat sembarang. Itu sebabnya teori relativitas umum memperkenalkan persamaan medan gravitasi yang bersifat relativistik dan berlaku umum pada pemilihan sembarang koordinat.

2. Persamaan medan gravitasi yang dikonstruksi dengan dua pendekatan, yaitu penurunan tensor Ricci dan prinsip variasi menghasilkan persamaan yang sama berupa persamaan medan Einstein yang merupakan persamaan diferensial parsial non-liniear.

3. Fenomena gravitasi dapat diangap sebagai konsekuensi kelengkungan ruang dan waktu ditinjau dari bentuk geometri ruang-waktu dan distribusi materi yang saling terkopel menurut persamaan medan Einstein.

4. Solusi Schwarzschild dapat digunakan secara valid untuk memecahkan persamaan medan Einstein pada kasus ruang vakum yang statis dan berbentuk simetri bola (sferis).

5. Perhitungan dengan solusi Schwarzschild untuk presisi perihelium orbit planet-planet di dalm Tata Surya dan pergeseran merah gravitasi telah sesuai dengan data pengamatan observasi langsung.

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Daftar Acuan

1. Muhammad Hikam B. 1981. Deskripsi Gerak Partikel Dalam Medan Gravitasi Menurut Prinsip Variasi. Skripsi S1 Fisika FIPIA UI, Jakarta: vii+73hlm.

2. Moshe Carmelli. 1982. Classical Fields: *General Relativity and Gauge Theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York: ix+650 hlm.

3. M.P. Hobson, G.P. Efstathiou & A.N. Lasenby. 2006. *General Relativity An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, New York: xviii+556 hlm.

4. Jerzy Plebanski & Andrzej Krasinski. 2006. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge: xix+534 hlm.

5. Handhika S Ramadhan. 2005. Pendekatan Geometri Differensial dalam Teori Relativitas Umum dan Solusi 2 Soliton Persamaan Medan Einstein Axisimetrik. Skripsi S1 Fisika FMIPA UI, Depok: x+71 hlm.

6. G. t'Hooft. 2002. *Intorduction To General Relativity*. Institut for Theoretical Physics Utrecht University, Utrecht: 51 hlm.

7. J.C. Kolecki. 2005. *Foundations of Tensor Analysis for Students of Physics and Engineering With an Introduction to the Teory of Relativity*. NASA Glenn Research Center, Hanover: iv+84 hlm.

8. A. Lord Eric. 1982. *Tensors Relativity and Cosmology*. Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd, New Delhi: viii+208 hlm.

9. Ray d'Inverno. 1992. *Introducing: Einstein Relativity*. Clarendon Press, Oxford: xi+383 hlm.

10. R.M. Wald. 1984. *General Relativty*. The University of Chicago Press, Chicago & London: xiii+491 hlm.

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

11. B.F. Schutz. 1985. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge: xiv+376 hlm.

12. K.R. Lang. 2006. A Companion To Astronomy and Physics, Chronology and Glossary with Data Tables. Springer Science+Business Media, Medford: xv+359 hlm.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Lampiran A

Analisa Tensor

A.1. Definisi Skalar, Vektor, dan Tensor

A.1.1. Skalar

Dua buah fungsi σ(p) dan σ'(p) yang kontinu dalam suatu manifold berdimensi N dengan suatu sistem koordinat sedemikian sehingga harga σ (x) dan σ'(x) tidak bergantung (invarian) terhadap sistem koordinat yang digunakan dan hanya tergantung pada titik p. Besaran σ (p) dan σ'(p) yang demikian disebut dengan skalar atau invarian.

Definisi skalar atau invarian juga dapat dinyatakan dalam bentuk lain. Tinjau suatu fungsi σ (x) sebagai fungsi skalar dari koordinat x^{μ} yang dihubungkan terhadap koordinat lain x'^{ν} pada suatu manifold. Dengan menggunakan persamaan transformasi koordinat (lihat persamaan (3.4), maka kita biisa mendefinisikan skalar sebagai

$$\frac{\partial \omega}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \omega}{\partial x^{\vartheta}} \frac{\partial x^{\vartheta}}{\partial x'^{\mu}} \tag{A.1}$$

A.1.2.a. Vektor Kontravarian

Transformasi dari suatu sistem koordinat $x_1, x_2, \dots \dots \dots, x_n$ ke koordinat lain $x'_1, x'_2, \dots \dots \dots, x'_n$ dideskripsikan dengan :

$$dx'_{\mu} = \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\vartheta}} dx_{\vartheta} \tag{A.2}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

sebaliknya :

$$dx_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\vartheta} dx'_\vartheta \tag{A.3}$$

Jika suatu himpunan besaran $(V^1, V^2, \dots \dots, V^n)$ ditransformasikan ke koordinat baru menjadi $(V'^1, V'^2, \dots \dots, V'^n)$ dan memenuhi persamaan (A.2):

$$V'^v = \frac{\partial x'_v}{\partial x_\mu} V'^\mu \tag{A.4}$$

maka set besaran $(V^1, V^2, \dots \dots, V^n)$ disebut dengan vektor kontravarian.

A.1.2.b. Vektor Kovarian

Transformasi himpunan besaran V_n ke V'_n yang memenuhi transformasi koordinat pada persamaan (A.2):

$$V'_\mu = \frac{\partial x_v}{\partial x'_\mu} V_v \tag{A.5}$$

Set besaran V_n yang demikian dinamakan vektor kovarian

A.1.3. Tensor

Bentuk yang lebih umum dari skalar dan vektor (kovarian dan kontravarian) disebut dengan tensor. Skalar merupakan tensor dengan rank 0, sedangkan vektor merupakan tensor rank 1. Tensor yang memiliki rank yang lebih tinggi mempunyai transformasi yang lebih kompleks.

Berdasarkan jenis transformasinya, tensor dapat dibedakan menjadi tensor kontravarian, tensor kovarian, dan tensor campuran.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

A.1.3.a. Tensor Kontravarian

Tensor kontravarian memenuhi transformasi:

$$T'^{(\mu_1\mu_2\ldots\ldots\mu_n)} = \frac{\partial x'_{\mu_1}}{\partial x_{v_1}}\frac{\partial x'_{\mu_2}}{\partial x_{v_2}}\ldots\ldots\ldots\frac{\partial y}{\partial x}T^{v_1v_2\ldots v_n} \qquad (A.6)$$

Himpunan besaran $T^{v_1v_2\ldots v_n}$ merupakan tensor kontravarian rank-n.

A.1.3.b. Tensor Kovarian

Tensor kontravarian memenuhi transformasi :

$$T'_{\mu_1\mu_2\ldots\ldots\mu_n} = \frac{\partial x_{v_1}}{\partial x_{\mu_1}}\frac{\partial x_{v_2}}{\partial x'_{\mu_2}}\ldots\ldots\ldots\frac{\partial x_{v_n}}{\partial x'_{\mu_n}}T_{v_1v_2\ldots\ldots v_1} \qquad (A.7)$$

Himpunan besaran $T_{v_1v_2\ldots\ldots v_n}$ merupakan tensor kovarian dengan rank-n.

A.1.3.c. Tensor Campuran (Mixed Tensor)

Tensor campuan memenuhi transformasi :

$$T'^{v_1v_2\ldots v_r}_{\mu_1\mu_2\ldots\ldots\mu_s} = \frac{\partial x'^{v_n}}{\partial x^{\alpha_r}}\frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial x'_{\mu_n}}T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\ldots\ldots\beta_r}$$

Himpunan besaran $T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\ldots\ldots\beta_r}$ dan $T'^{v_1v_2\ldots v_r}_{\mu_1\mu_2\ldots\ldots\mu_s}$, merupakan tensor campuran rank r+s.

A.2. Aljabar Tensor

A.2.1. Penjumlahan Tensor

Penjumlahan dan atau pengurangan 2 tensor yang mempunyai bilangan rank kovarian dan kontravarian (atau campuran keduanya) yang sama menghasilkan tensor yang mempunyai rank dan tipe yang sama.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$T_{\alpha\beta} = aA_{\alpha\beta} + bB_{\alpha\beta} \tag{A.8}$$

dengan a dan b merupakan skalar. Bentuk persamaan (A.8) merupakan penjumlahan tensor kovarian rank-2. Jika persamaan (2.8) dituliskan bentuk transformasinya menjadi

$$T'_{\alpha\beta} = aA'_{\alpha\beta} + bB'_{\alpha\beta}$$

$$= a\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{v}}{\partial x'^{\beta}}A_{\mu v} + b\,\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{v}}{\partial x'^{\beta}}B_{\mu v}$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{v}}{\partial x'^{\beta}}T_{\mu v} \tag{A.9}$$

A.2.2. Perkalian (*Product*) Tensor

A.2.2.a. Perkalian Luar (*Outer Product*)

Tinjau dua buah tensor campuran. Tensor pertama memiliki rank kovarian m dan rank kontravarian n, $T_{\alpha_m}^{\beta_n}$. Sedangkan tensor kedua memiliki rank kovarian p dan kontravarian q, $T_{\mu_p}^{v_q}$. Apabila diperkalikan antara tensor pertama dengan tensor kedua, maka akan dihasilkan tensor yang memiliki rank kovarian (m+p) dan rank kontravarian (n+q) menjadi tensor $T_{\rho_{m+p}}^{\tau_{n-q}}$.

A.2.2.b. Perkalian Dalam (Inner Product)

Untuk dapat memahami dengan baik mengenai *Inner Product* di dalam aljabar tensor, perlu dipahami terlebih dahulu mengenai kontraksi dua buah indeks kovarian dan kontra varian dari suatu Tensor.

Sebuah tensor rank-2 dapat dihasilkan dari suatu tensor lain yang memiliki rank lebih tinggi, misalnya tensor rank empat, dengan mengkontraksikan indeks-indeks pada tensor yang memiliki rank lebih tinggi.

Created with nitroPDF professional download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$T_{\alpha\beta} = T^{\mu}_{\alpha\mu\beta} \tag{A.10}$$

Dalam transformasi koordinat dapat dituliskan berupa

$$T'_{\alpha\beta} = T'^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\vartheta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\beta}} T^{\rho}_{\vartheta\sigma\tau}$$

$$= \frac{\partial x^{\vartheta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\sigma}_{\rho} T^{\rho}_{\vartheta\sigma\tau}$$

$$= \frac{\partial x^{\vartheta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\beta}} T_{\vartheta\tau} \tag{A.11}$$

Dengan notasi δ^{σ}_{ρ} yang ada pada persamaan (A.11) merupakan delta Kronecker yang berharga 0 untuk $\sigma \neq \rho$, dan berharga 1 untuk $\sigma = \rho$.

Inner product merupakan perkalian dua buah tensor campuran (kovarian dan kontravarian) yang indeks keduanya dapat dikontraksikan.

A.3. Simetri Tensor

Suatu tensor $S_{\alpha\beta}$ dikatakan simetri tensor apabila:

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha} \tag{A.12}$$

Dan dikatakan antisimetri atau *skew-symetri* apabila:

$$S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha} \tag{A.13}$$

A.4. Metrik Tensor

Elemen panjang ds di ruang (maniold) berdimensi N dalam koordinat kartesian :

$$ds^2 = dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Jika elemen tersebut ditransformasikan ke dalam koordinat lain yaitu $x^\mu = x^\mu(x'_1, x'_2, \dots \dots, x_n)$ maka elemen panjangnya dapat diperumum dengan persamaan transformasi berikut:

$$ds^2 = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta$$

$$= g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \qquad (A.14)$$

Karena ds^2 invarian, maka $g_{\alpha\beta}$ simetris ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$). Selanjutnya, karena dx'^α merupakan vektor kontravarian, maka $g_{\alpha\beta}$ merupakan tensor kovarian rank-2, dan disebut metrik tensor.

Didefinisikan suatu tensor kontravarian $g^{\alpha\beta}$ yang merupakan pasangan dari metrik tensor $g_{\alpha\beta}$, dan keduanya memiliki hubungan:

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

$$g^{\alpha\beta} = \frac{G^{\alpha\beta}}{g}$$

Dengan $G^{\alpha\beta}$ adalah minor/kofaktor dari matriks yang menyatakan tensor $g_{\alpha\beta}$, sedangkan g merupakan determinan $g_{\alpha\beta}$.

Tensor-tensor $g^{\alpha\beta}$ dan $g_{\alpha\beta}$ merupakan tensor fundamental dalam analisis tensor. Kedua tensor tersebut dapat digunakan untuk mengubah indeks suatu tensor.

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$$

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$$

$$A^{\alpha\beta\rho}_{\tau\sigma} = g^{\alpha\lambda} A^{\beta\rho}_{\tau\sigma\lambda}$$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

A.5. Densitas Tensor

Densitas suatu tensor didefinisikan dengan persamaan transformasi sebagai berikut:

$$R'^{v}_{\mu} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{W} \frac{\partial x'^{v}}{\partial x^{\beta}} \dots \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \dots R^{\beta}_{\alpha} \qquad \text{(A.15)}$$

Dengan notasi $\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$ merupakan jacobaian transformsi-nya, dan W merupakan konstanta, integer yang dapat bernilai positif maupun negatif, dan disebut dengan *weight* dari suatu densitas tensor. Densitas tensor yang memiliki orde 1 disebut dengan densitas vektor, dan yang berorde 0 disebut dengan densitas skalar.

Dengan pemahaman densitas tensor seperti di atas, maka determinan dari tensor rank-2 dapat dituliskan

$$\det T'_{\alpha\beta} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{2} \det T_{\alpha\beta} \qquad \text{(A.16)}$$

Persamaan (A.16) ini juga dapat diaplikasikan untuk metrik tensor g_{ij}, sehingga:

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^{2} g \qquad \text{(A.17)}$$

Elemen volume berdimensi-4 dapat dituliskan:

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x \qquad \text{(A.18)}$$

Dengan membandingkan antara persamaan (A.18) dengan (A.17), maka didapatkan:

$$\sqrt{-g'}\, d^4x' = \sqrt{-g}\, d^4x \qquad \text{(A.19)}$$

Dimana $\sqrt{-g}\, d^4x$ merupakan invariant dari element volum.

A.6. Diferensiasi Tensor

Himpunan dari $\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}$ menyatakan vektor kovarian, karena

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\frac{\partial f}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x^{\rho}} \tag{A.20}$$

Namun,

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}\left(\frac{\partial f}{\partial x'^{\alpha}}\right) = \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}\left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x^{\rho}}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} \tag{A.21}$$

Persamaan yang terakhir di atas tidak menunjukkan hukum transformasi tensor.

Di dalam koordinat kurvilinier, untuk mendapatkan diferensiasi dari sebuah tensor digunakan cara yang berbeda dari persamaan (A.21) di atas. Untuk itu diperlukan dua vektor yang diletakkan pada satu titik dalam ruang untuk diperkurangkan satu sama lain (seperti halnya diferensiasi biasa). Dengan kata lain, harus dibuat "translasi" satu vektor yang dipisahkan *infinitesimal* dari yang lain ke titik tempat vektor kedua ditempatkan. Selanjutnya dihitung (ditentukan) perbedaan antara dua vektor yang sekarang terhadap yang pertama.

Untuk membandingkan 2 vektor yang dipisahkan infinitesimal harus dibuat satu diantaranya mengalami translasi paralel ke titik tempat vektor kedua.

Tinjau sembarang vektor kontravarian, harganya pada titik x^i adalah A^i, kemudian pada titik yang di dekatnya (*neighbouring*) adalah $A^i + dA^i$. Dengan translasi paralel kita pindahkan vektor A^i ke titik $x^i + dx^i$, perubahan vektor yang dihasilkan dari translasi tersebut dinotasikan δA^i. Jadi, perbedaan antara dua vektor yang diletakkan pada titik yang sama (dinotasikan DA^i):

$$DA^i = dA^i - \delta A^i \tag{A.22}$$

Perubahan δA^i dari komponen-komponen vektor pada pergeseran sejajar tersebut bergantung *liniear* terhadap komponen-komponen itu sendiri. Sehingga δA^i dapat dituliskan :

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{jk} A^j dx^k \tag{A.23}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

dengan Γ^i_{jk} merupakan fungsi koordinat tertentu dan memiliki bentuk yang bergantung terhadap sistem koordinatnya. Untuk sistem koordinat Galilean $\Gamma^i_{jk} = 0$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa Γ^i_{jk} bukanlah tensor, karena suatu tensor jika berharga nol pada suatu koordinat, akan berharga nol pula pada setiap koordinat lainnya. Besaran Γ^i_{jk} disebut “simbol Christoffel”.

Jika diberikan dua buah vektor dengan bentuk indeks yang berbeda (kovarian dan kontravarian), maka:

$$\delta(A_i B^i) = \mathbf{0} \tag{A.24}$$

Hal di atas mudah dipahami mengingat perkalian A_i dan B^i menghasilkan skalar, dan skalar tidak mengalami perubahan (invarian) terhadap pergeseran sejajar), dari hal tersebut diperoleh:

$$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma^i_{jk} B^j A_i dx^k \tag{A.25}$$

Ditukar indeksnya:

$$B^i \delta A_i = \Gamma^j_{ik} A_j B^i dx^k \tag{A.26}$$

Karena harga B^i dapat sembarang, maka :

$$\delta A_i - \Gamma^j_{ik} A_j dx^k \tag{A.27}$$

Dan karena $dA_i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} dx^j$, maka diperoleh :

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} A^j \right) dx^k \tag{A.28}$$

A.6.1. Diferensiasi Tensor Kovarian

Persamaan (A.28) dapat diberlakukan sama untuk vektor kovarian:

$$DA_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\nu_{\mu c} A_\nu \right) dx^\sigma \tag{A.29}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Dan DA^{μ} juga DA_{μ} dapat ditulis dalam bentuk:

$$DA^{\mu} = A^{\mu}_{;\nu}\, dx^{\nu} \qquad \text{(A.30)}$$

$$DA_{\mu} = A_{\mu;\nu} dx^{\nu} \qquad \text{(A.31)}$$

$A^{\mu}_{;\nu}$ dan $A_{\mu;\nu}$ merupakan tensor, karena jika keduanya dikali dengan vektor dx^{ν} menghasilkan tensor. Tensor-tensor tersebut memberikan pemahaman konsep yang umum untuk turunan pada koordinat kurvilinier/lengkung. Tensor yang demikian dinamakan tensor turunan kovarian. Dengan;

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + \Gamma^{j}_{ik}\, A^k \qquad \text{(A.32)}$$

$$A^{i}_{;j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma^{i}_{kj}\, A^k \qquad \text{(A,33)}$$

Secara sama dapat didefinisikan juga turunan kovarian pada tensor dengan rank lebih tinggi.

Misalnya:

$$A_{ik;j} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^{m}_{ij}\, A_{mk} - \Gamma^{m}_{kj}\, A_{im} \qquad \text{(A.34)}$$

$$A^{i}_{k;j} = \frac{\partial A^{i}_{k}}{\partial x^j} - \Gamma^{m}_{kj}\, A^{i}_{m} - \Gamma^{i}_{mj}\, A^{m}_{k} \qquad \text{(A.35)}$$

Secara umum untuk menentukan turunan kovarian dari tensor rank sembarang $A^{\cdots}_{\cdots}$ terhadap x^j, dijumlah turunan biasa. Setiap indeks i kovarian.

A.6.2. Diferensiasi Tensor Kontravarian

Dengan menaikkan indeks turunan kovarian, didefinisikan turunan kontravarian :

$$A_i^{;k} = g^{kj} A_{i;j} \qquad \text{(A.36)}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$A^{i;k} = g^{kj} A^i_{;j} \tag{A.37}$$

A.7. Simbol Christoffel

Simbol Christoffel yang ada pada persamaan (A.23) dapat dituliskan sebagai fungsi dari metrik tensor. Bentuk pertama (first kind) dari simbol Christoffel ini dituliskan sebagai:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \tag{A.38}$$

Sedangkan bentuk kedua dari simbol Christoffel merupakan perkalian antara metrik tensor kontravarian dengan bentuk pertama dari simbol ini (persamaan (A.38)).

$$\Gamma^l_{jk} = g^{li}\Gamma_{ijk} \tag{A.39}$$

Dan dengan memasukkan harga Γ_{ijk} dari persamaan (A.38) ke dalam persamaan (A.39), maka didapatkan bentuk kedua simbol Christoffel sebagai:

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2}g^{li}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \tag{A.40}$$

Di dalam geometri Riemannian, bentuk kedua dari simbol Christoffel tidak lain merupakan koneksi affin dari suatu manifold.

A.8. Kontraksi Simbol Christoffel

Tinjau kembali persamaan (A.39). Jika antara indeks l dan k pada persamaan tersebut dikontraksikan, maka akan didapatkan:

$$\Gamma^l_{jl} = g^{li}\Gamma_{ijl}$$

$$= \frac{1}{2}g^{li}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}\right)$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$= \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} \right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{li} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} \right) \qquad \text{(A.41)}$$

Karena metrik tensor g_{ij} memiliki sifat simetri, maka suku kedua ruas kanan dari persamaan (A.41) menjadi hilang, dan persamaan (A.41) dapat dituliskan menjadi:

$$\Gamma^l_{jl} = \frac{1}{2} g^{li} \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} \qquad \text{(A.42)}$$

Persamaan (A.42) di atas dapat dikspresikan dalam term determinan g dari metrik tensor g_{ij}. Dengan mematuhi aturan ekspansi:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = G^{ij} \qquad \text{(A.43.a)}$$

Dengan G^{ij} merupakan kofaktor dari metrik tensor g_{ij}. Maka, persamaan (A.43.a) menjadi:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = g g^{ij} \qquad \text{(A.43.b)}$$

Konsekuensi persamaan (A.43.b) adalah

$$dg = g g^{ij} d g_{ij} \qquad \text{(A.44.a)}$$

Atau,

$$dg = -g g_{ij} d g^{ij} \qquad \text{(A.44.b)}$$

Dengan menggunakan persamaan (A.43.b) dan (A.44.b) akan didapatkan suatu hubungan:

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \qquad \text{(A.45)}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Jika persamaan (A.45) ini diperbandingkan dengan persamaan (A.42), maka dengan mudah kita dapatkan

$$\Gamma^i_{ji} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k} \qquad \text{(A.46)}$$

Persamaan (A.46) ini jika dikontrtaksikan dengan g^{ij} , akan didapatkan

$$g^{ij}\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}g^{ij}}{\partial x^j} \qquad \text{(A.47)}$$

Persamaan (A.47) ini menunjukkan simbol Christoffel yang telah dikontaksikan.

A.9. Sistem Koordinat Geodesik

Dalam memahami simbol Christoffel terdapat sebuah *lemma* yang perlu dipahami.

Lemma:

"selalu dimungkinkan untuk memilih suatu sistem koordinat, dimana komponen-komponen dari simbol Christoffel menjadi hilang pada titik yang diberikan. Sistem koordinat yang semacam ini disebut dengan sistem koordinat geodesik".

Dengan demikian, simbol Christoffel yang ditransformasikan pada titik A di dalam koordinat yang baru x'^a diekspresikan dengan:

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\lambda}_{\rho\sigma} &= \delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \delta^{\lambda}_{\beta}\Gamma^{\beta}_{\rho\sigma}(A)\\ &= \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\\ &= 0\end{aligned} \qquad \text{(A.48)}$$

A.10. Teorema Gauss dan Stokes

Teorema Gauss dan stokes dalam koordinat kartesian 3-D adalah:

$$\int_V \nabla.\bar{A}\,dV = \int_S \bar{A}.\overline{dS} \qquad \text{(A.49)}$$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$$\int_S (\nabla \times \bar{A})\, \overline{dS} = \oint_c \bar{A} . \overline{dx} \tag{A.50}$$

Dalam koordinat kurvilinier:

$$\int A^i_{;i} \sqrt{-g}\, d\Omega = \int A^i \sqrt{-g}\, dS_i \tag{A.51}$$

$$\int A^i\, dx_i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ik} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \tag{A.52}$$

Dengan $d\Omega$ merupakan elemen volume empat dimensi. df^{ik} menunjukkan keadaan permukaan.

$$\left(dx^i \rightarrow df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Lampiran B

Prinsip Variasi

B.1. Prinsip Variasi Dalam Mekanika Klasik

B.1.1. Prinsip Hamilton

Untuk menyatakan sistem tidak tergantung pada koordinat yang digunakan didefinisikan suatu aksi:

$$Y = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{B.1}$$

harga Y harus ekstrimum agar mempunyai jejak tertentu.

Dimana L adalah Lagrangian sistem, $L = L\left(q_1, q_2, \ldots . q_N, \frac{\partial q_1}{\partial t}, \frac{\partial q_2}{\partial t}, \ldots \ldots, \frac{\partial q_N}{\partial t}\right)$ yang menyatakan secara umum interaksi antara titik massa.

Dalam persamaan di atas:

1. Y harus skalar agar persamaan gerak yang akan diturunkan invarian.
2. L skalar, karena di dalam mekanika Newtonian, waktu t adalah skalar.

Bentuk Lagrangian ini dapat menyatakan hubungan antara koordinat dan besarnya kecepatan dalam mekanika non-relativistik.

B.1.2. Penjabaran Matematik Prinsip Variasi

Jika diberikan suatu fungsi $q = q(t)$ yang menyebabkan Y ekstrimum, maka harga Y akan berubah jika $q(t)$ diganti sembarang fungsi,

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

$q'(t) = q(t) + \delta q(t)$. Dengan $\delta q(t)$ merupakan variasi dari $q(t)$. Variasi ini akan berharga nol pada ujung-ujung variasi (pada $t = t_1$ dan $t = t_2$).

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{B.2}$$

Perubahan Y ketika q diganti $q + \delta q$ adalah

$$\delta Y = \delta \int_{t_1}^{t_2} L_{\left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, t\right)} dt = 0 \tag{B.3.a}$$

Sehingga,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q' \right) dt = 0 \tag{B.3.b}$$

Dengan $q' = \frac{dq}{dt}$, dan oleh karena $\delta q' = \frac{d(\delta q)}{dt}$, berdasarkan integral perbagian

$$Y = \frac{\partial L}{\partial q' \delta_q |_{t_1}^{t_2}} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \right) \delta q \, dt = 0 \tag{B.4}$$

Dengan menggunakan persamaan (B.2) dan pemilihan δq secara sembarang, akan diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) = 0 \tag{B.5.a}$$

Dan untuk lebih dari satu derajat kebebasan, maka persamaan (B.5.a) dapat dituliskan menjadi persamaan yang lebih umum:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i'} = 0 \tag{B.5.b}$$

Persamaan (B.5.b) ini disebut dengan persamaan Lagrange.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

B.1.3. Sifat-sifat Fungsi Lagrange

B.1.3.1. Sifat Aditif

$$L = L_A + L_B \tag{B.6}$$

B.1.3.2. Tidak Berharga Tunggal

Jika terdapat dua buah fungsi Lagrange $L'(q, q', t)$ dan $L\,(q, q', t)$ yang dihubungkan dengan turunan waktu total fungsi sembarang $f(q, t)$, maka:

$$L'(q, q', t) = L(q, q', t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \tag{B.7}$$

Jika persamaan (B.7) divariasikan, maka didapat persamaan $Y' = 0$ $\delta Y' = 0$, jadi bentuk persamaan gerak tidak berubah.

B.2. Prinsip Variasi Secara Kovarian

Formulasi kovarian dari aksi Y dengan fungsi Lagrangian yang diperumum tidak lagi menggunakan t sebagai parameter waktu. Karena di dalam mekanika Newtonian waktu merupakan koordinat istimewa. Untuk itu dipilih τ sebagai waktu wajar (proper time) yang dirumuskan dalam teori relativitas khusus. Sehingga formulasi aksinya menjadi:

$$Y = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau\right) d\tau \tag{B.8}$$

Formulasi L dapat lebih diperumum dengan menggunakan fungsi φ_α dan derivatifnya sebagai parameter L, sehingga bentuk aksi integralnya menjadi:

$$Y = \int [L\left(\varphi_\alpha, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta}], x_\theta\right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \tag{B.9}$$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

B.2.1. Persamaan Euler-Lagrange

Jika persamaan (B.9) divariasikan seperti pada kondisi persamaan (B.3.a), maka:

$$\delta Y = \int_1^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} \delta \varphi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} \right)} \delta \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} \right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \tag{B.10}$$

Karena $\delta\varphi_\alpha(1) = \delta\varphi_\alpha(2) = 0$,dan harga $\delta\varphi_\alpha$ dapat dipilih sembarang, maka dari variasi aksi tesebut akan di dapatkan persamaan Euler-Lagrange suatu sistem yaitu:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} \right)} \right\} = 0 \tag{B.11}$$

Dimana $\alpha, \beta = 1,2,3,4$

B.2.2. Lagrangian Berbagai Sistem

Hubungan antara fungsi Lagrange dengan energi Sistem dapat dituliskan dalam bentuk:

$$L = T - V \tag{B.12}$$

Dengan;

$L = Lagrangian\ Sistem$

$T = Energi\ Kinetik\ Sistem$

$V = Energi\ Potensial\ Sistem$

Untuk sistem yang berbeda, maka didapatkan Lagrangian yang berbeda pula.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

B.2.2.a. Partikel Bebas Non-Relativistik

Untuk partikel bebas non-relativistik, potensial sistem dianggap nol, sehingga fungsi Lagrange-nya sama dengan energi kinetik sistem

$$L = \frac{1}{2} m v^2 \tag{B.13}$$

Dan untuk sistem banyak partikel

$$L = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{B.14}$$

B.2.2.b. Partikel Berinteraksi non-Relativistik

$$L = \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U(r_i, r_i', t) \tag{B.15}$$

B.2.2.c. Partikel Bebas Relativistik

Aksi Partikel yang bergerak bebas relativistik dituliskan dalam persamaan:

$$Y = -m_o c^2 \int ds \tag{B.16}$$

Dan Lagrangian sistem:

$$L = -m_o c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{B.17}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

B.3. Energi dan Momentum

B.3.1. Bentuk Klasik Dari Energi

Berdasarkan Hukum kekekalan yang pertama dalam mekanika klasik, yang didapat dari Homogenitas waktu, maka didapatkan bahwa energi terkonservasi dengan persamaan

$$E = q_i' \frac{\partial L}{\partial q_i'} - L \tag{B.18}$$

atau,

$$E = T(q, q') + V(q) \tag{B.19}$$

Dengan E adalah energi total sistem, T adalah energi kinetik sistem, dan V adalah energi potensial sistem.

B.3.2 Bentuk Klasik Dari Momentum

Hukum kekekalan yang ke dua di dalam mekanika klasik terbentuk dari sifat homogenitas ruang, dan dari sifat tersebut didapatkan bahwa momentum juga kekal dengan persamaan

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i'} \tag{B.20}$$

Dengan;

L =Lagrangian Sistem

q_i' = turunan q terhadap waktu untuk banyak partikel

Momentum juga dapat diturunkan langsung dari aksi sistem terhadap koordinat posisi sistem

$$p_i = \frac{\partial Y}{\partial q_i} \tag{B.21}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

B.3.3. Hubungan Klasik Energi dan Momentum

Hubungan klasik antara energi dan momentum dapat dilihat dari persamaan (B.18) dan (B.20) yang digabungkan, sehingga didapatkan

$$E = q'_i p_i - L \tag{B.22}$$

B.3.4. Bentuk Kovarian Energi dan Momentum

Tinjau kembali persamaan Lagrangian untuk partikel bebas relativistik (persamaan (B.17), $L = -m_o c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}$. Di dalam koordinat datar, dengan memenuhi persamaan (B.20), momentum sistem menjadi:

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

$$= \frac{m_o v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Bentuk umum persamaan tersebut adalah

$$p^i = m_o \frac{dx^i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\, dt}$$

$$= m_o \frac{dx^i}{d\tau}$$

Dalam bentuk kovarian umum:

$$p^i = m_o c \frac{dx^i}{ds} \tag{B.23}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Hubungan antara energi total dengan vektor momentum keempat adalah

$$p^4 = \frac{E}{c} \tag{B.24}$$

B.3.5. Tensor Energi-Momentum

Integral Aksi suatu sistem di dalam geometri ruang Minkowski (*Minkowskian Space*) secara umu dapat dituliskan:

$$Y = \int \mathcal{L}_{\left(\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} dV\, dt = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\, d\Omega \tag{B.25}$$

Dimana, $\int \mathcal{L}_{\left(\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} dV$, merupakan Lagrangian sistem itu, dan $\mathcal{L}$ merupakan kerapatan Lagrangian.

Jika persamaan (B.25) divariasikan, maka akan didapatkan suatu persamaan yang sesuai dengan persamaan (B.11)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \tag{B.26}$$

Hal yang sama ketika mendefinisikan energi pada mekanika klasik dapat berlaku:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\vartheta}\right)}\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right)}{\partial x^\mu} \tag{B.27}$$

Dari persamaan (B.26) dan (B.27) didapatkan:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\vartheta}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\vartheta}\right)}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\vartheta}\right)}\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\vartheta}\right)}{\partial x^\mu} \tag{B.28}$$

Created with nitro PDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Introduksi suatu notasi:

$$T_\mu^\vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \pounds}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\vartheta}\right)} - \delta_\mu^\vartheta \pounds \tag{B.29.a}$$

Atau dalam bentuk yang lebih umum;

$$T_\mu^\vartheta = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \pounds}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\vartheta}\right)} - \delta_\mu^\vartheta \pounds \tag{B.29.b}$$

Persamaan (B.29.a) dan (B.29.b) mempunyai bentuk

$$\frac{\partial \pounds}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\vartheta \frac{\partial \pounds}{\partial x^\vartheta}$$

Sehingga notasi T_μ^ϑ mempunyai persamaan:

$$\frac{\partial T_\mu^\vartheta}{\partial x^\vartheta} = 0 \tag{B.30}$$

Jika pada persamaan (B.30) diberikan divergensi yang analog dengan divergensi pada teorema Gauss, maka momentum sistem dapat dituliskan dalam bentuk:

$$p^\mu = \frac{1}{c}\int T^{\mu\vartheta}\, dS_\vartheta \tag{B.31}$$

Tensor $T^{\mu\vartheta}$ pada persamaan (B.31) disebut dengan Temsor energi-momentum. Namun, tensor energi-momentum yang dideskripsikan dalam persamaan (B.31) hanya berlaku dalam ruang galilean (ruang datar).

Untuk mendapatkan deskripsi tensor energi momentum yang lebih umum maka integral aksi harus diubah dalam bentuk:

$$Y = \frac{1}{c}\int L\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{B.32}$$

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional

Dengan memvariasikan persamaan (B.32), kita akan mendapatkan persamaan:

$$\delta Y = -\frac{1}{c}\int T^{\vartheta}_{\mu;\vartheta}\xi^{\vartheta}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0 \tag{B.33}$$

Karena ξ^{ϑ} dapat dipilih sembarang, maka:

$$T^{\vartheta}_{\mu;\vartheta} = 0 \tag{B.34}$$

Persamaan (B.34) ini merupakan divergensi dari suatu tensor yang dinotasikan:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\mu\vartheta} = \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{\mu\vartheta}} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L\right)}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \tag{B.35}$$

$T_{\mu\vartheta}$ ini merupakan Tensor energi-momentum dalam ruang yang lebih umum.

Untuk benda-benda makroskopik, harga tensor tersebut:

$$T_{\mu\vartheta} = (P + E)u_{\mu}u_{\vartheta} - Pg_{\mu\vartheta} \tag{B.36}$$

Dengan P merupakan “tekanan”, E energi total dan $u_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{ds}$.

Created with nitroPDF professional
download the free trial online at nitropdf.com/professional